**ОБУЧЕНИЕ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**Лобанова Н. И.**

**Муниципальное учреждение дополнительного образования**

**«Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», Зеленокумск**

**e-mail:** [**lobantchik@yandex.ru**](mailto:lobantchik@yandex.ru)

Возросшая роль математики и связанных с ней прикладных дисциплин в функционировании технически сложноорганизованного современного человеческого общества, использование методов математического моделирования не только в познании законов природы, но и в развитии различных областей человеческой деятельности, предъявляют повышенные требования к математической культуре мышления каждого человека [1].

Таким образом, одной из целей современного школьного математического образования должно стать формирование прикладного математического мышления школьников, которое можно обеспечить посредством «приобретения и совершенствования опыта построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач» [1].

Взаимосвязь обучения математике в общеобразовательной школе и в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципа непрерывности и преемственности. С элементами теории дифференциальных уравнений неявно сталкиваются учащиеся старших классов, например, в курсе физики с результатами интегрирования дифференциального уравнения школьники встречаются уже в 9-м классе при рассмотрении равноускоренного движения. Анализируя задачи, связанные с решением уравнений в школьном курсе математики, академик Д.В. Аносов [3, c. 7] отметил, что «Вероятно, наиболее важные и наиболее распространенные задачи такого рода – это дифференциальные уравнения. В школьном курсе математики о них речи нет, но простейшие примеры дифференциальных уравнений нелегально фигурируют в школьном курсе физики». Элементы теории дифференциальных уравнений вполне доступны для понимания учащимся 11-х классов. «Самое сложное, что здесь требуется – это понимание смысла понятия производной и начальное умение дифференцировать» [3, c. 7]. В самом деле, анализ школьных учебников, ФГОС и пособий для учителей показывает, что в курс школьной программы не входит изучение даже простейших дифференциальных уравнений, но курс алгебры и начал анализа знакомит учащихся с понятиями производной и интеграла. Поэтому, изучение дифференциальных уравнений является естественным продолжением изучения дисциплины «Алгебра и начала математического анализа», основываясь на геометрическом и физическом смыслах этих понятий.

Дифференциальные уравнения имеют, большое прикладное значение, они широко используются в механике, физике, астрономии, во многих задачах биологии и химии. Например, с помощью дифференциальных уравнений можно вычислить движение планет солнечной системы вокруг Солнца, предсказать моменты лунного и солнечного затмений. Имея на это все основания, выдающиеся ученые отмечали, что «Великая книга природы написана на языке математики» (Галилео Галилей), «Математика – это то, посредством чего люди управляют природой и собой» (А.Н. Колмогоров). Это можно объяснить тем, что нередко объективные законы, которым подчиняются определенные процессы (явления), можно записать в форме дифференциальных уравнений, и тем самым эти уравнения являются средством для количественного выражения этих законов.

Таким образом, учитывая важную роль, которую играют дифференциальные уравнения в математике и естествознании (физике, астрономии, химии, биологии, медицине, экономике и других), доступность ясного понимания этой роли, представляется весьма актуальной задача ознакомления учащихся старших классов с элементами теории и приложений этих уравнений. Возникает необходимость и целесообразность обучения школьников решению дифференциальных уравнений и задач на физический и геометрический смыслы производной, решаемых с помощью дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования, поскольку в рамках обязательного среднего образования эта тема отсутствует [4].

На передний план выходит не только умение составлять дифференциальное уравнение, описывающее реальный процесс, но и знание способов решения простейших классов дифференциальных уравнений таких как: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли и т.д. Следовательно, решение любой задачи, сводящейся к дифференциальному уравнению, состоит из двух этапов: творческого (составление дифференциального уравнения) и технического (решение дифференциального уравнения).

Важно отметить, что одно и то же дифференциальное уравнение может быть математической моделью совершенно различных природных процессов. Например, решение задачи об определении зависимости атмосферного давления от высоты приводит к дифференциальному уравнению где искомая функция есть плотность воздуха на высоте , – ускорение свободного падения, а задача о радиоактивном распаде, согласно которому скорость уменьшения массы радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого вещества, приводит к дифференциальному уравнению , где масса радиоактивного вещества есть функция времени ( – коэффициент пропорциональности).

При решении задач на геометрический и физический смыслы производной используется один из основных методов исследования реальных ситуаций – метод математического моделирования.

Математическое моделирование возникает тогда, когда объект-оригинал замещается математическим объектом и информация об оригинале извлекается с помощью математического исследования модели. Таким образом, математическим моделированием принято называть описание реальных физических, химических, технологических, биологических, социологических, экономических и других процессов с помощью математического инструментария, например, уравнений и неравенств [1].

Метод математического моделирования включает три основных этапа:

1) перевода предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, т. е. построение математической модели; примером математической модели является уравнение;

2) решения задачи средствами математики внутри модели;

3) интерпретации полученного решения, т. е. перевода полученного результата на язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Наиболее ответственным и сложным является первый этап – само построение математической модели. Оно осуществляется логическим путём, на основе глубокого анализа изучаемого явления и требует умение описать явление на языке математики. В идеале имеет место стремление построить математическую модель, адекватную исходному прототипу. Практически адекватность не достигается, так как не представляется возможным учесть и выразить на языке математики все факторы, влияющие на изучаемое явление. Поэтому математическая модель лишь приближённо его отражает, и результаты моделирования тем достовернее, чем меньше погрешность, допущенная при составлении модели. Реализация первого этапа требует многих умений, в числе которых важны *умение выделять существенные факторы*, определяющие исследуемое явление, умение указать те факторы, которые вызывают погрешность при составлении модели, *умение выбрать математический аппарат для составления модели*.

Существенным на втором этапе является *умелое планирование процесса решения* сформулированной математической задачи, выделение в нем составляющих задачи, *умение анализировать и уточнять составленную модель, переходить от одной модели к другой* и выбирать в каждом конкретном случае наиболее целесообразное и вместе с тем оптимальное решение задачи.

На третьем этапе главное умение – грамотно *перевести результат решения математической задачи на язык исходной задачи*.

Важное значение на этом этапе имеет *владение методами проверки* решения практической задачи, умение распространить найденное решение на решение других практических задач, оценить итоговую степень точности полученных результатов и выяснить ее влияние на корректность решения задачи.

В процессе обучения школьников решению физических и геометрических задач остановимся лишь на развитии некоторых умений, имеющих существенное значение на каждом этапе математического моделирования, поскольку в полном объеме эти умения затруднительно сформировать у учащихся. Однако следует реализовать возможности заложить основу таких умений в дополнительном образовании.

Задача способствует формированию определенных форм мышления, необходимых для освоения окружающей нас действительности, так как изучает понятия, введенные путем абстрагирования от явлений реального мира.

Математическое моделирование настолько широко применяется для изучения реального мира, что создание у учащихся представления о его сущности, подведение их к овладению каждым из этапов должно стать предметом постоянных забот учителя, в том числе, и педагога дополнительного образования.

Таким образом, нами предложены следующие методические пути разрешения сформулированной нами проблемы:

- решение физических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям,

- решение геометрических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям,

- устранение типичных ошибок старшеклассников при решении задач, с помощью дифференциальных уравнений.

Остановимся кратко на их реализации.

Предлагаем учащимся задачи на геометрический и физический смыслы производной, которые могут заинтересовать каждого любознательного школьника. Решения этих задач сводятся к простейшим дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными, которые интегрируются непосредственно методом разделения переменных.

При решении физических задач удобно воспользоваться следующим алгоритмом действий:

1. установить изменяющиеся в данном явлении величины, выявить физические законы, которые связывают их;

2. выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую необходимо найти;

3. по условию задачи определить начальные или краевые условия;

4. выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные;

5. составить дифференциальное уравнение по условию задачи и физическому закону;

6. найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения;

7. найти частное решение;

8. исследовать полученное решение [5] .

**Задача 1.** Катер двигался по озеру со скоростью 32 км/ч и через 1 минуту, после того как был выключен двигатель, его скорость стала равной 8 км/ч. Чему будет равна скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера? Какое расстояние он пройдёт через 1 минуту после выключения мотора? Какое расстояние он пройдёт через 2 минуты после выключения мотора?

**Решение**. Проанализировав условие задачи, старшеклассники приходят к выводу, что необходимо найти, какова скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера. На первом этапе предлагается ученикам составить математическую модель задачи.

Пусть – скорость движения катера, а – коэффициент пропорциональности. По условию задачи, на движущийся катер действует сила . С другой стороны, по второму закону Ньютона, эта сила , где – масса, а – ускорение. Следовательно,

(1.1)

есть дифференциальное уравнение (математическая модель), описывающее движение катера.

На втором этапе (решения задачи средствами математики внутри модели) старшеклассники решают дифференциальное уравнение методом разделения переменных.

Разделяя переменные и затем интегрируя из (1.1), получим

,

.

Значит, общее решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид:

. (1.2)

Так как в момент времени сек скорость катера была км/ч, а через одну минуту, т.е. при она была км/ч, то из общего решения (1.2), получаем:

и .

Значит,

и , т.е. или .

Подставив в (1.2), имеем

. (1.3)

При , из (1.3) получим

.

Третий этап – переход к осмыслению полученных результатов согласно условию задачи. Таким образом, скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя будет равна 2 км/ч.

Ответив на первый вопрос задачи, старшеклассники приступают к рассмотрению следующих вопросов: какое расстояние катер пройдёт через 1 минуту после выключения мотора? Какое расстояние он пройдёт через 2 минуты после выключения мотора?

Учащиеся переводят с языка сюжетной задачи на язык математических терминов, то есть строят математическую модель (дифференциальное уравнение).

Обозначим через расстояние, которое катер будет проходить после остановки двигателя. Очевидно, что оно зависит от времени , т.е. S=S(t), и в момент остановки двигателя Так как, в силу физического смысла, скорость есть производная пути по времени, то используя формулу (1.3), имеем

,

откуда интегрируя, с учетом, что , получаем

Так как , то для простоты вычислений можно считать . Поэтому, из предыдущего равенства окончательно получаем:

(1.4)

При из (1.4), имеем

(км),

т.е. через минуту после остановки двигателя катер пройдет 100 метров.

При из (1.4), имеем

(км),

т.е. через 2 минуты после остановки двигателя катер пройдет 125 метров.

Следуя третьему этапу метода математического моделирования, возвращаемся к сюжету задачи.

**Ответ**: Через 2 минуты после остановки двигателя скорость катера будет 2 км/ч. и он пройдёт расстояние 125 метров, а через 1 минуту после остановки двигателя он пройдет расстояние 100 метров.

**Замечание 1.** Ученики могли предложить воспользоваться хорошо известной формулой , где определяется по формуле (1.3), но она привела бы к ошибочным парадоксальным результатам: через минуту пройденной после остановки двигателя расстояние равнялось бы км, а через 2 минуты – км, т.е. расстояние бы уменьшилось, что невозможно. Здесь нужно обратить внимание учеников, что формула справедлива для **равномерного** движения и в данном случае не применима.

Общая схема решения геометрических задач формулируется вместе с учащимися после решения первой задачи. Она выглядит следующим образом:

1. При решении геометрических задач на составление дифференциальных уравнений удобно, исходя из условий задачи, сделать сначала чертеж, обозначив через *y = f* (*x*) искомую кривую, а через произвольную точку этой кривой.

2. Затем, выразив все входящие в задачу величины через *x*, и и используя условия задачи, записать зависимость между ними в виде уравнения: F(*x*, и т. е. составляется модель. Таким образом обучающиеся осваивают один из основных методов математики – метод математического моделирования. При этом в большинстве случаев используется обычно геометрический смысл производной где есть угол, образованный касательной к кривой в точке с положительным направлением к оси *Ох.*

3. Решается полученное дифференциальное уравнение одним из методов, с которыми ознакомлены учащиеся, т. е. ищется кривая по свойству ее касательной, общему для всех точек этой кривой, при этом наибольший эффект, как правило, достигается, если использовать уравнение касательной в точке где текущие координаты касательной.

4. Делается вывод.

Рассмотрим примеры решения геометрических задач на нахождение кривых, приводящие к дифференциальным уравнениям.

**Задача 1.** Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в  раз меньшую абсциссы точки касания ().

**Решение**. Решаем задачу с обучающимися в соответствии с выделенными этапами.

1. Сделаем рисунок (см. Рис. 1.1):

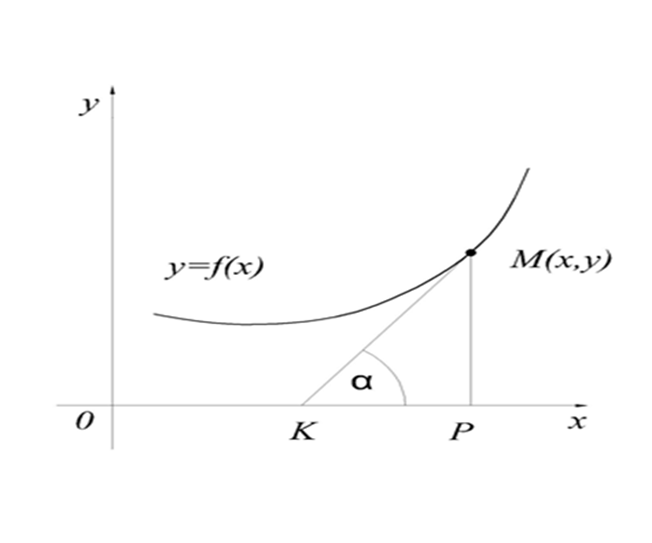
**

Рис. 1.1

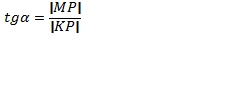
Пусть  есть уравнение одной из искомых кривых и  – произвольная точка, лежащая на ней.



2. Обозначим через  угол, образованный касательной в точке  c положительным направлением оси . Из прямоугольного треугольника  получаем:



 . (1.1)



Далее обучающиеся выражают величины, входящие в (1.1), через ,  и . Имеем (см. Рис. 1.1): , ,  (в силу геометрического смысла производной) и , так как по условию задачи . Подставляя в (1.1), обучающиеся получают дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными:



. (1.2)



3. Установив тип дифференциального уравнения, обучающиеся разделяют переменные и интегрируют; из (1.2) имеем:

,

откуда получают:  – общее решение дифференциального уравнения (1.2).



4. Далее делают вывод и записывают ответ.

Ответ: ,  – произвольная постоянная.



Полезно рассмотреть случай, если в задаче 1 точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в 2 раза меньшую абсциссы точки касания, при этом в результате получим  – семейство парабол (см. [4, c. 9]).

В связи с решением задачи 1 у учащихся естественно может возникнуть вопрос: а что если точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в  раз большую (а не меньшую) абсциссы точки касания? Чтобы ответить на этот вопрос, предлагаем рассмотреть для простоты случай . А именно, решим следующую задачу.

**Задача 2.** Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в 2 раза большую абсциссы точки касания.

**Решение**. 1. Сделаем рисунок (см. Рис. 2.1):



0











Рис 2.1

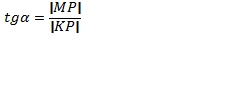
Пусть  есть уравнение одной из искомых кривых и  – произвольная точка, лежащая на ней.



2. Обозначим через  угол, образованный касательной в точке  c положительным направлением оси . Тогда угол . Из прямоугольного треугольника  получаем:



 . (2.1)



Выразим величины, входящие в (2.1), через ,  и . Имеем (см. рис. 2.1): , ,  (в силу геометрического смысла производной) и , так как по условию задачи . Подставляя в (2.1), с учетом того, что по формулам приведения , получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка:



. (2.2)



3. Обучающиеся определяют тип дифференциального уравнения, разделяют переменные и интегрируют, т. е. из (2.2) получают:

,

откуда  – общее решение дифференциального уравнения (2.2).



4.Ответ:  – семейство гипербол, где  – произвольная постоянная.



Следует обратить внимание обучающихся на то, что при  ответы задач 1 и 2 совпадают.

Кроме того, проводя аналогию с решением задачи 1, обучающиеся замечают, что задача 2 допускает обобщение на случай, когда точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу в  раз большую абсциссы точки касания.

Учащиеся часто задают вопрос: для чего нужна математика, где она применяется, какая от неё польза? И они хотят услышать не абстрактные ответы о том, что она применяется в астрономии, физике, химии, биологии, медицине и т.д., а ознакомиться с конкретными примерами применений, причем желательно относящимся к явлениям, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни. На наш взгляд неподдельный интерес у учащихся может вызвать пример, связанный со спутниковыми антеннами, локаторами (радиолокационными станциями или радарами). При этом можно успешно использовать информационные-коммуникационные технологии (ИКТ) для демонстрации презентаций и видеофильмов.

Как известно, спутниковая антенна (*антенна спутниковой связи*) – это [антенна](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0), используемая для приёма и (или) передачи радиосигналов между наземными станциями и [искусственными спутниками Земли](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%A1%D0%97). В спутниковой связи используются различные типы антенн, причем самый известный из них учащимся тип – это [**зеркальные**](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B5%D1%80%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0) параболические антенны (*«спутниковые тарелки»*), массово применяемые в настоящее время для приёма [спутникового ТВ-вещания](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B5_%D1%82%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) и в спутниковой связи. См. сайт

<https://ru.wikipedia.org/wiki/Спутниковая_антенна>

После демонстрации презентации и видеофильма учащимся станет ясно, что для приёма и передачи радиосигналов необходимо, чтобы они не рассеивались (были параллельны).

Рассмотрим в этой связи следующую задачу.

**Задача 3**. Какова должна быть форма спутниковой тарелки, чтобы отраженные радиосигналы были параллельны?

**Решение**. 1. Сделаем рисунок. Поместим источник радиосигналов в начале координат  плоскости  и найдем уравнение линии  пересечения поверхности тарелки этой плоскостью, считая ось  осью симметрии. Пусть  – любая точка. Проведем через эту точку касательную к кривой (см. рис. 3.1):



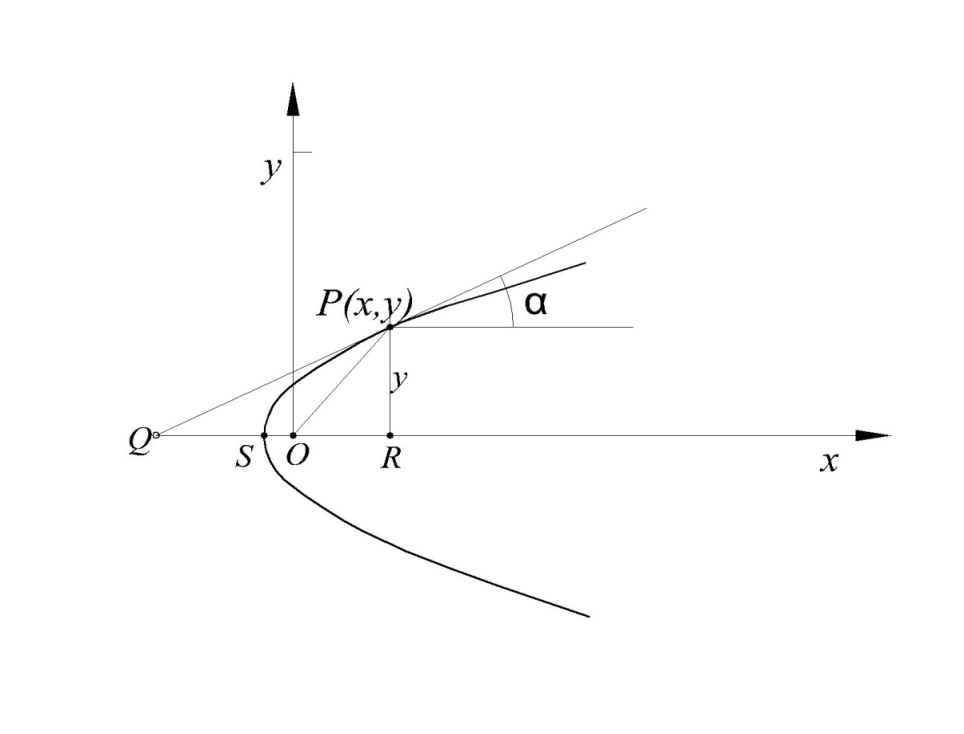


Рис. 3.1

2. Так как угол падения  равен углу отражения, то  и . Значит,  равнобедренный, т.е.  (по теореме Пифагора). В силу геометрического смысла производной, имеем

,

откуда  или .

3. Замечая, что первообразной левой части является , а правой части , обучающиеся, интегрируя, получают  или

, (3.1)

где  есть произвольная постоянная.

Из равенства (3.1) следует, что линия  есть парабола. Значит, спутниковая тарелка имеет форму параболоида, получающегося в результате вращения линии вокруг оси .



4. Далее делают вывод и записывают ответ.

**Ответ.** Спутниковая тарелка имеет форму параболоида.

Далее учащимся можно предложить найти вершину и фокус параболы .



Можно порекомендовать учащимся прочитать книгу А.Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина» или посмотреть одноимённый художественный фильм.

<https://ru.wikipedia.org/wiki/Гиперболоид_инженера_Гарина>

ИНТЕРЕСНО ОТМЕТИТЬ:

* Более правильное название устройства Гарина — [параболоид](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B8%D0%B4). Толстой знал об этом, однако выбрал слово *«гиперболоид»* из-за более внушительного звучания. Вогнутое зеркало [гиперболической](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B8%D0%B4) формы в действительности рассеивает, а не фокусирует свет; и поэтому для данного оружия непригодно. Однако в устройстве Гарина использовались два гиперболических зеркала — главное вогнутое и малое выпуклое. Это похоже на систему телескопа [Ричи — Кретьена](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%A0%D0%B8%D1%87%D0%B8_%E2%80%94_%D0%9A%D1%80%D0%B5%D1%82%D1%8C%D0%B5%D0%BD%D0%B0), которая была предложена в 1924 году: она включает в себя два гиперболических зеркала и используется сейчас в большинстве крупных телескопов и в резонаторах мощных лазеров.

Для усвоения метода математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений учащимся можно предложить решение еще ряда интересных и доступных для ясного понимания задач из книги [3].

Современное занятие в системе дополнительного образования – это время, когда дети сами ищут, спорят, сопоставляют, обобщают, делают выводы. Одним словом, активно участвуют в обсуждении того, что и как происходит в процессе решения практико-ориентированных задач [5] .

**Литература**

1. Абатурова В.С. Формирование прикладного математического мышления школьников // Сибирский педагогический журнал. 2007. №6. С. 230-241.
2. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть II. Среднее (полное) общее образование / Министерство образования Российской Федерации. - М. 2004.
3. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. – М.: МЦНМО, 2008. – 200 с.
4. Аммосова Н.В. Некоторые аспекты подготовки учителей математики к работе в системе дополнительного образования школьников // Наука Кубани. — 2005. — № 2. — С. 174–179.
5. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. – Минск: «Вышейшая школа», 1973. – 560 с.
6. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2004. – 240 с.
7. Аммосова Н.В., Лобанова Н.И. Решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования // Сибирский педагогический журнал . 2016. № 2. С. 24–34.