Е. Н. СОСОВ

Геометрия Лобачевского и специальная теория относительности

1. Принцип относительности. Пространство Минковского. Преобразования Лоренца.

Принцип относительности Галилея: тождественные механические опыты, поставленные в любых двух ИСО, дадут тождественные результаты.

Следовательно, уравнения законов классической механики должны быть одинаковы в любых двух ИСО, т.е. эти уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея.

Напомним, что в произвольной системе отсчета (СО) **событие характеризуется временем и местом**, т.е. упорядоченной четверкой вещественных чисел

$$\langle t; \mathbf{x} \rangle = \left\langle t; x^1; x^2; x^3 \right\rangle \in \mathbb{R}^4.$$

В общем случае **преобразования Галилея** имеют вид

$$\langle \hat{t}; \hat{\mathbf{x}} \rangle = \langle t; A\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 - \mathbf{V}t \rangle ,$$

где $\mathbf{x}_0$ — постоянный вектор, A — ортогональный оператор пространства $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{V}$ — вектор скорости.

При взаимодействии частиц изменение положения одной из взаимодействующих частиц, в силу второго закона Ньютона, отражается на остальных частицах в тот же момент, т.е. взаимодействия распространяются мгновенно (дальнодействие).

Но этот вывод находится в противоречии с опытными данными, из которых можно сделать вывод о существовании **максимальной скорости распространения взаимодействий**.

Кроме того, уравнения Максвелла неинвариантны относительно преобразований Галилея, а электромагнитное поле распространяется с конечной скоростью.

Наибольшей скоростью передачи сигнала является **скорость света**

$\mathbf{c} = 299792458 \pm 1,2$ м/с в вакууме (1975 г.), которая является также скоростью распространения электромагнитных волн любой частоты в вакууме, т.е. опытные данные согласуются с теорией Максвелла.

В 1905 году А. Эйнштейн распространил **принцип относительности** на все явления природы: **все тождественные физические явления во всех ИСО при одинаковых начальных условиях протекают одинаково**.

Его **второй постулат** был таким: **скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям и в любой области данной ИСО и одинакова во всех ИСО**.

В настоящее время вместо этого постулата исходят из того, что в природе существует предельная скорость передачи взаимодействия и полагают, что эта скорость есть скорость света в вакууме (но СТО не утратила бы смысла, если бы предельная скорость оказалась иной).

Из того, что скорость света является предельной скоростью распространения взаимодействий, следует, что она должна иметь одно и то же значение во всех ИСО (иначе различные ИСО стало бы возможным различить и в силу принципа относительности получилось бы противоречие).

Если в $\mathbb{R}^4$ ввести **псевдоскалярное умножение**

$$(\left\langle x^0; \mathbf{x} \right\rangle, \left\langle y^0; \mathbf{y} \right\rangle) = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 =$$

$$x^0y^0 - (\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где $\mathbf{x} = \left\langle x^1; x^2; x^3 \right\rangle$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, то получим, так называемое **пространство Минковского** $\mathbb{R}^4_1$.

Если $\langle t_1; \mathbf{x} \rangle$, $\langle t_2; \mathbf{y} \rangle$ — два события, то величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}$$

называется **интервалом** или **расстоянием** между этими событиями. Обычно полагают $x^0 = ct_1$, $y^0 = ct_2$.

Интервал является инвариантом при преобразовании ИСО к любой другой ИСО, что является математическим выражением постоянства скорости света в любой ИСО.

Найдем группу псевдоортогональных преобразований $O(1,1)$ пространства $\mathbb{R}^2_1$, произвольный элемент которой оставляет неподвижной точку $(0;0) \in \mathbb{R}^2_1$.

Для этого запишем в матричном виде условие сохранения матрицы G метрического тензора при действии этой группы

$$G = A^\top G A, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общий вид элемента $O(1,1)$ следующий

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & \pm\operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & \pm\operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \Psi \in \mathbb{R},$$

а общий вид представителя компоненты единицы группы $O(1,1)$ такой

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & \operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & \operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ИСО $K(O;\left\langle x^0;\mathbf{x}\right\rangle)$ и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью V вдоль оси Ox^1 ИСО $\widehat{K}(\widehat{O}; \left\langle \widehat{x}^0; \widehat{\mathbf{x}} \right\rangle)$.

Ортохронные (с неизменным направлением времени) псевдоортогональные преобразования первого рода (с единичным определителем) этих координат с учетом примера имеют вид

$$x^0 = \widehat{x}^0 \operatorname{ch} \Psi + \widehat{x}^1 \operatorname{sh} \Psi, \qquad x^1 = \widehat{x}^0 \operatorname{sh} \Psi + \widehat{x}^1 \operatorname{ch} \Psi,$$

$$x^2 = \widehat{x}^2, \qquad x^3 = \widehat{x}^3, \qquad \Psi \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим в системе K движение начала $\widehat{O}$: $\widehat{x} = 0$. Тогда получим

$$\frac{V}{c} = \frac{x^1}{ct} = \frac{x^1}{x^0} = \operatorname{th} \Psi.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} \Psi = \frac{B}{\sqrt{1 - B^2}}, \qquad \operatorname{ch} \Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}},$$

где $B = \frac{V}{c} = \operatorname{th}\Psi$. Тогда преобразования координат можно написать в виде

$$x^0 = \Gamma(\hat{x}^0 + B\hat{x}^1), \quad x^1 = \Gamma(B\hat{x}^0 + \hat{x}^1),$$

$$x^2 = \hat{x}^2, \quad x^3 = \hat{x}^3, \qquad \Gamma = (1 - B^2)^{-1/2}.$$

Эти преобразования называются **преобразованиями Лоренца**.

Преобразования Лоренца в общем случае, когда ИСО $\hat{K}$ движется относительно ИСО K с постоянной скоростью, определяемой вектором $\mathbf{V}$, и $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{V}}{c}$, имеют вид

$$\hat{x}^0 = \Gamma(x^0 - (\mathbf{B}, \mathbf{x})),$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\Gamma}{\mathbf{B}^2}\{[(\mathbf{B}, \mathbf{x}) - \mathbf{B}^2 x^0]\mathbf{B} + [\mathbf{B}^2\mathbf{x} - (\mathbf{B}, \mathbf{x})\mathbf{B}]\sqrt{1 - \mathbf{B}^2}\}.$$

Если считать, что $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}}{x^0}$ — радиус-вектор точки из открытого шара $B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$, то **преобразования Лоренца определят параллельный перенос в модели Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского в этом шаре на вектор** $(-\mathbf{B})$:

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{((\mathbf{B},\mathbf{q}) - \mathbf{B}^2)\mathbf{B} + (\mathbf{B}^2\mathbf{q} - (\mathbf{B},\mathbf{q})\mathbf{B})\sqrt{1-\mathbf{B}^2}}{\mathbf{B}^2(1-(\mathbf{B},\mathbf{q}))}.$$

2. Геометрия пространства скоростей частиц в СТО.

3-скоростью частицы в СО K называется вектор

$$\mathbf{v} = \left\langle \frac{dx^1}{dt}; \frac{dx^2}{dt}; \frac{dx^3}{dt} \right\rangle = \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Пусть

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{d\mathbf{x}}{dx^0}$$

и ИСО $\widehat{K}$ движется относительно K с постоянной скоростью V вдоль оси Ox^1.

Продифференцировав преобразования Лоренца, получим **преобразования приведенной 3-скорости** в координатах

$$b^1 = \frac{\widehat{b}^1 + B}{1 + B\widehat{b}^1}, \; b^2 = \frac{\widehat{b}^2\sqrt{1 - B^2}}{1 + B\widehat{b}^1}, \; b^3 = \frac{\widehat{b}^3\sqrt{1 - B^2}}{1 + B\widehat{b}^1}.$$

В общем случае **преобразование приведенной 3-скорости** в векторном виде следующее

$$\widehat{\mathbf{b}} = \frac{((\mathbf{B},\mathbf{b}) - \mathbf{B}^2)\mathbf{B} + (\mathbf{B}^2\mathbf{b} - (\mathbf{B},\mathbf{b})\mathbf{B})\sqrt{1 - \mathbf{B}^2}}{\mathbf{B}^2(1 - (\mathbf{B},\mathbf{b}))}.$$

Кроме того,

$$\widehat{\mathbf{b}}^2 = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{B})^2 - [\mathbf{B},\mathbf{b}]^2}{(1 - (\mathbf{B},\mathbf{b}))^2} =$$

$$\frac{(1-(\mathbf{B},\mathbf{b}))^2-(1-\mathbf{b}^2)(1-\mathbf{B}^2)}{(1-(\mathbf{B},\mathbf{b}))^2},$$

$$1-\widehat{\mathbf{b}}^2=\frac{(1-\mathbf{b}^2)(1-\mathbf{B}^2)}{(1-(\mathbf{B},\mathbf{b}))^2}.$$

Вторая формула есть другая форма теоремы косинусов планиметрии Лобачевского. Действительно, напишем теорему косинусов

$$\operatorname{ch}\rho(0,\widehat{\mathbf{b}})=\operatorname{ch}\rho(0,\mathbf{b})\operatorname{ch}\rho(0,\mathbf{B})-$$

$$\operatorname{sh}\rho(0,\mathbf{b})\operatorname{sh}\rho(0,\mathbf{B})\cos\alpha,$$

где α — величина угла между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{b}$, в виде

$$(1-\widehat{\mathbf{b}}^2)^{-1/2}=(1-\mathbf{b}^2)^{-1/2}(1-\mathbf{B}^2)^{-1/2}(1-(\mathbf{b},\mathbf{B})).$$

Осталось возвести обе части в степень (-2). Первую формулу легко получить из второй и ее геометрический смысл состоит в том, что параллельный перенос на вектор $(-\mathbf{B})$ есть движение.

Если приближенно $\mathbf{B} = \mathbf{b} + d\mathbf{b}$, то получим **риманову метрику в пространстве приведенных скоростей**

$$dl^2 = \frac{d\mathbf{b}^2 - [d\mathbf{b}, \mathbf{b}]^2}{(1-\mathbf{b}^2)^2} = \frac{(1-\mathbf{b}^2)d\mathbf{b}^2 + (\mathbf{b}, d\mathbf{b})^2}{(1-\mathbf{b}^2)^2}.$$

Таким образом, **пространство скоростей частиц является пространством Лобачевского, а преобразование скорости частицы является параллельным переносом в этом пространстве**.

Для бесконечно близких событий

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = (1-\mathbf{b}^2)c^2 dt^2 = \gamma^{-2}(dx^0)^2,$$

где $\gamma = (1 - \mathbf{b}^2)^{-1/2} = \operatorname{ch}\rho(0, \mathbf{b}) = \operatorname{ch}\psi$.

4-скоростью частицы в $\mathbb{R}^4_1$ называется вектор с компонентами

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Компоненты 4-скорости удовлетворяют тождеству

$$\left\langle u^0; \mathbf{u} \right\rangle^2 = 1.$$

Действительно,

$$\left\langle u^0; \mathbf{u} \right\rangle = \gamma \left\langle 1; \mathbf{b} \right\rangle, \qquad \left\langle u^0; \mathbf{u} \right\rangle^2 = \gamma^2 (1 - \mathbf{b}^2) = 1.$$

Таким образом, 4-скорость частицы есть радиус-вектор точки из

$$\mathbb{S}_+(0, 1) = \{\left\langle x^0; \mathbf{x} \right\rangle \in \mathbb{R}^4_1 : \left\langle x^0; \mathbf{x} \right\rangle^2 = 1,\ x^0 > 0\}.$$

Принцип наименьшего действия: **для любой механической системы существует такой интеграл S (действие), который минимален вдоль малых участков линии движения**.

Действие для свободной материальной частицы должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца. Следовательно, интеграл должен быть взят от скаляра $-\alpha$, умноженного на дифференциал первой степени от интервала (минус выбран, чтобы интеграл принимал вдоль прямой минимальное значение)

$$S = -\alpha \int_a^b ds = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt.$$

При $c \to \infty$ функция Лагранжа

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$$

должна перейти в ее классическое выражение

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}\,.$$

Следовательно, $\alpha = mc$. Таким образом, **функция Лагранжа и действие имеют вид**

$$L = -mc^2\gamma^{-1}, \qquad S = -mc\int\limits_a^b ds.$$

3-импульсом частицы называется вектор

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = mc\gamma\mathbf{b}.$$

Тогда модуль 3-импульса имеет вид

$$|\mathbf{p}| = mc\,\mathrm{sh}\,\psi.$$

Энергией частицы называется величина

$$E = (\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}) - L.$$

Учитывая выражение для 3-импульса, получим

$$E = (\mathbf{v}, \mathbf{p}) - L = mc^2\gamma = mc^2 \operatorname{ch}\psi.$$

Энергией покоя частицы называется величина ее энергии при $\mathbf{v} = 0$, т.е. $E_0 = mc^2$.

Энергия и импульс частицы связаны следующими соотношениями.

Связь 1.

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2.$$

Связь 2.

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}.$$

Если масса покоя частицы равна нулю (например, для фотона), то из этой формулы при $|\mathbf{v}| = c$ получим

$$|\mathbf{p}| = \frac{E}{c}.$$

В обычном же случае из $|\mathbf{v}| \to c$ следует $E \to \infty$ и $|\mathbf{p}| \to \infty$.

Ковариантные компоненты **4-импульса частицы** определяются формулами

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i.$$

Следовательно,

$$p^i = mcu^i, \qquad \left\langle p^0; p^1; p^2; p^3 \right\rangle = \left\langle \frac{E}{c}; \mathbf{p} \right\rangle$$

и 4-импульс частицы есть радиус-вектор точки из $\mathbb{S}_+(0, mc)$ в $\mathbb{R}^4_1$, т.е.

$$\left\langle p^0; \mathbf{p} \right\rangle^2 = m^2c^2.$$

Это тождество в силу формулы $\left\langle p^0; \mathbf{p} \right\rangle = \left\langle \frac{E}{c}; \mathbf{p} \right\rangle$ эквивалентно связи 1

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2.$$

При переходе к модели Бельтрами–Клейна 4-скорость частицы отобразится в $\mathbf{b}$, а 4-импульс отобразится в $mc\mathbf{b}$.

3. Эффект Доплера. Упругое столкновение двух частиц.

Эффект Доплера есть сдвиг частоты излучения при удалении (приближении) источника излучения от наблюдателя, т.е. частота волны зависит от относительной скорости источника излучения и наблюдателя.

Сначала припишем фотону некоторую конечную массу и определим его энергию в новой СО, а затем перейдем к пределу при стремлении массы к нулю и абсолютной приведенной скорости к единице.

Пусть K — СО излучателя, в которой энергия частицы F с массой m равна $E = mc^2 \operatorname{ch} \psi$.

Пусть наблюдатель находится в СО $\widehat{K}$, которая движется с приведенной скоростью **B** относительно K под углом θ к направлению движения частицы F. Используем теорему косинусов для преобразования энергии из K в $\widehat{K}$

$$\widehat{E} = mc^2 \operatorname{ch} \widehat{\psi} = mc^2(\operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \psi \operatorname{sh} \Psi \cos \theta) =$$

$$E(\operatorname{ch} \Psi - \operatorname{th} \psi \operatorname{sh} \Psi \cos \theta).$$

Тогда отношение

$$\frac{\widehat{E}}{E} = \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{th} \psi \operatorname{sh} \Psi \cos \theta$$

уже не зависит от массы частицы и нетрудно сделать предельный переход к фотону: точка F, изображающая приведенную скорость частицы, уйдет на абсолют, т.е. абсолютная приведенная скорость частицы $|\mathbf{b}| = \text{th}\,\psi$ в пределе даст единицу.

Учтем известную формулу для энергии фотона $E = h\nu$, где ν — частота электромагнитного излучения, $h = 6,626176 * 10^{-34}$Дж $*$ сек — постоянная Планка. Тогда получим **формулу, определяющую искомый сдвиг частоты**.

$$\frac{\widehat{\nu}}{\nu} = \frac{\widehat{E}}{E} = \text{ch}\,\Psi - \text{sh}\,\Psi\cos\theta = \Gamma(1 - |\mathbf{B}|\cos\theta).$$

Важное значение имеет частный случай, когда $\theta = 0$. Тогда

$$\frac{\widehat{\nu}}{\nu} = \text{ch}\,\Psi - \text{sh}\,\Psi = e^{-\Psi},$$

то есть принимаемая наблюдателем частота в e^{Ψ} раз меньше частоты излучения источником.

Выразим абсолютную скорость удаления через эти частоты

$$|\mathbf{V}| = c\,\mathrm{th}\,\Psi = c\frac{e^{\Psi} - e^{-\Psi}}{e^{\Psi} + e^{-\Psi}} = c\frac{\nu^2 - \widehat{\nu}^2}{\nu^2 + \widehat{\nu}^2}\,.$$

Если в удаляющейся галактике возбужденные атомы излучают свет с частотой ν, то для наблюдателя на Земле каждая линия этого спектра в силу эффекта Доплера окажется сдвинутой и будет иметь частоту $\widehat{\nu}$.

С помощью этой формулы установили, что большинство галактик удаляются друг от друга со скоростью, пропорциональной расстояниям между ними. Но галактика Андромеды, находящаяся от нашей на расстоянии в 2,5 млн световых лет, приближается к нашей галактике со скоростью 120км/с и они **начнут сталкиваться через 4 млрд лет**.

Так называемые квазары имеют **красное смещение** $\frac{\hat{\nu}}{\nu}$ от 2 до $2,5$, что соответствует скорости удаления $|\mathbf{V}|$ от $0,6c$ до $0,7c$.

Упругое столкновение двух частиц это такое столкновение, при котором не изменяются внутренние состояния частиц.

Пусть в СО K до столкновения частица A имеет 3-импульс $\mathbf{p}_A = 0$ и энергию E_A, а частица D имеет 3-импульс $\mathbf{p}_D$ и энергию E_D.

Их полная энергия есть $E = E_A + E_D$ и полный 3-импульс, вдоль которого направим ось Ox^1, есть $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_D$.

Пусть начало новой СО $\hat{K}$ есть «центр инерции», т.е. в этой СО сумма импульсов обеих частиц равна нулю. И пусть это начало движется относительно K со скоростью $\mathbf{V}$.

После соударения полная энергия и полный импульс не изменятся, импульсы частиц только повернутся относительно центра инерции $\widehat{O}$ на некоторый угол φ.

Оставим прежние обозначения для импульсов, относительных скоростей и энергий после столкновения. Тогда $\varphi = \angle \mathbf{b}_D \widehat{O} \widehat{\mathbf{b}}_D$.

Найдем закон преобразования полной энергии с помощью теоремы косинусов планиметрии Лобачевского и условия для импульсов в $\widehat{K}$ $\widehat{\mathbf{p}}_A = -\widehat{\mathbf{p}}_D$.

$$E = E_A + E_D = m_A c^2 \operatorname{ch} \psi_A + m_D c^2 \operatorname{ch} \psi_D =$$

$$m_A c^2 (\operatorname{ch} \widehat{\psi}_A \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \widehat{\psi}_A \operatorname{sh} \Psi \cos \varphi) +$$

$$+ m_D c^2 (\operatorname{ch} \widehat{\psi}_D \operatorname{ch} \Psi - \operatorname{sh} \widehat{\psi}_D \operatorname{sh} \Psi \cos(\pi - \varphi)) =$$

$$(\widehat{E}_A+\widehat{E}_D)\operatorname{ch}\Psi-(|\widehat{\mathbf{p}}_A|-|\widehat{\mathbf{p}}_D|)c\operatorname{sh}\Psi\cos\varphi=\widehat{E}\operatorname{ch}\Psi.$$

Пусть после столкновения в K скорости частиц A и D составляют углы α и θ соответственно с осью Ox^1.

С помощью полученого закона преобразования полной энергии и теоремы косинусов найдем модуль полного 3-импульса

$$|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}_A|\cos\alpha+|\mathbf{p}_D|\cos\theta=$$

$$m_Ac\operatorname{sh}\psi_A\cos\alpha+m_Dc\operatorname{sh}\psi_D\cos\theta=$$

$$m_Ac\frac{\operatorname{ch}\psi_A\operatorname{ch}\Psi-\operatorname{ch}\widehat{\psi}_A}{\operatorname{sh}\Psi}+m_Dc\frac{\operatorname{ch}\psi_D\operatorname{ch}\Psi-\operatorname{ch}\widehat{\psi}_D}{\operatorname{sh}\Psi}=$$

$$\frac{E\operatorname{ch}\Psi-\widehat{E}}{c\operatorname{sh}\Psi}=\frac{\widehat{E}(\operatorname{ch}^2\Psi-1)}{c\operatorname{sh}\Psi}=\frac{\widehat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi.$$

Итак, получили формулы

$$E=\widehat{E}\operatorname{ch}\Psi,\qquad |\mathbf{p}|=\frac{\widehat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi.$$

Из второй формулы следует, что **сохранение полного импульса в произвольной СО возможно только одновременно с сохранением энергии.**

А из первой формулы с учетом ее вывода следует, что **для сохранения энергии необходимо, чтобы сохранялся полный импульс в СО «центра инерции».**

Таким образом, **закон сохранения энергии и закон сохранения импульса объединяются в единый релятивистский закон сохранения энергии-импульса.**

Отметим, что **величина угла** φ **не может быть определена из закона сохранения энергии-импульса**.

Движение пары частиц с точки зрения энергии и импульса можно рассматривать как движение воображаемой «составной» частицы с приведенной абсолютной скоростью $|\mathbf{b}| = \operatorname{th}\Psi$ и массой $m = \frac{\widehat{E}}{c^2}$.

Полная энергия и модуль полного импульса пары частиц равны энергии и модулю импульса «составной» частицы

$$E = mc^2 \operatorname{ch}\Psi, \qquad |\mathbf{p}| = mc \operatorname{sh}\Psi.$$

4. Распад π^0-мезона на два гамма кванта.

При взаимодействии пучка протонов с веществом мишени образуются вместе с другими частицами и электрически нейтральные **π^0-мезоны**, которые остаются невидимыми, т.е. не оставляют следов ни в пузырьковой камере, ни на фотоэмульсии. Но после очень недолгой жизни **π^0-мезон распадается на два γ-кванта**, которые можно зарегистрировать счетчиком γ-излучения.

Пусть СО $\widehat{K}$ покоя π^0-мезона движется относительно лабораторной СО K с приведенной скоростью **B**. В $\widehat{K}$ **при распаде π^0-мезона γ-кванты разлетаются со скоростью света в противоположные стороны**.

Поэтому приведенные скорости A_1, A_2 γ-квантов задают точки на абсолюте и точка B с радиус-вектором **B**, лежит на прямой L, проходящей через эти точки.

Пусть D — основание перпендикуляра, проведенного из начала O системы K к прямой L. Тогда величины углов $\angle A_1OD$, $\angle A_2OD$ равны углу параллельности α_l и

$$\cos\alpha_l = \operatorname{th}\rho(O,D).$$

Пусть $\varphi_l = \angle A_1BO$, тогда $0 \leq \varphi_l \leq \pi$, т.к. γ-кванты могут вылететь в любом направлении.

При изменении φ_l будет изменяться угол $2\alpha_l$ между направлениями вылета двух γ-квантов в K. Если, $\varphi_l = 0; \pi$, то $2\alpha = \pi$, $D = O$.

Если угол φ_l возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\rho(O,D)$ изменяется от 0 до $\rho(O,B)$. Угол разлета в K уменьшается от π до $\alpha_{l,\,min}$. Следовательно,

$$\cos\alpha_{l,\,min} = \operatorname{th}\rho(O,B)_{max} = |\mathbf{B}|$$

и в K существует минимальный угол разлета двух γ-квантов.

Экспериментальная проверка наличия этого минимального угла разлета в 1950 г. явилась подтверждением существования π^0-мезона.

Проанализируем распад π^0-мезона, используя планиметрию Лобачевского. Из связи между модулем импульса и энергии для фотонов, а также закона сохранения энергии получим

$$|\hat{\mathbf{p}}_j| = \frac{\hat{E}_j}{c} = \frac{\hat{E}}{2c}, \qquad j = 1, 2,$$

где $\hat{E}$ — энергия покоя π^0-мезона в $\hat{K}$, $|\hat{\mathbf{p}}_j|$, $\hat{E}_j$ — модуль импульса и энергия j-го γ-кванта в $\hat{K}$.

1. Рассмотрим сначала частный случай, когда $B = D$. Запишем закон сохранения энергии-импульса в K в проекции на направление $\overrightarrow{OD}$

$$E = \widehat{E}\,\mathrm{ch}\,\Psi = E_1 + E_2 = 2E_1,$$

$$|\mathbf{p}| = \frac{\widehat{E}}{c}\,\mathrm{sh}\,\Psi = |\mathbf{p}_1|\cos\alpha_l + |\mathbf{p}_2|\cos\alpha_l = \frac{2E_1}{c}\cos\alpha_l,$$

где $\Psi = \rho(O, B)$. В силу симметрии относительно OD закон сохранения импульса на перпендикулярное к $\overrightarrow{OD}$ направление выполняется автоматически.

Первое соотношение дает **формулу для поперечного эффекта Доплера**, т.е. устанавливает связь между энергией фотона в $\widehat{K}$ $\widehat{E}_1 = \frac{\widehat{E}}{2}$ и его энергией в K, движущейся перпендикулярно направлению приведенной скорости фотона

$$E_1 = \widehat{E}_1\,\mathrm{ch}\,\Psi.$$

Подставим эту формулу во второе соотношение

$$\frac{\widehat{E}}{c}\,\mathrm{sh}\,\Psi = \frac{2\widehat{E}_1}{c}\cos\alpha_l\,\mathrm{ch}\,\Psi.$$

Следовательно, $\cos\alpha_l = \mathrm{th}\,\Psi$, т.е. **экспериментальный факт распада π^0-мезона на два γ-кванта эквивалентен выбору аксиомы Лобачевского о параллельных**.

У π^0-мезона есть импульс, направленный по $\overrightarrow{OD}$, поэтому и γ-кванты в силу закона сохранения импульса должны иметь в K ненулевую проекцию на это направление, т.е. $\alpha_l < \frac{\pi}{2}$.

Если бы пространство скоростей имело геометрию Евклида, то угол параллельности $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и распад π^0-мезона на два γ-кванта был бы запрещен законом сохранения импульса.

В нерелятивистской физике невозможны процессы, идущие с изменением массы частиц, т.е. геометрия в этом случае тесно связана с физикой.

2. **Общий случай**. Для нахождения величин энергий и модулей импульсов γ-квантов в K используем сначала поперечное преобразование Доплера из O в D, а затем продольное преобразование Доплера из D в B.

$$|\mathbf{p}_1| = \frac{E_1}{c} = \frac{E_{1,D}}{c}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D) =$$

$$\frac{\widehat{E}_1}{c}e^{-\rho(D,B)}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D) = \frac{\widehat{E}}{2c}e^{-\rho(D,B)}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D),$$

$$|\mathbf{p}_2| = \frac{E_2}{c} = \frac{E_{2,D}}{c}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D) =$$

$$\frac{\widehat{E}_2}{c}e^{\rho(D,B)}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D) = \frac{\widehat{E}}{2c}e^{\rho(D,B)}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D),$$

Используем закон сохранения энергии в СО K

$$E = \widehat{E}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,B) = E_1 + E_2 = \frac{\widehat{E}}{2}e^{-\rho(D,B)}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D) +$$

$$\frac{\widehat{E}}{2}e^{\rho(D,B)}\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D) = \widehat{E}\,\mathrm{ch}\,\rho(D,B)\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D).$$

Следовательно,

$$\mathrm{ch}\,\rho(O,B) = \mathrm{ch}\,\rho(D,B)\,\mathrm{ch}\,\rho(O,D),$$

т.е. **закон сохранения энергии в данном случае интерпретируется теоремой Пифагора в геометрии Лобачевского**.

Заметим, что

$$\sin\alpha_l = \sqrt{1-\cos^2\alpha_l} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\rho(O,D)}$$

и запишем закон сохранения импульса в K в проекции на направление L с учетом полученных формул

$$|\mathbf{p}| \sin\xi_l = \frac{\widehat{E}}{c} \operatorname{sh}\rho(O,B)\sin\xi_l = |\mathbf{p}_2|\sin\alpha_l - |\mathbf{p}_1|\sin\alpha_l =$$

$$\frac{\widehat{E}}{c} \operatorname{sh}\rho(D,B)\operatorname{ch}\rho(O,D)\sin\alpha_l = \frac{\widehat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(D,B),$$

где ξ_l — величина угла между векторами **B** и $\overrightarrow{OD}$.
Получили **частный случай теоремы синусов**

$$\operatorname{sh}\rho(D,B) = \operatorname{sh}\rho(O,B)\sin\xi_l.$$

Из закона сохранения импульса в K в проекции на направление $\overrightarrow{OD}$ получим

$$|\mathbf{p}|\cos\xi_l = \frac{\widehat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(O,B)\cos\xi_l = |\mathbf{p}_2|\cos\alpha_l +$$

$$|\mathbf{p}_1|\cos\alpha_l = \frac{E_1+E_2}{c}\cos\alpha_l = \frac{\widehat{E}}{c}\operatorname{ch}\rho(O,B)\operatorname{th}\rho(O,D).$$

Но **это выражение катета через гипотенузу**

и прилежащий угол

$$\operatorname{th}\rho(O,D) = \operatorname{th}\rho(O,B)\cos\xi_l.$$

Вывод. **Формулы тригонометрии планиметрии Лобачевского интерпретируют законы сохранения энергии и импульса в распаде π^0-мезона на два γ-кванта**.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!