МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Кафедра теории функций и приближений

Периодические обобщённые функции. Анализ и синтез Фурье. Техника ядер. Гипоэллиптичность

Учебное пособие

Казань 2019

Утверждено на заседании
учебно-методической комиссии
Института математики и механики
им. Н. И. Лобачевского КФУ
Протокол № ____________ от ____________

Составители: доц. Салехов Л.Г., доц. Агачев Ю.Р., асп. Гуськова А.В., асп. Яхина М.М.

Учебное пособие по курсу по выбору для магистров второго года обучения. Рассматриваются темы: периодические обобщённые функции в пространстве $\mathbb{R}^n$, анализ и синтез Фурье, техника ядер, гипоэллиптичность.

Учебное пособие является естественным продолжением концепции обобщённых функций, положенной в основу изложения курса "Уравнения с частными производными" для математиков.

Первые две темы, из вышеуказанных, обобщают соответствующие темы классического анализа на случай пространства размерности n и рассматриваются в пространствах обобщённых функций посредством введения понятий *периодического разложения единицы в пространстве пробных функций* и *периодического преобразования обобщённых функций.*

Раздел "Техника ядер" служит естественным продолжением теории уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, излагаемой в курсе «Уравнения с частными производными» для математиков.

Важная "теорема Лорана Шварца о регулярности" даёт практический критерий *определения гипоэллиптичности операторов* в частных производных с постоянными коэффициентами.

Рецензент: д.ф.-м.н, профессор, зав. кафедрой математического анализа Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ Насыров С.Р.

Содержание

1 Определение и свойства периодических обобщённых функций **4**

1.1 Определение . . . 4

1.2 Свойства . . . 4

1.3 Периодическое преобразование обобщённой функции с компактным носителем 5

1.3.1 Свойства . . . 5

1.3.2 Периодическое разложение единицы в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . . . 7

1.3.3 Лемма о сюръективности . . . 7

1.4 Дуальность между $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ . . . 7

1.4.1 Теорема о дуальности . . . 8

1.4.2 Выражение дуальности между $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ . . . 8

2 Суммируемые семейства в топологических векторных пространствах **9**

2.1 Определения . . . 9

2.2 Общие свойства . . . 10

2.3 Нормально суммируемые семейства . . . 10

3 Пространства последовательностей **11**

3.1 Пространства $l^p(\mathbb{Z}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$ . . . 11

3.2 Быстрое убывание . . . 11

3.3 Медленный рост . . . 12

4 Ряды Фурье **14**

4.1 Определения . . . 14

4.2 Теорема о взаимности для $L^2(\mathbb{T}^n)$ и $l^2(\mathbb{Z}^n)$ . . . 14

4.3 Представление в гильбертовом пространстве . . . 15

4.4 Теорема о взаимности для $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ . . . 16

4.5 Теорема о взаимности для $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ . . . 17

4.6 Дополнение к периодическим обобщённым функциям . . . 18

5 Техника ядер **19**

5.1 Напоминание . . . 19

5.2 Определения из теории ядер . . . 20

5.3 Фундаментальные ядра оператора в частных производных . . . 26

5.4 Гипоэллиптичность. . . . 29

6 Некоторые задачи **34**

1 Определение и свойства периодических обобщённых функций

Для определённости мы будем рассматривать лишь *периодические функции с периодом* 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ всюду далее обозначаем множество бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций $\varphi(x)$ с компактными носителями $\operatorname{supp}\varphi$ в $\mathbb{R}^n$, где

$$\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \big| \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Обобщенная функция на $\mathbb{R}^n$ есть линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, т.е. элемент из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Значение обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ на пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ задается формулой

$$\langle f, \varphi \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \ (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)), \text{ если } f \text{ — регулярна.}$$

1.1 Определение

Обобщённая функция F называется *периодической* с периодом 1, если $\tau_\lambda F = F$ $(\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n)$, где $\tau_\lambda \varphi := \varphi(x - \lambda)$, то есть τ_λ — оператор сдвига в точку $x = \lambda$.

Периодические функции с периодом 1 индуцируют функции на торе $\mathbb{T}^n := \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\right)^n$, поэтому будем отождествлять их и обозначать множество периодических функций через $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$. Оно, очевидно, представляет собой подмножество из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Положим

$$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{T}^n) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

где $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ — множество бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций. Ясно, что всякий элемент из $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ есть не что иное, как бесконечно дифференцируемая периодическая функция.

1.2 Свойства

Приведем важные свойства введенных множеств.

1. *Множество $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ замкнуто в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.*

   Действительно, для любого λ из $\mathbb{Z}^n$ оператор τ_λ замкнут на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, ядро оператора $(\tau_\lambda - I)$, где I — тождественный оператор из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, есть замкнутая часть из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Но

   $$\mathcal{P}(\mathbb{T}^n) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} Ker(\tau_\lambda - I),$$

что и требовалось доказать.

2. *Множество $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ замкнуто в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ снабжено слабой топологией.*

   $\mathfrak{R}$: *В курсе "Уравнения с частными производными" говорится о том, что в дуальном (сопряжённом) пространстве, вообще говоря, действуют две топологии: слабая (поэлементная) и сильная (сходимость на компактах). Нами, в согласии с учебником Владимирова В.С., используется слабая топология.*

   Отметим, что при доказательстве используется факт, что оператор τ_λ непрерывен на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, будучи транспонированным к оператору $\tau_{-\lambda}$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Периодическое преобразование обобщённой функции с компактным носителем

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем:

$$\widetilde{\omega}\varphi := \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda \varphi = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (\delta_\lambda * \varphi),$$

где $\delta_\lambda := \delta(x - \lambda)$.

Заметим, что сумма содержит только конечное число слагаемых. Функция $\widetilde{\omega}\varphi$ называется периодическим преобразованием функции φ. Очевидно, что $\widetilde{\omega}\varphi$ есть периодическая функция из класса C^∞, причем для любых φ и ψ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\langle \widetilde{\omega}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \widetilde{\omega}\varphi \rangle.$$

Пусть, далее $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство обобщённых функций с компактными носителями в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\langle \widetilde{\omega}T, \varphi \rangle := \langle T, \widetilde{\omega}\varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Линейный функционал $\widetilde{\omega}T$, определённый на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, называется *периодическим преобразованием обобщённой функции T*.

1.3.1 Свойства

1. *Линейное отображение $\widetilde{\omega}$ переводит непрерывно $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

   Действительно, для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ отображение $\widetilde{\omega}$ переводит множество бесконечно дифференцируемых на $K \subset \mathbb{R}^n$ функций $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, так как $\widetilde{\omega}$ есть конечная сумма линейных непрерывных отображений. Следовательно, $\widetilde{\omega}$ непрерывно отображает $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Формула
$$\langle \widetilde{\omega}T, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\omega}\varphi \rangle, \ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$
показывает, что $\widetilde{\omega}T$ есть обобщённая функция на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и отображение $T \curvearrowright \widetilde{\omega}T$ есть линейное непрерывное из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (снабженные слабыми топологиями) в силу топологических свойств транспонированного отображения.

2. *Для любого $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ обобщённая функция $\widetilde{\omega}T$ является периодической, то есть $\widetilde{\omega}(\tau_\lambda T) = \tau_\lambda(\widetilde{\omega}T) = \widetilde{\omega}T$ $(\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n)$.*

Действительно, для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем
$$\tau_\lambda(\widetilde{\omega}\varphi) = \widetilde{\omega}(\tau_\lambda \varphi) = \widetilde{\omega}\varphi, \ \forall \lambda \in \mathbb{Z}^n.$$
Отсюда, в силу понятия транспонированного отображения, вытекает
$$\widetilde{\omega}(\tau_{-\lambda}T) = \tau_{-\lambda}(\widetilde{\omega}T) = \widetilde{\omega}T \ (\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n, \forall T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)),$$
что и требовалось доказать.

3. *Для любых $F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*
$$\widetilde{\omega}(\psi F) = F\widetilde{\omega}(\psi);$$
для любых $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$
$$\widetilde{\omega}(fT) = f(\widetilde{\omega}T).$$
Действительно, прежде всего заметим, что для всех $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$
$$\langle \widetilde{\omega}T, \varphi \rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \langle \tau_\lambda T, \varphi \rangle,$$
так как сумма справа конечна. Это соотношение запишем так:
$$\widetilde{\omega}T = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda T \text{ (равенство в смысле обобщённых функций).}$$
Но, если F периодическая, имеем
$$\tau_\lambda(\psi F) = \tau_\lambda \psi \tau_\lambda F = F \tau_\lambda \psi.$$
Отсюда
$$\widetilde{\omega}(\psi F) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda(\psi F) = F \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda \psi = F\widetilde{\omega}\psi.$$
Тем более, если f периодическая, то $\tau_\lambda(fT) = f\tau_\lambda T$. Поэтому
$$\widetilde{\omega}(fT) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda(fT) = f \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tau_\lambda T = f(\widetilde{\omega}T),$$
что и требовалось доказать.

1.3.2 Периодическое разложение единицы в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Определение. Функция $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\widetilde{\omega}\theta = 1$, называется *периодическим разложением единицы.*

Утверждение. *Существует по крайней мере одно периодическое разложение единицы.*

Действительно, пусть ψ — положительная функция на $\mathbb{R}^n$, отличная от нуля на $(2I)^n$, где I есть открытый интервал с концами $-1/2$ и $+1/2$, и принадлежащий $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathfrak{R}$: Отметим, что по лемме об отделимости типа Урысона такая функция существует.

Так как $\widetilde{\omega}\psi > 0$, положим $\theta := \dfrac{\psi}{\widetilde{\omega}\psi}$. Очевидно, что $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

С другой стороны, $\widetilde{\omega}\psi$ периодическая, и, следовательно,

$$\widetilde{\omega}\theta = \frac{1}{\widetilde{\omega}\psi}\widetilde{\omega}(\psi) = 1.$$

1.3.3 Лемма о сюръективности

Всякая периодическая функция класса C^∞ является периодическим преобразованием функции класса C^∞ с компактным носителем. Всякая периодическая обобщённая функция есть периодическое преобразование обобщённой функции с компактным носителем.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Положим $\varphi = \theta f$. Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{\omega}\varphi = \widetilde{\omega}(f\theta) = f\widetilde{\omega}\theta = f$.

Если $F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$, то, полагая $T = \theta F$, будем иметь: $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{\omega}T = F\widetilde{\omega}\theta = F$, что и требовалось доказать.

N.B. Посредством той же схемы доказательства можно показать, что:

всякая периодическая обобщённая функция порядка, меньшего $k \in \mathbb{N}$ (соответственно мера Радона, функции из класса C^k) является периодическим преобразованием обобщённой функции конечного порядка k (соответственно мера Радона, функция класса C^k) с компактным носителем. Всякая периодическая функция из $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ является периодическим преобразованием функции из $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем.

1.4 Дуальность между $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$

Обозначим через $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ множество линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$.

Величину функционала $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ в точке $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ будем обозначать через $\langle L, f\rangle_{\mathbb{T}^n}$. Пусть $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ снабжено слабой или сильной дуальной топологией.

1.4.1 Теорема о дуальности

Векторные топологические пространства $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}'(\mathbb{T}^n)$ изоморфны (алгебраически и топологически).

Доказательство.

1. Отображение $\widetilde{\omega}$ непрерывно отображает $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Его транспонирование ${}^t\widetilde{\omega}$ определяется формулой $\langle {}^t\widetilde{\omega}L, \varphi\rangle := \langle L, \widetilde{\omega}\varphi\rangle_{\mathbb{T}^n}$, где $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Это транспонированное отображение непрерывно отображает $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Легко доказать, что ${}^t\widetilde{\omega}L$ есть периодическая обобщённая функция с периодом 1. Следовательно, ${}^t\widetilde{\omega}$ непрерывно отображает $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{L}'(\mathbb{T}^n)$.

2. С другой стороны, пусть θ есть $\mathcal{D}$-периодическое разложение единицы. Отображение $f \curvearrowright \theta f$ непрерывно отображает $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через θ сужение этого отображения на $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Тогда θ непрерывно отображает $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, его транспонированное отображение ${}^t\theta$ непрерывно отображает $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$.

   Напомним, что ${}^t\theta$ определяется по формуле

   $$\langle\ {}^t\theta U, f\rangle := \langle U, \theta f\rangle_{\mathbb{T}^n},$$

   где $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$,

   Рассмотрим сужение ${}^t\theta$ на $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$. Обозначим его снова через ${}^t\theta$. Тогда ${}^t\theta$ непрерывно отображает $\mathcal{L}'(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$.

3. Покажем, что ${}^t\widetilde{\omega}$ и ${}^t\theta$ два обратных отображения между $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{L}'(\mathbb{T}^n)$.

   Действительно, с одной стороны, очевидно, что $\widetilde{\omega} \circ \theta$ есть тождество в $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Через транспонирование следует, что $({}^t\theta \circ\ {}^t\widetilde{\omega})$ есть тождество в $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$.

   С другой стороны, для любого $F \in \mathcal{L}'(\mathbb{T}^n)$ и любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

   $$\begin{gathered}\langle\ {}^t\widetilde{\omega}(\ {}^t\theta F), \varphi\ \rangle = \langle\ {}^t\theta F, \widetilde{\omega}\varphi\ \rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle\ F, \theta(\widetilde{\omega}\varphi)\ \rangle = \\ = \langle\ \theta F, \widetilde{\omega}\varphi\ \rangle = \langle\ \widetilde{\omega}(\theta F), \varphi\ \rangle = \langle\ F, \varphi\ \rangle.\end{gathered}$$

   Это соотношение показывает, что ${}^t\omega \circ\ {}^t\theta$ есть тождество в $\mathcal{L}'(\mathbb{T}^n)$.

1.4.2 Выражение дуальности между $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$

Предложение. *Если отождествить $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$, то дуальность между $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ выражается формулой:*

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle T, f\rangle,\ F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n),\ f \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n),$$

где T есть обобщённая функция с компактным носителем, периодическое преобразование которого равно F.

Доказательство. Отождествляя, по-прежнему, $\mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$ с $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ через ранее рассмотренный изоморфизм ${}^t\theta$, имеем

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle F, \theta f\rangle,$$

где $F \in \mathcal{L}(\mathbb{T}^n)$, $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$.

Пусть $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\tilde{\omega} T = F$. Тогда имеем:

$$\langle \widetilde{\omega} T, \theta f\rangle = \langle T, \widetilde{\omega}(\theta f)\rangle = \langle T, f\rangle,$$

что и требовалось доказать.

N.B.

1. Поскольку всякая периодическая обобщённая функция F может всегда рассматриваться как периодическое преобразование некоторой обобщённой функции с компактным носителем, то, согласно лемме о сюръективности, предпочтительнее записывать:

$$\langle \widetilde{\omega} T, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \langle T, f\rangle.$$

2. Если F есть периодическая локально интегрируемая функция, то можно брать $T = 1_{I^n} F$. Тогда

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}^n} = \int\limits_{I^n} F(x) f(x) dx.$$

2 Суммируемые семейства в топологических векторных пространствах

Пусть X — хаусдорфово топологическое векторное пространство. Рассмотрим семейство $(x_i)_{i\in I}$ элементов из X. Обозначим через J множество конечных частей из I. Очевидно, множество J упорядочено посредством вложения. Для каждого $j \in J$ положим $S_j = \sum\limits_{i\in j} x_i$.

2.1 Определения

Пусть $S \in X$. Говорят, что семейство $(x_i)_{i\in I}$ суммируемо к S, если *обобщённая последовательность* $(S_j)_{j\in J}$ сходится к S. Тогда S называется *суммой семейства*.

Говорят, что семейство $(x_i)_{i \in I}$ *удовлетворяет критерию Коши*, если обобщённая последовательность $(S_j)_{j \in J}$ есть последовательность Коши. Иначе говоря, для каждой окрестности V нуля существует $j_0 \in J$ такой, что для каждого $k \in J$, не пересекающего j_0, имеет место $S_k \in V$.

2.2 Общие свойства

1. Сумма суммируемого семейства единственна.

2. Суммируемое семейство удовлетворяет критерию Коши.

3. Если X полное, то каждое семейство в X, удовлетворяющее критерию Коши, является суммируемым.

4. Пусть f некоторое линейное отображение из X в другое топологическое векторное пространство Y. Если семейство (x_i) суммируемо к S, то семейство $f(x_i)$ суммируемо к $f(S)$.

Заметим, что доказательство этих утверждений дается в курсе топологии.

2.3 Нормально суммируемые семейства

Пусть X локально выпуклое отделимое, $\mathcal{P}$ – базис полунорм, непрерывных на X.

Говорят, что семейство $(a_i)_{i \in I}$ *нормально суммируемо*, если для каждой $p \in \mathcal{P}$ семейство $(p(a_i))_{i \in I}$ суммируемо в $\mathbb{R}$.

Предложение. *В полном, отделимом, локально выпуклом пространстве X всякое нормально суммируемое семейство является суммируемым.*

Доказательство. Пусть j и j' два элемента из J. Имеем для каждой полунормы $p \in \mathcal{P}$

$$p(S_j - S_{j'}) \leq p(\sum_{i \in j \times j'} a_i) \leq \sum_{i \in j \times j'} p(a_i)$$

Суммируемость семейства $(p(a_i))_{i \in I}$ показывает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $j_0 \in J$ такое, что $j_0 \subset j, j'$ влечёт $\sum\limits_{i \in j \times j'} p(a_i) < \varepsilon$.

Следовательно, обобщённая последовательность $(p(S_j - S_{j'}))$ стремится к 0, а это показывает, что обобщённая последовательность $(S_j - S_{j'}) \longrightarrow 0$. Полнота пространства завершает доказательство.

N.B. Если X конечной размерности, то всякое суммируемое семейство является нормально суммируемым.

3 Пространства последовательностей

3.1 Пространства $l^p(\mathbb{Z}^n)$, $1 \le p \le +\infty$

Комплексная функция, определённая на $\mathbb{Z}^n$, называется *последовательностью* и обозначается $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$, или (a_λ), или $\mathbf{a}$.

Множество последовательностей, суммируемых со степенью p, обозначается $l^p(\mathbb{Z}^n)$.

Норма в $l^p(\mathbb{Z}^n)$ обозначается $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le +\infty)$. В частности,

$$\mathbf{a} \in l^1(\mathbb{Z}^n) \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |a_\lambda| < +\infty,$$

$$\mathbf{a} \in l^2(\mathbb{Z}^n) \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |a_\lambda|^2} < +\infty,$$

$$\mathbf{a} \in l^\infty(\mathbb{Z}^n) \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|_\infty = \sup_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |a_\lambda| < +\infty.$$

Очевидно,

$$l^1(\mathbb{Z}^n) \subset l^2(\mathbb{Z}^n) \subset C_0(\mathbb{Z}^n) \subset l^\infty(\mathbb{Z}^n),$$

где $C_0(\mathbb{Z}^n)$ – пространство последовательностей, сходящихся к нулю на бесконечности, снабжённое топологией, индуцированной из $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$. Можно рассматривать $l^p(\mathbb{Z}^n)$ как $\mathcal{L}^p(\mathbb{Z}^n, \mu)$, где μ есть мера, определённая через $\mu(\{\lambda\}) = 1$ для $\lambda \in \mathbb{Z}^n$.

3.2 Быстрое убывание

Определение. Последовательность (a_λ) называется *быстро убывающей*, если она удовлетворяет одному из четырёх эквивалентных условий:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ последовательность $(\lambda^\alpha a_\lambda)$ есть элемент из $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ последовательность $(\lambda^\alpha a_\lambda)$ есть элемент из $l^1(\mathbb{Z}^n)$;
3. $\forall k \in \mathbb{N}^n$ последовательность $((1+|\lambda|^2)^k a_\lambda)$ есть элемент из $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$;
4. $\forall k \in \mathbb{N}^n$ последовательность $((1+|\lambda|^2)^k a_\lambda)$ есть элемент из $l^1(\mathbb{Z}^n)$.

Эквивалентность этих четырёх утверждений легко проверить. Утверждение 2) влечёт 1). Также утверждение 4) влечёт, очевидно, 3). Эквивалентность между 1) и 3) и между 2) и 4) вытекает из следующего утверждения.

Лемма. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Существует положительная константа c, зависящая от k и от β, такая, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}^n$ имеет место*

$$c(1+|\lambda|^2)^k \le \sup_{|\beta|\le k} |\lambda^\beta|^2 \leqslant \sup_{|\beta|\le 2k} |\lambda^\beta| \leqslant (1+|\lambda|^2)^k.$$

Утверждение 4) вытекает из 3) и факта, что последовательность $\left(\dfrac{1}{(1+|\lambda|^2)^n}\right)_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$ есть элемент из $l^1(\mathbb{Z}^n)$.

Множество быстро убывающих последовательностей обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Его структурируют в отделимое, локально выпуклое топологическое векторное пространство через следующее семейство полунорм:

$$q_\alpha(\mathbf{a}) = \sup_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |\lambda^\alpha a_\lambda|,\ \alpha\in\mathbb{N}^n,$$

$$q_\alpha^*(\mathbf{a}) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} |\lambda^\alpha a_\lambda|,\ \alpha\in\mathbb{N}^n,$$

$$|\mathbf{a}|_k = \sup_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} (1+|\lambda|^2)^k |a_\lambda|,\ k\in\mathbb{N},$$

$$|\mathbf{a}|_k^* = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} (1+|\lambda|^2)^k |a_\lambda|,\ k\in\mathbb{N}.$$

Имеет место следующий результат (его примем без доказательства).

Теорема о плотности. *Множество конечных последовательностей $C(\mathbb{Z}^n)$ всюду плотно в $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.*

3.3 Медленный рост

Определение. Последовательность $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ называется *последовательностью медленного роста*, если функция $\lambda \curvearrowright a_\lambda$ является функцией медленного роста, иначе говоря, если существует положительное k такое, что последовательность $\left(\frac{1}{(1+|\lambda|^2)^k}\right)_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$ будет элементом из $l^1(\mathbb{Z}^n)$.

Множество последовательностей медленного роста будем временно обозначать через $\sigma(\mathbb{Z}^n)$.

Теорема об изоморфизме. *Существует биекция между пространством $\sigma(\mathbb{Z}^n)$ последовательностей медленного роста и пространством $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, дуальным топологическим к пространству $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.*

Если отождествить последовательность медленного роста с линейным непрерывным функционалом на $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, то дуальность между $\sigma(\mathbb{Z}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ выражается формулой

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle := \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} b_\lambda a_\lambda,\ \mathbf{b}\in\sigma(\mathbb{Z}^n),\ \mathbf{a}\in\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

Доказательство.

1) Пусть $\mathbf{b}$ — последовательность медленного роста. Существуют $k \in \mathbb{N}$ и $M > 0$ такие, что

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \frac{|b_\lambda|}{(1+|\lambda|^2)^k} \leq M.$$

Следовательно, последовательность $(b_\lambda a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ есть (абсолютно) суммируемая и

$$|\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} b_\lambda a_\lambda| \leq \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} |b_\lambda a_\lambda| \leq M|\mathbf{a}|_k,$$

где

$$|\mathbf{a}|_k = \sup_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (1+|\lambda|^2)^k |a_\lambda|.$$

Функционал $\mathbf{a} \curvearrowright \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} b_\lambda a_\lambda$ существенно непрерывен на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} b_\lambda a_\lambda = 0 \;\; (\forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ влечёт $\mathbf{b} = 0$ (достаточно взять в качестве $\mathbf{a}$ последовательность δ^ξ). Иначе говоря, $\sigma(\mathbb{Z}^n)$ вкладывается в $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

2) Обратно, пусть $\mathbf{a}'$ непрерывный линейный функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Из непрерывности $\mathbf{a}'$ следует, что существует $k \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$|\langle \mathbf{a}', \mathbf{a} \rangle| \leqslant C|\mathbf{a}|_k \text{ для любой } \mathbf{a} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

Так как множество $\{\delta^\xi, \xi \in \mathbb{Z}^n\}$ тотально в $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, то линейный функционал $\mathbf{a}'$ характеризуется своими значениями в точках δ^ξ, $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Иначе говоря, $\mathbf{a}'$ может быть представлено через последовательность $(a'_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$.

Покажем, что последовательность (a'_λ) является медленно растущей. Согласно доказательству теоремы об изоморфизме, для каждой $\mathbf{a} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ семейство $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a_\lambda \delta^\lambda$ суммируется к $\mathbf{a}$ по топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, семейство $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \langle \mathbf{a}', \delta^\lambda \rangle a_\lambda = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a'_\lambda a_\lambda$ является суммируемым к $\langle \mathbf{a}', \mathbf{a} \rangle$ (в силу непрерывности функционала $\mathbf{a}'$). Следовательно, имеем

$$\left| \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a'_\lambda a_\lambda \right| \leq C \sup_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (1+|\lambda|^2)^k |a_\lambda| \text{ для всякой } \mathbf{a} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

Тогда при $\mathbf{a} = \delta^\xi$, где $\xi \in \mathbb{Z}^n$, получаем

$$|a'_\xi| \leq C(1+|\xi|^2)^k,$$

что завершает доказательство.

В дальнейшем отождествляем $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ и $\sigma(\mathbb{Z}^n)$.

4 Ряды Фурье

4.1 Определения

Определим два отображения $\mathcal{H}$ и $\mathcal{Y}$, которые назовём соответственно анализ Фурье и синтез Фурье.

Анализ Фурье. Пусть U периодическая обобщённая функция с периодом 1. Для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ положим $\widehat{U}_\lambda := \langle U, \bar{\chi}_\lambda \rangle_{\mathbb{T}^n}$, где $\chi_\lambda(x) = \exp(2\pi i \lambda x)$, $\lambda x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Последовательность $\widehat{U} = (\widehat{U}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ называется *последовательностью коэффициентов Фурье* периодической обобщённой функции U.

Отображение $\mathcal{H} : U \curvearrowright \widehat{U}$ переводит $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ в пространство последовательностей $\mathcal{C}(\mathbb{Z}^n)$ и называется *анализом Фурье.*

Синтез Фурье. Для каждой последовательности $\mathbf{a} = (a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a_\lambda \chi_\lambda$. Если этот ряд суммируем по некоторой топологии к некоторой периодической обобщённой функции U, то говорят, что *синтез Фурье последовательности* $\mathbf{a}$ *возможен по этой топологии* и отображение $\mathcal{Y} : \mathbf{a} \curvearrowright U$ называется *синтезом Фурье.*

4.2 Теорема о взаимности для $L^2(\mathbb{T}^n)$ и $l^2(\mathbb{Z}^n)$

Пусть $L^2(\mathbb{T}^n)$ множество (классов) функций, определённых на $\mathbb{R}^n$, периодических с периодом 1, локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$:

$$L^2(\mathbb{T}^n) := P'(\mathbb{T}^n) \cap L_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Снабдим $L^2(\mathbb{T}^n)$ топологией, индуцируемой из $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Эта топология, очевидно, эквивалентна топологии, определяемой скалярным произведением

$$Cf(g)_{\mathbb{T}^n} := \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Утверждение. *Снабжённое этой предгильбертовой структурой, пространство $L^2(\mathbb{T}^n)$ является полным.*

Доказательство. Поскольку $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ полно, достаточно доказать, что $L^2(\mathbb{T}^n)$ замкнуто в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\overline{L^2(\mathbb{T}^n)}$ его замыкание в $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ по топологии $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Так как эта топология более тонкая, чем топология $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, и так как $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ замкнуто в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, имеем $\overline{L^2(\mathbb{T}^n)} \subset \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$. Следовательно,

$$\overline{L^2(\mathbb{T}^n)} \subset \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{T}^n),$$

что и требовалось доказать.

Теорема о взаимности.

1. *Анализ Фурье $\mathcal{H}$ есть изометрический изоморфизм из $L^2(\mathbb{T}^n)$ на $l^2(\mathbb{Z}^n)$. В частности, для каждой $U \in L^2(\mathbb{T}^n)$ имеем*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} |U(x)|^2 dx = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} |\hat{U}_\lambda|^2$$

(соотношение Парсеваля).

2. *Синтез Фурье $\mathcal{Y}$ каждой последовательности $a \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ возможен по топологии $L^2(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{Y}$ есть изометрический изоморфизм из $l^2(\mathbb{Z}^n)$ на $L^2(\mathbb{T}^n)$.*

3. *$\mathcal{H}$ и $\mathcal{Y}$ являются обратными изоморфизмами между $L^2(\mathbb{T}^n)$ и $l^2(\mathbb{Z}^n)$.*

Доказательство. Согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса множество $\{\chi_\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}^n\}$ является тотальным в пространстве $L^2(\mathbb{T}^n)$. С другой стороны, это множество образует ортонормированную систему. Тогда теорема вытекает из результатов о представлении в гильбертовом пространстве. Напомним этот результат в следующем пункте.

4.3 Представление в гильбертовом пространстве

1. *Пусть $(e_i)_{i \in I}$ – ортонормированное семейство в предгильбертовом, отделимом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

   (a) *Семейство $(e_i)_{i \in I}$ тотально.*

   (b) *Для всякого $x \in H$ семейство $(x/e_i)e_i$ суммируемо в H и*

$$x = \sum_{i \in I} (x/e_i)e_i.$$

   (c) *Для всякого $x \in H$ имеем*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x/e_i)|^2.$$

2. *Пусть $(e_i)_{i \in I}$ — гильбертовый базис (то есть семейство тотальное и ортонормированное в гильбертовом пространстве H. Тогда для каждой $(\lambda = \lambda_i)_{i \in I} \in l^2(I)$ семейство $(\lambda_i e_i)_{i \in I}$ суммируемо в H к элементу $x \in H$, и $(x/e_i) = \lambda_i$.*

4.4 Теорема о взаимности для $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$

1. *Анализ Фурье* $\mathcal{H}$ *есть топологический изоморфизм из* $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ *в* $\sigma(\mathbb{Z}^n)$.

2. *Синтез Фурье* $\mathcal{Y}$ *возможен на* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ *по топологии* $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. *При этом* $\mathcal{Y}$ *есть изоморфизм из* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ *на* $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$.

3. $\mathcal{H}$ *и* $\mathcal{Y}$ *есть два взаимнообратных изоморфизма.*

Доказательство.

1. $\mathcal{H}$ отображает непрерывно $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Используя регулярность и периодичность U и интегрируя по частям, имеем $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$(2\pi i\lambda)^\alpha \widehat{U}_\lambda = \int\limits_{L^2(\mathbb{T}^n)} (D^\alpha U)\exp(-2\pi i\alpha x)\,dx = (\widehat{D^\alpha U})_\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$\|\lambda^\alpha \widehat{U}_\lambda\|_{l^\infty} \leqslant \|D^\alpha U\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leqslant \|D^\alpha U\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)},$$

а это показывает, что $\widehat{U} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ и что $\mathcal{H}$ непрерывно отображает $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

2. $\mathcal{Y}$ непрерывно отображает $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ в $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Вначале заметим, что для любой $a \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ синтез Фурье возможен только по топологии $C(\mathbb{R}^n)$. Иначе говоря, ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda\chi_\lambda$ суммируем по топологии $C(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $U \in C(\mathbb{R}^n)$, если $\mathbf{a} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$. С другой стороны, для любого $\alpha \in \mathbb{N}^n$ последовательность $(\lambda^\alpha a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}$ также принадлежит $l^1(\mathbb{Z}^n)$. Следовательно, $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} D^\lambda(a_\lambda\chi_\lambda)$ суммируем по топологии $C(\mathbb{R}^n)$ к $D^\alpha U$.

   Окончательно, ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}(a_\lambda\chi_\lambda)$ хорошо суммируем по топологии $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ к U. Непрерывность отображения $\mathcal{Y} : \mathbf{a} \curvearrowright U$ тогда вытекает из неравенства

$$\|D^\alpha U\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leqslant \|(\lambda^\alpha U_\lambda)\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)},$$

   что и требовалось доказать.

3. Остаётся показать, что $\mathcal{Y}$ есть обратное к $\mathcal{H}$, то есть

$$\mathcal{YH}U = U \text{ для любого } U \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n),$$

$$\mathcal{HY}\mathbf{a} = \mathbf{a} \text{ для любой } \mathbf{a} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n).$$

   Но по предыдущей теореме о взаимности $L^2(\mathbb{R}^n)$ эти два соотношения справедливы даже для $U \in L^2(\mathbb{T}^n)$ и $a \in l^2(\mathbb{Z}^n)$.

4.5 Теорема о взаимности для $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$

1. *Анализ Фурье $\mathcal{H}$ есть топологический изоморфизм из $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ на $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.*

2. *Синтез Фурье $\mathcal{Y}$ возможен на $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ по топологии $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и является изоморфизмом из $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ на $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$.*

3. *$\mathcal{H}$ и $\mathcal{Y}$ есть два взаимных изоморфизма.*

N.B. В этой теореме $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ снабжены или слабыми или сильными дуальными топологиями.

Доказательство. Рассмотрим ко-анализ Фурье $\overline{\mathcal{H}}$, определяемый формулой

$$(\overline{\mathcal{H}}f)_\lambda := \langle f, \chi_\lambda\rangle_{\mathbb{T}^n},\ \ f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n).$$

Согласно предыдущей теореме это топологический изоморфизм из $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

Обратный изоморфизм, называемый *ко-синтезом Фурье* $\overline{\mathcal{Y}}$, определяется формулой

$$\overline{\mathcal{Y}}\mathbf{a} := \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda\chi_\lambda.$$

Обозначим через ${}^t\overline{\mathcal{H}}$ и ${}^t\overline{\mathcal{Y}}$ соответственно транспонированные для $\overline{\mathcal{H}}$ и $\overline{\mathcal{Y}}$.

Согласно общим свойствам транспонирования ${}^t\overline{\mathcal{H}}$ есть топологический изоморфизм из $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ на $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$, а ${}^t\overline{\mathcal{Y}}$ есть топологический изоморфизм из $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ на $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ и ${}^t\overline{\mathcal{H}}$ и ${}^t\overline{\mathcal{Y}}$ являются обратными. Следовательно, теорема будет доказана, если удастся показать, что ${}^t\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{H}$ и ${}^t\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{Y}$.

Для упрощения записи обозначим $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ вместо $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathbb{T}^n}$.

Доказательство, что ${}^t\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{H}$: Для любого $U \in \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbf{a} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ имеем

$$\langle {}^t\overline{\mathcal{Y}}U, \mathbf{a}\rangle = \langle U, \overline{\mathcal{Y}}\mathbf{a}\rangle = \langle U, \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda\overline{\chi}_\lambda\rangle.$$

Суммируемость по топологии $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ ряда $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda\overline{\chi}_\lambda$ и непрерывность линейного функционала U на $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ позволяет записать

$$\langle U, \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda\overline{\chi}_\lambda\rangle = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}\langle U, a_\lambda\overline{\chi}_\lambda\rangle = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}\langle U, \overline{\chi}_\lambda\rangle a_\lambda = \langle \mathcal{H}U, \mathbf{a}\rangle,$$

что и доказывает, что ${}^t\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{H}$.

Доказательство, что ${}^t\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{Y}$: Пусть $\mathbf{a}' \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ и $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$. Имеем

$$\langle\, {}^t\overline{\mathcal{H}}\mathbf{a}', f\rangle = \langle \mathbf{a}', \overline{\mathcal{H}}f\rangle = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \mathbf{a}'_\lambda\langle f, \chi_\lambda\rangle.$$

Второе равенство есть не что иное, как дуальность между $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Но

$$\langle f, \chi_\lambda \rangle = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)\chi_\lambda(x)dx = \langle \chi_\lambda, f \rangle.$$

Следовательно,

$$\langle\, {}^t\overline{\mathcal{H}}\mathbf{a}', f \rangle = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a'_\lambda \langle \chi_\lambda, f \rangle.$$

Это равенство показывает, что для каждого $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a'_\lambda \langle \chi_\lambda, f \rangle$ суммируем к $\langle\, {}^t\overline{\mathcal{H}}\mathbf{a}', f \rangle$. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a'_\lambda \chi_\lambda$ суммируем по топологии слабой дуальной на $\mathcal{P}'(\mathbb{T}^n)$ к ${}^t\overline{\mathcal{H}}\mathbf{a}'$. Следовательно, $\mathcal{Y} = {}^t\overline{\mathcal{H}}$.

Следствие (теорема единственности). *Если все коэффициенты Фурье обобщённой функции есть нули, то эта обобщённая функция есть нуль.*

4.6 Дополнение к периодическим обобщённым функциям

Можно уточнить последнюю теорему о взаимности. А именно, имеет место следующая

Теорема.

1. *Синтез Фурье $\mathcal{Y}$ всегда возможен на $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ по топологии $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

2. *Всякая периодическая обобщённая функция является обобщённой функцией медленного роста и представляет производную (определённого порядка) от некоторой ограниченной непрерывной периодической функции (*теорема о структуре*).*

Доказательство.

1. Пусть $\mathbf{a}' \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Тогда существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что последовательность $\dfrac{a'_\lambda}{(1+|\lambda^2|)^k}$ есть элемент из $l^1(\mathbb{Z}^n)$. Положим $a_\lambda = \dfrac{a'_\lambda}{(1+|\lambda^2|)^k}$ и рассмотрим ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} a_\lambda \chi_\lambda$. Так как $\mathbf{a} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ и $C(\mathbb{R}^n)$ полно, то этот ряд суммируем по топологии $C(\mathbb{R}^n)$ к функции $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, f есть периодическая, а следовательно, ограниченная.

   Впрочем, суммируемость ряда к f равномерная на $\mathbb{R}^n$ (в силу периодичности), а равномерная сходимость на $\mathbb{R}^n$ влечет сходимость по сильной дуальной топологии (и тем более слабой) в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому ряд $\sum a_\lambda \chi_\lambda$ суммируем к f по сильной дуальной топологии из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Поскольку оператор $\left(1-\dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$ непрерывен на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, имеем

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k f = \sum_\lambda a_\lambda \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \chi_\lambda = \sum_\lambda a_\lambda (1+|\lambda|^2)^k \chi_\lambda$$

   или

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k f = \sum_\lambda a'_\lambda \chi_\lambda,$$

   то есть ряд суммируем по сильной дуальной топологии пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$.

2. Всякая периодическая обобщенная функция, согласно только что доказанному, есть синтез Фурье определенной последовательности $(a'_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$. Следовательно, всякая периодическая обобщенная функция U может быть записана в виде

$$U = \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k f,$$

   где f – ограниченная, периодическая непрерывная функция.

5 Техника ядер

5.1 Напоминание

Пусть $\mathrm{P}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum\limits_{\alpha\le m} c_\alpha(x) D^\alpha$, где $c_\alpha(x) \in \mathcal{E}(\Omega)$, линейный оператор в частных производных с коэффициентом из класса C^∞ на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Уравнение вида:

$$\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f \text{ на } \Omega,$$

где f — заданная обобщенная функция на Ω, а $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ есть искомая обобщенная функция, является линейным уравнением в частных производных в Ω порядка m.

Когда коэффициенты c_α константы, уравнение есть уравнение сверток, ранее изученное.

Оператор ${}^t\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, определяемый по формуле

$${}^tP\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{\alpha \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (c_\alpha(x) u),$$

называется *формально транспонированным* оператором для $\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Уравнение $\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f$ эквивалентно уравнению

$$\langle u,\ {}^t\mathrm{P}\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Уравнение ${}^t\mathrm{P}u = 0$ иногда называется транспонированным уравнением к уравнению $\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f$.

Имеет место

Утверждение. *Решения уравнения* $\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f$ *образуют замкнутое линейное многообразие в пространстве* $\mathcal{D}'(\Omega)$*. В частности, решения однородного уравнения образуют замкнутое векторное подпространство в* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Утверждение вытекает из линейности и непрерывности оператора $\mathrm{P}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ в топологическом векторном пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ (снабженном, например, слабой дуальной топологией).

Следствие. Пусть $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – последовательность классических обобщенных решений уравнения. Если $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно к $u(x)$ на компакте из Ω и если $u(x) \in C^\infty(\Omega)$, то u есть классическое решение класса $C^\infty(\Omega)$.

Доказательство следует из того, что компактная сходимость в Ω влечет сходимость в смысле обобщенных функций на Ω.

5.2 Определения из теории ядер

1. **Общие свойства.**

Пусть X — открытое множество из $\mathbb{R}^m$, а Y — открытое множество из $\mathbb{R}^n$.

(a) **Определения.**

Любая обобщенная функция на $X \times Y$ называется *ядром* на $X \times Y$.

Пусть K ядро на $X \times Y$. Ядро $\overleftrightarrow{K}$ на $Y \times X$ называют *ядром, симметричным к ядру* K, если оно определяется формулой

$$\langle \overleftrightarrow{K}, \Theta \rangle := \langle K, \overleftrightarrow{\Theta} \rangle, \ \forall\, \Theta \in \mathcal{D}(X \times Y),$$

где $\overleftrightarrow{\Theta}(x,y) := \Theta(y,x), \ x \in X, \ y \in Y$.

Когда $X = Y$, говорят также ядро на X (вместо на $X \times X$).

Если, кроме того, $K = \overleftrightarrow{K}$, то ядро K называется *симметрическим.*

(b) **Преобразования, порождаемые ядром.**

Пусть K ядро на $X \times Y$ и пусть $\psi \in \mathcal{D}(Y)$. Для $\forall \varphi \in \mathcal{D}(X)$ полагают:

$$\langle \mathcal{K}\psi, \varphi \rangle := \langle K, \varphi \otimes \psi \rangle,$$

что определяет функционал (линейный) $\mathcal{K}\psi$ на $\mathcal{D}(X)$. Этот функционал непрерывен на $\mathcal{D}(X)$, так как представляет композицию отображения $\varphi \curvearrowright \varphi \otimes \psi$, непрерывного из $\mathcal{D}(X)$ в $\mathcal{D}(X \times Y)$, и функционала $\Theta \curvearrowright < K, \Theta >$, непрерывного на $\mathcal{D}(X \times Y)$. Следовательно, $\mathcal{K}\psi$ есть обобщенный функционал на X.

Таким образом, определили преобразование $\mathcal{K} : \psi \curvearrowright \mathcal{K}\psi$, переводящее $\mathcal{D}(Y)$ в $\mathcal{D}'(X)$. Легко заметить, что это преобразование линейное и непрерывное.

N.B. Верно и обратное утверждение:

Теорема Л. Шварца о ядре.

Если $\mathcal{K}$ есть линейное и непрерывное отображение из $\mathcal{D}(Y)$ в $\mathcal{D}(X)$, то существует единственное ядро K на $X \times Y$, такое, что

$$\langle \mathcal{K}\psi, \varphi \rangle = \langle K, \varphi \otimes \psi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(X), \ \forall \psi \in \mathcal{D}(Y).$$

Далее, очевидно, можно также определить ядро $\overleftrightarrow{K}$. Преобразование $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$, порождаемое этим ядром, отображает $\mathcal{D}(X)$ в $\mathcal{D}(Y)$.

Заметим, что

$$\langle \overleftrightarrow{\mathcal{K}} \varphi, \psi \rangle = \langle K, \varphi \otimes \psi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(X), \ \forall \psi \in \mathcal{D}(Y),$$

откуда

$$\langle \overleftrightarrow{\mathcal{K}} \varphi, \psi \rangle = \langle \mathcal{K}\psi, \varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(X), \forall \psi \in \mathcal{D}(Y).$$

Если $X = Y$ и если K ядро симметрическое, то $\mathcal{K}$ и $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$ идентичны.

(c) **Примеры.**

i. Пусть $S \in \mathcal{D}'(X)$ и $T \in \mathcal{D}'(Y)$. Тогда $K = S \otimes T$ есть ядро на $X \times Y$. Симметричное ядро есть $T \otimes S$.
Отображение $\mathcal{K}$ тогда определяется по формуле:

$$\langle \mathcal{K}\psi, \varphi \rangle := \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle,$$

то есть

$$\mathcal{K}\psi = \langle T, \psi \rangle S.$$

Очевидно, отображение $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$ определяется по формуле

$$\overleftrightarrow{\mathcal{K}}\varphi = \langle S, \varphi \rangle T.$$

ii. Пусть $K \in L^1_{loc}(X \times Y)$. Согласно теореме Фубини имеем для почти всех $x \in X$

$$(\mathcal{K}\psi)(x) = \int\limits_Y K(x,y)\psi(y)dy, \ \psi \in \mathcal{D}(Y),$$

и для почти всех $y \in Y$

$$(\overleftrightarrow{\mathcal{K}}\varphi)(y) = \int\limits_X K(x,y)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(X).$$

Если $K(x,y) = \exp(-2\pi i x y)$, то $K = \overleftrightarrow{K}$ и получаем преобразование Фурье при $X = Y = \mathbb{R}^n$.

2. **Регулярные ядра.**

Напомним, что преобразование $\mathcal{K}$ определено только на $\mathcal{D}(Y)$. В общем, оно не продолжимо на $\mathcal{E}'(Y)$.

(a) **Определения.**

Ядро K называется *полурегулярным слева*, если отображение $\mathcal{K}$ непрерывно отображает $\mathcal{D}(Y)$ в $\mathcal{E}(X)$.

Ядро K называется *полурегулярным справа*, если отображение $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$ отображает непрерывно $\mathcal{D}(X)$ в $\mathcal{E}(Y)$.

Ядро K называется *регулярным*, если оно полурегулярно слева и справа.

(b) **Преобразования, порождаемые регулярными ядрами.**

Теорема. *Пусть K полурегулярное слева ядро. Тогда $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$ продолжимо до линейного, непрерывного отображения из $\mathcal{E}'(X)$ в $\mathcal{D}'(Y)$. Это продолжение есть не что иное, как преобразование ${}^t\mathcal{K}$, транспонированное для $\mathcal{K}$. Пусть K*

— полурегулярное справа ядро. Тогда K продолжимо до линейного непрерывного отображения из $\mathcal{E}'(Y)$ в $\mathcal{D}'(X)$. Это продолжение есть не что иное, как преобразование ${}^t\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$, транспонированное для $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$.

N.B. Согласно этой теореме, если K есть ядро регулярное, то можно отождествлять $\overleftrightarrow{\mathcal{K}} = {}^t\mathcal{K}$ и ${}^t\overleftrightarrow{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$.

Доказательство. Если K — полурегулярно слева, то $\mathcal{K}$ отображает непрерывно $\mathcal{D}(Y)$ в $\mathcal{E}(X)$. Следовательно, к нему транспонированное, т.е. ${}^t\mathcal{K}$, отображает непрерывно $\mathcal{E}'(X)$ в $\mathcal{D}'(Y)$.

Напомним, что ${}^t\mathcal{K}$ определяется по формуле:

$$\langle S, \mathcal{K}\varphi\rangle = \langle\, {}^t\mathcal{K}S, \varphi\rangle,\ S \in \mathcal{E}'(x),\ \varphi \in \mathcal{D}(Y).$$

В частности, для $\psi \in \mathcal{D}(X)$ имеем:

$$\langle \psi, \mathcal{K}\varphi\rangle = \langle\, {}^t\mathcal{K}\psi, \varphi\rangle,$$

что и показывает: ${}^t\mathcal{K}$ продолжает $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$.

Случай, когда K полурегулярно справа, доказывается аналогично.

(c) **Контрпример и пример.**

i. Ядро $K = S \otimes T$, где $S \in \mathcal{D}'(X)$ и $T \in \mathcal{D}'(Y)$, не является, очевидно, регулярным.

ii. **Утверждение.**
Пусть $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть K ядро на $\mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$\langle K, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle T * \psi, \varphi\rangle.$$

Тогда K есть ядро, регулярное на $\mathbb{R}^n$.

Действительно, прежде всего K, очевидно, линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, т.е. K есть ядро на $\mathbb{R}^n$. Далее, очевидно, что $\mathcal{K}\psi = T * \psi$ и $\overleftrightarrow{\mathcal{K}} = \mathring{T} * \psi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку отображение $\psi \curvearrowright T * \psi$ — линейное и непрерывное из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, то ядро K есть регулярное, что и требовалось доказать.

Легко проверить, что $\forall S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ имеем: $\mathcal{K}S = T \times S$ и ${}^t\mathcal{K}S = T \times S$.

N.B. Предположим, что $T \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\langle T * \psi, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} T(x-y)\varphi(x)\psi(y)\, dx\, dy.$$

Следовательно, имеем: $K(x, y) = T(x - y)$.

N.B. Для сокращения обозначений, когда T есть обобщенная функция, ядро K обозначается также $T(x-y)$ и $\langle K, \Phi\rangle$ записывается в интегральной символике:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} T(x-y)\Phi(x,y)\,dx\,dy \ (\forall\ \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)).$$

3. **Регуляризующие ядра.**

   (a) **Определение.**

   Пусть K — регулярное ядро. Говорят, что K есть *регуляризующее ядро,* если $\mathcal{K}$ непрерывно отображает $\mathcal{E}'(Y)$ в $\mathcal{E}(X)$ и если ${}^t\mathcal{K}$ непрерывно отображает $\mathcal{E}'(X)$ в $\mathcal{E}(Y)$.

   (b) **Пример.**

   Утверждение.

   Пусть $K \in C^\infty(X \times Y)$. Тогда K есть регуляризующее ядро.

   Доказательство. Действительно, имеем:

$$(\mathcal{K}\psi)(x) = \int\limits_Y K(x,y)\psi(y)dy,\ \ \psi \in \mathcal{D}(Y).$$

   Согласно теореме о дифференцировании под знаком интеграла Лебега, $\mathcal{K}\psi$ есть функция из класса $C^\infty(X)$. Легко показать, что отображение K непрерывно отображает $\mathcal{D}(Y)$ в $\mathcal{E}(X)$, а $\overleftrightarrow{\mathcal{K}}$ непрерывно отображает $\mathcal{D}(X)$ в $\mathcal{E}(Y)$. Следовательно, ядро K — регулярное.

   С другой стороны,

$$\langle\ {}^t\mathcal{K}S, \psi\rangle = \langle, \mathcal{K}\psi\rangle = \int\limits_X S(x)\left\{\int\limits_Y K(x,y)\psi(y)\,dy\right\} dx =$$

$$= \langle S \otimes \Psi, K\rangle = \int\limits_Y \left\{\int\limits_X S(x)K(x,y)\,dx\right\}\psi(y)\,dy.$$

   Из этого равенства видим, что

$$(\ {}^t\mathcal{K}S)(y) = \int\limits_X S(x)K(x,y)dx = \langle S, K(\ \cdot\ , y)\rangle,\ \ S \in \mathcal{E}(X).$$

   Согласно топологическому свойству транспонированного отображения функция ${}^t\mathcal{K}S \in C^\infty(Y)$. Отсюда следует, что ${}^t\mathcal{K}$ непрерывно отображает $\mathcal{E}'(X)$ в $\mathcal{E}(Y)$, что и требовалось доказать.

4. **Сильно регулярные ядра.**

(a) **Определение.**

Регулярное ядро на X называется *сильно регулярным* на X, если оно обладает следующими двумя свойствами:

- $\forall\, S \in \mathcal{E}'(X)$ обобщенная функция $\mathcal{K}S$ есть функция класса $C^\infty(\Omega)$ (из X), где S из класса $C^\infty(\Omega)$.
- Сходимость $S \to 0$ в топологии в $\mathcal{E}'(X)$, а сходимость $S|_\Omega \to 0$ по топологии в $\mathcal{E}(\Omega)$ влечет сходимость $\mathcal{K}S|_\Omega \to 0$ по топологии в $\mathcal{E}(\Omega)$.

N.B.

Очевидно, регуляризующее ядро на X есть сильно регулярное на X.

(b) **Пример сильно регулярного ядра.**

Теорема.

Пусть K регулярное ядро, сужение которого на дополнение к диагонали для $X \times X$ есть функция из класса C^∞. Тогда K есть сильно регулярное ядро.

Доказательство. Пусть $S \in \mathcal{E}'(X)$. Рассмотрим открытое множество Ω из X, где S есть функция из класса C^∞. Покажем, что сужение $\mathcal{K}S$ на Ω есть функция из класса $C^\infty(\Omega)$.

Для этого достаточно показать, что сужение $\mathcal{K}S$ на каждое открытое множество $U \Subset \Omega$ есть функция из класса $C^\infty(U)$.

Пусть $\eta \in \mathcal{D}(X)$ равна 1 в окрестности U и имеет компактный носитель в Ω (такая функция, согласно лемме об отделимости типа Урысона, существует).

Поскольку ядро K полурегулярно справа по гипотезе, то $\mathcal{K}S$, $\mathcal{K}(1-\eta)S$ и $\mathcal{K}(\eta S)$ хорошо определены и имеет место равенство

$$\mathcal{K}S = \mathcal{K}(\eta S) + \mathcal{K}(1-\eta)S.$$

Но $\eta S \in \mathcal{D}(X)$, следовательно, $\mathcal{K}(\eta S) \in \mathcal{E}(X)$, ибо K является полурегулярным слева.

С другой стороны, пусть H есть сужение для K на $U \times V$, где $V = \complement_X U$. Тогда $H \in C^\infty(U \times V)$ и, следовательно, является регуляризующим ядром, согласно предыдущему утверждению.

Пусть $T = (1-\eta)S|_V$. Тогда $T \in \mathcal{E}'(V)$. Следовательно, $HT \in \mathcal{E}(U)$. Но $HT = \mathcal{K}[(1-\eta)S]|_U$, поэтому $\mathcal{K}S \in C^\infty(U)$.

Пусть $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathcal{E}'(X)$, сходящаяся к 0 и такая, что последовательность $(S_j|_\Omega) \to 0$ в топологии $\mathcal{E}(\Omega)$. Тогда, с одной стороны, $(\mathcal{K}(\eta S_j)) \to 0$ в топологии в $\mathcal{E}(X)$, так как K полурегулярно слева.

С другой стороны, $T_j = (1-\eta)S_j \to 0$ в топологии $\mathcal{E}'(V)$. Следовательно, $HT_j \to 0$ в топологии в $\mathcal{E}(U)$, так как K — регуляризующее ядро.

Окончательно, $(KS_j|_U) \to 0$ в топологии в $\mathcal{E}(U)$. А так как U — произвольное, то $(KS_j|_\Omega) \to 0$ в топологии в $\mathcal{E}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

5.3 Фундаментальные ядра оператора в частных производных

Концепция фундаментальных ядер операторов в частных производных заменяет теорию элементарных решений операторов в частных производных с постоянными коэффициентами.

1. **Определения.**

   Пусть $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ оператор в частных производных с коэффициентами из класса C^∞ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$.

   Ядро K на X называется *фундаментальным слева* для оператора $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(X)$ имеет место соотношение

   $$\mathcal{K}\mathrm{P}\varphi = \varphi.$$

   Ядро K на X есть *фундаментальное справа* для $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(X)$ выполняется соотношение

   $$\mathrm{P}\mathcal{K}\varphi = \varphi.$$

   Очевидно, если K *ядро, фундаментальное справа* для $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$, то $\overleftrightarrow{K}$ есть ядро, *фундаментальное слева* для ${}^t\mathrm{P}$.

2. **Случай ядер, полурегулярных справа.**

   Утверждение. *Пусть K ядро, полурегулярное справа на X.*

   (a) *Если K ядро, фундаментальное слева для оператора* P*, то имеет место равенство*

   $$\mathcal{K}(\mathrm{P}S) = S \ (\forall S \in \mathcal{E}'(X)).$$

   (b) *Если K ядро, фундаментальное справа для* P*, то $\forall S \in \mathcal{E}'(X)$ имеет место равенство*

   $$\mathrm{P}(\mathcal{K}S) = S.$$

   Доказательство. Достаточно использовать плотность $\mathcal{D}(X)$ в $\mathcal{E}'(X)$. Заметим, что эта плотность классически известна, если $X = \mathbb{R}^n$.

3. **Применение фундаментальных ядер.**

   Утверждение.

   Если оператор P *обладает фундаментальным ядром слева, то* P *инъективен из* $\mathcal{D}(X)$ *в* $\mathcal{D}(X)$*, и если, кроме того, это ядро полурегулярное справа, то* P *инъективен из* $\mathcal{E}'(X)$ *в* $\mathcal{E}'(X)$*. Если оператор* P *обладает фундаментальным ядром справа, то* P *сюръективен из* $\mathcal{D}(X)$ *в* $\mathcal{D}(X)$ *и, если, кроме того, это ядро полурегулярное справа, то* P *сюръективен из* $\mathcal{D}'(X)$ *на* $\mathcal{E}'(X)$*.*

   Доказательство. Рассмотрим уравнение $\mathrm{P}\varphi = \psi$, где $\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(X)$. Если P обладает ядром K, фундаментальным слева, то необходимо следует $\varphi = \mathcal{K}\psi$. Отсюда следует единственность решения.

   Рассмотрим уравнение $\mathrm{P}T = \psi$, где $T \in \mathcal{D}'(X)$ и $\psi \in \mathcal{D}(X)$. Если P обладает ядром K, фундаментальным справа, то $\mathcal{K}\psi$ есть решение. Следовательно, в этом случае существует решение.

   В обоих случаях, если K – *полурегулярное справа*, то рассуждения остаются справедливыми, если заменить $\mathcal{D}(X)$ на $\mathcal{E}'(X)$.

4. **Соотношения между фундаментальными ядрами и элементарными решениями.**

   (a) **Случай операторов с постоянными коэффициентами.**

   Утверждение. *Пусть* P *линейный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами в* $\mathbb{R}^n$*. Пусть* E *— элементарное решение оператора* P*, а* K *— ядро на* $\mathbb{R}^n$*, определяемое формулой*

   $$\langle K, \varphi \otimes \psi \rangle := \langle E * \psi, \varphi \rangle,\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

   Тогда регулярное ядро K *есть фундаментальное ядро, двустороннее (т.е.* ***справа*** *и* ***слева****) для* P*.*

   Доказательство. $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

   $$\mathcal{K}\mathrm{P}\varphi = E * (\mathrm{P}\varphi) = E * (\mathrm{P}\delta * \varphi) = (E * \mathrm{P}\delta) * \varphi = \varphi,$$

   т.е. K — ядро, фундаментальное слева для P.
   С другой стороны, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

   $$\mathrm{P}(\mathcal{K}\varphi) = \mathrm{P}(E * \varphi) = P\delta * (E * \varphi) = (P\delta * E) * \varphi = \varphi,$$

   т.е. K — ядро, фундаментальное справа для P.

(b) **Случай операторов с переменными коэффициентами.**

Введем новое понятие.

Определение.

Пусть $P(x,\frac{\partial}{\partial x})$ с коэффициентами из $C^{\infty}(X), X\subset\mathbb{R}^n$. Пусть $a\in X$. Всякая обобщенная функция E_a на X, удовлетворяющая уравнению $\mathrm{P}E_a=\delta_a,$ называется *элементарным решением в точке* a оператора $\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})$.

Иначе говоря, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(X)$ имеет место равенство:

$$\langle E_a,\ {}^t\mathrm{P}\varphi\rangle=\varphi(a),\ a\in X.$$

Утверждение. *Пусть* $\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})$ *с коэффициентами из* $C^{\infty}(X)$, *где* $X\subset\mathbb{R}^n$. *Предположим, что в каждой точке* $a\in X$ *существует элементарное решение для* $\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})$ *(соответственно для* ${}^t\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})$*) и что функция* $\mathcal{K}:(x,a)\to E_a(x)$ *является локально интегрируемой на* $X\times X$. *Тогда ядро* K *(соответственно* $\overleftrightarrow{K}$ *) есть фундаментальное справа (соответственно слева) для* P.

Доказательство. Имеем $(\mathcal{K}\psi)(x)=\int\limits_X K(x,a)\psi(a)\,da$. Отсюда $\forall\varphi\in\mathcal{D}(X)$ следует, что

$$\langle\mathrm{P}\mathcal{K}\psi,\varphi\rangle=\langle\mathcal{K}\psi,\ {}^t\mathrm{P}\varphi\rangle=\int\limits_{X\times X}K(x,a)\psi(a)\ {}^t\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})\varphi(x)\,da\,dx=$$

$$=\int\limits_X\psi(a)\int\limits_X K(x,a)\ {}^t\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})\varphi(x)\,dx\,da.$$

По гипотезе E_a есть элементарное решение в точке a для $\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})$.

Следовательно,

$$\int\limits_X K(x,a)\ {}^t\mathrm{P}(x,\frac{\partial}{\partial x})\varphi(x)\,dx=\langle E_a,\ {}^t\mathrm{P}\varphi\rangle=\varphi(a).$$

Таким образом,

$$\langle\mathrm{P}\mathcal{K}\psi,\varphi\rangle=\int\limits_X\psi(a)\varphi(a)\,da=\langle\psi,\varphi\rangle,$$

что и показывает, что K есть фундаментальное ядро справа для P.

Если K — ядро, фундаментальное справа для ${}^t\mathrm{P}$, то $\overleftrightarrow{K}$ — ядро, фундаментальное слева для P, что и требовалось доказать.

5.4 Гипоэллиптичность.

Пусть X — открытое множество из $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ — линейный оператор с коэффициентами из класса $C^\infty(X)$.

1. **Определение.**

   Оператор $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ называют *гипоэллиптичным* на X, если он обладает следующими свойствами:

   (a) $\forall\ \Omega \subset X$ и $\forall\ T \in \mathcal{D}'(X)$ свойство $\mathrm{P}T \in C^\infty(\Omega)$ влечет $T \in C^\infty(\Omega)$.

   (b) Сходимость $(T_j)_{j\in J} \to 0$ по топологии $\mathcal{D}'(X)$ и $(PT_j|_\Omega) \to 0$ по топологии $\mathcal{E}(\Omega)$ влечет сходимость $(T_j|_\Omega) \to 0$ по топологии $\mathcal{E}(\Omega)$.

2. **Предложение.**

   Пусть $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ гипоэллиптичен на X и пусть Ω — открытое множество в X. Тогда множество N решений однородного уравнения $\mathrm{P}T = 0$ на Ω есть замкнутое векторное подпространство из $\mathcal{E}(\Omega)$. Топологии, индуцируемые из $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $\mathcal{E}(\Omega)$ на N, идентичны. Множество N, снабжённое топологией из $\mathcal{D}'(\Omega)$, есть пространство Фреше.

   Доказательство. Известно (см. начало пособия), что N есть замкнутое подпространство из $\mathcal{D}'(\Omega)$. Согласно свойству (a) определения гипоэллиптичности, N включено в $\mathcal{E}(\Omega)$. Пусть $(T_j)_{j\in J} \to 0$ по топологии $\mathcal{D}'(\Omega)$. Поскольку $\mathrm{P}T_j = 0$, то свойство (b) показывает, что $(T_j)_{j\in J} \to 0$ по топологии $\mathcal{E}(\Omega)$.

   Обе топологии из $\mathcal{E}(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Omega)$ на N идентичны. Следовательно, N замкнуто в $\mathcal{E}(\Omega)$. Так как $\mathcal{E}(\Omega)$ — пространство Фреше, то N есть пространство Фреше.

3. **Теорема Л. Шварца о регулярности.**

   Пусть X — открытое множество на $\mathbb{R}^n$ и пусть $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ — оператор с коэффициентами из $C^\infty(X)$, имеющий фундаментальное слева ядро K, сильно регулярное на X. Тогда $\mathrm{P}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ есть гипоэллиптичный оператор на X.

   Доказательство.

   (a) Пусть $T \in \mathcal{D}'(X), \mathrm{P}T|_\Omega$, где $\Omega \subset X$, есть функция класса $C^\infty(\Omega)$.

      i. Предположим сначала, что $T \in \mathcal{E}'(X)$. Так как K — ядро, фундаментальное слева, полурегулярное справа, то имеем $T = \mathcal{K}(\mathrm{P}T)$. Из того, что K — сильно регулярное на X, следует, что $\mathcal{K}(\mathrm{P}T)$ из класса $C^\infty(\Omega)$. Таким образом, $T \in C^\infty(\Omega)$.

      ii. Рассмотрим общий случай, когда $T \notin \mathcal{E}'(X)$. Пусть U — открытое множество, относительно компактное с замыканием, содержащимся в Ω ($U \Subset \Omega$). Рассмотрим функцию $\eta \in \mathcal{D}(X)$ с носителем, содержащимся в Ω, равную 1 в окрестности U. Тогда $\eta T \in \mathcal{E}'(X)$. Так как $\mathrm{P}(\eta T) = \mathrm{P}(T)$ на U, то $\mathrm{P}(\chi T) \in C^\infty(\Omega)$. Следовательно, согласно пункту i, $\eta T \in C^\infty(U)$. А так как $\eta T = T$ на U, то $T \in C^\infty(U)$. Отсюда, в силу произвольности множества U из Ω, следует, что $T \in C^\infty(\Omega)$.

(b) Предположим, что $(T_j) \to 0$ в $\mathcal{D}'(X)$ и что $(\mathrm{P}T_j|_\Omega) \to 0$ в $\mathcal{E}(\Omega)$. Тогда $(\eta T_j) \to 0$ в $\mathcal{E}'(X)$ и $(\mathrm{P}(\eta T_j)|_U) \to 0$ в $\mathcal{E}(U)$. Так как K сильно регулярное, то $\mathcal{K}\mathrm{P}(\eta T_j)|_U \to 0$ в $\mathcal{E}(U)$. Поскольку $T_j|_U = \eta T_j|_U = \mathcal{K}\mathrm{P}(\eta T_j)|_U$, последовательность $(T_j|_U) \to 0$ в $\mathcal{E}(U)$. А так как U — произвольное, то отсюда, в свою очередь, следует, что $(T_j|_\Omega) \to 0$ в $\mathcal{E}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Следствие (случай операторов с постоянными коэффициентами). Пусть $\mathrm{P}(\frac{\partial}{\partial x})$ — оператор с постоянными коэффициентами. Предположим, что у P элементарное решение $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Тогда $\mathrm{P}(\frac{\partial}{\partial x})$ есть гипоэллиптичный оператор.

Доказательство. Пусть K — ядро, определенное формулой

$$\langle K, \varphi \otimes \psi \rangle := \langle E * \psi, \varphi \rangle.$$

Ранее мы получили, что K есть регулярное ядро и что $\mathcal{K}\mathrm{P}\varphi = \mathrm{P}\mathcal{K}\varphi = \varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Можно проверить, что на дополнении к диагонали $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ядро K задается формулой

$$K(x, y) = E(x - y).$$

Так как на этом дополнении эта функция из класса C^∞, то, как было ранее показано, ядро K есть двустороннее фундаментальное для P.

4. **Применение теоремы Л. Шварца.**

(a) **Гипоэллиптичность регулярных обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами из класса C^∞.**

Пусть $\mathrm{P}(x, \frac{d}{dx})$ — дифференциальный оператор порядка m с коэффициентами из класса $C^\infty(\mathbb{R})$. Предполагаем, что P регулярный, т.е. коэффициент при старшей производной равен 1. Можно легко найти элементарное решение E_a в точке $a \in \mathbb{R}$. Достаточно взять $E_a = (\tau_a Y)u_a$, где Y — функция Хевисайда, а u_a есть решение в классическом смысле задачи

$$P(x, \frac{d}{dx})u(x) = 0,$$

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{m-2}(a) = 0, \ u^{m-1}(a) = 1.$$

Покажем, что $K(x, y) = E_a(x) = Y(x - a)u_a(x)$ есть ядро класса C^∞ на дополнении к диагонали $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_m$ суть m независимых решений дифференциального уравнения $\mathrm{P}u = 0$; пусть U — их вронскианова матрица. Тогда

$$u_a(x) = c_1(a)u_1(x) + \cdots + c_m(a)u_m(x),$$

где вектор $\overrightarrow{c}(a) = (c_1(a), \dots, c_m(a))$ определяется формулой

$$\overrightarrow{c}(a) = [U(a)]^{-1}\,\overrightarrow{e}$$

и $\overrightarrow{e} = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Так как функции $u_1, u_2, \dots, u_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ (классический результат), то их вронскианова матрица $U \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Поскольку $U(a)$ есть обратимая матрица, $\det U(a)$ не равен нулю. Поэтому функция $a \curvearrowright U^{-1}(a)$ есть функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что $(x, a) \curvearrowright u_a(x) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, что и требовалось доказать.

(b) **Гипоэллиптичность оператора Лапласа (лемма Вейля).**

Покажем, что оператор Лапласа $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ обладает элементарным решением E и что это элементарное решение есть функция класса C^∞ на дополнении к началу.

Применим метод без использования преобразования Фурье.

Ищем радиальную гармоническую функцию (т.е. решение уравнения $\Delta u = 0$) в дополнении к началу. Полагая $v(r) = u(|x|)$, имеем:

$$\Delta u = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dv}{dr}.$$

Отсюда следует, что

$$u(x) = \frac{a_n}{|x|^{n-2}} + b_n, \quad \text{если } n \neq 2;$$

$$u(x) = a_2 \ln \frac{1}{|x|} + b_2, \quad \text{если } n = 2,$$

где a_n и b_n — комплексные числа.

Поскольку локально интегрируемая функция $x \curvearrowright \dfrac{1}{|x|^{n-2}}$ ($x \curvearrowright \ln \dfrac{1}{|x|}$, если $n = 2$) обладает одной особенностью в начале, то должны ожидать, что её лапласиан в смысле обобщённых функций на $\mathbb{R}^n$ есть ненулевая обобщённая функция, носитель которой есть $\{0\}$.

Утверждение. *Локально интегрируемая функция E, определённая (почти всюду) на $\mathbb{R}^n$ формулой*

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}}, & \text{если } n \geq 0 \ (n \neq 2), \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

есть элементарное решение оператора Лапласа.

Напомним, что ω_n — площадь единичной сферы размерности $(n-1)$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

где Γ — гамма-функция.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Имеем:

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} E(x)(\Delta\varphi)(x)\, dx.$$

Далее, формула Грина даёт

$$\int\limits_{|x|>\varepsilon} E(x)(\Delta\varphi)(x)\, dx = \int\limits_{|x|>\varepsilon} (\Delta E)(x)\varphi(x)\, dx + \\ + \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial v}(x)\varphi(x)\, ds(x) - \int\limits_{|x|=\varepsilon} E(x)\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x)\, ds(x),$$

где v обозначает внешнюю нормаль сферы $\{|x| = \varepsilon\}$.

Первый интеграл справа равен нулю, так как E — гармоническая функция на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Третий интеграл стремится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$, так как он мажорируется константой, умноженной на $\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{2-n}$ (соответственно $\varepsilon \ln \varepsilon$ для $n = 2$).

Остаётся показать, что второй интеграл сходится к $\varphi(0)$. Здесь рассмотрим лишь более содержательный случай $n > 2$.

Действительно, имеем

$$\left| \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial v}(x)\varphi(x)\, ds(x) - \varphi(0) \right| = \\ = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-2}} \left| \int\limits_{|x|=\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)]\, ds(x) \right| \leq \varepsilon \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|.$$

(c) **Гипоэллиптичность оператора теплопроводности.**

Утверждение. *Оператор теплопроводности* $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ *размерности* n *обладает элементарным решением* E *медленного (умеренного) роста:*

$$E(t,x) = \frac{Y(t)}{(\sqrt{4\pi t})^n} \exp\left\{\frac{-|x|^2}{4t}\right\},$$

где $Y(t)$ *— функция Хевисайда.*

Доказательство. Имеется несколько доказательств этого утверждения. Дадим наиболее короткое.

Используем преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\xi \to \widehat{E}(t,\xi)$ образ Фурье для $x \to E(t,x)$, где t — фиксировано.

Имеем

$$\widehat{E}(t,\xi) = Y(t)\exp(-4\pi^2 t|\xi|^2),\ (t,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \widehat{E}}{\partial t} = -4\pi^2 t|\xi|^2 \widehat{E} + \delta_{\mathbb{R}} \otimes 1,$$

где $\delta_{\mathbb{R}}$ — мера Дирака в $\mathbb{R}$.

Очевидно, $\dfrac{\partial \widehat{E}}{\partial t} = \widehat{\dfrac{\partial E}{\partial t}}$. Поэтому, применяя копреобразование Фурье в $S'(\mathbb{R})$, имеем $\dfrac{\partial E}{\partial t} - \Delta E \equiv \delta$, где δ — мера Дирака в $\mathbb{R}^{n+1}$.

(d) **Негипоэллиптичность оператора Даламбера размерности** 1 **в пространстве** $\mathbb{R}^2$**.**

Пусть Ψ — автоморфизм пространства $\mathbb{R}^2$, определяемый формулой:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v);\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v).$$

Тогда преобразование $T \to \Psi(T)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ в себя продолжает преобразование $f \curvearrowright f \circ \Psi$, определенное на $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Имеем $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\varphi \circ \psi) = \frac{1}{2}(\Box_2 \varphi),$$

где $\Box_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Даламбера в $\mathbb{R}^2$.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2[\Psi(T)]}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}(\Box_2 T), \forall\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Но общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = 0$ есть:

$$S = A \otimes 1 + 1 \otimes B,$$

где $A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $B \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Следовательно, общее решение уравнения $\square_2 T = 0$ есть

$$T = A \otimes 1 + 1 \otimes B,$$

где обобщенная функция A зависит только от $(x+y)$ и обобщенная функция B зависит только от $(x-y)$.

Таким образом, решение T имеет вид:

$$T(x,y) = A(x+y) + B(x-y),$$

что и требовалось доказать.

6 Некоторые задачи

1. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^n)$ есть периодическая функция с периодом 1. Показать, что если её ряд Фурье равномерно сходится, то его сумма S равна f.

2. Пусть $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} a_\lambda \chi_\lambda$ суммируем по топологии $\mathcal{D}'(R^n)$. Показать, что $(a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ — последовательнос медленного (умеренного) роста.

3. Пусть $L^1(\mathbb{T}^n)$ — пространство функций, определенных на $\mathbb{R}^n$ с периодом 1, локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$L^1(\mathbb{T}^n) = \mathcal{P}'(\mathbb{T}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

и это пространство снабжено топологией, индуцируемой из $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

   (a) Показать, что $L^1(\mathbb{T}^n)$ полно.

   (b) Показать, что $\mathcal{P}(\mathbb{T}^n)$ всюду плотно в $L^1(\mathbb{T}^n)$ (воспользоваться периодическим разбиением единицы).

   (c) Показать, что анализ Фурье непрерывно отображает $L^1(\mathbb{T}^n)$ в $C_0(\mathbb{Z}^n)$.

4. Пусть S — обобщенная функция на $\mathbb{R}^n$, периодическая с периодом 1. Пусть $(a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ — последовательность её коэффициентов Фурье, а $(b_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^n}$ — последовательность коэффициентов Фурье для $D^\beta S$ ($\beta \in \mathbb{N}^n$).

   Показать, что $\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n$
$$b_\lambda = (2\pi i \lambda)^\beta a_\lambda \,.$$

5. Пусть $H^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \mid f' \in L^2(\mathbb{T})\}$.

   (a) Показать, что анализ Фурье отображает $H^1(\mathbb{T})$ в $l^1(\mathbb{Z})$.

   (b) Отсюда вывести, что:

      i. элемент из $H^1(\mathbb{T})$ представим через непрерывную периодическую функцию (теорема вложения Соболева С.Л.);

      ii. если f непрерывная и принадлежит $H^1(\mathbb{T})$, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к f.

6. **Формула суммирования Пуассона.**

   Пусть δ — мера Дирака на $\mathbb{R}^n$, а $\widetilde{\omega}\delta$ — периодическое преобразование с периодом 1.

   (a) разложить периодическую функцию $(\widetilde{\omega}\delta)$ в ряд Фурье;

   (b) используя это разложение, вычислить образ Фурье для $(\widetilde{\omega}\delta)$;

   (c) отсюда вывести, что $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda).$$

Список использованной литературы

1. Khoan, Vo Khac. Distributions, Analyse de Fourier, Operateurs aux derivees partielles. T. 2 / Vo Khac Khoan. – Paris: Vuibert, 1972. – 333 p.

2. Владимиров, В.С. Обобщённые функции и их применение / В.С. Владимиров // Научно-популярная серия : Математика–Кибернетика, 1. – 1990. – 41 с.

3. Хёрмандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными Т.1. Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1986. – 464 с.

4. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. Изд 4-е / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.