КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.А. Альпин, С.Н. Ильин

ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Казань
2013

УДК 519

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики КФУ

Научный редактор
кандидат физико-математических наук, доцент А.Н.Фролов

Альпин Ю.А., Ильин С.Н.

Задачи по дискретной математике: Учебно-методическое пособие. — Казань: Казанский федеральный университет, 2013. — 26 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 1-го курса Института математики и механики КФУ и содержит задачи по разделам, традиционно излагаемым в общем курсе дискретной математики.

Оглавление

1. Первые понятия теории графов

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V — непустое множество, а E — некоторое множество двухэлементных подмножеств V. Элементы V называют *вершинами*, а элементы E — *рёбрами* графа. Граф называется *конечным*, если множество V конечно. Ниже все графы считаются конечными, и если граф содержит n вершин, то (кроме случаев, когда это оговорено особо) считается, что вершины графа занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Если $\{u, v\}$ — ребро, то вершины u и v называются *смежными.* Два ребра называются *смежными*, если у них есть общая вершина. Граф называется *полным*, если любые его две вершины смежны, и *пустым*, если множество его рёбер пусто. Для полного графа с n вершинами используется обозначение K_n, для пустого — N_n.

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Говорят, что подграф G' *порождён* множеством вершин V', если E' состоит из всех рёбер, соединяющих вершины из V'. Графы G и G' называются *изоморфными*, если существует такое биективное отображение $\varphi : V \to V'$, что для всех $u, v \in V$

$$u, v \text{ смежны} \;\Leftrightarrow\; \varphi(u), \varphi(v) \text{ смежны.}$$

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — графы, причём $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Тогда граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ называется *объединением* графов G_1 и G_2. Если же к $E_1 \cup E_2$ добавляются все рёбра, соединяющие каждую вершину из V_1 с каждой вершиной из V_2, то получающийся граф $G_1 + G_2$ называется *суммой* графов G_1 и G_2. Граф $N_m + N_n$ называется *полным двудольным* графом и обозначается $K_{m,n}$. *Дополнением* графа G называется граф $\bar{G}$ с тем же множеством вершин, в котором вершины u, v смежны ровно тогда, когда они несмежны в G.

Пусть $G = (V, E)$ — непустой граф. Его *рёберным графом* называется граф $L(G)$, множеством вершин которого является множество E, причём $e_1, e_2 \in E$ смежны в $L(G)$ ровно тогда, когда они смежны в G.

Маршрутом, соединяющим вершины v_1 и v_{k+1} (или (v_1, v_{k+1})-*маршрутом*), называется последовательность вершин

$$v_1, v_2, \ldots, v_{k+1},$$

в которой соседние вершины v_i и v_{i+1} смежны ($i = 1, 2, \ldots, k$). Число k называется *длиной* маршрута. Маршрут называется *замкнутым*, если $v_1 = v_{k+1}$. Маршрут называется *цепью*, если все его рёбра различны. Цепь называется *простой*, если все её вершины различны, кроме, может быть, первой и последней. Замкнутая цепь называется *циклом*, замкнутая простая цепь — *простым циклом.*

Говорят, что вершины u и v *связаны*, если $u = v$ или существует (u, v)-маршрут. Граф называется *связным*, если любые его две вершины связаны. Отношение связанности разбивает множество вершин графа на классы, называемые *компонентами.* Подграфы, порождённые классами связанности, тоже называют компонентами.

1.1. Пусть G_n — граф с n вершинами, причём вершины i и j смежны в точности тогда, когда $\text{НОД}(i, j) = \min(i, j)$. Изобразить графы G_4 и G_6. Показать, что при $m \leqslant n$ граф G_m является подграфом в G_n.

1.2. Найти все неизоморфные друг другу графы с $n \leqslant 4$ вершинами.

1.3. Доказать, что изображённые на рис. 1.1a и 1.1b графы изоморфны, а графы на рис. 1.2a и 1.2b — неизоморфны.

1.4. Найти количество рёбер в графе K_n.

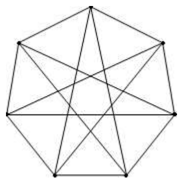


Рис. 1.1a

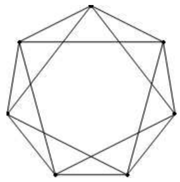


Рис. 1.1b

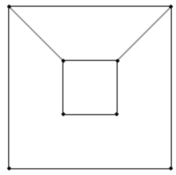


Рис. 1.2a

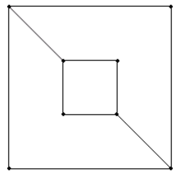


Рис. 1.2b

1.5. Доказать, что если граф с n вершинами изоморфен своему дополнению, то $n = 4k$ или $n = 4k+1$. Найти все графы, изоморфные своему дополнению, для $n = 4$ и $n = 5$.

1.6. Доказать, что если $n = 4k + 2$ или $n = 4k + 3$, то количество всех неизоморфных друг другу графов с n вершинами чётно.

1.7. Доказать, что для произвольных графов G и H справедливы равенства:

a) $\overline{G \cup H} = \bar{G} + \bar{H}$; b) $\overline{G + H} = \bar{G} \cup \bar{H}$.

1.8. Доказать, что в графе с $n \geqslant 2$ вершинами всегда есть по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями.

1.9. Доказать, что граф связен ровно тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух своих подграфов.

1.10. Доказать, что

a) граф и его дополнение не могут быть одновременно несвязными;

b) рёберный граф связного графа связен.

1.11. Доказать, что степени вершин графа не могут образовывать арифметическую прогрессию с положительной разностью.

1.12. Доказать, что если $r > 1$ и степень каждой вершины графа не меньше r, то в графе есть простой цикл длины не менее, чем $r + 1$.

1.13. Доказать, что граф, у которого 2013 вершин и степень каждой вершины $\geqslant 1006$, — связный.

1.14. Доказать, что в графе у любых двух простых цепей максимальной длины есть общая вершина.

1.15. Доказать "лемму о рукопожатиях": сумма степеней всех вершин любого графа равна удвоенному количеству его рёбер.

1.16. Доказать, что в любом графе число вершин нечётной степени чётно.

1.17. Предположим, что в графе есть ровно две вершины с нечётной степенью. Доказать, что эти вершины связаны маршрутом (то есть лежат в одной компоненте графа).

1.18. Доказать, что граф с n вершинами и m рёбрами имеет не меньше $n - m$ компонент.

1.19. Доказать, что граф с n вершинами и m рёбрами имеет не больше $n-k$ компонент, где k — наименьшее целое неотрицательное число, для которого $m \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$.

1.20. Пусть G — граф с $2n$ вершинами и m рёбрами, не содержащий циклов длины 3. Доказать, что $m \leqslant n^2$.

1.21. Доказать, что для каждого натурального n существует граф с $2n$ вершинами и n^2 рёбрами, не содержащий циклов длины 3.

1.22. Пусть $G_{n,m}$ — граф с n вершинами, в котором вершины i и j смежны ровно тогда, когда $|i-j| \geqslant m$, где $m \geqslant 0$. Найти все значения m и n, при которых граф $G_{m,n}$ связен.

2. Эйлеровы и гамильтоновы графы

Цикл, проходящий через все рёбра графа, называют *эйлеровым*. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называют *гамильтоновым*. Если в этих определениях не требовать замкнутости маршрутов, то возникают понятия *эйлеровой* и *гамильтоновой* цепей. Граф, содержащий эйлеров (гамильтонов) цикл, называется *эйлеровым* (соотв. *гамильтоновым*), а граф, содержащий эйлерову (гамильтонову) цепь, — *полуэйлеровым* (соотв. *полугамильтоновым*).

2.1. Найти все значения параметров m и n, при которых являются эйлеровыми графы:

a) K_n; b) $\mathrm{K}_{m,n}$.

2.2. С помощью алгоритма Флёри найти эйлеровы циклы в графах, изображённых на рис. 2.1a и 2.1b.

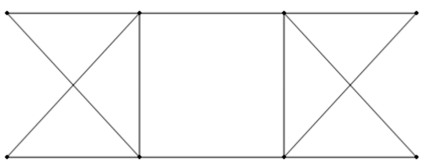


Рис. 2.1a

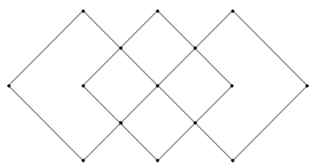


Рис. 2.1b

2.3. Можно ли ходом шахматного коня обойти шахматную доску так, чтобы все возможные на доске ходы были сделаны, причём ровно один раз? Ходы, отличающиеся друг от друга лишь направлением, считаются за один. Как изменится ответ для ладьи? ферзя? Решить аналогичную задачу для доски с размерами 7×7, $n \times n$, $m \times n$.

2.4. Доказать, что дополнение $\bar{G}$ эйлерова графа G с n вершинами является эйлеровым графом в точности тогда, когда граф $\bar{G}$ — связный и n — нечётно.

2.5. Доказать, что граф $\mathrm{N}_k + \mathrm{N}_{k+1} + \ldots + \mathrm{N}_{k+l}$ при $l \geqslant 1$ не является эйлеровым.

2.6. Доказать, что рёберный граф эйлерова графа эйлеров.

2.7. Доказать, что связный граф полуэйлеров ровно тогда, когда он содержит не более двух вершин с нечётными степенями.

2.8. Найти все значения параметров m и n, при которых являются гамильтоновыми графы:

a) K_n; b) $\mathrm{K}_{m,n}$.

2.9. Найти пример графа, который

a) не эйлеров и не гамильтонов;

b) эйлеров и гамильтонов;

c) гамильтонов, но не эйлеров;

d) эйлеров, но не гамильтонов.

2.10. Найти гамильтонов цикл в графе, изображённом на рис. 2.2:

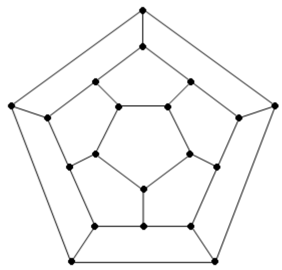


Рис. 2.2

2.11. Доказать, что граф, изображённый на рис. 2.3, полугамильтонов, но не гамильтонов.

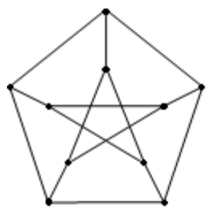


Рис. 2.3

2.12. Найти количество гамильтоновых циклов в графе $K_{m,m}$ при $m \geqslant 2$.

2.13. Доказать, что граф $\mathrm{N}_k + \mathrm{N}_{k+1} + \ldots + \mathrm{N}_{k+l}$ при $l \geqslant 2$ гамильтонов.

2.14. Доказать, что если граф эйлеров или гамильтонов, то его рёберный граф гамильтонов.

2.15. Доказать, что при $n \geqslant 2$ граф, образованный вершинами и рёбрами n-мерного куба, является гамильтоновым.

2.16. Пусть G_n — граф, вершины которого занумерованы числами $2, 3, \ldots, n$, причём вершины i и j смежны ровно тогда, когда НОД$(i, j) = 1$. Найти все значения n, при которых граф G_n не гамильтонов.

2.17. Пусть G_n — связный граф с n вершинами, причём их степени равны друг другу. Доказать, что если $3 \leqslant n \leqslant 7$, то G_n — гамильтонов.

2.18. Построить связный негамильтонов граф с 9 вершинами, в котором степени всех вершин равны друг другу.

2.19. Найти пример графа, который

a) гамильтонов, но не удовлетворяет условиям теоремы Оре;

b) удовлетворяет условиям теоремы Оре, но не теоремы Дирака;

c) содержит $n \geqslant 3$ вершин, степень одной вершины равна $n/2-1$, степени остальных вершин не меньше, чем $n/2$, но при этом граф не гамильтонов;

d) содержит $n \geqslant 3$ вершин, сумма степеней любой пары несмежных вершин (кроме одной пары $\{v, w\}$) не меньше, чем n, сумма же степеней v и w равна $n-1$, но при этом граф не гамильтонов.

2.20. Доказать теорему Оре: для существования гамильтонова цикла в графе с $n \geqslant 3$ вершинами достаточно, чтобы сумма степеней любых двух несмежных вершин была не меньше n.

2.21. Доказать, что для существования гамильтонова цикла в графе с $n \geqslant 3$ вершинами достаточно, чтобы сумма степеней любых двух несмежных вершин была не меньше n, за исключением, может быть, некоторого количества s пар несмежных вершин $\{v_{11}, v_{12}\}, \ldots, \{v_{s1}, v_{s2}\}$ таких, что сумма степеней v_{i1} и v_{i2} меньше n на величину $k_i > 0$, и $k_1 + \ldots + k_s \leqslant n-3$.

3. Деревья, остовы наименьшего веса

Деревом называется связный граф без циклов. Произвольный (не обязательно связный) граф без циклов называется *лесом*. *Остов* связного графа — это его подграф, содержащий все вершины исходного графа и при этом являющийся деревом. Если каждому ребру графа приписано положительное число – *вес*, то под весом остова понимается сумма весов входящих в него рёбер.

3.1. Найти все неизоморфные деревья с числом вершин $n \leqslant 5$.

3.2. Сколько компонент имеет граф без циклов, если у него n вершин и m ребер?

3.3. Найти все значения параметров m и n, при которых являются деревьями графы:

a) K_n; b) $\mathrm{K}_{m,n}$.

3.4. Описать все деревья, рёберные графы которых являются деревьями.

3.5. Описать графы, в которых максимальная длина простых цепей равна 2.

3.6. Доказать, что любое дерево с $n \geqslant 2$ вершинами имеет не менее двух висячих вершин (то есть вершин степени 1).

3.7. Найти количество неизоморфных друг другу остовов графа $K_{2,n}$.

3.8. Найти все значения m и n, при которых в полном двудольном графе $K_{m,n}$ существует остов, дополнение которого (до исходного двудольного графа) снова есть остов.

3.9. Найти остов наименьшего веса в графе, изображённом на рис. 3.1:

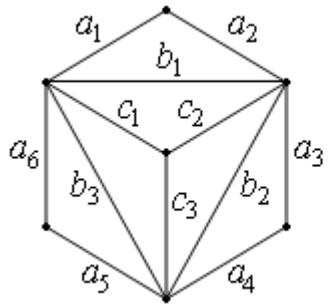


Рис. 3.1

1) $a = (4, 3, 4, 5, 2, 1)$, $b = (1, 2, 2)$, $c = (5, 3, 4)$;
2) $a = (3, 1, 2, 3, 4, 1)$, $b = (2, 1, 2)$, $c = (5, 5, 4)$;
3) $a = (4, 3, 3, 2, 4, 3)$, $b = (2, 2, 3)$, $c = (2, 1, 1)$;
4) $a = (3, 2, 3, 4, 3, 4)$, $b = (2, 3, 1)$, $c = (4, 4, 5)$;
5) $a = (3, 4, 5, 2, 1, 4)$, $b = (1, 2, 2)$, $c = (4, 5, 3)$;
6) $a = (1, 2, 3, 4, 1, 3)$, $b = (2, 1, 2)$, $c = (4, 5, 5)$;
7) $a = (4, 5, 2, 1, 4, 3)$, $b = (2, 2, 3)$, $c = (1, 2, 1)$;
8) $a = (2, 3, 4, 3, 4, 3)$, $b = (2, 3, 1)$, $c = (5, 4, 4)$.

3.10. Пусть G — граф с одной вершиной v и $H = C_n$ — циклический граф с n вершинами. Найти наименьший из весов остовов графа $G + H$, если каждое ребро в H имеет вес x, а каждое ребро, инцидентное вершине v, имеет вес y.

3.11. Пусть $G = K_m$, $H = K_n$, причём каждое ребро в G имеет вес x, а каждое ребро в H имеет вес y. Найти наименьший из весов остовов графа $G + H$, если каждое ребро, соединяющее вершину из G с вершиной из H, имеет вес z.

3.12. Предположим, что связный граф содержит единственный простой цикл. Сколько у него остовов?

3.13. Доказать, что граф не может иметь ровно два остова.

3.14. Описать графы с $n \geqslant 3$ вершинами, у которых есть две вершины степени 1, а остальные вершины имеют степень 2.

3.15. Доказать, что следующие свойства графа с n вершинами эквивалентны:

1) граф связен и содержит ровно один простой цикл,
2) граф связен и имеет n рёбер,
3) в графе n рёбер и ровно один простой цикл.

3.16. Пусть G — связный граф с n вершинами и m рёбрами, в котором каждый простой цикл имеет длину 3. Доказать, что $m + 1 = n + k$, где k — количество простых циклов.

3.17. Предположим, что нагруженный граф содержит единственный простой цикл. Сколько у него остовов наименьшего веса?

3.18. Пусть все рёбра связного графа имеют один и тот же вес x. Каков наименьший из весов его остовов?

3.19. Если все рёбра связного графа имеют один и тот же вес, то и все его остовы имеют одинаковый вес. Верно ли обратное утверждение?

3.20. Предположим, что одно ребро графа имеет вес y, а вес остальных рёбер равен x, $x < y$. В каком случае ребро веса y входит в остов наименьшего веса?

3.21. Предположим, что два ребра графа имеют вес y, а вес остальных рёбер равен x, $x < y$. В каком случае по крайней мере одно ребро веса y входит в остов наименьшего веса?

4. Паросочетания, задача о свадьбах

Граф G называется *двудольным*, если множество его вершин можно так разбить на два непустых подмножества V_1 и V_2, что всякое ребро графа соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2. Двудольный граф с указанным разбиением множества вершин обозначают через $G(V_1, V_2)$.

Пусть в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ множество V_1 содержит m вершин, а V_2 — n вершин, причём $m \leqslant n$. Инъективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется *совершенным паросочетанием* (из V_1 в V_2), если вершины v и $\varphi(v)$ смежны для всех $v \in V_1$.

4.1. Доказать, что граф с $n > 1$ вершинами является двудольным ровно тогда, когда он не содержит

a) замкнутых маршрутов нечётной длины;

b) циклов нечётной длины;

c) простых циклов нечётной длины.

4.2. Доказать, что всякое дерево с $n > 1$ вершинами есть двудольный граф.

4.3. Привести пример дерева, которое в качестве двудольного графа $G(V_1, V_2)$ не обладает совершенным паросочетанием ни из V_1 в V_2, ни обратно.

4.4. Доказать, что если в задаче о свадьбах каждый i-й юноша $(i = 1, \ldots, m)$ знаком не менее, чем с i девушками, то задача разрешима.

4.5. Пусть $r \geqslant 1$. Доказать, что если

a) каждый юноша знаком ровно с r девушками, а каждая девушка знакома ровно с r юношами, то задача о свадьбах разрешима.

b) каждый юноша знаком не менее, чем с r девушками, а каждая девушка знакома не более, чем с r юношами, то задача о свадьбах разрешима.

4.6. (Задача о гареме) Пусть каждому i-му юноше $(i = 1, \ldots, m)$ требуется $k_i \geqslant 1$ жён. Найти необходимое и достаточное условие, при котором всех юношей можно женить на требуемом количестве знакомых им девушек.

4.7. Найти количество различных решений задачи о свадьбах, заданной $m \times n$-матрицей:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \dots & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots \end{pmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } n = m; \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } n = m + 1.$$

4.8. Доказать, что граф, образованный вершинами и рёбрами n-мерного куба ($n \geqslant 1$), является двудольным и обладает совершенным паросочетанием.

4.9. Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, $|V_1| = m$. Для каждого m-элементного подмножества $X \subseteq V_2$ обозначим через $G(V_1, X)$ подграф, получающийся из исходного графа удалением входящих в $V_2 \backslash X$ вершин и инцидентных им рёбер. Доказать, что если графы $G(V_1, X)$ и $G(V_1, Y)$ обладают совершенными паросочетаниями, то для каждой вершины $x \in X$ найдётся такая вершина $y \in Y$, что граф $G(V_1, Z)$, где $Z = (X \setminus \{x\}) \cup \{y\}$, обладает совершенным паросочетанием.

4.10. Пусть матрица, описывающая задачу о свадьбах, является квадратной и верхне-треугольной. При этом условии — когда задача о свадьбах разрешима?

4.11. Доказать, что

a) граф на рис. 4.1 является двудольным;

b) граф на рис. 4.1 негамильтонов;

c) ни один двудольный граф с нечётным числом вершин не может быть гамильтоновым.

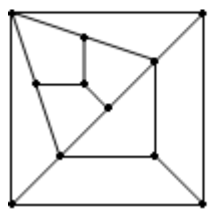


Рис. 4.1

4.12. Граф, у которого 2013 вершин и степень каждой вершины больше или равна 1007, не двудольный. Докажите.

4.13. Пусть задача о свадьбах задана квадратной матрицей A. Докажите, что если $\det A \neq 0$, то задача разрешима.

4.14. Пусть задача о свадьбах задана квадратной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где блоки A, B и C состоят из единиц. При каких условиях на размеры блоков задача разрешима? Как можно обобщить задачу?

4.15. Пусть $m \leqslant n$. Найти

a) наибольшее возможное количество единиц в $m \times n$-матрице, не обладающей положительной диагональю;

b) наименьшее возможное количество нулей в $m \times n$-матрице, обладающей ровно одной положительной диагональю;

c) наибольшее возможное количество нулей в $m \times n$-матрице, обладающей ровно двумя положительными диагоналями;

d) наибольшее возможное количество единиц в $m \times n$-матрице, обладающей ровно двумя положительными диагоналями.

4.16. Вычислить, исходя из определений, ранг покрытия и граничный ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.17. При $m \leqslant n$ найти ранг покрытия и граничный ранг $m \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$, если

a) $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ числа i, j — чётные;

b) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ числа i, j — чётные.

4.18. Докажите, что ранг $(0,1)$-матрицы, как его понимают в алгебре, не больше, чем её граничный ранг.

5. Орграфы, матрица смежности

Ориентированным графом (орграфом) называется пара (V, E), где V — непустое множество вершин, $E \subseteq V \times V$ — множество *ориентированных рёбер* или *дуг*. Если $e = (u, v)$ — дуга, то вершина u — *начало* дуги e, вершина v — её *конец*. Дуга (u, u) называется *петлёй*. Вершины орграфа *смежны*, если они соединены дугой. Иногда в орграфах допускается ситуация, когда из одной вершины в другую ведёт несколько одинаковых дуг. Такие дуги называются *кратными*.

Путём длины k в орграфе называют любую последовательность вершин

$$v_1, v_2, \ldots, v_{k+1},$$

такую, что (v_i, v_{i+1}) — дуга, $i = 1, \ldots, k$. *Простой* путь — это путь, в котором все вершины различны, кроме, возможно, первой и последней. Если $v_1 = v_{k+1}$, то путь (простой путь) называется *контуром* (*простым контуром*).

Говорят, что вершина v *достижима* из вершины u, если $u = v$ или существует (u, v)-путь. Вершины u и v называются *взаимодостижимыми*, если они достижимы друг из друга. Граф, в котором любые две вершины взаимодостижимы, называется *сильно связным*.

Пусть G — орграф с n вершинами. Его *матрицей смежности* называется такая матрица $A = (a_{ij})$ порядка n, что элемент a_{ij} равен 1, если в G есть дуга (i, j), и равен 0 в противном случае. (Если в G допускаются кратные дуги, то элемент a_{ij} считается равным количеству дуг, ведущих из вершины i в вершину j.)

5.1. Как устроен орграф, матрица смежности которого

a) диагональная;

b) верхнетреугольная;

c) совпадает со своей жордановой нормальной формой;

d) содержит отличные от нуля элементы только на побочной диагонали;

e) содержит ровно одну ненулевую строку;

f) содержит ровно один ненулевой столбец.

5.2. Пусть A — матрица смежности орграфа G.

a) Чему (в графовых терминах) равен (i, j)-элемент матрицы A^k?

b) Доказать, что матрица $A + A^2 + \ldots + A^n$ не содержит нулей в точности тогда, когда орграф — сильно связный.

c) Доказать, что если G не содержит петель, то сумма собственных значений матрицы A с учётом их кратностей равна 0.

d) Доказать, что если матрица смежности орграфа — верхняя треугольная с нулями на главной диагонали, то граф не содержит контуров.

e) Доказать, что если G не содержит контуров, кроме, может быть, петель, то собственные значения матрицы A равны 0 или 1.

5.3. Найти собственные значения матрицы смежности циклического орграфа с n вершинами.

5.4. Пусть A — матрица смежности орграфа, вершинами которого служат вершины n-мерного куба, а дугами — рёбра, ориентированные в направлении от некоторой вершины с номером i к диаметрально противоположной ей вершине с номером j. Вычислить матрицу A^n.

5.5. Пусть A — матрица смежности неориентированного графа G.

a) Чему равен след матрицы A^2?

b) Доказать, что граф с матрицей смежности A^2 связен ровно тогда, когда граф G — связный и не двудольный.

5.6. Докажите лемму о рукопожатиях с помощью матрицы смежности.

5.7. Опишите орграфы, у которых матрица смежности A удовлетворяет условиям:

a) $A^2 = 0$,

b) $A^2 = E$,

c) $A^2 = A$.

5.8. Описать все ориентированные графы, матрицы смежности которых нильпотентны.

5.9. Доказать, что матрица смежности неориентированного графа нильпотентна лишь для пустого графа.

5.10. В орграфе на рис. 5.1 найти:

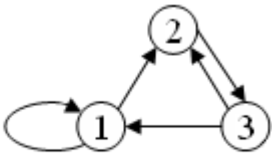


Рис. 5.1

a) количество $(3, 2)$-путей длины 6;

b) количество $(1, 3)$-путей длины 8.

5.11. Пусть на множестве $V = \{1, \dots, n\}$ задано отображение f. *Графом отображения* f называется орграф с множеством вершин V, такой, что $i \to j \;\Leftrightarrow\; f(i) = j$. Чем характеризуются графы отображений? Каковы их конденсации? Каким свойством среди графов отображений выделяются графы биекций?

5.12. Орграф называется *турниром*, если любые две его вершины соединены единственной дугой.

a) Постройте сильно связный турнир с $n \geqslant 5$ вершинами и его конденсацию.

b) Докажите, что конденсация турнира всегда является турниром. Как выглядят конденсации турниров?

c) Докажите, что сильно связный турнир с $n \geqslant 3$ вершинами содержит контур длины 3.

5.13. Орграф называется *примитивным*, если существует такое число k, что любые две вершины связаны путём длины k. Докажите, что

a) всякий примитивный граф сильно связен, но обратное утверждение в общем случае неверно;

b) если сильно связный граф с n вершинами содержит петлю, то он примитивен, причём любые две вершины связаны путём длины $2n - 2$.

5.14. Доказать, что

a) сильно связный граф с $n > 1$ вершинами содержит не менее n дуг;

b) примитивный граф с $n > 1$ вершинами содержит не менее $n+1$ дуг;

c) для каждого $n > 1$ существует примитивный граф с $n + 1$ дугами.

5.15. Доказать эквивалентность следующих свойств орграфа G с $n > 1$ вершинами:

1) G — примитивный;

2) НОД длин всех простых контуров в G равен 1;

3) для любых (не обязательно различных) вершин u, v в G существует (u, v)-путь длины $n^2 - 2n + 2$.

5.16. Организуется клуб, в уставе которого записано: 1) каждый член клуба должен быть знаком ровно с 5-ю другими членами клуба, 2) у любых двух членов клуба должно быть ровно 2 общих знакомых члена клуба. Доказать, что существование такого клуба невозможно.

6. Потоки в сетях

Сеть — это орграф, в котором выделены две вершины — *источник* s и *сток* t. Из источника дуги могут лишь выходить, а в сток — лишь входить. Каждой дуге (i, j) сопоставлено положительное число c_{ij} — *пропускная способность* дуги.

Потоком в сети называется функция f, заданная на дугах, принимающая целые значения и удовлетворяющая условиям:

1) $0 \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij}$,

2) $\sum\limits_{i:i \to j} f_{ij} = \sum\limits_{l:j \to l} f_{jl}$ для любой промежуточной вершины j (то есть неравной s, t).

Число f_{ij} называется *величиной потока по дуге* (i, j).

Разрезом сети называется такое разбиение $(X, \bar{X})$ множества вершин на две части, что $s \in X$, $t \in \bar{X}$. *Пропускной способностью разреза* называется сумма пропускных способностей дуг, ведущих из X в $\bar{X}$, то есть число

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{\substack{i \to j \\ i \in X, j \in \bar{X}}} c_{ij}.$$

Величиной потока через разрез называется сумма величин потока на дугах, ведущих из X в $\bar{X}$, минус сумма значений потока на дугах, ведущих в обратном направлении, то есть число

$$f(X, \bar{X}) = \sum_{\substack{i \to j \\ i \in X, j \in \bar{X}}} f_{ij} - \sum_{\substack{i \to j \\ i \in \bar{X}, j \in X}} f_{ij}.$$

Величина потока f через разрез сети не зависит от разреза. Она называется *величиной потока* и обозначается $val(f)$. Поток максимальной величины называют *максимальным* потоком, а разрез с минимальной пропускной способностью — *минимальным* разрезом.

6.1. Свести к стандартному случаю задачу о нахождении максимального потока, если

a) некоторые дуги являются рёбрами;

b) имеется несколько источников и несколько стоков;

c) некоторые вершины имеют пропускные способности.

6.2. При каком условии в сети не существует потока положительной величины?

6.3. Чему равна максимальная величина потока в сети, если пропускные способности всех дуг равны 1?

6.4. Пусть сеть задана, но веса дуг не заданы. Обозначим через $k(X,\bar{X})$ количество дуг с началом в X и концом в $\bar{X}$. Как вычислить минимум функции k, определённой на множестве разрезов, то есть число

$$\min_{(X,\bar{X})} k(X,\bar{X})?$$

6.5. Используя алгоритм нахождения максимального потока в сети, для фиксированной пары вершин i, j орграфа найти алгоритм,

a) определяющий существование (i,j)-пути;

b) вычисляющий наибольшее количество непересекающихся по дугам (i,j)-путей.

6.6. Доказать теорему Холла о свадьбах с помощью теоремы Форда – Фалкерсона о потоках.

6.7. Найти величину максимального потока и минимальный разрез в сетях на рис. 6.1–6.3.

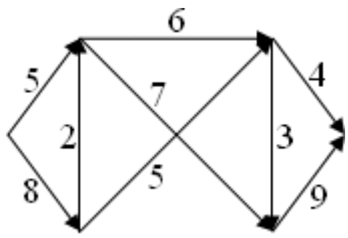


Рис. 6.1

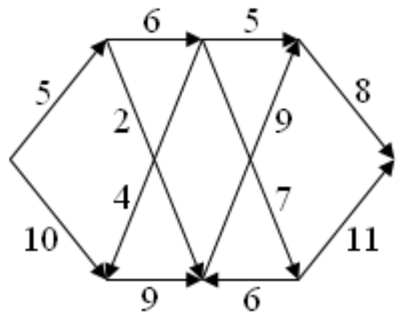


Рис. 6.2

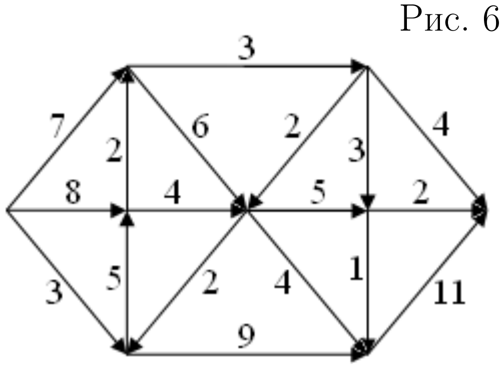


Рис. 6.3

6.8. Пусть G — орграф с n вершинами, в котором дуга (i,j) существует, если $i<j$ и НОД$(i,j)=1$, при этом её пропускная способность считается равной i. Найти величину максимального потока из вершины 1 в вершину n.

6.9. Пусть вершинами орграфа служат вершины n-мерного куба, а дугами — рёбра куба, ориентированные в направлении от некоторой вершины – источника к диаметрально противоположной ей вершине – стоку, пропускные способности всех дуг равны 1. Найти величину максимального потока.

6.10. Пусть G — орграф с n вершинами, в котором дуга (i, j) существует, если j/i — простое число, оно же считается её пропускной способностью. Доказать, что величина максимального потока из вершины 1 в вершину n не превосходит числа n.

7. Теория автоматов

Алфавитом называется любое конечное непустое множество X. Его элементы называются *буквами*. Конечные последовательности букв называются *словами*. *Длина* слова равна количеству его букв, причём каждая буква считается столько раз, сколько она встречается в слове. Длина слова p обозначается $|p|$. *Пустое слово* обозначается буквой e независимо от алфавита, $|e| = 0$.

Множество всех слов в алфавите X обозначается X^*. *Языком* над алфавитом X называется любое множество слов $L \subseteq X^*$.

Автомат — это совокупность $\langle X, S, \delta\rangle$, где X — алфавит, S — непустое множество, элементы которого называются *состояниями* автомата, а δ — функция из $S \times X$ в S, она называется *функцией перехода*. Запись $\delta(s, x) = s'$ читается так: автомат под действием сигнала – буквы x – переходит из состояния s в состояние s'. Действие слова $p = x_1 \dots x_k$ на состояние s определяется как последовательное применение букв слова p, то есть $s\delta(p) = \delta(\dots\delta(s, x_1)\dots, x_k)$. Автомат называется *конечным*, если он имеет конечное множество состояний. Конечные автоматы удобно задавать таблицами или орграфами.

Назовём автомат $\langle X, S, \delta\rangle$ *настроенным*, если в нём выделено некоторое *начальное* состояние s_0 и некоторое подмножество $F \subseteq S$ *допускающих* состояний. Говорят, что настроенный автомат *распознает язык* $L \subseteq X^*$, если

$$s_0\delta(p) \in F \;\Leftrightarrow\; p \in L.$$

Слова p, q *различимы словом* r *относительно языка* L, если $pr \in L$, $qr \notin L$ или $pr \notin L$, $qr \in L$. Если различающих слов не существует, то говорят, что p и q *неразличимы относительно языка* L и пишут $p \sim q(L)$, то есть

$$p \sim q(L) \quad\Leftrightarrow\quad \forall r \in X^*\ (pr \in L \Leftrightarrow qr \in L).$$

Рангом языка L называется число $\mathrm{rk}\, L$ классов эквивалентности отношения $\sim (L)$. Множество слов $W \subseteq X^*$ называется *базисом отношения эквивалентности* $\sim (L)$, если а) любые два слова из W различимы относительно L, б) любое слово из X^* эквивалентно некоторому слову из W.

7.1. Автомат называется *сильно связным*, если для любой пары состояний найдётся входное слово, переводящее автомат из первого состояния во второе. Покажите, что автомат сильно связен в точности тогда, когда граф автомата сильно связен.

7.2. Докажите, что

a) любой конечный язык распознаётся конечным автоматом;

b) язык, являющийся дополнением до конечного, тоже распознаётся конечным автоматом.

7.3. Для языка L и слова p определим новый язык

$$L_p = \{q \mid pq \in L\}.$$

Докажите, что

a) если L распознаётся конечным автоматом, то и L_p распознаётся конечным автоматом;

b) язык L распознаётся конечным автоматом в точности тогда, когда среди языков вида $L_p, p \in X^*$, имеется лишь конечное число различных.

7.4. Докажите, что если языки L и M распознаются конечными автоматами, то распознаётся и их разность $L \setminus M$.

7.5. Докажите, что если настроенный автомат $\langle X, S, \delta, s_0, F\rangle$ с n состояниями распознаёт язык L, то найдётся автомат с $n+1$ состояниями, распознающий язык

a) $L \cup \{e\}$ при $e \notin L$;   b) $L \setminus \{e\}$ при $e \in L$.

7.6. Докажите, что следующие языки не распознаются конечными автоматами

a) $\{a^k b a^k, k = 1, 2, \ldots\}$;

b) язык, составленный из палиндромов, то есть слов, читающихся одинаково слева направо и справа налево;

c) $\{a^{k^2}, k = 1, 2, \ldots\}$.

7.7. Докажите, что состояния s_1 и s_2 автомата с n состояниями эквивалентны, если свойство $s_1\delta(p) \in F \iff s_2\delta(p) \in F$ справедливо

a) для всех слов длины $\leqslant n^2$;

b) для всех слов длины $\leqslant n - 1$.

7.8. Элемент z называется *нулём* моноида M, если $az = za = z$ для всех $a \in M$. Моноид с нулём называется *нильпотентным*, если существует такое натуральное k, что произведение любых k элементов (не равных единице моноида), равно нулю.

a) Найдите необходимое и достаточное условие, которому должен удовлетворять язык $L \subseteq X^*$, чтобы его синтаксический моноид был нильпотентным.

b) Приведите пример языка, в синтаксическом моноиде которого произведение любых *двух* элементов (не равных единице моноида), равно нулю.

7.9. Автомат (S, δ) называется *дефинитным*, если существует такое натуральное k, что для любого слова p, $|p| \geqslant k$, верно

$$\forall s, s' \in S \; s\delta(p) = s'\delta(p).$$

Определите, какой из следующих автоматов дефинитный:

a) $\begin{array}{c|cc|} & a & b \\ \cline{2-3} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ \cline{2-3} \end{array}$, b) $\begin{array}{c|cc|} & a & b \\ \cline{2-3} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \\ \cline{2-3} \end{array}$

7.10. Пусть $X = \{a, b\}$, $L = \{a\}$. Чему равен ранг L?

7.11. Для следующих настроенных автоматов опишите распознаваемый ими язык и вычислите ранг этого языка.

a) $\begin{array}{c|cc|} & a & b \\ \cline{2-3} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \cline{2-3} \end{array}$, $s_0 = 1$, $F = \{2\}$;

b) $\begin{array}{c|cc|} & a & b \\ \cline{2-3} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \cline{2-3} \end{array}$, $s_0 = 1$, $F = \{1\}$;

c) $\begin{array}{c|cc|} & a & b \\ \cline{2-3} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ \cline{2-3} \end{array}$, $s_0 = 1$, $F = \{1\}$.

7.12. Постройте конечный автомат, распознающий язык L в алфавите $X = \{a, b\}$, если

1) $L = \{apb,\ p \in X^*\}$;

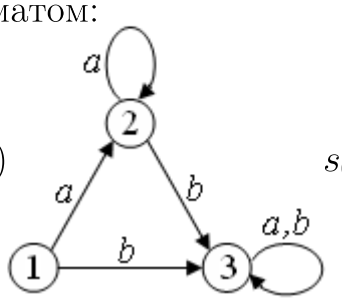
2) $L = \{pabbaq,\ p, q \in X^*\}$;

3) $L = \{xpy,\ x, y \in X, x \neq y, p \in X^*\}$;

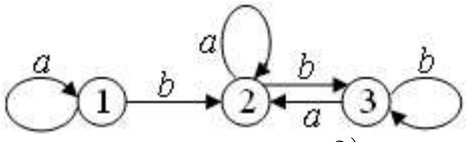
4) $L = \{aap,\ p \in X^*\} \cup \{pbb,\ p \in X^*\}$;

5) $L = \{paaq,\ p, q \in X^*\} \backslash \{paa,\ p \in X^*\}$.

7.13. Найти базис отношения $\sim (L)$, если язык L распознаётся автоматом:

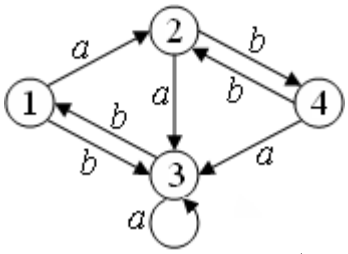
1) 

$s_0 = 1$, $F = \{3\}$;

2) 

$s_0 = 1$, $F = \{2\}$;

3) автомат — как в п.2), $s_0 = 1$, $F = \{1, 2\}$;

4) 

$s_0 = 1,\ F = \{2\};$

5) автомат как в п.4), $s_0 = 1,\ F = \{2, 3\}$.

7.14. Приведите пример языка L со следующим свойством:

$$p \sim q(L) \iff p, q \in L \text{ или } p, q \notin L. \qquad (*)$$

7.15. Какие языки имеют ранг 1? Докажите, что ранг языка равен 2 тогда и только тогда, когда для него выполняется свойство $(*)$ из предыдущей задачи.

7.16. Если длина самого короткого слова языка L равна k, то $\mathrm{rk}L \geqslant k$. Докажите.

7.17. Пусть длина самого длинного слова языка L равна k. Докажите, что $\mathrm{rk}L \geqslant k$.

7.18. Если автомат с n состояниями распознаёт конечный язык, то длина любого слова этого языка не больше, чем $n - 1$.

7.19. Пусть язык L имеет конечный ранг. Докажите, что язык $\overleftarrow{L}$, составленный из слов L, записанных в обратном порядке, тоже имеет конечный ранг.

8. Булевы функции

Пусть $\Omega = \{0, 1\}$ и $n \in \mathbb{N}$. *Функцией алгебры логики* (*булевой функцией*) от n переменных называется отображение $f : \Omega^n \to \Omega$. Таким образом, областью определения булевой функции служит множество, состоящее из 2^n двоичных наборов длины n. Булевы функции задаются таблицами вида:

x_1	$\dots$	x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	$\dots$	0	$f(0, \dots, 0)$
0	$\dots$	1	$f(0, \dots, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\dots$	1	$f(1, \dots, 1)$

Каждый из наборов значений переменных можно рассматривать как запись в двоичной системе счисления чисел из множества $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, и обычно строки таблицы располагают в порядке увеличения этих чисел. В этом случае функция однозначно определяется вектором своих значений — последним столбцом таблицы. Такой способ задания булевой функции называют *векторным.*

Система B булевых функций называется *полной*, если любую булеву функцию можно представить в виде композиции функций системы B. Критерием полноты служит *теорема Поста*: *система B полна тогда и только тогда, когда для любого из классов Поста T_0, T_1, L, M, S найдётся функция $f \in B$, не лежащая в этом классе.*

8.1. Упростить формулы:

1) $(x + \overline{x \to y})(y \leftrightarrow x)$; 2) $(x \to x\bar{y}) \vee (y \downarrow \bar{x})$;

3) $\bar{x}y + (x|(\bar{x} \to y))$; 4) $x \vee (y + z) \leftrightarrow (xy|z)$.

8.2. Определить существенные и несущественные переменные следующих функций:

1) $x\bar{z} + \bar{y}z \to \bar{x}z \vee y\bar{z}$; 2) $xz \vee \bar{y} \leftrightarrow y + \bar{x}z$;

3) $\bar{x}y \to z + \bar{y} \vee (z \leftrightarrow xy)$; 4) $(\bar{x} \to \bar{z}) \to z(\bar{y} \to z)$.

8.3. Построить релейно-контактную схему с n контактами, реализующую функцию f, если

1) $f = (z \to \bar{x}) \to \overline{z \to y}$, $n = 3$;

2) $f = \bar{x} + y \vee \overline{z \to \bar{x}}$, $n = 5$;

3) $f = (y \vee \bar{x} \leftrightarrow z)(y + \bar{z})$, $n = 5$;

4) $f = x(y \to z) \to \overline{y \to x}$, $n = 3$.

8.4. Найти СДНФ и СКНФ следующих функций:

1) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$; 2) $f(x, y, z) = (x \to y) + (y \to z)$;

3) $f(x, y, z) = (x \vee y)|(y \vee z)$; 4) $(x + y) \downarrow (y + z)$.

8.5. Найти полином Жегалкина для функции $f(x, y, z)$, заданной вектором a:

1) $a = (10110101)$; 2) $a = (11101101)$; 3) $a = (00011110)$;

4) $a = (01101001)$; 5) $a = (11100010)$; 6) $a = (10100101)$.

8.6. Проверить полноту системы функций:

1) $\{\bar{x}, x \to y\}$; 2) $\{x + y, x \to y\}$; 3) $\{\bar{x}, xy \vee (x \vee y)z\}$;

4) $\{xy + z, xy \to z\}$; 5) $\{0, 1, \overline{xy} \to z, (x \vee y)z\}$.

8.7. Доказать, что функцию f нельзя представить в виде композиции функций системы B:

1) $f = x \leftrightarrow y$, $B = \{x + y, xy\}$;

2) $f = x \to y$, $B = \{\bar{x}, x \leftrightarrow y\}$;

3) $f = x + y + z$, $B = \{xy, x \vee y\}$;

4) $f = xy$, $B = \{x \vee y, x \to y\}$.

8.8. Описать все линейные монотонные функции.

8.9. Доказать, что если $f \notin T_0$, а функция $g \in M$ обладает хотя бы одной существенной переменной, то $f \to g \in T_0$.

8.10. Найти все монотонные самодвойственные функции от трёх переменных.

8.11. Пусть $f, g \in L$. Доказать, что $f + g \in S \Leftrightarrow$ либо $f \in S$, либо $g \in S$.

8.12. Доказать, что если $f, g \in M$, то $f + g \in M \Leftrightarrow f = 0$ или $g = 0$ или $f = g$.

8.13. Доказать, что если $f, g \in S$, то $fg \in S \Leftrightarrow f = g$.

8.14. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in S$. Доказать, что $f_1 + \ldots + f_n \in S \Leftrightarrow$ число n — нечётно.

8.15. Для булевой функции f от n переменных найти такую самодвойственную функцию g от $n+1$ переменных, что $g(x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

8.16. Пусть $K(n)$ — множество всех булевых функций от n переменных, лежащих в классе K.

a) Найти $|T_0(n)|$, $|T_1(n)|$, $|L(n)|$, $|S(n)|$.

b) При $n \geqslant 3$ доказать неравенства $|L(n)| < |M(n)| < |T_0(n)|$.

8.17. Описать классы T_0^*, T_1^*, L^*, M^* и S^*, где $K^* = \{f^*,\ f \in K\}$.

Ответы и указания

1.4. $\frac{n(n-1)}{2}$.

1.6. *Указание.* Воспользоваться задачей 1.5.

1.11. *Указание.* Использовать задачу 1.8.

1.18. *Указание.* Применить индукцию по m.

1.19. *Указание.* Предварительно показать, что при фиксированном количестве рёбер наибольшее количество компонент имеет граф, у которого все компоненты (кроме, возможно, одной) — одновершинные.

1.20. *Указание.* Применить индукцию по n.

1.21. $K_{n,n}$.

1.22. $m \leqslant n/2$.

2.1. a) n — нечётное; b) m, n — чётные.

2.8. a) $n \geqslant 3$; b) $m = n \geqslant 2$.

2.12. $m!(m-1)!/2$.

2.16. n — чётное.

2.17. *Указание.* При $n = 7$ использовать задачу 1.15.

3.2. $n - m$.

3.3. a) $n \leqslant 2$; b) $m = 1$ или $n = 1$.

3.7. $[\frac{n+1}{2}]$.

3.8. $m = 3$, $n = 4$.

3.10. ny при $y \leqslant x$, $(n-1)x + y$ при $x < y$.

3.11. $(m-1)x + (n-1)y + z$ при $\max\{x, y\} \leqslant z$; $(m-1)x + nz$ при $x \leqslant z \leqslant y$; $(n-1)y + mz$ при $y \leqslant z \leqslant x$; $(m+n-1)z$ при $z \leqslant \min\{x, y\}$.

3.12. Количество остовов равно длине единственного простого цикла.

3.13. *Указание.* Воспользоваться задачей 3.12.

3.19. Нет.

3.21. Одно из рёбер веса y — мост, либо оно становится им при удалении другого ребра веса y.

4.5. *Указание.* В двудольном графе задачи рассмотреть подграф, порождённый вершинами, отвечающими произвольным k юношам и всем знакомым им девушкам, и оценить количество его рёбер.

4.6. При любом $p = 1, \ldots, m$ любые p юношей с номерами $i_1, \ldots, i_p$ знакомы в совокупности не менее чем с $k_{i_1} + \ldots + k_{i_p}$ девушками.

4.7. a) $\frac{n!}{(n-m)!}$; b) $\frac{n_1!}{(n_1-m_1)!}\frac{n_2!}{(n_2-m_2)!}$, где $n_1 = [\frac{n+1}{2}]$, $m_1 = [\frac{m+1}{2}]$, $n_2 = n - n_1$, $m_2 = m - m_1$; c) $2^{[\frac{m}{2}]}$; d) 2^m.

4.15. a) $(m-1)n$; b) $mn - \frac{m(m+1)}{2}$; c) $mn - m - k$, где $k = 1$ при $m < n$ и $k = 2$ при $m = n$; d) $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ при $m < n$, либо $\frac{(m-2)(m-1)}{2} + 4$ при $m = n$.

4.17. a) $[\frac{m}{2}]$; b) m.

5.3. Все комплексные корни степени n из 1.

5.4. $n!E_{ij}$.

5.5. a) $2k$, где k — число рёбер графа.

5.7. a) Объединение орграфов, каждый из которых есть либо изолированная вершина, либо двудольный орграф вида $G(V_1, V_2)$, все дуги которого ведут из V_1 в V_2; b) объединение орграфов, каждый из которых есть либо вершина с петлёй, либо двухвершинный циклический орграф.

5.8. Орграфы без контуров.

5.10. a) 8; b) 13.

5.16. *Указание.* Пусть A — матрица смежности отвечающего задаче графа с n вершинами. Вычислив строчные суммы матриц A и A^2, показать, что $n = 11$; затем применить задачу 1.16.

6.6. *Указание.* К отвечающему задаче о свадьбах двудольному графу $G(V_1, V_2)$ добавить вершины s и t, соединив s с каждой вершиной из V_1, а t — с каждой вершиной из V_2, ориентировать все рёбра в направлении от s к t, пропускные способности всех дуг положить равными 1. Показать, что при выполнении условий теоремы Холла величина максимального потока в получившейся сети равна m.

6.7. 1) 12; 2) 13; 3) 15.

6.8. $n - 1$.

6.9. n.

7.10. $\operatorname{rk} L = 3$.

7.11. a) $L = \{$слова с нечётным числом букв $a\}$, $\operatorname{rk} L = 2$; b) $L = \{b^k,\ k \geqslant 0\}$, $\operatorname{rk} L = 2$; c) $L = \{$слова с чётным числом букв $a\}$, $\operatorname{rk} L = 2$.

7.13. 1) $W = \{e, b\}$; 2) $W = \{e, b, bb\}$; 3) $W = \{e, b, bb\}$; 4) $W = \{e, a, b, ab\}$; 5) $W = \{e, a\}$.

7.18. *Указание.* Использовать задачу 7.17.

8.1. 1) xy; 2) $x|y$; 3) $x \downarrow y$; 4) $(x \vee y \vee z)(y|z)$.

8.2. Существенные переменные: 1) x, y; 2) x, y, z; 3) нет; 4) z.

8.4. 1) СДНФ: $xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$, СКНФ: $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$;

2) СДНФ: $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$, СКНФ: $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

3) СДНФ: $x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$, СКНФ: $(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

4) СДНФ: $xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$, СКНФ: $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x}y\bar{z})(\bar{x}\bar{y}z)$.

8.5. 1) $xyz + yz + x + z + 1$; 2) $xy + yz + 1$; 3) $yz + x$; 4) $x + y + z$; 5) $xy + yz + x + 1$; 6) $x + z + 1$.

8.6. Полнота: 1) да; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) нет.

8.8. $0, 1, x$.

8.10. $x, y, z, xy \vee yz \vee xz$.

8.15. $g = \bar{x}_{n+1} f \vee x_{n+1} f^*$.

8.16. а) $|T_0(n)| = |T_1(n)| = 2^{2^n - 1}$, $|L(n)| = 2^{n+1}$, $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$.

8.17. $T_0^* = T_1$, $T_1^* = T_0$, $L^* = L$, $M^* = M$, $S^* = S$.

Литература

1. **Оре О.** Теория графов. — М.: Наука, 1980.
2. **Харари Ф.** Теория графов — М.: Мир, 1973.
3. **Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.** Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
4. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов.— М.: Мир, 1977.
5. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.А.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. — Москва, Ижевск: РХД, 2001.
6. **Арбиб М.А.(ред.)** Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. — М.: Статистика, 1975.
7. **Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С.** Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.
8. **Яблонский С.В.** Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003.