Часть I

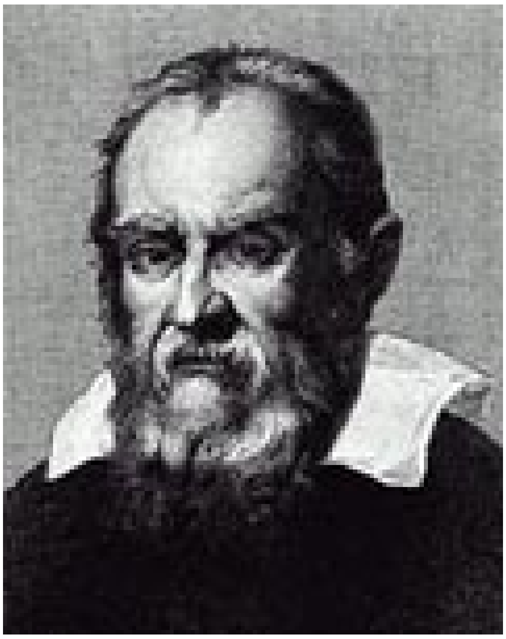
Основы классической механики

Глава 1. Кинематика материальной точки и твердого тела

1.1. Классическая механика как нерелятивистская теория механического движения макроскопических тел

В окружающей нас природе существует большое количество разнообразных явлений, которые на первый взгляд кажутся очень сложными и запутанными. Но физики сумели изучить их, расчленяя на отдельные простые процессы, выделяя основное свойство и пренебрегая на первом этапе изучения несущественными факторами, слабо влияющими на эти явления. Тогда удается установить количественные соотношения между величинами, характеризующими конкретное явление. **Явление считается изученным, если оно описано с помощью математических формул и уравнений, т.е. построена математическая модель явления.** Далее эта модель совершенствуется, развивается, учитывая отброшенные при первом рассмотрении факторы. Таким образом, получают исчерпывающее математическое описание некоторого круга однородных явлений. Такое рассмотрение теперь называют не моделью, а теорией. Так сложилась **теоретическая физика**, которая, как новый метод изучения явлений природы, выделилась из экспериментальной физики, чаще называемой общей физикой, в самостоятельную науку уже в начале прошлого века.

Добытые с помощью эксперимента сведения представляют собой отдельные факты физической науки. По мере накопления экспериментальных фактов возникает необходимость их теоретического обобщения, выявления общих закономерностей, которые управляют природными явлениями. **Поэтому основная функция теоретической физики является установить, открыть общие законы для большого круга явлений**. Как и любая наука, теоретическая физика не ограничивается этой обобщающей функцией, она обладает и **предсказательной функцией**, т.е. она умеет предсказывать результаты новых планируемых экспериментов и описать поведение ожидаемых, еще не изученных явлений.



Галилео Галилей (1564-1642) - итальянский ученый. Родился в Пизе, изучал медицину в Пизанском ун-те, но увлекся математикой и механикой. Профессор Пизанского, Падуанского ун-тов, придворный философ герцога Медичи. С него начинается механика, как наука. Он открыл принцип относительности движения, законы свободного падения тел и падения их по наклонной плоскости, законы движения тела, брошенного под углом к горизонту, колебания маятника. Он построил телескоп и сделал ряд астрономических открытий, которые подтверждали учение Коперника. Инквизиция вынудила его публично отказаться от учения Коперника.

В зависимости от области изучаемых явлений теоретическая физика подразделяется на следующие науки: классическая механика, релятивистская механика, квантовая механика, электродинамика (или теория поля), квантовая электродинамика (или квантовая теория поля), статистическая физика и др. (см. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теоретическая физика» в 10 томах).

Классическая механика изучает механическое движение материальных тел и происходящие при этом взаимодействия между ними. Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного расположения тел в пространстве.

Считается, что разработка механики, как науки, была начата с работ Галилея и завершена трудами Ньютона, который сформулировал известные законы. В последующем механика получила свое дальнейшее развитие в трудах многих ученых, которые были направлены на обобщение ее теоретических основ и на применение ее к новым явлениям и к новым областям науки.

В настоящее время в зависимости от скорости движения изучаемых тел механика подразделяется на классическую механику, которая ограничивается рассмотрением движения тел со скоростями меньше скорости света в вакууме ($v < c$), и на релятивистскую механику, изучающую движение тел со скоростями, близкими к скорости света (v ~ c). Также сильно различается характер движения макроскопических тел от поведения микрочастиц, главным образом, масштабами области локализации и энергии. Движение макроскопических тел, для которых можно пренебречь постоянной Планка $\hbar \to 0$, описывается законами классической механики, а движение микроскопических частиц, для которых уже нельзя пренебречь постоянной Планка $\hbar \neq 0$, описывается квантовой механикой. Это разделение механики можно представить схематично так:

	v<c	v~c
$\hbar \to 0$	Классическая механика	Релятивистская механика
$\hbar \neq 0$	Квантовая механика	Квантовая теория поля

1.2. **Основные объекты изучения механики: материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело**

Механическое движение материального тела, являющееся простейшей формой движения, широко распространено в окружающем мире и тесно связано с другими формами движения материи. Но механическое движение теряет свою простоту, если рассматривать материальное тело со всеми его деталями внутреннего строения. Поэтому материальное тело заменяют в классической механике **материальной точкой - простой моделью тела с пренебрежимо малыми размерами, но конечной массой.** Важно отметить, что, говоря о материальной точке как об объекте бесконечно малых размеров, имеют в виду физически бесконечно малый объект, т.е. объект конечных, при том, может быть, даже очень больших размеров по отношению размеров человека, но достаточно малый по сравнению с другими объектами рассматриваемой задачи. Конечно, понятие материальной точки – это абстракция, идеализация, которая, строго говоря, не применима ни к одному реальному телу. Например, в задаче движения Земли вокруг Солнца можно взять Землю за материальную точку и точность решения будет достаточная.

Но в баллистической задаче полета пули из винторезного ружья рассмотрение пули, как материальная точка, приводит к значительным погрешностям.

В задаче нескольких материальных тел, заменяя отдельные тела материальными точками, мы приходим к понятию **системы материальных точек**. Также **сплошную вещественную среду можно рассматривать как систему материальных точек**. Другим объектом изучения классической механики является **абсолютно твердое тело**, **под которым понимают систему материальных точек с неизменным расстоянием между ними.**

1.3. Системы отсчета. Классическое представление о пространстве и времени

Существенное свойство материальной точки состоит в том, что мы можем определить ее положение в пространстве и скорость в каждый момент времени. Экспериментально установлено, **что пространство обладает свойствами непрерывности, однородности и изотропности**. **В этом пространстве справедлива геометрия Евклида, поэтому такое пространство называют евклидовым**. Т.к. все точки пространства ничем не выделены, то положение тела в пространстве можно определить только по отношению к положению другого тела, которое принимают за **тело отсчета**. **Евклидово пространство трехмерно** и положение материальной точки задается тремя координатами. В зависимости от симметрии рассматриваемой задачи с телом отсчета связывают соответствующей симметрии систему координат: декартовую, сферическую, полярную или иную систему координат.

Время считается непрерывным, одномерным и однородным. В силу этого экспериментально можно измерить только промежутки времени между двумя событиями. Для измерения времени пользуются часами, которые находятся в каждой точке пространства. Единое время этих часов (синхронизация хода часов) устанавливается с помощью сигнала, который распространятся мгновенно.

Таким образом, чтобы сопоставить событию пространство и время, необходимо выбрать некоторое тело за начало отсчета расстояний и некоторое событие за начало отсчета времени. **Совокупность системы координат, связанной с телом отсчета, и часов**

называется системой отсчета. В выбранной системе отсчета с помощью определенных масштабов измерения расстояний и времени можно найти в каждый момент времени t положение материальной точки $\vec{r}$ и описать движение материальной точки уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1.1}$$

которое называют **законом движения, кинематическим уравнением** или просто **уравнением движения**.

Для классической механики характерно **представление об абсолютности пространства и времени, в котором принимается, что расстояния между телами и промежутки времени между событиями не зависят ни от состояния движения тела, ни от выбранной системы отсчета.** Одна материальная точка действует на другую без участия среды, заполняющей пространство между ними. Действие в пространстве передается мгновенно. Такое рассмотрение взаимодействия в классической механике относится к самому Ньютону и получило название **представления дальнодействия.** Это действие характеризуется силой. Сила часто задается в виде **силового поля** – пространства, в каждой точке которого на материальную точку действует сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

1.4. Основные понятия: кинематические уравнения движения, траектория, обобщенные координаты, степени свободы

В механике выделяют следующие разделы: **кинематику – учение о геометрических свойствах движения тел**, **динамику – учение о движении тел под действием сил и статику – учение о равновесии тел, на которые действуют силы.** Кинематика является вводным разделом механики, в котором математическими средствами описывается движение материальных тел в пространстве.

Основная задача кинематики заключается в том, чтобы установить положение тел в пространстве, выявить характер их движения: траекторию, скорость, ускорение, зависимость координат тела от времени, а причина движения – действующие силы не обсуждаются.

Положение материальной точки определяется совокупностью трех независимых координат. Этот факт выражают словами: свободная точка имеет три **степени свободы движения**. В декартовой системе координат кинематические уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.2}$$

Но кинематические уравнения могут быть записаны в любой другой системе координат, связанной с декартовой системой взаимно однозначным преобразованием. При движении точки в плоскости Oxy часто бывает удобно пользоваться полярными координатами r и φ, связанными с декартовыми координатами преобразованием:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{1.3}$$

В этом случае кинематические уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{1.4}$$

При движении по плоскости материальная точка обладает только двумя степенями свободы. Движение материальной точки можно рассматривать и в других системах координат: сферической, цилиндрической и т.д. Поэтому с целью обобщения системы координат вводят понятие **обобщенных координат**, которые связаны с декартовыми координатами преобразованиями в общем виде:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{1.5}$$

Кинематические уравнения движения точки в обобщенных координатах запишутся так:

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t). \tag{1.6}$$

При движении материальной точки конец радиус-вектора описывает некоторую кривую, которую называют **траекторией движения** этой точки. Для получения траектории движения достаточно исключить время из кинематических уравнений движения.

1.5. Кинематика материальной точки

Скоростью называется производная радиус-вектора по времени движения материальной точки:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t). \tag{1.7}$$

Из определения (1.7) следует, что скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения точки. Со скоростью связан **путь, равный длине участка траектории,** пройденный точкой за время t, и определяется интегралом от модуля скорости

$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(\tau)| d\tau . \qquad (1.8)$$

Скорость, определенную в (1.7), называют **мгновенной скоростью**, т.е. скоростью в данный момент времени. Но чаще имеют дело с так называемой **средней скоростью** движения за некоторое время t, которая определяется выражением

$$< \vec{v}(t) > = \frac{1}{t}\int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(0)}{t} . \qquad (1.9)$$

Здесь в числители находится величина - разность двух радиус-векторов, которая определяет **перемещение** материальной точки вдоль траектории

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 . \qquad (1.10)$$

Как любой вектор, радиус-вектор можно разложить на составляющие по осям декартовой системы координат:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z , \qquad (1.11)$$

следовательно, и скорость имеет составляющие:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z . \qquad (1.12)$$

Для вычисления проекций скорости в различных криволинейных координатах воспользуемся формулами:

$$\vec{v} = H_1\dot{q}_1\vec{e}_1 + H_2\dot{q}_2\vec{e}_2 + H_3\dot{q}_3\vec{e}_3 , \qquad (1.13)$$

где коэффициенты Ламе равны:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{(dx/dq_1)^2 + (dy/dq_1)^2 + (dz/dq_1)^2} , \\ H_2 &= \sqrt{(dx/dq_2)^2 + (dy/dq_2)^2 + (dz/dq_2)^2} , \\ H_3 &= \sqrt{(dx/dq_3)^2 + (dy/dq_3)^2 + (dz/dq_3)^2} . \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Выпишем скорость в полярной системе координат:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi , \qquad (1.15)$$

в сферической системе координат:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta \cdot \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi . \qquad (1.16)$$

*****Поле центральных сил (определение)****************

При описании движения материальной точки в поле центральных сил удобно вводить понятие **секторной скорости**. Радиус-вектор движущейся материальной точки за элемент времени dt описывает элементарную площадку – элементарный сектор $d\vec{S}$. По договоренности вектор элементарной площадки имеет модуль, равный ее площади, а направление по нормали к площадке в сторону, образующую с направлением обхода контура площадки правовинтовую систему. С точностью до бесконечно малых величин второго порядка площадь элементарного сектора совпадает с площадью треугольника, образованного векторами $\vec{r}(t)$, $d\vec{r}$ и $\vec{r}(t+dt)$, и равна $d\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{r} \times d\vec{r}\right]$. Тогда секторная скорость определяется выражением:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] \qquad (1.17)$$

Когда траекторией движения служит плоская кривая, секторная скорость всегда направлена по нормали к плоскости движения. Проекцию на нормаль в этом случае удобно вычислять в полярных координатах.

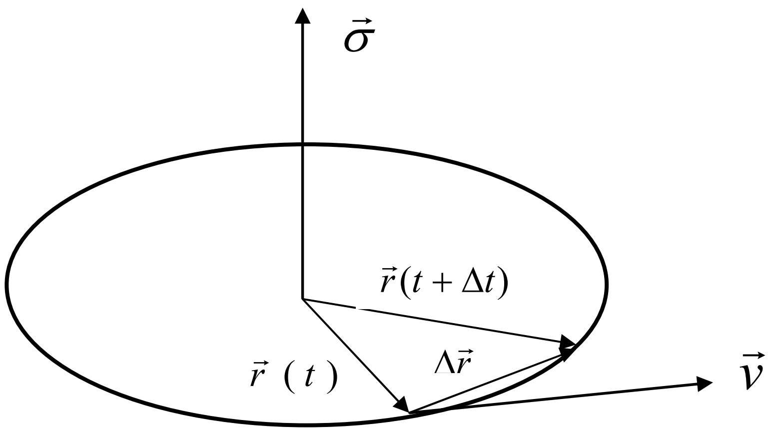


Рис.1.1. Секторная скорость

Тогда элементарный сектор можно рассматривать круговым, и площадь сектора равна $d\vec{S} = \frac{1}{2} r^2 d\vec{\varphi}$. Отсюда для вектора секторной скорости $\vec{\sigma}$ получаем выражение:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vec{\varphi}} \ . \qquad (1.18)$$

Ускорение движения материальной точки есть производная вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \ . \qquad (1.19)$$

Из (1.12) и (1.19) следует разложение ускорения по проекциям в декартовой системе координат:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \qquad (1.20)$$

1.6. Кинематика твердого тела

Твердое тело в классической механике определяется как система материальных точек, расстояние между которыми остается постоянным, т.е. накладываются дополнительные связи между частицами, которые ограничивают возможные движения точек. Эти связи уменьшают число степеней свободы системы материальных точек, вместо $3N$ степеней свободы системы N независимых точек имеем в случае твердого тела всего 6 степеней свободы. Следовательно, для однозначного определения положения твердого тела в пространстве необходимо задать 6 независимых координат. Обычно выбор этих независимых координат делается, исходя из удобства и простоты. Прежде всего, скрепим с твердым телом систему координат. Пусть это будет декартова система $O'x'y'z'$. Положение любой точки твердого тела, например, положение некоторой выделенной точки M, определяется в этой системе координатами x', y', z'. Заметим, что эти координаты при движении твердого тела остаются постоянными. Поэтому для определения положения твердого тела достаточно знать положение движущейся вместе с телом подвижной системы координат $O'x'y'z'$ относительно другой неподвижной системы $Oxyz$. В дальнейшем подвижную систему будем обозначать K' и называть штрихованной системой, а неподвижную – через K и называть нештрихованной системой. Таким образом, мы имеем 6 независимых переменных для описания твердого тела в пространстве: 3 составляющих радиус-вектора $\vec{r}'$ в штрихованной системе и 3 составляющих $\vec{r}$ в нештрихованной системе.

Обозначим через $\vec{r}_0$ - радиус-вектор начала координат подвижной системы K' в неподвижной системе K. Между этими радиус-векторами для любого момента времени имеет место соотношение:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \qquad (1.21)$$

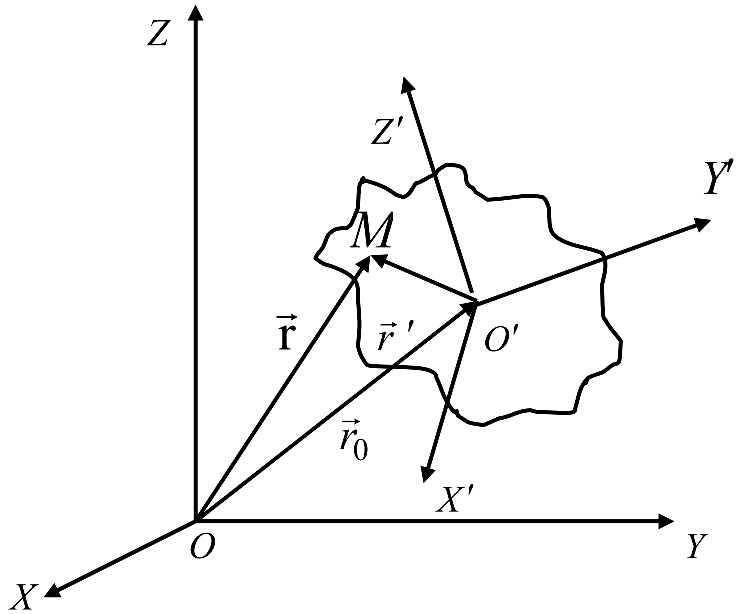


Рис.1.2. K и K' системы координат

Согласно этому соотношению (1.21) движение точки M относительно неподвижной системы можно рассматривать как наложение двух составляющих движений: движение точки M относительно K' системы, называемым **относительным движением**, и движения K' системы относительно K системы, называемым **переносным движением** и определяемым движением начала K'.

При всей кажущейся очевидности равенства (1.21), оно физически не тривиально. Здесь сравнивается длина отрезка, измеренная в разных системах: радиус-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ измерены в неподвижной системе, а $\vec{r}'$ - в подвижной.

Вначале необходимо определить понятие длины движущегося отрезка. Очевидно, что длина движущегося отрезка равна расстоянию между одновременными положениями его концов, измеренному в масштабах данной системы. Но моменты засечек концов стержня в подвижной и неподвижной системах одновременны только в классической физике, которая предполагает возможность бесконечно быстрых сигналов для синхронизации часов. А это означает, что момент времени, в который происходит какое-либо событие, один и тот же в разных системах:

$$t = t', \tag{1.22}$$

поэтому длина отрезка одинакова, как в подвижной, так и в неподвижной системах, и поэтому справедливо соотношение (1.21).

1.7. Закон сложения скоростей. Относительная и переносная скорости

Перепишем равенство (1.21) в другом виде, для чего разложим радиус-вектор материальной точки $\vec{r}'$ по ортам подвижной системы:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \tag{1.23}$$

Определим скорость движения, для этого продифференцируем (1.23) по времени, учитывая (1.22) и тот факт, что при повороте тела и вместе с ним и K' меняется направление орт i', j', k', а координаты x', y', k' точки твердого тела неизменны:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}. \tag{1.24}$$

Левая часть полученного равенства дает вектор скорости сложного движения точки твердого тела, который обозначим $\vec{v}_a$ и назовем **абсолютной скоростью**. Заметим, что первое слагаемое дает **скорость переносного движения** точки, обусловленную поступательным движением K' системы

$$\vec{v}_{пер} = \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \tag{1.25}$$

Относительная скорость определяется выражением:

$$\vec{v}_{от} = x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}, \tag{1.26}$$

которая связана с вращением K' системы вокруг начала координат O'. Поэтому для ее вычисления удобно перейти в сферическую систему координат.

Любое конечное вращение тела можно рассматривать как совокупность бесконечно малых вращений, т.е. поворотов на бесконечно малые углы за бесконечно малые промежутки времени. Определим **вектор бесконечно малого угла поворота** $d\vec{\varphi}$ как величину, равную бесконечно малому углу поворота, и имеющую направление, определяемое правилом правого винта (Рис.1.3). При бесконечно малом повороте радиус-вектор получает приращение на величину **вектора перемещения**:

$$d\vec{r}\,' = \left[d\vec{\varphi}\times\vec{r}\,'\right] \qquad \textbf{(1.27)}$$

Но не все точки твердого тела приобретают перемещение при повороте тела,

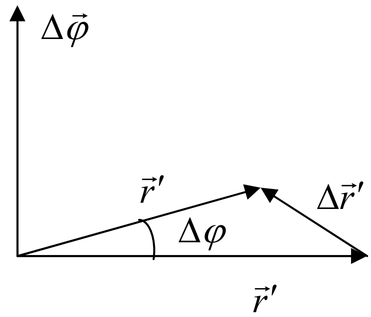


Рис.1.3. Вектор угла поворота $\Delta\varphi$ и вектор перемещения $\Delta\vec{r}\,'$.

существуют определенные точки твердого тела, для которых перемещение отсутствует. Геометрическое место точек с таким нулевым значением перемещения при конечном угле поворота тела, называется **мгновенной осью вращения**. Очевидно, удобно выбрать начала координат K' системы на оси вращения.

Вектор угловой скорости определяется как отношение вектора бесконечно малого поворота к промежутку времени, за которое этот поворот осуществляется:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.28)$$

Угловая скорость направлена по оси вращения, и она одинакова для всех точек твердого тела, т.е. твердое тело вращается как единое целое с одинаковой угловой скоростью. После деления (1.27) на элемент времени dt, в течение которого совершается бесконечно малое перемещение, приходим к формуле распределения скоростей точек твердого тела:

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right]. \tag{1.29}$$

Для абсолютной скорости сложного движения получаем окончательный результат:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_n + \vec{v}\,', \tag{1.30}$$

выражающий **закон сложения скоростей**. На основе соотношения (1.30) заключаем: в общем случае движение твердого тела может быть представлено как сумма поступательного движения системы координат, связанной с телом, и вращательного движения вокруг начало координат этой системы.

1.8. Угловое и центростремительное ускорения

Теперь вычислим ускорение вращательного движения твердого тела. Для этого надо (1.30) продифференцировать по времени:

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_n}{dt} + \frac{dv_{om}}{dt}. \tag{1.31}$$

Левая часть в равенстве (1.31) дает ускорение сложного движения:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}, \tag{1.32}$$

которое назовем **абсолютным ускорением**. Первое слагаемое в (1.31) дает ускорение **переносного движения**:

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \tag{1.33}$$

При вычислении **относительного ускорения** воспользуемся формулой (1.29):

$$\vec{a}_{om} = \frac{d\vec{v}_{om}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right] = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,'\right] + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right]\right]. \tag{1.34}$$

Производная вектора угловой скорости по времени $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ называется **угловым ускорением**. Таким образом, относительное ускорение вращательного движения твердого тела состоит из частей:

$$a_{om} = \left[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,'\right] + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right]\right], \tag{1.35}$$

где первое слагаемое связано с изменением скорости вращения твердого тела, а второе слагаемое существует и при неизменной скорости вращения и направлено противоположно радиус-вектору $\vec{r}'$, т.е. направлено к центру координат, вокруг которого происходит вращение. Поэтому эта часть ускорения называется **центростремительным ускорением**:

$$\vec{a}_{цс} = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]. \quad (1.36)$$

В случае $\vec{\omega} \perp \vec{r}'$, когда вектор угловой скорости и радиус-вектор выделенной точки твердого тела взаимно перпендикулярны, то норма центростремительного ускорения равна: $a_{цс} = \omega^2 r'$.

Вопросы для закрепления знаний

1. Дайте определение разделов классической механики: статика, кинематика, динамика.
2. В чем различие в понятиях: мгновенная и средняя скорость, путь и перемещение, уравнение траектории и кинематическое уравнение движения?
3. Объясните, что такое система отсчета, классическое представление о пространстве и времени, представление дальнодействия и представление близкодействия.
4. Выпишите соотношения между координатами систем: полярной и декартовой, сферической и декартовой.
5. Дайте объяснение понятиям: обобщенные координаты и степени свободы.
6. На примере движения твердого тела укажите - какое движение является абсолютным, относительным и переносным движением?
7. Определите направление векторов угла поворота, угловой скорости и секторной скорости, центростремительного ускорения?

Примеры решения задач

Задача 1.1. Материальная точка движется вдоль положительного направления оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha x$, где α - размерная постоянная. Принимая во внимание начальные условия: $t=0$ и $x=x_0$, найти уравнение движения материальной точки, ее скорость и ускорение в зависимости от времени.

Решение. Из условия задачи следует следующая связь между скоростью и пройденным расстоянием к моменту времени t: $v=\dfrac{dx}{dt}=\alpha x$. Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющими переменными. Его решение имеет вид: $x(t)=x_0\exp(\alpha t)$. Из этого кинематического уравнения движения материальной точки дифференцированием по времени можно получить искомые равенства для скорости и ускорения: $v(t)=\alpha x_0\exp(\alpha t)=\alpha x$ и $a=\alpha^2 x_0\exp(\alpha t)$.

Задача 1.2. Движение материальной точки задано кинематическими уравнениями $x=a\cos\omega t$, $y=b\sin\omega t$. Найти траекторию движения материальной точки, ее скорость и ускорение.

Решение. Исключая время, получаем траекторию движения:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Траекторией является эллипс с полуосями a и b. Скорость определяется через производную по времени:

$$\dot{x}=-a\omega\sin\omega t,\ \dot{y}=b\omega\cos\omega t.$$

Модуль скорости равен:

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}.$$

Ускорение точки находим через вторую производную по времени:

$$\ddot{x}=-a\omega^2\cos\omega t,\qquad \ddot{y}=-b\omega^2\sin\omega t.$$

Модуль ускорения равен:

$$w=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\omega^2\sqrt{a^2\cos^2\omega t+b^2\sin^2\omega t}=\omega^2 r,$$

где норма радиус-вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Сравнивая проекции ускорения с проекциями радиус-вектора, замечаем, что в данном движении $\vec{w}=-\omega^2\vec{r}$ вектор ускорения направлен по радиусу к центру, т.е. это ускорение является центростремительным ускорением.

Задача 1.3. Точка A находится на ободе колеса радиуса R, которое катится без проскальзывания по горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью ω. Определить закон движения точки A в декартовых координатах. Найти скорость и ускорение данной точки и показать, что ускорение всегда направлено к центру колеса.

Решение. Будем рассматривать движение точки A (рис.1.3.) как сложное движение, состоящее из поступательного движения K' системы, связанной с центром колеса, и вращения колеса в K' системе. В начальный момент $t=0$ координаты точки A в K' системе: $x'(0)=0$ и $y'(0)=-R$. При равномерном вращении колеса $\varphi=\omega t$ уравнение движения точки A в K' системе имеет вид:

$$x'(t)=-R\sin\omega t, \quad y'(t)=-R\cos\omega t.$$

Поступательное движение K' системы относительно K системы описывается уравнениями:

$$x_n = vt = R\omega t, \quad y_n = R.$$

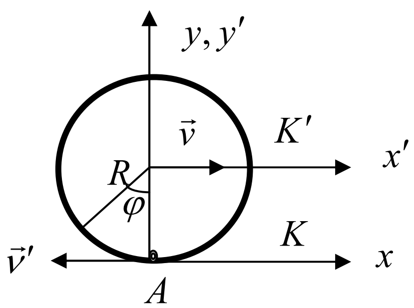


Рис. 1.3.

Тогда имеем уравнения движение точки A относительно K системы:

$$x = x_n + x' = R(\omega t - \sin\omega t) \quad \text{и} \quad y = y_n + y' = R(1-\cos\omega t).$$

Скорость точки A относительно K системы:

$$\dot{x} = R\omega(1-\cos\omega t), \qquad \dot{y} = R\omega\sin\omega t.$$

А модуль скорости равен

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2}R\omega\sqrt{1 - \cos\omega t} = 2R\omega\sin(\omega t/2).$$

Ускорение точки равно:

$$\ddot{x} = R\omega^2 \sin\omega t, \quad \ddot{y} = R\omega^2 \cos\omega t.$$

Модуль ускорения равен: $w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = R\omega^2$. В момент времени $t = 0$ составляющие ускорения $\ddot{x}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = R\omega^2$, т.е. ускорение направлено к центру вращения.

Задача 1.4. Вычислить скорость материальной точки в сферических координатах.

Решение. Известна связь между сферическими и декартовыми координатами:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Обобщенными скоростями в этой системе координат являются: $\dot{q}_1 = \dot{r}$, $\dot{q}_2 = \dot{\vartheta}$, $\dot{q}_3 = \dot{\varphi}$. Скорость в криволинейных координатах определяется формулой:

$$\vec{v} = H_1\dot{q}_1\vec{e}_1 + H_2\dot{q}_2\vec{e}_2 + h_3\dot{q}_3\vec{e}_3$$

и достаточно вычислить коэффициенты Ламэ:

$$H_1 = 1, \; H_2 = r, \; H_3 = r\sin\vartheta.$$

Следовательно, скорость в сферических координатах равна

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\cdot\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

а модуль скорости равен

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2).$$

Задание для самостоятельной работы

Задача 1.5. Движение материальной точки задано кинематическими уравнениями $x = r\cos\omega t$, $y = r\sin\omega t$. Найти траекторию движения материальной точки, ее скорость и ускорение.

Ответ: $x^2 + y^2 = r^2$, $v = r\omega$, $\vec{a} = -\vec{r}\omega^2$.

Задача 1.6. Точка A (рис.1.3) находится на ободе колеса радиуса R, которое катится без проскальзывания по горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью ω. Определить полный путь, проходимый точкой A между двумя последовательными моментами ее касания рельса.
Ответ: $8R$.

Задача 1.7. Вычислить скорость материальной точки в полярных координатах, если известна связь полярных и декартовых координат:

$$x = r\cos\varphi \text{ и } y = r\sin\varphi.$$

Ответ: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$.

Задача 1.8. Представить секторную скорость $\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r} \times \vec{v}]$ в декартовой системе координат для материальной точки, вращающейся в плоскости xy.

Ответ: $\sigma_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$.

Задача 1.9. Представить секторную скорость $\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r} \times \vec{v}]$ в полярной системе координат.

Ответ: $\sigma_n = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$.