КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.Н. СОСОВ

Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности

Часть 2

Применение геометрии Лобачевского в специальной теории относительности

КАЗАНЬ – 2012

УДК 514.13, 515.17

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н. И. Лобачевского

Сосов Е.Н.
Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 2.: Учебно-методическое пособие. — Казань: Казанский федеральный университет, 2012. 32 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов математиков старших курсов университетов, а также для магистрантов.

Введение.

Во второй части учебно-методического пособия рассматривается применение геометрии Лобачевского в специальной теории относительности (СТО). При этом используется модель Бельтрами–Клейна геометрии Лобачевского, которая дает возможность быстро изложить основные начальные факты и достаточно просто получить основные применения геометрии Лобачевского в СТО. Рассматриваются преобразования Лоренца и устанавливается, что геометрия пространства скоростей частиц в специальной теории относительности является геометрией Лобачевского. Обсуждаются применения эффекта Доплера и разбираются различные случаи упругого столкновения двух частиц. Показывается, что формулы тригонометрии планиметрии Лобачевского интерпретируют законы сохранения энергии и импульса в распаде π^0-мезона на два γ-кванта. Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

1. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна.

Сначала напомним следующие определения.

Системой отсчета (СО) в механике называют тело отсчета с координатной системой, набор эталонов длины и одни часы, жестко скрепленные с телом отсчета.

В произвольной СО, которую обозначим через K, событие характеризуется местом и временем, т.е. упорядоченной четверкой вещественных чисел
$< t; x >=< t; x^1; x^2; x^3 >\in \mathbb{R}^4$.

СО, в которой движение тел, не находящихся под воздействием внешних сил (свободное движение тел), происходит с постоянной скоростью, называется **инерциальной системой отсчета** (ИСО).

В механике предполагают, что во всех ИСО время однородно, а пространство **однородно и изотропно**, т.е. все точки пространства равноправны и все направления пространства равноправны.

Рассмотрим ИСО K и ИСО $\hat{K}$, которая движется относительно K с постоянной скоростью $V =< V^1; V^2; V^3 >$.

В данный момент времени t радиус-векторы точки M связаны равенством

$$\hat{x} = x - R,$$

где $R = Vt + R_0$ — радиус-вектор начала $\hat{O}$ СО $\hat{K}$ относительно начала O СО K. Если предположить, что в момент $t = 0$ оба начала совпадают, то $R = Vt$.

Используя изотропность пространства, мы можем повернуть каждую из СО вокруг своего начала любым способом. За счет поворотов можно упростить полученную формулу до вида

$$\hat{x} =< x^1 - V^1 t; x^2; x^3 > .$$

В классической механике в обеих СО пользуются бесконечно быстрыми сигналами (из одной СО в другую СО), а для таких сигналов конечная относительная скорость систем несущественна, т.е. бесконечная скорость в обеих системах бесконечна.

Следовательно, по часам обеих СО время наступления события будет одно и то же, т.е. $\hat{t} = t$.

Полученные преобразования координатных систем

$$< \hat{t}; \hat{x} >=< t; x^1 - V^1 t; x^2; x^3 >$$

называются **преобразованиями Галилея**. Нетрудно понять, что в общем виде преобразования Галилея имеют вид

$$< \hat{t}; \hat{x} >=< t; Ax + x_0 - Vt >,$$

где x_0 — постоянный вектор, A — ортогональный оператор пространства $\mathbb{R}^3$.

Принцип относительности Галилея состоит в следующем: тождественные механические опыты, поставленные в любых двух ИСО, дадут тождественные результаты. Следовательно, уравнения законов классической механики должны быть одинаковы в любых двух ИСО, т.е. эти уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея (при этом масса считается инвариантной).

Взаимодействие материальных частиц описывается в классической механике с помощью потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц.

Изменение положения одной из взаимодействующих частиц, в силу второго закона Ньютона, отражается на остальных частицах в тот же момент, т.е. взаимодействия распространяются мгновенно (дальнодействие).

Но этот вывод находится в противоречии с опытными данными, из которых можно сделать вывод о существовании **максимальной скорости распространения взаимодействий**. Следовательно, в природе вообще невозможно движение тел со скоростью больше максимальной скорости распространения взаимодействий.

О взаимодействии, распространяющемся от одной частицы к другой говорят как о «сигнале», отправляющемся от первой частицы и «дающем знать» второй об изменении, которое испытала первая.

Передать сигнал — это значит передать энергию и импульс (в СТО они неразделимы). О скорости распространения взаимодействий говорят тогда, как о «скорости сигнала».

Уравнения теории электромагнетизма Максвелла оказались неинвариантными относительно преобразований Галилея. Взаимодействие зарядов или токов в этой теории осуществляется посредством поля, которому приписывается самостоятельное существование.

Кроме того, электромагнитное поле распространяется с конечной скоростью, а это означает, что взаимодействие распространяется со скоростью распространения поля.

Опыт показывает, что наибольшей скоростью передачи сигнала является скорость света $c = 299792458 \pm 1,2$ м/с в вакууме (1975 г.), которая является также скоростью распространения электромагнитных волн любой частоты в вакууме, т.е. опытные данные согласуются с теорией Максвелла.

В 1905 году А. Эйнштейн распространил принцип относительности на все явления природы: **все тождественные физические явления во всех ИСО при одинаковых начальных условиях протекают одинаково**.

Его второй постулат был таким: **скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям и в любой области данной ИСО и одинакова во всех ИСО**.

В настоящее время вместо этого постулата исходят из того, что в природе существует предельная скорость передачи сигнала (взаимодействия).

Далее полагают, что этой предельной скоростью является скоростью света в вакууме (но СТО не утратила бы смысла, если бы предельная скорость оказалась иной).

Из того, что скорость света является предельной скоростью распространения взаимодействий, следует, что она должна иметь одно и то же значение во всех ИСО (иначе различные ИСО стало бы возможным различить и в силу принципа относительности получилось бы противоречие).

2. Пространство Минковского. Преобразования Лоренца.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ псевдоскалярное умножение

$$(< x^0; x >, < y^0; y >) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - (x, y),$$

где, например, $x =< x^1; x^2; x^3 >\in \mathbb{R}^3$.

Получим, так называемое **пространство Минковского** $\mathbb{R}^4_{1,3} = \mathbb{R}^4_1$. Это четырехмерное векторное пространство с псевдоскалярным умножением сигнатуры $(+,-,-,-)$ является ассоциированным для точечного псевдоевклидова пространства с аналогичным названием и тем же самым обозначением.

Если $< t_1; x >$, $< t_2; y >$ — два события (которые называются **мировыми точками**), то величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x - y)^2} =$$

$$\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2}$$

называется **интервалом** или **расстоянием** между этими событиями.

Обычно полагают $x^0 = ct_1$, $y^0 = ct_2$.

Множество $\{< y^0; y >\in \mathbb{R}^4_1 : \ s_{12} = 0\}$ называется **изотропным** (**световым**) **конусом** с вершиной в точке $< x^0; x >$.

Ненулевой вектор называется **времениподобным** (**пространственноподобным, изотропным**), если его псевдоскалярный квадрат больше нуля (меньше нуля, равен нулю).

Если два события бесконечно близки друг другу, то для интервала ds между ними имеем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Из инвариантности скорости света следует, если интервал между двумя событиями равен нулю в одной ИСО, то он равен нулю и в любой другой ИСО, т.е. если $ds = 0$ в одной ИСО K, то $d\hat{s} = 0$ в любой другой ИСО $\hat{K}$.

С другой стороны, ds и $d\hat{s}$ — бесконечно малые одного порядка. Следовательно, ds^2 и $d\hat{s}^2$ должны быть пропорциональны друг другу

$$ds^2 = a d\hat{s}^2,$$

причем коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины скорости обеих ИСО и не может зависеть от координат, времени и направления относительной скорости, поскольку тогда различные точки и направления пространства, а также моменты времени были бы не равноценны.

Рассмотрим три системы отсчета K_1, K_2, K и пусть V_1 и V_2 — скорости движения систем K_1 и K_2 относительно K. Тогда

$$ds^2 = a(|V_1|)ds_1^2, \qquad ds^2 = a(|V_2|)ds_2^2, \qquad ds_1^2 = a(|V_{12}|)ds_2^2,$$

где $|V_{12}|$ — абсолютная величина скорости движения K_2 относительно K_1. Сравнивая эти соотношения, получим

$$\frac{a(|V_2|)}{a(|V_1|)} = a(|V_{12}|).$$

V_{12} зависит не только от абсолютных величин векторов V_1, V_2, но и от угла между ними. Но последний не входит в левую часть полученного равенства.

Следовательно, это равенство может быть справедливым, если функция $a(|V|)$ является постоянной, равной в силу того же равенства единице, т.е. $ds^2 = d\hat{s}^2$ и, следовательно, $s = \hat{s}$.

Таким образом, **интервал является инвариантом по отношению к преобразованию ИСО к любой другой ИСО**.

Эта инвариантность интервала и является математическим выражением постоянства скорости света в любой ИСО.

Группа движений пространства Минковского называется **группой Пуанкаре**. Это группа Ли (докажите).

Компонента единицы группы Пуанкаре называется **группой Лоренца**.

Примеры. Найдем стационарную подгруппу $O(1,1)$ (группу псевдоортогональных преобразований) группы движений пространства $\mathbb{R}^2_1$, произвольный элемент которой оставляет неподвижной точку $(0;0) \in \mathbb{R}^2_1$.

Запишем в матричном виде условие сохранения матрицы G метрического тензора при действии стационарной подгруппы

$$G = A^{\top} G A,$$

где

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ k & d \end{pmatrix} \in O(1,1).$$

Из этого условия получим систему уравнений

$$a^2 - k^2 = 1, \qquad ab - kd = 0, \qquad b^2 - d^2 = -1$$

с неизвестными a, b, k и $d \in \mathbb{R}$. Обозначим $\operatorname{th}\Psi = \frac{k}{a}$. Тогда общее решение нашей системы имеет вид

$$A = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & \pm\operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & \pm\operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \Psi \in \mathbb{R},$$

а группа $O(1,1)$ состоит из четырех компонент связности, общий вид представителей которых следующий

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & \operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & \operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Psi & -\operatorname{sh}\Psi \\ \operatorname{sh}\Psi & -\operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\Psi & \operatorname{sh}\Psi \\ -\operatorname{sh}\Psi & \operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\Psi & -\operatorname{sh}\Psi \\ -\operatorname{sh}\Psi & -\operatorname{ch}\Psi \end{pmatrix}, \qquad \Psi \in \mathbb{R}.$$

Первая матрица есть представитель компоненты единицы группы $O(1,1)$.

Рассмотрим ИСО $K(O; < x^0 = ct; x >)$ и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью V вдоль оси Ox^1 ИСО $\hat{K}(\hat{O}; < \hat{x}^0 = c\hat{t}; \hat{x} >)$ так, что $Ox^2 || \hat{O}\hat{x}^2$, $Ox^3 || \hat{O}\hat{x}^3$.

Ортохронные (с неизменным направлением времени) псевдоортогональные преобразования первого рода (с единичным определителем) этих координат с учетом приведенного примера будут иметь вид

$$x^0 = \hat{x}^0 \operatorname{ch}\Psi + \hat{x}^1 \operatorname{sh}\Psi, \qquad x^1 = \hat{x}^0 \operatorname{sh}\Psi + \hat{x}^1 \operatorname{ch}\Psi,$$

$$x^2 = \hat{x}^2, \qquad x^3 = \hat{x}^3, \qquad \Psi \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим в системе K движение начала $\hat{O} : \hat{x} = 0$. Тогда получим

$$\frac{V}{c} = \frac{x^1}{ct} = \frac{x^1}{x^0} = \operatorname{th}\Psi.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh}\Psi = \frac{B}{\sqrt{1 - B^2}}, \qquad \operatorname{ch}\Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}},$$

где $B = \frac{V}{c}$ условно будем называть **приведенной скоростью**. Тогда преобразования координат можно написать в виде

$$x^0 = \Gamma(\hat{x}^0 + B\hat{x}^1), \qquad x^1 = \Gamma(B\hat{x}^0 + \hat{x}^1), \qquad x^2 = \hat{x}^2, \qquad x^3 = \hat{x}^3,$$

где $\Gamma = (1 - B^2)^{-1/2}$. Эти преобразования называются **преобразованиями Лоренца**.

Обратные преобразования Лоренца нетрудно найти. Они имеют вид

$$\hat{x}^0 = \Gamma(x^0 - Bx^1), \qquad \hat{x}^1 = \Gamma(-Bx^0 + x^1), \qquad \hat{x}^2 = x^2, \qquad \hat{x}^3 = x^3.$$

Если $B = \frac{V}{c} << 1$, то, отбрасывая малые величины, из преобразований Лоренца приближенно получим преобразования Галилея

$$t = \hat{t}, \qquad x^1 = V\hat{t} + \hat{x}^1, \qquad x^2 = \hat{x}^2, \qquad x^3 = \hat{x}^3.$$

Найдем преобразования Лоренца в общем случае, когда ИСО $\hat{K}$ движется относительно ИСО K с постоянной скоростью, определяемой вектором V.

Теперь $B = \frac{V}{c}$ — вектор, определяющий при $|B| \neq 0$ единичный вектор e, т.е. $B = |B|e$. Тогда для каждого вектора $x \in \mathbb{R}^4$

$$x_1 e = (e, x)e = \frac{(B, x)B}{B^2}, \qquad x_2 = x - x_1 e = x - \frac{(B, x)B}{B^2}.$$

Компонента x_1 теперь играет роль координаты x^1 из предыдущего примера, поэтому

$$\hat{x}^0 = \Gamma(x^0 - (B, x)).$$

Учитывая, что ортогональный к направлению скорости вектор x_2 не изменяется, получим

$$\hat{x} = \hat{x}_1 e + \hat{x}_2 = \Gamma(-Bx^0 + x_1 e) + x_2 =$$

$$\Gamma(-Bx^0 + \frac{(B, x)B}{B^2}) + x - \frac{(B, x)B}{B^2} = \Gamma(x - Bx^0) + (\Gamma - 1)(\frac{(B, x)B}{B^2} - x).$$

Таким образом, в общем случае преобразования Лоренца имеют вид

$$\hat{x}^0 = \Gamma(x^0 - (B, x)), \qquad \hat{x} = \Gamma(x - Bx^0) + \frac{(\Gamma - 1)[B, [B, x]]}{B^2} =$$

$$\frac{\Gamma}{B^2}(((B, x) - B^2 x^0)B + (B^2 x - (B, x)B)\sqrt{1 - B^2}).$$

Если считать, что $q = \frac{x}{x^0}$ — радиус-вектор точки из открытого шара $B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$, то **преобразования Лоренца определят параллельный перенос в модели Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского в этом шаре на вектор** $(-B)$:

$$\hat{q} = \frac{((B,q) - B^2)B + (B^2 q - (B,q)B)\sqrt{1-B^2}}{B^2(1-(B,q))}.$$

Отметим еще два простых следствия из вида преобразований Лоренца.

1. Если в СО K на оси $Ox^1 = Ox$ покоится стержень длины $l_0 = \Delta x = x_2 - x_1$, то в движущейся вдоль этой оси со скоростью V СО $\hat{K}$ найдем

$$x_i = \Gamma(B\hat{x}^0 + \hat{x}_i),\ i = 1,2.$$

Собственной длиной стержня называется его длина в той СО, в которой он покоится. Следовательно, l_0 — собственная длина стержня и $l = \Delta\hat{x} = l_0\Gamma^{-1} = l_0\sqrt{1-B^2}$.

Таким образом, происходит **лоренцево сокращение длины стержня**: длина стержня в движущейся СО $\hat{K}$ сокращается в отношении Γ^{-1}.

Объем также сокращается в отношении Γ^{-1}, поскольку поперечные размеры тела не изменяются.

2. Пусть теперь в СО $\hat{K}$, где покоятся часы, два события произошли в одном и том же месте с координатами $(\hat{x}^1;\hat{x}^2;\hat{x}^3)$ в СО $\hat{K}$ и в СО $\hat{K}$ время между этими событиями есть $\Delta\hat{t} = \hat{t}_2 - \hat{t}_1$. Тогда

$$x_i^0 = \Gamma(\hat{x}_i^0 + B\hat{x}^1),\ i = 1,2.$$

Следовательно, $\Delta t = t_2 - t_1 = \Gamma\Delta\hat{t}$ и **в движущейся СО часы идут медленнее в отношении** Γ^{-1}.

3. Геометрия пространства скоростей частиц в специальной теории относительности является геометрией Лобачевского.

3-**скоростью частицы** в СО K называется вектор-функция

$$v = < \frac{dx^1}{dt}; \frac{dx^2}{dt}; \frac{dx^3}{dt} > = \frac{dx}{dt}.$$

Рассмотрим также вектор-функцию

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{dx}{dx^0}.$$

Пусть ИСО $\hat{K}(\hat{O}; < \hat{x}^0 = c\hat{t}; \hat{x} >)$ движется относительно $K(O; < x^0 = ct; x >)$ с постоянной скоростью V вдоль оси Ox^1 так, что $Ox^2 || \hat{O}\hat{x}^2$, $Ox^3 || \hat{O}\hat{x}^3$.

Из преобразований Лоренца найдем

$$dx^0 = \Gamma(d\hat{x}^0 + Bd\hat{x}^1), \qquad dx^1 = \Gamma(Bd\hat{x}^0 + d\hat{x}^1), \qquad dx^2 = d\hat{x}^2, \qquad dx^3 = d\hat{x}^3.$$

Следовательно,

$$\beta^1 = \frac{\hat{\beta}^1 + B}{1 + B\hat{\beta}^1}, \quad \beta^2 = \frac{\hat{\beta}^2\sqrt{1 - B^2}}{1 + B\hat{\beta}^1}, \quad \beta^3 = \frac{\hat{\beta}^3\sqrt{1 - B^2}}{1 + B\hat{\beta}^1}.$$

Для общего преобразования Лоренца получим

$$d\hat{x}^0 = \Gamma(dx^0 - (B, dx)), \qquad d\hat{x} = \Gamma(dx - Bdx^0) + \frac{(\Gamma - 1)[B, [B, dx]]}{B^2} =$$

$$\frac{\Gamma}{B^2}(((B, dx) - B^2 dx^0)B + (B^2 dx - (B, dx)B)\sqrt{1 - B^2}).$$

Следовательно,

$$\hat{\beta} = \frac{\beta - B + \dfrac{(1 - \Gamma^{-1})[B, [B, \beta]]}{B^2}}{1 - (B, \beta)} =$$

$$\frac{((B, \beta) - B^2)B + (B^2\beta - (B, \beta)B)\sqrt{1 - B^2}}{B^2(1 - (B, \beta))}.$$

Кроме того,

$$\hat{\beta}^2 = \frac{(\beta - B)^2 - [B, \beta]^2}{(1 - (B, \beta))^2} = \frac{(1 - (B, \beta))^2 - (1 - \beta^2)(1 - B^2)}{(1 - (B, \beta))^2},$$

$$1 - \hat{\beta}^2 = \frac{(1 - \beta^2)(1 - B^2)}{(1 - (B, \beta))^2}.$$

Эти формулы можно получить и с помощью формул планиметрии Лобачевского следующим образом. Параллельный перенос является изометрией и $\hat{\beta} = g_B^{-1}(\beta)$, следовательно,

$$\rho(0, \hat{\beta}) = \rho(0, g_B^{-1}(\beta)) = \rho(g_B^{-1}(g_B(0)), g_B^{-1}(\beta)) = \rho(B, \beta).$$

Осталось использовать формулу для метрики в левой и правой частях полученного равенства, затем привести выражения к нужному виду. Кроме того, вторая формула есть теорема косинусов планиметрии Лобачевского

$$\operatorname{ch}\rho(0,\hat{\beta}) = \operatorname{ch}\rho(0,\beta)\operatorname{ch}\rho(0,B) - \operatorname{sh}\rho(0,\beta)\operatorname{sh}\rho(0,B)\cos\alpha,$$

где α — величина угла между векторами B и β, записанная в ином виде

$$(1-\hat{\beta}^2)^{-1/2} = (1-\beta^2)^{-1/2}(1-B^2)^{-1/2}(1-(\beta,B)).$$

Нужно просто возвести обе части в степень (-2).

Если приближенно $B=\beta+d\beta$, то получим римановы метрики

$$dl^2 = \frac{d\beta^2 - [d\beta,\beta]^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{(1-\beta^2)d\beta^2 + (\beta,d\beta)^2}{(1-\beta^2)^2}\,, \qquad ds^2 = c^2\frac{(c^2-v^2)dv^2 + (v,dv)^2}{(c^2-v^2)^2}\,.$$

Таким образом, **пространство скоростей частиц является пространством Лобачевского, а преобразование скорости частицы является параллельным переносом в этом пространстве**.

4. 4-скорость частицы, 4-вектор энергии-импульса частицы и функция Гамильтона.

4-скоростью частицы в $\mathbb{R}^4_1$ называется вектор с компонентами

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}\,, \qquad i=0,1,2,3.$$

Преобразуются эти компоненты также как и координаты при обратном преобразовании Лоренца

$$u^{i'} = a^{i'}_i u^i,$$

где

$$(a^{i'}_i) = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma B & 0 & 0 \\ -\Gamma B & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно также получить **ковариантные компоненты скорости частицы**

$$u_i = g_{ik}u^k,$$

где ненулевые компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1.$$

Компоненты 4-скорости удовлетворяют тождеству

$$u_i u^i = 1.$$

Действительно,

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2} = c\sqrt{1-\beta^2}dt = \gamma^{-1}dx^0,$$

где $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = \operatorname{ch}\rho(0,\beta) = \operatorname{ch}\psi$. Тогда

$$< u^0; u >=< u^0; u^1; u^2; u^3 >= \gamma < 1; \beta >, \qquad u_i u^i = \gamma^2(1-\beta^2) = 1.$$

Таким образом, 4-скорость частицы есть радиус-вектор точки из $\mathbb{S}_+(0,1)$ в $\mathbb{R}^4_1$.

Принцип наименьшего действия заключается в том, что для любой механической системы существует такой интеграл S (называемый действием), который минимален вдоль малых участков линии движения (следовательно, вариация δS которого равна нулю).

Таким образом, мировые линии массивных частиц в $\mathbb{R}^4_1$ есть экстремали функционала S.

Действие для свободной материальной частицы не должно зависеть от выбора ИСО, т.е. должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца. Следовательно, интеграл должен быть взят от скаляра $-\alpha$, умноженного на дифференциал первой степени от интервала (минус выбран, чтобы интеграл принимал вдоль прямой минимальное значение)

$$S = -\alpha\int\limits_a^b ds = -\alpha\int\limits_{t_1}^{t_2} c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt.$$

При $c \to \infty$ функция Лагранжа

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

должна перейти в ее классическое выражение

$$L = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Разложим L по степеням $\frac{v}{c}$

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} + \ldots.$$

Следовательно, $\alpha = mc$, поскольку постоянную в L можно опустить (она исчезает при варьировании действия). Таким образом,

$$L = -mc^2\gamma^{-1}, \qquad S = -mc\int\limits_a^b ds.$$

3-импульсом частицы называется вектор

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = m\gamma v = mc\gamma\beta.$$

Тогда модуль 3-импульса имеет вид

$$|p| = mc\,\mathrm{sh}\,\psi.$$

3-силой называется вектор

$$f = \frac{dp}{dt} = m\frac{d(\gamma v)}{dt}\,.$$

Энергией частицы называется величина

$$E = (v, \frac{\partial L}{\partial v}) - L.$$

Учитывая выражение для 3-импульса, получим

$$E = (v,p) - L = m\gamma v^2 + mc^2\gamma^{-1} = mc^2\gamma = mc^2\,\mathrm{ch}\,\psi.$$

Энергией покоя частицы называется величина ее энергии при $v = 0$, т.е. $E_0 = mc^2$.

Энергия и импульс частицы связаны следующими соотношениями.

Связь 1.

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2.$$

Действительно,

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \operatorname{ch}^2\psi - m^2c^2 \operatorname{sh}^2\psi = m^2c^2.$$

Если $|\beta| << 1$, то приблизительно $E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$.

Связь 2.

$$p = \frac{Ev}{c^2}.$$

Если масса покоя частицы равна нулю (например, для фотона), то из этой формулы при $|v| = c$ получим

$$|p| = \frac{E}{c}.$$

В обычном же случае из $|v| \to c$ следует $E \to \infty$ и $|p| \to \infty$.

Получим аналогичные формулы в четырехмерном случае

$$ds = \sqrt{dx_i dx^i}, \qquad \delta S = -mc\delta\int\limits_a^b ds = -mc\int\limits_a^b \delta\sqrt{dx_i dx^i} =$$

$$-mc\int\limits_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc\int\limits_a^b u_i d\delta x^i = -mcu_i\delta x^i|_a^b + mc\int\limits_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds.$$

Для нахождения уравнений движения сравниваются различные траектории, проходящие через два заданных положения, т.е.

$$\delta x^i|_a = \delta x^i|_b = 0.$$

Истинная траектория движения определяется тогда из условия $\delta S = 0$. Тогда ковариантные компоненты **4-ускорения** равны нулю

$$w_i = \frac{du_i}{ds} = \gamma\frac{du_i}{dx^0} = 0.$$

Для того, чтобы найти вариацию действия, как функцию от координат, надо считать заданной лишь одну точку $\delta x^i|_a = 0$, а вторую переменной.

Но при этом рассматриваются только истинные, т.е. траектории, удовлетворяющие уравнениям движения.

Следовательно, последний интеграл равен нулю и

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i,$$

где $\delta x^i = \delta x^i|_b$.

Ковариантные компоненты **4-импульса частицы** определяются формулами

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i.$$

Следовательно,

$$p^i = mcu^i, \qquad < p^0; p^1; p^2; p^3 >=< \frac{E}{c}; mc\gamma\beta >, \qquad u_i w^i = u_i \frac{du^i}{ds} = 0.$$

Формулы преобразования 4-импульса частицы следующие

$$\hat{p}^0 = \Gamma(p^0 - Bp^1), \qquad \hat{p}^1 = \Gamma(-Bp^0 + p^1), \qquad \hat{p}^2 = p^2, \qquad \hat{p}^3 = p^3.$$

Эти же формулы в ином виде

$$\hat{E} = E \operatorname{ch} \Psi - cp^1 \operatorname{sh} \Psi, \qquad c\hat{p}^1 = -E \operatorname{sh} \Psi + cp^1 \operatorname{ch} \Psi, \qquad \hat{p}^2 = p^2, \qquad \hat{p}^3 = p^3.$$

Из формул

$$p^i = mcu^i, \qquad u_i u^i = 1$$

получим, что 4-импульс частицы есть радиус-вектор точки из $\mathbb{S}_+(0, mc)$ в $\mathbb{R}^4_1$, т.е.

$$p_i p^i = m^2 c^2.$$

Это тождество в силу формулы $< p^0; p >=< \frac{E}{c}; p >$ эквивалентно связи 1

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2.$$

При переходе к модели Бельтрами–Клейна 4-скорость частицы отобразится в β, а 4-импульс отобразится в $mc\beta$.

Функцией Гамильтона H называется энергия, выраженная через импульс

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots .$$

4-вектором силы называется вектор с компонентами

$$F^i = \frac{dp^i}{ds} = mcw^i = mc\gamma\frac{du^i}{dx^0}\,.$$

Очевидно, что его компоненты удовлетворяют тождеству

$$u_iF^i = 0.$$

Непосредственный расчет дает

$$< F^i >= mc\frac{d < \gamma;\gamma\beta >}{ds} = mc\gamma\frac{d < \gamma;\gamma\beta >}{dx^0} = \frac{\gamma}{c} < (\beta, f); f > .$$

Задача. Интерпретировать в пространстве скоростей движение частицы постоянной массы под действием постоянной 3-силы. (Ответ: движение происходит либо по прямой, либо по эквидистанте.)

5. Угол аберрации света звезды. Эффект Доплера.

Под **аберрацией света** понимают изменение направления распространения света (излучения) при переходе от одной СО к другой.

Допустим, что наблюдатель в точке K видит звезду M под прямым углом к направлению движения Земли. Пусть через полгода в точке $\hat{K}$ он увидит эту звезду под углом α к противоположному направлению движения Земли.

Углом аберрации называется угол $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

С учетом изменения направления движения Земли, движущейся приблизительно с абсолютной скоростью $|V| \approx 30\frac{\text{км}}{\text{сек}} \approx 10^{-4}c$, модуль приведенной скорости движения $\hat{K}$ относительно K равен

$$|B| = \operatorname{th}\Psi = \frac{2|V|}{c} = 2*10^{-4}.$$

Фотоны движутся со скоростью света, поэтому α — угол параллельности и

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \operatorname{th}\Psi = |B|,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|B|}{\sqrt{1-B^2}} \approx |B| + \frac{|B|^3}{2}.$$

А в классической механике $\operatorname{tg}\varphi = |B|$, что в пределах точности измерения не отличается от релятисткого значения. Таким образом, **результаты экспериментов по измерению аберрации света звезд хорошо объясняются и классической механикой и СТО.**

Эффект Доплера есть сдвиг частоты излучения при удалении (приближении) источника излучения от наблюдателя.

Таким образом, частота электромагнитной волны зависит от относительной скорости источника излучения и наблюдателя.

Сначала припишем фотону некоторую конечную массу и определим его энергию в новой СО, а затем перейдем к пределу при стремлении массы к нулю и абсолютной приведенной скорости к единице.

Пусть K — СО излучателя, в которой энергия частицы F с массой m равна $E = mc^2 \operatorname{ch}\psi$.

Пусть наблюдатель находится в СО $\hat{K}$, которая движется с приведенной скоростью B относительно СО K под углом θ к направлению движения частицы F. Используем теорему косинусов для преобразования энергии из СО K в СО $\hat{K}$

$$\hat{E} = mc^2 \operatorname{ch}\hat{\psi} = mc^2(\operatorname{ch}\psi \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{sh}\psi \operatorname{sh}\Psi \cos\theta) =$$

$$E(\operatorname{ch}\Psi - \operatorname{th}\psi \operatorname{sh}\Psi \cos\theta).$$

Тогда отношение

$$\frac{\hat{E}}{E} = \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{th}\psi \operatorname{sh}\Psi \cos\theta$$

уже не зависит от массы частицы и нетрудно сделать предельный переход к фотону: точка F, изображающая приведенную скорость частицы, уйдет на абсолют, т.е. абсолютная приведенная скорость частицы $|\beta| = \operatorname{th}\psi$ в пределе даст единицу.

Учтем известную формулу для энергии фотона $E = h\nu$, где ν — частота электромагнитного излучения, $h = 6{,}626 * 10^{-34}$Дж $*$ сек — постоянная Планка. Тогда получим **формулу, определяющую искомый сдвиг частоты, т.е. эффект Доплера**.

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} = \frac{\hat{E}}{E} = \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{sh}\Psi \cos\theta = \Gamma(1 - |B|\cos\theta).$$

Важное значение имеет частный случай, когда $\theta = 0$. Тогда

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} = \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{sh}\Psi = e^{-\Psi},$$

то есть принимаемая наблюдателем частота в e^{Ψ} раз меньше частоты излучения источником. Выразим скорость удаления через эти частоты

$$|V| = c \operatorname{th}\Psi = c\frac{e^{\Psi} - e^{-\Psi}}{e^{\Psi} + e^{-\Psi}} = c\frac{\nu^2 - \hat{\nu}^2}{\nu^2 + \hat{\nu}^2}\,.$$

Допустим, что в далекой галактике возбужденные атомы излучают свет с частотой ν. Спектры излучения атомов в этой галактике и на Земле одинаковы.

Если галактика удаляется с большой скоростью, то для наблюдателя на Земле каждая линия этого спектра в силу эффекта Доплера окажется сдвинутой и будет иметь частоту $\hat{\nu}$.

Согласно проведенным измерениям галактики обычно удаляются друг от друга со скоростью, пропорциональной расстояниям между ними. Но галактика Андромеды, находящаяся от нашей на расстоянии в 2,5 млн световых лет, приближается к нашей галактике со скоростью 120км/с и они начнут сталкиваться через 4 млрд лет.

Так называемые квазары имеют красное смещение $\frac{\hat{\nu}}{\nu}$ от 2 до $2,5$, что соответствует скорости удаления $|V|$ от $0,6c$ до $0,7c$.

Теоретически поперечный эффект Доплера может получится при $\theta = \frac{\pi}{2}$, т.е. источник движется перпендикулярно направлению движения наблюдателя. Тогда небольшой сдвиг возникает только для электромагнитных волн

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} = \operatorname{ch}\Psi = (1 - B^2)^{-1/2}.$$

Для обычных волн

$$(1 - B^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{B^2}{2}\,,$$

поэтому величина

$$\frac{\hat{\nu} - \nu}{\nu} \approx \frac{B^2}{2}$$

в реальных ситуациях очень мала. Таким образом, **для обычных волн поперечный эффект Доплера отсутствует**.

Если $|B| << 1$, то

$$\frac{\hat{\nu}}{\nu} \approx 1 - |B| \cos\theta, \qquad \frac{\nu - \hat{\nu}}{\nu} \approx \frac{|V|}{c} \cos\theta.$$

Это хорошо известрые формулы для эффекта Доплера в классическом случае. Их применяют, например, следующим образом.

На космическом аппарате (спутнике) устанавливают радиопередатчик со стабилизированной частотой ν, а на Земле — радиосистему, которая позволяет с высокой точностью измерить $\hat{\nu}$ и $\cos\theta$.

По результатам этих измерений с помощью формулы Доплера определяют скорость космического аппарата. С помощью формулы Доплера измеряют также скорости ракет, самолетов и автомобилей.

6. Упругое столкновение двух частиц. Упругое рассеяние частиц одинаковой массы.

Упругое столкновение двух частиц это такое столкновение, при котором не изменяются внутренние состояния частиц.

Пусть в СО K до столкновения частица A имеет 3-импульс $p_A = 0$ и энергию E_A, а частица D имеет 3-импульс p_D и энергию E_D.

Таким образом, их полная энергия есть $E = E_A + E_D$ и полный 3-импульс, вдоль которого направим ось Ox^1, есть $p = p_A + p_D$.

Пусть начало новой СО $\hat{K}$ есть «центр инерции», т.е. в этой СО сумма импульсов обеих частиц равна нулю. И пусть это начало движется относительно K со скоростью V.

После соударения полная энергия и полный импульс не изменятся, импульсы частиц только повернутся относительно центра инерции $\hat{O}$ на некоторый угол φ, который называется **углом рассеяния в СО «центра инерции»**.

Мы оставим прежние обозначения для импульсов, относительных скоростей и энергий после столкновения. Тогда $\varphi =< \beta_D \hat{O} \hat{\beta}_D$.

Найдем закон преобразования полной энергии с помощью теоремы косинусов планиметрии Лобачевского и условия для импульсов в СО $\hat{K}$

$\hat{p}_A = -\hat{p}_D$.

$$E = E_A + E_D = m_A c^2 \operatorname{ch}\psi_A + m_D c^2 \operatorname{ch}\psi_D =$$

$$m_A c^2(\operatorname{ch}\hat{\psi}_A \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{sh}\hat{\psi}_A \operatorname{sh}\Psi\cos\varphi) + m_D c^2(\operatorname{ch}\hat{\psi}_D \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{sh}\hat{\psi}_D \operatorname{sh}\Psi\cos(\pi-\varphi)) =$$

$$(\hat{E}_A + \hat{E}_D)\operatorname{ch}\Psi - (|\hat{p}_A| - |\hat{p}_D|)c\operatorname{sh}\Psi\cos\varphi = \hat{E}\operatorname{ch}\Psi.$$

Пусть после столкновения в СО K скорости частиц A и D составляют углы α и θ соответственно с осью Ox^1.

С помощью полученого закона преобразования полной энергии и теоремы косинусов найдем модуль полного 3-импульса

$$|p| = |p_A|\cos\alpha + |p_D|\cos\theta = m_A c \operatorname{sh}\psi_A \cos\alpha + m_D c \operatorname{sh}\psi_D \cos\theta =$$

$$m_A c \frac{\operatorname{ch}\psi_A \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{ch}\hat{\psi}_A}{\operatorname{sh}\Psi} + m_D c \frac{\operatorname{ch}\psi_D \operatorname{ch}\Psi - \operatorname{ch}\hat{\psi}_D}{\operatorname{sh}\Psi} =$$

$$\frac{E\operatorname{ch}\Psi - \hat{E}}{c\operatorname{sh}\Psi} = \frac{\hat{E}(\operatorname{ch}^2\Psi - 1)}{c\operatorname{sh}\Psi} = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi.$$

Итак, получили формулы

$$E = \hat{E}\operatorname{ch}\Psi, \qquad |p| = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi.$$

Из второй формулы следует, что **сохранение полного импульса в произвольной СО возможно только одновременно с сохранением энергии.**

А из первой формулы с учетом ее вывода следует, что **для сохранения энергии необходимо, чтобы сохранялся полный импульс в СО «центра инерции».**

Таким образом, **закон сохранения энергии и закон сохранения импульса объединяются в единый релятивистский закон сохранения энергии-импульса.**

Отметим, что **величина угла φ не может быть определена из закона сохранения энергии-импульса**.

Кроме того, движение пары частиц с точки зрения энергии и импульса можно рассматривать как движение воображаемой «составной» частицы с приведенной абсолютной скоростью $|\beta| = \operatorname{th}\Psi$ и массой $m = \frac{\hat{E}}{c^2}$.

Полная энергия и модуль полного импульса пары частиц равны энергии и модулю импульса «составной» частицы

$$E = mc^2 \operatorname{ch} \Psi, \qquad |p| = mc \operatorname{sh} \Psi.$$

Пусть в лабораторной СО K (т.е. СО, в которой происходит эксперимент, например, в камере Вильсона) электрон D, имеющий приведенную скорость β_D, рассеивается на покоящемся электроне A, с приведенной скоростью $\beta_A = 0$.

Массы частиц одинаковы, поэтому в СО $\hat{K}$ «центра инерции» $\hat{\beta}_D = -\hat{\beta}_A$. Снова сохраним обозначения для рассматриваемых величин после столкновения.

После столкновения мы получим следующие четыре угла: $\theta =< \hat{O}O\hat{\beta}_D$ — **угол рассеяния в лабораторной СО K**; $\alpha =< \hat{\beta}_A O\hat{O}$ — **угол отдачи**, под которым вылетает покоящийся электрон; $\varphi =< O\hat{O}\hat{\beta}_A$ — **угол рассеяния в СО «центра инерции» $\hat{K}$**; $\alpha + \theta =< \hat{\beta}_A O \hat{\beta}_D$ — **угол разлета**, т.е. угол между направлениями скоростей электронов после столкновения, равный углу между их треками в камере Вильсона (фиксируемый на фотографии после столкновения).

Заметим, что треугольники $\Delta O\hat{O}\hat{\beta}_D$, $\Delta O\hat{O}\hat{\beta}_A$ равнобедренные, поскольку импульсы после соударения поворачиваются и массы частиц равны.

Пусть P (P_1) — основание перпендикуляра, проведенного из точки $\hat{O}$ к стороне $O\hat{\beta}_D$ ($O\hat{\beta}_A$).

Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника плоскости Лобачевского совпадает с биссектрисой (докажите!). Тогда, используя еще двойственную теорему косинусов для треугольника $\Delta O\hat{O}P$, получим

$$\operatorname{ch} \Psi = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + \cos\theta \cos \frac{\pi - \varphi}{2}}{\sin\theta \sin \frac{\pi-\varphi}{2}} = \operatorname{ctg}\theta \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\,.$$

Следовательно, связь угла рассеяния в СО K с углом рассеяния в СО $\hat{K}$ следующая

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\operatorname{ch}\Psi} = \frac{2m_A c^2 \operatorname{tg}\varphi/2}{\hat{E}}\,,$$

где $\hat{E} = 2m_A c^2 \operatorname{ch}\Psi$ — суммарная энергия частиц в СО «центра инерции» $\hat{K}$. Аналогично, для треугольника $\Delta O\hat{O}P_1$, получим

$$\operatorname{ch}\Psi = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\cos\varphi/2}{\sin\theta\sin\varphi/2} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,.$$

Следовательно, связь угла отдачи в СО K с углом рассеяния в СО $\hat{K}$ следующая

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2m_A c^2 \operatorname{ctg}\varphi/2}{\hat{E}}\,.$$

Тогда связь угла разлета в СО K с углом рассеяния в СО $\hat{K}$ следующая

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\theta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta} = \frac{1 - \frac{4m_A^2c^4}{\hat{E}^2}}{\frac{2m_Ac^2}{\hat{E}}(\operatorname{tg}\varphi/2 + \operatorname{ctg}\varphi/2)} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{E}}{2m_Ac^2} - \frac{2m_Ac^2}{\hat{E}}\right)\sin\varphi.$$

Если величина угла рассеяния φ в СО $\hat{K}$ стремится к минимальному значению, то в лабораторной СО быстрая частица рассеивается на небольшой угол θ.

Следовательно, частица A после соударения движется почти перпендикулярно к направлению движения налетающей частицы.

Это практически нерелятивисткий случай, когда до столкновения $|\beta_D| << 1$ и $\operatorname{ctg}(\alpha+\theta) \approx 0$, т.е. $\alpha + \theta \approx \pi/2$.

При $\varphi = \pi/2$ минимальный угол разлета $(\alpha+\theta)_{min}$ может быть найден из любой формулы, поскольку $\alpha = \theta$.

$$\operatorname{ctg}\alpha_{min} = \frac{\hat{E}}{2m_Ac^2}\,.$$

7. Упругое рассеяние тяжелой частицы на покоящейся легкой, а также легкой частицы на покоящейся тяжелой. Формула Комптона.

Пусть в лабораторной СО K покоится легкая частица и тяжелая частица D с ней сталкивается. В СО «центра инерции» $\hat{p}_A = -\hat{p}_D$, следовательно, $m_A \operatorname{sh}\hat{\psi}_A = m_D \operatorname{sh}\hat{\psi}_D$.

Угол рассеяния θ максимальный, когда после столкновения $< O\hat{\beta}_D\hat{O} = \frac{\pi}{2}$. В этом случае с учетом того, что после столкновения $\Psi = \hat{\psi}_A$, получим

$$\sin\theta_{max} = \frac{\operatorname{sh}\hat{\psi}_D}{\operatorname{sh}\hat{\psi}_A} = \frac{m_A}{m_D}\,,$$

т.е. **в лабораторной СО максимальный угол рассеяния тяжелой частицы на легкой зависит только от отношения масс этих частиц и не зависит от их энергий**.

Измерив θ_{max} в большой серии экспериментов, можно узнать массу тяжелых частиц

$$m_D = \frac{m_A}{\sin\theta_{max}}\,,$$

поскольку массы частиц мишени обычно известны.

Пусть теперь в лабораторной СО K покоится тяжелая частица A с массой $m_A = M$ и налетающая легкая частица D имеет массу $m_D = m$.

Тогда в лабораторной СО $E = mc^2 \operatorname{ch}\rho(0, \beta_D)$ — энергия легкой частицы до столкновения и $E^* = mc^2 \operatorname{ch}\rho(0, \beta_D^*)$ — энергия легкой частицы после столкновения.

Запишем закон сохранения энергии в СО, связанной с частицей D после столкновения,

$$mc^2 \operatorname{ch}\rho(\beta_D^*, \beta_D) + Mc^2 \operatorname{ch}\rho(\beta_D^*, 0) = mc^2 + Mc^2 \operatorname{ch}\rho(\beta_D^*, \beta_A^*).$$

Отметим, что в силу поворота импульсов относительно «центра инерции» после столкновения

$$\rho(\beta_D^*, \beta_A^*) = \rho(\beta_D, 0).$$

Используем теорему косинусов для треугольника $\Delta O\beta_D\beta_D^*$

$$\operatorname{ch}\rho(\beta_D^*, \beta_D) = \operatorname{ch}\rho(0, \beta_D)\operatorname{ch}\rho(0, \beta_D^*) - \operatorname{sh}\rho(0, \beta_D)\operatorname{sh}\rho(0, \beta_D^*)\cos\theta =$$

$$\operatorname{ch}\rho(0, \beta_D)\operatorname{ch}\rho(0, \beta_D^*)(1 - \operatorname{th}\rho(0, \beta_D)\operatorname{th}\rho(0, \beta_D^*)\cos\theta) = \frac{EE^*}{m^2c^4}(1 - |\beta_D||\beta_D^*|\cos\theta).$$

Тогда из закона сохранения энергии получим связь начальной и конечной энергий легкой частицы с углом ее рассеяния

$$M(E - E^*) = \frac{EE^*}{c^2}(1 - |\beta_D||\beta_D^*|\cos\theta) - m^2c^2.$$

Эта формула представляет наибольший интерес в ультрарелятивистском пределе, когда энергия E, а значит и энергия E^*, много больше энергии покоя легкой частицы $E,\ E^* >> mc^2$.

Ее скорость до и после рассеяния в этом случае очень близка к скорости света $|\beta_D| \approx 1$, $|\beta_D^*| \approx 1$.

Кроме того, в правой части можно пренебречь выражением $(-m^2c^2)$, которое мало по сравнению с первым слагаемым. В итоге получим **формулу Комптона**

$$M(E - E^*) = \frac{EE^*}{c^2}(1 - \cos\theta).$$

Отметим, что это точное равенство, если легкая частица является фотоном, т.е. формула получается при стремлении массы m к нулю и абсолютной приведенной скорости до и после столкновения к единице.

В этом случае $E = h\nu$, $E^* = h\nu^*$ и формулу Комптона можно записать в виде

$$\frac{\nu}{\nu^*} = 1 + \frac{h\nu}{Mc^2}(1 - \cos\theta).$$

Из этой формулы следует, что частота фотона не изменяется только при рассеянии на нулевой угол.

При увеличении угла θ частота и энергия рассеянного фотона уменьшается, причем сдвиг частоты максимален при $\theta = \pi$.

Это наблюдал Артур Комптон в 1922-1923 годах при рассеянии рентгеновских лучей на графической мишени, когда часть рассеянного излучения имела частоту меньшую, чем частота падающего излучения.

Пусть в мишени неизвестные частицы. Тогда их массу можно вычислить из формулы Комптона

$$M = \frac{EE^*(1 - \cos\theta)}{c^2(E - E^*)}.$$

8. Дефект массы. Распад нейтрального пиона на два гамма кванта.

Пусть покоящееся тело массы M распадается на две части A и D с массами m_A и m_D соответственно. Тогда из закона сохранения энергии

$E = E_A + E_D$ получим

$$M = \frac{E}{c^2} = m_A \operatorname{ch}\psi_A + m_D \operatorname{ch}\psi_D \geq m_A + m_D.$$

Можно также найти энергии частей при известных массах. Действительно, $p_A + p_D = 0$, следовательно,

$$|p_A| = m_A c \operatorname{sh}\psi_A = m_D c \operatorname{sh}\psi_D = |p_D|,$$

$$E(E_A - E_D) = E_A^2 - E_D^2 = m_A^2 c^4 \operatorname{ch}^2\psi_A - m_D^2 c^4 \operatorname{ch}^2\psi_D = c^4(m_A^2 - m_D^2).$$

Тогда

$$E_A = \frac{c^2(M^2 + m_A^2 - m_D^2)}{2M}, \qquad E_D = \frac{c^2(M^2 - m_A^2 + m_D^2)}{2M}.$$

Величина $\Delta M = M - m_A - m_D$ называется **дефектом массы**.

Для того, чтобы тело массы M распалось на две части с массами m_A и m_D при отрицательном дефекте, необходимо сообщить телу извне энергию равную по крайней мере **энергии связи** $|\Delta M|c^2$.

Если частица массы M движется, то из связи 1 между энергией и импульсом получим

$$M^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{(E_A + E_D)^2}{c^2} - (p_A + p_D)^2\right) = m_A^2 + m_D^2 + \frac{2}{c^2}\left(\frac{E_A E_D}{c^2} - |p_A||p_D|\cos\theta\right).$$

Если частица A покоится, то

$$p_A = 0, \qquad E_A = m_A c^2, \qquad M^2 = m_A^2 + m_D^2 + \frac{2m_A E_D}{c^2}.$$

В ускорителях $\frac{E_D}{c^2}$ может более, чем в 100 раз превосходить m_A и m_D, поэтому

$$M \approx \frac{\sqrt{2m_A E_D}}{c}.$$

Если при этом частица D медленная, то

$$E_D \approx m_D c^2, \qquad M^2 \approx (m_A + m_D)^2,$$

т.е. приближенно выполняется закон сложения масс.

Задача. Пусть частица A покоится и частица D имеет приведенную скорость β_D. Найти массу M и абсолютную величину $|\beta|$ сложной частицы.

Найдем сначала массу

$$M^2 = m_A^2 + m_D^2 + 2m_A m_D \gamma_D,$$

Затем абсолютную величину приведенной скорости

$$|\beta| = \frac{|p|c}{E} = \frac{m_D|\beta_D|\gamma_D}{m_A + m_D\gamma_D}\,.$$

При взаимодействии пучка протонов с веществом мишени образуются вместе с другими частицами и π-мезоны (пионы) трех сортов: положительно заряженные π^+; отрицательно заряженные π^-; электрически нейтральные π^0-мезоны.

π^0-мезоны после недолгой жизни распадаются на два γ-кванта (т.е. два фотона больших энергий), которые можно зарегистрировать счетчиком γ-излучения.

Сами π^0-мезоны не вступают в электрическое взаимодействие с атомами и не оставляют следов ни в пузырьковой камере или камере Вильсона, ни на фотоэмульсии, т.е. остаются невидимыми.

Пусть СО $\hat{K}$ покоя π^0-мезона движется относительно лабораторной СО K с приведенной скоростью B. В СО $\hat{K}$ при распаде π^0-мезона γ-кванты разлетаются со скоростью света в противоположные стороны.

Поэтому точки A_1 и A_2, соответствующие приведенным скоростям γ-квантов, принадлежат абсолюту и точка с радиус-вектором B, лежит на прямой L, проходящей через эти точки.

Пусть D — основание перпендикуляра, проведенного из начала O СО K к прямой L. Таким образом, величины углов $< A_1OD$, $< A_2OD$ равны углу параллельности α_l и

$$\cos\alpha_l = \operatorname{th}\rho(O, D).$$

Пусть $\varphi_l =< A_1BO$, тогда $0 \le \varphi_l \le \pi$, поскольку γ-кванты могут вылететь в любом направлении.

При изменении φ_l будет изменяться угол $2\alpha_l$ между направлениями вылета двух γ-квантов в СО K. Если, например, $\varphi_l = 0; \pi$, то $2\alpha = \pi$, $D = O$.

Если угол φ_l возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\rho(O, D)$ изменяется от 0 до $\rho(0, B)$. Угол разлета в СО K уменьшается от π до $\alpha_{l,min}$. Следовательно,

$$\cos\alpha_{l,min} = \operatorname{th}\rho(0, B)_{max} = |B|.$$

Таким образом, в лабораторной СО существует минимальный угол разлета двух γ-квантов, образовавшихся в результате распада π^0-мезона.

Экспериментальная проверка наличия этого минимального угла разлета в 1950 году явилась подтверждением существования π^0-мезона.

Два счетчика γ-квантов, включенные по схеме совпадений, были направлены в то место, где предположительно распадались π^0-мезоны, имеющие примерно одинаковую абсолютную приведенную скорость $|B|$. При уменьшении угла между счетчиками интенсивность счета резко уменьшалась по достижении угла α_{min}, где $\cos\alpha_{min} = |B|$.

Проанализируем распад π^0-мезона, используя планиметрию Лобачевского. Из связи между модулем импульса и энергии для фотонов, а также закона сохранения энергии получим

$$|\hat{p}_i| = \frac{\hat{E}_i}{c} = \frac{\hat{E}}{2c}, \qquad i = 1, 2,$$

где $\hat{E}$ — энергия покоя π^0-мезона в СО $\hat{K}$, $|\hat{p}_i|$, $\hat{E}_i$ — модуль импульса и энергия i-го γ-кванта в СО $\hat{K}$. Рассмотрим сначала частный случай, когда $B = D$.

1. Пусть $B = D$. Запишем закон сохранения энергии-импульса в СО K в проекции на направление $\overrightarrow{OD}$

$$E = \hat{E}\operatorname{ch}\Psi = E_1 + E_2 = 2E_1,$$

$$|p| = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\Psi = |p_1|\cos\alpha_l + |p_2|\cos\alpha_l = \frac{2E_1}{c}\cos\alpha_l,$$

где $\Psi = \rho(O, B)$. В силу симметрии относительно OD закон сохранения импульса на перпендикулярное к $\overrightarrow{OD}$ направление выполняется автоматически.

Заметим, что первое соотношение дает формулу для поперечного эффекта Доплера, т.е. устанавливает связь между энергией фотона в СО $\hat{K}$ $\hat{E}_1 = \frac{\hat{E}}{2}$ и его энергией в СО K, движущейся перпендикулярно направлению приведенной скорости фотона

$$E_1 = \hat{E}_1 \operatorname{ch} \Psi.$$

Второе соотношение определяет тогда величину угла параллельности Лобачевского. Действительно, подставим полученную формулу во второе соотношение

$$\frac{\hat{E}}{c} \operatorname{sh} \Psi = \frac{2\hat{E}_1}{c} \cos \alpha_l \operatorname{ch} \Psi.$$

Следовательно, $\cos \alpha_l = \operatorname{th} \Psi$. Таким образом, экспериментальный факт распада π^0-мезона на два γ-кванта эквивалентен аксиоме Лобачевского о параллельных.

Из закона сохранения импульса следует, что $\alpha_l < \frac{\pi}{2}$. Действительно, у π^0-мезона есть импульс, направленный по $\overrightarrow{OD}$, поэтому и продукты его распада — γ-кванты — должны иметь в СО K ненулевую проекцию на это направление, т.е. $\alpha_l < \frac{\pi}{2}$.

Если бы пространство скоростей имело геометрию Евклида, то угол параллельности $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и распад π^0-мезона на два γ-кванта был бы запрещен законом сохранения импульса.

В нерелятивистской физике невозможны процессы, идущие с изменением массы частиц, т.е. геометрия в этом случае тесно связана с физикой.

2. Общий случай. Найдем величины энергий и модулей импульсов γ-квантов в СО K. Для этого используем сначала поперечное преобразование Доплера из O в D, а затем продольное преобразование Доплера из D в B.

$$|p_1| = \frac{E_1}{c} = \frac{E_{1,D}}{c} \operatorname{ch} \rho(O,D) =$$

$$\frac{\hat{E}_1}{c} e^{-\rho(D,B)} \operatorname{ch} \rho(O,D) = \frac{\hat{E}}{2c} e^{-\rho(D,B)} \operatorname{ch} \rho(O,D),$$

$$|p_2| = \frac{E_2}{c} = \frac{E_{2,D}}{c} \operatorname{ch} \rho(O,D) =$$

$$\frac{\hat{E}_2}{c} e^{\rho(D,B)} \operatorname{ch} \rho(O,D) = \frac{\hat{E}}{2c} e^{\rho(D,B)} \operatorname{ch} \rho(O,D),$$

Используем закон сохранения энергии в СО K

$$E = E_1 + E_2, \qquad E = \hat{E}\operatorname{ch}\rho(O,B) =$$

$$\frac{\hat{E}}{2}e^{-\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D) + \frac{\hat{E}}{2}e^{\rho(D,B)}\operatorname{ch}\rho(O,D) = \hat{E}\operatorname{ch}\rho(D,B)\operatorname{ch}\rho(O,D).$$

Следовательно, $\operatorname{ch}\rho(O,B) = \operatorname{ch}\rho(D,B)\operatorname{ch}\rho(O,D)$.

Таким образом, **закон сохранения энергии в данном случае интерпретируется теоремой Пифагора в геометрии Лобачевского**.

Заметим, что

$$\sin\alpha_l = \sqrt{1-\cos^2\alpha_l} = \frac{1}{\operatorname{ch}\rho(O,D)}$$

и запишем закон сохранения импульса в СО K в проекции на направление L с учетом полученных формул

$$|p|\sin\xi_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(O,B)\sin\xi_l = |p_2|\sin\alpha_l - |p_1|\sin\alpha_l =$$

$$\frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(D,B)\operatorname{ch}\rho(O,D)\sin\alpha_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(D,B),$$

где ξ_l — величина угла между вектором B и $\overrightarrow{OD}$. Таким образом, получили частный случай теоремы синусов

$$\operatorname{sh}\rho(D,B) = \operatorname{sh}\rho(O,B)\sin\xi_l.$$

Запишем теперь закон сохранения импульса в СО K в проекции на направление $\overrightarrow{OD}$.

$$|p|\cos\xi_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{sh}\rho(O,B)\cos\xi_l = |p_2|\cos\alpha_l + |p_1|\cos\alpha_l =$$

$$\frac{E_1+E_2}{c}\cos\alpha_l = \frac{\hat{E}}{c}\operatorname{ch}\rho(O,B)\operatorname{th}\rho(O,D).$$

Таким образом, получили выражение катета через гипотенузу и прилежащий угол

$$\operatorname{th}\rho(O,D) = \operatorname{th}\rho(O,B)\cos\xi_l.$$

Вывод. **Формулы тригонометрии планиметрии Лобачевского интерпретируют законы сохранения энергии и импульса в распаде π^0-мезона на два γ-кванта**.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* - М.: Физматгиз, 1962. - 503 с.

2. Широков П.А. *Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.* - М.: Наука, 1983. - 80 с.

3. Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского.* - М.: МЦНМО, 2000. - 80 с.

4. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* - М.: Наука, 1966. - 648 с.

5. Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства.* - М.: Наука, 1969. - 548 с.

6. Дубровский В.Н., Смородинский Я.А., Сурков Е.Л. *Релятивистский мир.* - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит. Библиотечка «Квант». Вып. 34, 1984. - 176 с.

7. Ефимов Н.В. *Высшая геометрия.* - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1978. - 576 с.

8. Артин Э. *Геометрическая алгебра.* - М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1969. - 284 с.

9. Нут Ю.Ю *Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении.* - М.: Изд.-во Академии Наук СССР, 1961. - 311 с.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля.* - М.: Физматлит, 2006. - 534 с.

11. Угаров В.А. *Специальная теория относительности.* - М.: Наука, 1977. - 383 с.

12. Трайнин Я.Л. *Аналитическая геометрия на плоскости Лобачевского.* - Новосибирск.: [б.и.], 1971. - 341 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И.П. *Геометрия.* - М.: Просвещение, 1997. - 256 с.

2. Васильев А.В. *Николай Иванович Лобачевский.* - М.: Наука, 1992. - 222 с

3. Каган В.Ф. *Основания геометрии.* Ч. I. - Л.: Гос. изд-во технико-технической лит., 1949. - 492 с.

4. Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны.* «Современные проблемы математики. Фундаметальные направления. Т. 29. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)» - М.: ВИНИТИ, 1988. С. 5-146.

СОДЕРЖАНИЕ