**Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего профессионального образования**
**«Казанский (Приволжский) федеральный
университет»**

Кафедра Бизнес-информатики и математических методов в экономике

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

для студентов вузов

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки:

01.03.02 (010400.62) – «Прикладная математика и информатика»,
09.03.01 (230100.62) – «Информатика и вычислительная техника»,
09.03.02 – «Информационные системы и технологии»,
09.03.03 (230700.62) – «Прикладная информатика (по отраслям)»,
210700.62 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»,
38.03.05 (080500.62) – «Бизнес-информатика»

Протокол №513 от «19» мая 2015 г.

Набережные Челны, 2015

УДК 512.563.3 (075)
ББК 22.1я73
Е 70

Печатается по решению учебно-методического совета Набережночелнинского института (филиала) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», протокол № 5 от « 22» октября 2014 г.

Рецензенты:

Исавнин А.Г. докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой Бизнес-информатики и математических методов в экономике филиал Набережночелнинского института (филиала) ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

Старовиков М.И. докт. пед. наук, доцент, профессор кафедры физики и информатики ФГАОУ ВПО «Алтайская государственная академия образования имени В.М. Шукшина».

Еремина И.И., Введение в дискретную математику: теория и практика/Учебное пособие – Набережные Челны: Издательско-полиграфический центр НЧИ КФУ, 2015. – 236 с.: ил.

В учебном пособии изложены избранные главы дискретной математики и теоретических основ информатики, необходимых в высшем экономическом и техническом образовании, согласно ФГОС ВПО. Рассматриваются следующие темы: основы теории множеств, элементы алгебры логики, элементы комбинаторики и элементы теории графов. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством подробно разобранных примеров решения задач, что облегчает усвоение доказательств теорем в.

Для преподавателей, аспирантов, магистров, студентов экономических и технических вузов и факультетов, менеджеров.

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки:
01.03.02 (010400.62) – «Прикладная математика и информатика»,
09.03.01 (230100.62) – «Информатика и вычислительная техника»,
09.03.02 – «Информационные системы и технологии»,
09.03.03 (230700.62) – «Прикладная информатика (по отраслям)»,
210700.62 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»,
38.03.05 (080500.62) – «Бизнес-информатика».
Протокол №513 от «19» мая 2015 г.

Оглавление

Введение

Общество на этапе социального развития уже в начале 60-х годов XX в. столкнулось с проблемами необходимости обработки огромных потоков информации. Возник так называемый второй информационный барьер.

Первый информационный барьер, когда способностей отдельного человека стало уже недостаточно для решения задач управления, был преодолен в далекой древности с помощью совершенствования механизма управления и развития товарно-денежных отношений.

Для преодоления второго информационного барьера необходимы развитые наука и техника управления, компьютерные системы, системный подход к изучению общественных процессов и явлений, моделирование деятельности организационных систем и поведения людей.

В истории цивилизаций произошло несколько информационных революций, т.е. преобразований общественных отношений из-за кардинальных изменений в сфере обработки информации. Следствием подобных преобразований являлось приобретение человеческим обществом нового качества.

Первая информационная революция связана с изобретением письменности. Появилась возможность передачи знаний от поколения к поколению.

Вторая информационная революция (середина XVI века) *вызвана изобретением книгопечатания, которое радикально изменило индустриальное общество, культуру, организацию деятельности.*

Третья информационная революция (конец XIX века) обусловлена изобретением электричества, благодаря которому появились телеграф, телефон, радио, позволяющие передавать и накапливать информацию в большом объеме.

Четвертая информационная революция (70-е годы XX века) *связана с изобретением микропроцессорной технологии и появлением персонального* *компьютера. (ПК). На микропроцессорах и интегральных схемах создаются ПК, компьютерные сети (КС) системы передачи данных (информационные коммуникации). Этот период характеризуют три фундаментальные инновации:*

- переход от механических и электрических средств преобразования информации к электронным.
- миниатюризация всех узлов, приборов и машин.
- создание программно-управляемых устройств и процессов.

Важным инструментом выработки правильных производственных решений, конструирования эффективных технологий в профессиональной деятельности, анализа их социальной обусловленности и эффективности является моделирование. В связи с этим в последнее время интенсивно развивается применение математических и кибернетических методов в сфере образования.

Социально-образовательные процессы - процессы информационные, поэтому значение, знание и умение использовать в практической деятельности достижения информационных наук - неотъемлемая потребность и необходимость работников любой сферы деятельности. Безусловно, говоря об информационных процессах в современных условиях невозможно обойти стороной науку, которая аккумулировала в себе все аспекты обработки информации, в том числе и вопросы моделирования. Науку, которая получила название "Информатика". Раздел "Информатики" - "Теоретическая информатика" много места отводит вопросам моделирования информационных систем.

Любая модель требует наличия языка описания моделей. По самой своей природе информация тяготеет к дискретному представлению. Множество информационных сообщений, как правило, можно описывать в виде *дискретного множества*. А значит методы исследования, используемые в Теоретической информатике во многом опираются на идеи и понятия дискретной математики, о которой стоит поговорить несколько подробнее.

До середины 20-го века естественные и прикладные науки ориентировались в основном на раскрытие закономерностей материальных процессов. Ведущими фундаментальными науками были науки о неживой природе, и прежде всего физика. Достижения фундаментальных наук оказывали главное влияние на технический прогресс, стимулировали и определяли направления развития математики, тех разделов, которые до сих пор изучаются в средних школах и вузах.

Основные понятия этой математики на языке формул описывают различные явления в окружающем нас мире, и единственность физического мира создает ощущение единственности математических моделей, описывающих этот мир. Не случайно математические идеи, разрушавшие представление о единственности мировых моделей (например, геометрия Лобачевского), встречались современниками в штыки. Этой же участи были удостоены также и абстрактные разделы математики, не имевшие прямых числовых и физических интерпретаций (логика, теория множеств и пр.).

Возникновение информатики потребовало совсем другой математики. Объекты информатики абстрактны и дискретны. Абстрактны потому, что, во-первых, один и тот же информационный процесс может иметь различные материальные воплощения и, следовательно, сам по себе не имеет физической интерпретации. Во-вторых, они абстрактны в том смысле, что очень часто не имеют не только физического, но и числового представления.

Если основные характеристики физических объектов удается выразить числами, а физические закономерности - соотношениями, символы которых опять-таки имеют числовой смысл, то среди характеристик информационных объектов появляются такие понятия, как отношение, связь, структура, которые только с помощью чисел выразить нельзя. Объекты информатики удобно рассматривать как комбинации абстрактных символов, с которыми производятся различные манипуляции, и, следовательно, как объекты, которые обязательно дискретны.

Совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов, принято называть *дискретной математикой*. Дисциплины, образующие фундамент дискретной математики: *теория множеств, логика, теория графов, теория алгоритмов* - возникли до появления информатики и используются не только в ней.

Наряду с дискретной математикой в информатике используются понятия и методы традиционной, непрерывной математики.

Содержание предлагаемого вашему вниманию теоретического материала рассчитано на первичное знакомство в рамках отведенного времени с некоторыми математическими направлениями формализации информации:

- комбинаторика,
- теория множеств,
- алгебра логики,
- теория графов,
- теория игр.

От автора

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие представляет собой краткий курс дискретной математики ики для студентов экономических, социально-гуманитарных направлений. Содержание математической части учебного пособия, выбор тем и разделов обусловлены двойственным взглядом на математику в системе инженерного образования. С одной стороны, это фундаментальные математические понятия как часть общекультурного наследия. С другой стороны, это разделы, необходимые для овладения прикладными математическими методами, которые в качестве инструмента для своих исследований используют многие технические науки.

Любой учебник или учебное пособие в значительной мере представляет собой компиляцию, сводку данных из других книг и пособий. Ведь математические результаты уже получены и описаны другими авторами (если речь не идет о новых достижениях, а о классических разделах математики). Наша задача состояла в разумной организации учебного материала, его доступном и четком изложении. При этом не обойтись без заимствований, в том числе и текстуальных. Если какой-то раздел уже блестяще изложен в другом учебнике или пособии, то цитата пойдет только лишь на пользу, поможет лучшему восприятию материала студентами.

Раздел 1. Основы теории множеств

1.1. Понятие множества

Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – теории множеств.

Н. Бурбаки

В основе теории множеств лежит понятие абстрактной структуры. Группа французских математиков, публиковавшихся под псевдонимом Н. Бурбаки, выделяет три основных типа структур, которые играют наиболее важную роль при построении ими современной математики.

Алгебраические структуры. Основные характеристики алгебраической структуры: задание на некотором множестве А конечного числа операций с соответствующими свойствами, описываемых системой аксиом. В качестве элементов множества А могут выступать как математические объекты (числа, матрицы, перемещения, векторы), так и не математические.

Структуры порядка. Характеризуются тем, что на рассматриваемом множестве задается отношение порядка (сравнение на числовых множествах), для которого выполняются следующие свойства: рефлективность, симметричность, транзитивность.

Топологические структуры. Множество М обладает топологической структурой, если каждому элементу тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из М, называемых окрестностями этого элемента, причем эти окрестности должны удовлетворять определенным аксиомам (аксиомам типологических структур). С помощью топологических структур точно определяются понятия, как «окрестность», «предел», «непрерывность».

Кроме основных трех типов структур в математике приходится рассматривать сложные структуры, где порождающие структуры органически связываются с помощью объединяющей системы аксиом. Например. множество действительных чисел является сложной структурой, в которую входят три основные порождающие структуры.

Общей чертой различных понятий, объединенных родовым названием «математическая структура», является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых не определена. Построить аксиоматическую теорию структуры – это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо других предложений относительно рассматриваемых элементов, от всяких гипотез относительно их «природы».

Множество относится к математическим объектам, для которых нет строго определения. Другим примером неопределяемого понятия служит точка в геометрии. Такие понятия вводятся на интуитивном уровне, тем не менее на их основе даются строгие определения других математических объектов. Мы можем лишь в какой-то мере объяснить такое понятие, т.е. дать описание основных его свойств.

Понятие множества является ключевым в математике, без которого невозможно изложение ни одного из ее разделов.

Множество – первичное понятие математики, т.е. это понятие не определяется через другие, а только поясняется. Создатель теории множеств Г. Кантор (1845 – 1918) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Множество – это совокупность, соединение, собрание некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, входящие в данное множество, называются элементами множества. Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди и т.д. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и ее прикладная направленность к очень многим областям знания. Например, множество студентов одной группы, буквы алфавита и т.д.

Множества, состоящие из конечного числа элементов (причем неважно, известно это число или нет, главное оно существует), называются конечными, а множества, состоящие из бесконечного числа элементов, – бесконечными.

Примеры бесконечных числовых множеств:

N – множество натуральных чисел (1, 2, 3, …);

Z – множество целых чисел (…, -3, -2, -1, 0, 1, …);

Q – множество рациональных чисел (…, -2, -1.3, -1, 100.76, …);

R – множество действительных чисел (…, π, $\sqrt{2}$, 2, …);

C – множество комплексных чисел (…, i, 2+i, 5-3*i, …).

Множества обычно обозначаются большими буквами A, B, X, а их элементы малыми a, b, x.

Запись $x \in X$ означает, что объект x есть элемент множества X. Если же x не принадлежит множеству X, то пишут $x \notin X$.

Множество считается заданным, если перечислены все его элементы или задано свойство (признак) принадлежности элементов данному множеству. Например, если A – множество четных натуральных чисел, его можно задать следующим образом:

$A = \{x \in N \mid x \,\vdots\, 2\}$ ($\vdots$ – кратно).

Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается : ∅. Множество B называется подмножеством множества A, если все элементы множества B являются элементами множества A. Запись $B \subset A$, что означает , что множество B «включается» в множество A.

Множества A и B называют *равными* (A = B), если $B \subset A$ и $A \subset B$. Например, множества A = {2, 4, 6, 8} и B = {6, 4, 2, 8} равны, так как состоят из одинаковых элементов.

Задача. Пусть A = {1,2,3,4}. Найти все подмножества множества A.

Решение. Подмножествами множества A являются:

∅, {1, 2, 3, 4}, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {1, 3, 4}, {1, 2, 4}.

СВОЙСТВА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Подмножеством множества *A* называется множество $A`$ все элементы которого принадлежат множеству *A*

$A` \subset A$

Пример: $N \subset R$

2. Сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств есть конечное или счетное множество.
3. Множество всех рациональных чисел *счетно*.
4. *Алфавитом* называется любое непустое множество.

Пустое множество – множество, которое не содержит ни одного элемента.

Элементы множества под названием АЛФАВИТ называют *буквами (символами)*.

Символом в данном алфавите любая *конечная последовательность букв.*

Для каждого множества *A* существуют множества, элементами которого являются только все его подмножества.

Такое подмножество называют *семейством множеств A* или *булеаном* (обозначается *B(A)*).

Будем называть *вектором (кортежем)* упорядоченный набор элементов и обозначать его $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$, заметим, что в отличие от множества, элементы в векторе могут повторяться. Эти элементы называются *координатами или проекциями*.

Количество элементов в векторе называется его *длиной,* если в векторе 2 элемента, то двойка, если n элементов, то n-ка.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ СТРОИТСЯ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ АКСИОМ

1. *Аксиома существования:* <u>Существует по крайней мере одно множество.</u>

2. *Аксиома объемности:* Если множества A и B составлены из одних и тех же элементов, то они совпадают.
3. *Аксиома объединения:* Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются все элементы множества A и все элементы множества B и никакие другие элементы множество не содержит.
4. *Аксиома разности:* Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются те и только те элементы множества A, которые не содержатся в множестве B.
5. *Аксиома существования пустого множества:* Существует множество не содержащее ни одного элемента.

1.2. Операции над множествами

Над множествами можно производить действия, которые во многом напоминают действия сложения и умножения в элементарной алгебре. Для графической иллюстрации операций над множествами будем использовать так называемые диаграммы Эйлера, в которых произвольному множеству X ставится в соответствие множество точек на плоскости внутри некоторой замкнутой кривой.

Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются, обычно, с применением *кругов Эйлера* или *диаграмм Венна* (на диаграммах обычно само множество изображается в виде прямоугольника, а его подмножества – в виде кругов). Благодаря этому основные понятия теории множеств получают наглядное представление в табличной или графической форме.

Пусть имеются два множества A и B.

1. ***Включение***

Множество A входит (включено) в множество B, или A является подмножеством B. $A \subset B$

Если всякий объект, обладающий свойством α, также обладает свойством β, то говорят, что свойство α включает свойство β, т.е. $\alpha \subset \beta$

2. ***Объединение (сумма)***

Объединением (суммой) множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X, Y (рис. 1).

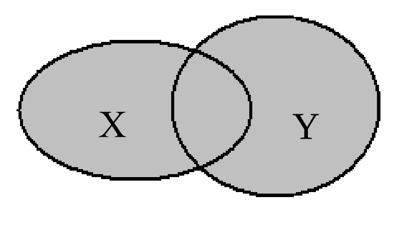


Рисунок 1. Объединение множеств

Сумма

Сумма множеств *A* и *B* есть множество *C*, включающее в себя все элементы множество *A* и *B*.

Объект входит во множество $C = A + B = A \cup B$ если он входит во множество *A* **<u>или</u>** во множество *B*.

$C = A \cup B = \{c_i | c_i \in A \text{ или } c_i \in B\}$

Объединение двух множеств символически записывают как X ∪ Y. Объединение множеств X_i (i = 1, 2, ..., n) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств X_i. Соответствующее обозначение:

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

Объединение (сумма) A∪B есть множество всех элементов, принадлежащих A или B, т.е. A∪B {x∈A или x∈B}.

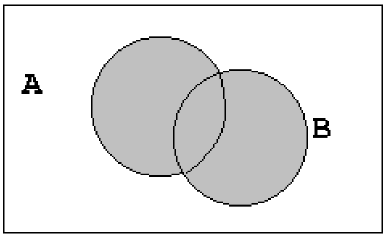


Рисунок 2

Например, A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}. Найти $C = A \cup B$.

Решение. C = {1, 2, 3, 4}.

3. Пересечение (произведение)

Пересечением множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат как множеству X, так и множеству Y (рис. 3).

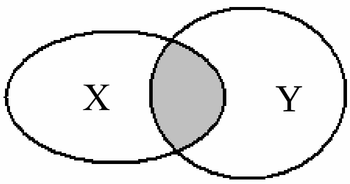


Рисунок 3. Пересечение множеств

Пересечение (произведение)

Пересечением множество *A* и *B* называется новое множество *C*. Элементы множества *C* принадлежат множеству *A* (обладают его свойствами) **<u>и</u>** множеству *B* (обладают его свойствами).

$$C = A * B = A \cap B = \{c_i | c_i \in A \text{ и } c_i \in B\}$$

Пересечение множеств обозначается через $X \cap Y$. Множества X и Y называют **непересекающимися,** если они не имеют общих элементов, т.е. если $X \cap Y = \varnothing$.

Пересечением множеств X_i (i = 1, 2, ..., n) называется множество элементов, принадлежащих каждому X_i. Оно обозначается как

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i.$$

Пересечением (произведением) A∩B есть множество всех элементов, принадлежащих как A, так и B, т.е. $A \cap B = \{x \in A \text{ и } x \in B\}$.

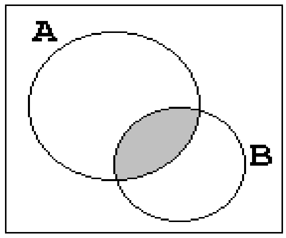


Рисунок 4

Например, A – множество натуральных чисел кратных 2:

$A = \{x \in N \mid x \vdots 2\}$ ($\vdots$ – кратно),

B – множество натуральных чисел кратных трем:

$B = \{x \in N \mid x \vdots 3\}$. Найти $C = A \cap B$.

Решение. C – множество чисел, кратных шести: $C=\{x \in N \mid x \vdots 6\}$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

коммутативность: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

дистрибутивность: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

4. *Разность (вычитание)*

Разностью множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат X и не принадлежат Y (рис. 5). Разность множеств обозначается через $X \setminus Y$. Очевидно, что

$X \setminus Y \neq Y \setminus X$.

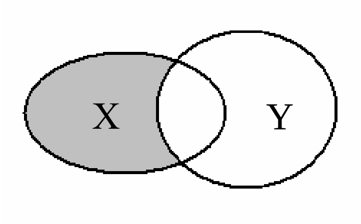


Рисунок 5. Разность множеств

Вычитание (разность)

Разность множеств *A* и *B* есть множество *C*, элементы которого обладают свойствами множества *A* **и не обладают** свойствами множества *B* или принадлежат множеству *A* **и не принадлежат** множеству *B*.

$C = A \setminus B = \{c_i | c_i \in A\ и\ c_i \notin B\}$

Разностью множеств А и В называется множество состоящее из элементов множества А, не принадлежащих множеству В. Обозначается А\В.

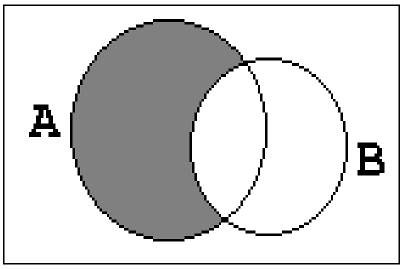


Рисунок 6

Например, а) А = {1, 2, 3, 4}, В = {1, 4}. Найти А\В, В\А.

б) А = {1, 2, 3}, В = {1, 2, 3, 4}. Найти А\В, В\А.

Решение. а) А\В = {2,3}; В\А = ∅.

б) А\В = ∅; В\А = {4}.

5. *Симметрическая разность*

Симметрической разностью X ⊕ Y (X Δ Y) множеств X и Y называется объединение разностей X \ Y и Y \ X. Эта разность множеств является составной операцией:

$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Симметрическая разность $A \oplus B$ **($A \Delta B$)** есть множество всех элементов, принадлежащих или A, или B (но не обоим вместе), т.е. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Например, $\{1,2,3\}\Delta\{2,3,4\} = \{1,4\}$. Симметрическая разность получается объединением элементов множеств за исключением тех, которые встречаются дважды.

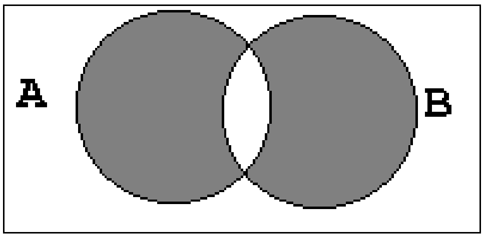


Рисунок 7

6. *Дополнение*

Дополнительным к множеству X по отношению к множеству W, если $X \subset W$, называется множество, состоящее из элементов W, не принадлежащих множеству X. Дополнительное множество обозначается:$Z_w(X)$ (рис. 8).

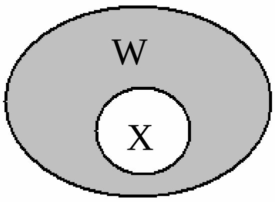


Рисунок 8. Дополнительное множество

Дополнение

Если имеется некоторое универсальное множество (универсум) U и все рассматриваемые множества есть его подмножества, то дополнением $\overline{A}$ называется такое множество, элементы которого не входят в A, но принадлежат U.

Если $B \subset A$, то $A \backslash B$ называется **дополнением** B до множества A.

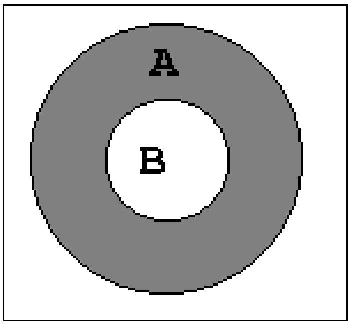


Рисунок 9.

Например, U – множество всех студентов университета, A – множество всех студентов факультета психологии. Тогда $U \backslash A$ дополнение, т.к. $A \subset U$. $U \backslash A$ – есть множество студентов всех факультетов, кроме психологического.

7. ***Универсальное множество***

Универсальным множеством называется множество I, для которого справедливо соотношение: $X \cap I = X$. Оно означает, что множество I содержит все элементы множества X. Следовательно, любое множество X полностью содержится во множестве I, т.е. является его подмножеством: $X \subset I$. Так, для выше рассмотренного примера универсальным множеством можно считать множество студентов в группе.

Универсальное множество удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника. Отдельные области внутри этого прямоугольника будут представлять подмножества универсального множества.

Дополнением множества X (до универсального множества I) называют множество $\overline{X}$, определяемое из соотношения: $\overline{X} = I \backslash X$.

На рис 10 множество $\overline{X}$ представляет собой не заштрихованную область.

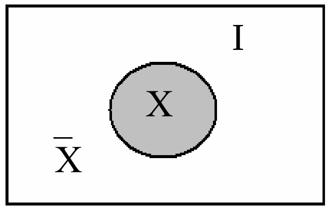


Рисунок 10. Множество X и его дополнение $\overline{X}$

Очевидно выполнение соотношений:

$X \cap \overline{X} = \varnothing$, $X \cup \overline{X} = I$.

Из этого следует, что само множество X, в свою очередь, является дополнением множества $\overline{X}$ (до I**)**. Следовательно: $\overline{\overline{X}} = X$.

С помощью операции дополнения можно представить разность множеств в виде составной операции:

$X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

Задача. Пусть A = {1, 2, 3, 4, 5}; B = {2, 4, 6, 8, 10}. Определите пересечение, объединение, разности этих двух множеств. Одинаковы ли множества A\B и B\A?

Решение.

1. Пересечение множеств $A \cap B$ включает в себя только те элементы, которые содержатся в обоих множествах (и…, и…), поэтому $A \cap B = \{2, 4\}$.
2. Объединение $A \cup B$ включает в себя все элементы, содержащиеся хотя бы в одном из множеств A или B, (или …, или …), таким образом, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$.
3. Разность A\B = {1, 2, 3, 4, 5}, а разность B\A = {6, 8, 10}.
4. Очевидно, что A\B и B\A не равны.
5. Симметрическая разность $A \Delta B$ = {1, 3. 5. 6, 8, 10}

Задача. Определите множества M, T и P, если $M \cup T$ = {2, 3, 4, 5, 6,8, 10}, M\P = {2, 3, 4, 5}.

Решение. Предположим M={2, 3, 4, 5, 8}, T={6, 8, 10}, тогда множество P должно содержать элемент 8 и любые другие элементы: P={8, 11, 15, 16, 56}.

Множества можно задавать двумя способами:

1. Перечислением элементов;
2. Заданием свойств;

Задача. Задайте множество со следующими элементами: 6,7,8,9,10

Решение.

1. Перечислением элементов: V = {6, 7, 8, 9, 10};
2. Задание свойств: V = {6 $\subseteq$ v $\subseteq$ 10};

Задача. Даны множества A, B, C, P. Задайте списком множество M=(A$\cap$B)$\cup$(C$\cap$Д).

A={2, 3, 4, 5, 6, 7}, B={3, 4, 5, 6, 7, 8},

C={-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, P={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Решение. Найдем пересечение множеств A и B: A$\cap$B= {3, 4, 5, 6, 7};

найдем пересечение множеств C и P: C$\cap$P={2, 3, 4}; запишем M=(A$\cap$B)$\cup$(C$\cap$P):

M={2, 3, 4, 5, 6, 7}

Задача. Даны множества A = {2, 3, 4, 5} и B = {4, 5, 7} на универсуме десятичных цифр. Выполнить операцию объединения над множествами A$\cup$B.

Решение. Строим множество, выбирая элементы из множества A, а затем добавляем недостающие элементы из B. Получаем:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\}.$$

Очевидно, что в соответствии с определением множества каждый элемент входит в него только один раз, т.е. элементы 4, 5 учтены по одному разу.

Задача. Выполнить операции над множествами, заданными формулой: $\overline{M \oplus I}$.

В таких задачах множества: M — произвольное, I — универсальное (универсум), ∅ — пустое.

Решение. Вначале выражаем симметрическую разность через объединение двух разностей:

$$M \oplus I = (M \setminus I) \cup (I \setminus M).$$

Анализируем содержимое первой круглой скобки: если из произвольного множества M вычесть универсум I, то очевидно, что останется пустое множество ∅.

Если из универсума I вычесть произвольное множество M, то будет получено дополнение $\overline{M}$.

Выполняя дополнение дополнения, получим $\overline{\overline{M}} = M$.

Таким образом,

$$\overline{M \oplus I} = \overline{(M \setminus I) \cup (I \setminus M)} = \overline{\varnothing \cup \overline{M}} = \overline{\overline{M}} = M.$$

Задача. Выполнить операции над множествами, заданными формулой $(A \oplus B) \cup C$, с применением диаграмм Эйлера. Заштриховать соответствующую формуле область на диаграмме Эйлера для трех взаимно пересекающихся множеств A, B, C и записать ответ в стандартном виде, т.е. в виде объединения пересечений с использованием, где необходимо, операции дополнения (в виде конституент единицы — I, либо нуля — ∅).

Решение. Изобразим диаграмму Эйлера для трех взаимно пересекающихся множеств. Выделим штриховкой симметрическую разность множеств $A \oplus B$, а затем объединим ее с множеством C.

Записываем в виде объединения конституент I:

$$(A \oplus B) \cup C = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup$$
$$\cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}).$$

В виде пересечения конституент ∅ множество будет выглядеть следующим образом:

$(A \varnothing B) \cup C = (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$.

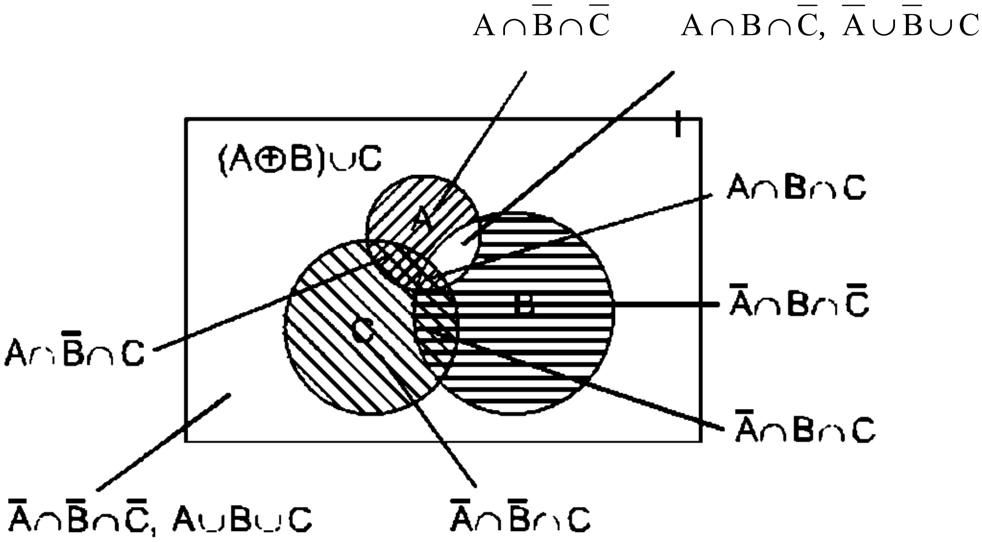


Рисунок 11

Задача. По заданному десятичному числу 131 заштриховать на диаграмме Эйлера для трех взаимно пересекающихся множеств A, B, C соответствующую область и записать ее в виде объединения конституент единицы и нуля.

Выполнить дополнение множества 131, а также операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности множества 131 с множеством 100.

Решение. Пусть задано множество 131 на универсуме из трех взаимно пересекающихся множеств A, B, C. Получим двоичный код десятичного числа:

$131_{10} = (1\bullet 2^7+0\bullet 2^6+0\bullet 2^5+0\bullet 2^4+0\bullet 2^3+0\bullet 2^2+1\bullet 2^1+1\bullet 2^{\circ})=10000011_2$.

Получим таблицу конституент I (таблица 1).

В соответствии с данными табл. 1.1 искомое множество представляется выражением

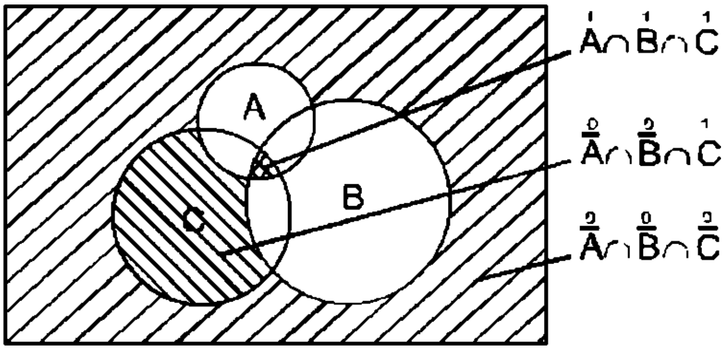
$$M_{131}=(\overset{1}{A}\cap\overset{1}{B}\cap\overset{1}{C})\cup(\overset{0}{\overline{A}}\cap\overset{0}{\overline{B}}\cap\overset{1}{C})\cup(\overset{0}{\overline{A}}\cap\overset{0}{\overline{B}}\cap\overset{0}{\overline{C}}).$$

Здесь над буквенными символами множеств в пересечениях указано, входит ли множество в соответствующий заштрихованный сектор диаграммы Эйлера (1) либо не входит (0), таким образом, чтобы в каждой скобке получить единицу (дополнение нуля - единица).

Таблица 1

Множества			Конституента I	Двоичный код	
A	B	C			
0	0	0	$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$	1	2^0
0	0	1	$\bar{A}\cap\bar{B}\cap C$	1	2^1
0	1	0	НЕТ	0	2^2
0	1	1	НЕТ	0	2^3
1	0	0	НЕТ	0	2^4
1	0	1	НЕТ	0	2^5
1	1	0	НЕТ	0	2^6
1	1	1	$A\cap B\cap C$	1	2^7

Изобразим диаграмму Эйлера



Нетрудно видеть, что множество 131 в виде конституент ∅ в соответствии с данными табл.2 представляется выражением:

$$M_{131}=(\overset{0}{A}\cup\overset{1}{\bar{B}}\cup\overset{0}{C})\cap(\overset{0}{A}\cup\overset{1}{\bar{B}}\cup\overset{1}{\bar{C}})\cap(\overset{1}{\bar{A}}\cup\overset{0}{B}\cup\overset{0}{C})\cap(\overset{1}{\bar{A}}\cup\overset{0}{B}\cup\overset{1}{\bar{C}})\cap(\overset{1}{\bar{A}}\cup\overset{1}{\bar{B}}\cup\overset{0}{C}).$$

Здесь, наоборот, в объединениях над символами множеств, соответствующих незаштрихованным секторам диаграммы Эйлера, ставятся нули, а над символами дополнений множеств — единицы, таким образом, чтобы в каждой скобке получить нуль (дополнение единицы — нуль).

Таблица 2

Множества			Конституента I	Двоичный код	
A	B	C			
0	0	0	НЕТ	1	2^0
0	0	1	НЕТ	1	2^1
0	1	0	$A \cup \overline{B} \cup C$	0	2^2
0	1	1	$A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$	0	2^3
1	0	0	$\overline{A} \cup B \cup C$	0	2^4
1	0	1	$\overline{A} \cup B \cup \overline{C}$	0	2^5
1	1	0	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup C$	0	2^6
1	1	1	НЕТ	1	2^7

Выполним операции над множеством, заданным десятичным числом 131. Получим дополнение этого множества путем замены нулей на единицы, и наоборот (табл. 3). Номер определенного таким образом множества — 124. Нетрудно видеть, что он получается путем вычитания номера 131 из 255, где 255 — это универсум для трех взаимно пересекающихся множеств, т.е. вектор из восьми единиц (единичный байт).

Таблица 3

1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**131**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**124**

Получим объединение множеств 131 и 100: в табл. 4 единица в результате указывается в том случае, если в соответствующем столбце имеется единица хотя бы в одном множестве. Номер полученного множества 231. Нетрудно видеть, что в данном случае номер результата получается путем суммирования номеров исходных множеств.

Таблица 4

1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**131**

0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**100**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**231 = (131)$\cup$(100)**

Получим пересечение множеств 131 и 100: в табл. 5 единица в результате получается в том случае, если имеются совпадения единиц в исходных множествах. В нашем случае таких совпадений нет, поэтому в результате получается пустое множество 0.

Таблица 5

1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**131**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**100**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0 = (131) $\cap$ (100) = $\varnothing$**

Получим разность множеств 131 и 100: в табл. 6 единица в результате получается в том случае, если у уменьшаемого множества в столбце находится единица, а у вычитаемого множества в соответствующем столбце — нуль. Таким образом, в результате получим множество 131.

Таблица 6

1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**131**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**100**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**131 = (131) \ (100)**

Получим симметрическую разность множеств 131 и 100: в табл. 7 единицы в результате указываются в случае комбинаций 01 или 10 в соответствующих столбцах множеств. Номер определенного таким образом множества — 231.

Таблица 7

1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**131**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**100**

1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**231 = (131) ∅ (100)**

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

а) идемпотентность

$X \cap X = X$,

$X \cup X = X$;

б) коммутативность

$X \cap Y = Y \cap X$,

$X \cup Y = Y \cup X$;

в) ассоциативность

$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$,

$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

г) дистрибутивность

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,

$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

д) принцип двойственности (закон де Моргана)

$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$,

$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

1.3. Графическое представление (диаграммы Эймера, Венна)

1. $A \cup B$

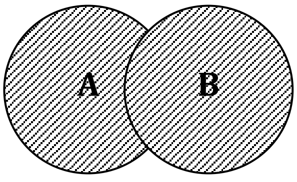


Рисунок 12

2. $A \cap B$

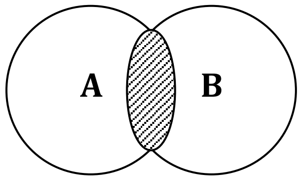


Рисунок 13

3. $A \setminus B$

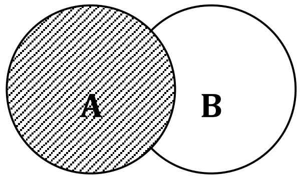


Рисунок 14

4. $\overline{A}$

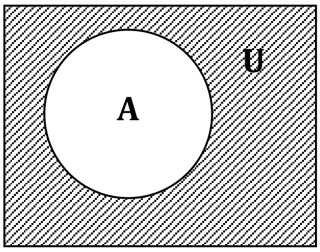


Рисунок 15

1.4. Прямое произведение A x B

Прямым произведением множеств A *и* B называется множество M всех пар $(a \cdot b)$, таких, что $a \in A$ *и* $b \in B$

Если $A=B$, то такое произведение называется A^2

Аналогично можно вывести операцию прямого произведения большего числа множеств.

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$(a_1 \times a_2 \times \ldots a_n)$

Если в частности $A_1, A_1 \ldots A_n$ одинаковы $A_1 = A_2 = \ldots A_n$ то получаем A^n

(Например, множество точек на плоскости являются прямым произведением двух множеств).

Если множества конечные, мощность произведений $A \times B$ равна мощности произведений $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

1.5. Системы множеств

Элементы множества сами могут быть множествами.

Пример. Множество X = $\{\{1\},\{2,3\},\{1,2\}\}$ состоит из множеств:

$$X_1 = \{1\};\ X_2 = \{2,3\};\ X_3 = \{1,2\}.$$

В этом случае будем говорить о **системе множеств**. Рассмотрим такие системы: **булеан** и **разбиение** множеств.

Булеаном B(X) множества X называется множество всех его подмножеств. В булеан B(X) обязательно включается само множество X и пустое множество ∅.

Пример. Для множества X = {0,1} булеаном является множество:

$$B(X) = \{\varnothing, \{0\},\{1\},\{0,1\}\}.$$

Разбиением P(X) множества X называется система его непустых непересекающихся подмножеств, в объединении дающая множество X (рис. 16).

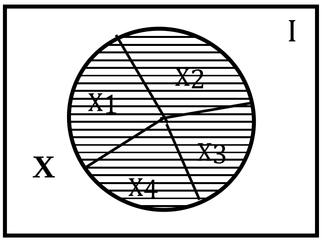


Рисунок 16. Разбиение множества P(X) = {X_1, X_2, X_3, X_4}

Разбиение P(X) = {X_1, X_2, ..., X_n} множества X удовлетворяет следующим условиям:

1) $X_i \subset X$, i = l, ... , n;

2) $X_i \neq \varnothing$, i = l, ... , n;

3) $X_i \cap X_j = \varnothing$, при $i \neq j$;

4) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = X$.

Множества $X_1, X_2, ..., X_n$ называются **блоками разбиения** P(X). Для исходного множества X можно получить несколько различных разбиений.

Пример. Для множества X = {1,2,3,4,5} можно построить следующие разбиения:

P_1(X) = {{1,2}, {3,4,5}} – из двух блоков;

P_2(X) = {{1},{2,5},{3},{4}} – из четырех блоков.

Примерами разбиений также являются разбиения множества студентов университета по факультетам, по курсам и по группам.

1.6. Декартово произведение множеств

Декартовым произведением X × Y двух множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y) таких, что $x \in X$, а $y \in Y$.

Пример 1. Пусть: $X = \{1,2\}$, $Y = \{-1,0,1\}$.

$X \times Y = \{(1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (2,1)\}$,

$Y \times X = \{(-1,1), (-1,2), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$.

Очевидно, что для операции декартова произведения множеств закон коммутативности не выполняется:

$X \times Y \neq Y \times X$

Декартовым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будем называть множество $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что:

$x_i \in X_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Декартово произведение $X \times Y$ представлено таблицей 1.

Таблица 8. Пример декартова произведения

X \ Y	y_1	y_2	y_3
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	(x_1, y_3)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	(x_2, y_3)
x_3	(x_3, y_1)	(x_3, y_2)	(x_3, y_3)
x_4	(x_4, y_1)	(x_4, y_2)	(x_4, y_3)

Наглядно декартово произведение множеств можно представить в виде графика (рис. 17). Здесь кружочками отмечены элементы множества $X \times Y = \{1,2,3\} \times \{2,4\}$.

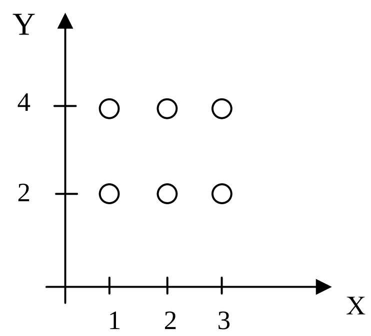


Рисунок 17. График декартова произведения $X \times Y$

1.7. Отношения между множествами

Между множествами можно определить отношения. В самом общем смысле отношение означает какую-либо связь между предметами или понятиями. Отношения между парами объектов называют бинарными (двуместными). Например, отношения принадлежности $a \in A$ и включения $A \subset B$. Первое из них определяет связь между множеством и элементами, а второе – между двумя множествами. Примерами бинарных отношений являются равенство (=), неравенства (< или >), а также такие выражения как «быть братом», «делиться (на какое-то число)», «входить в состав (чего-либо)» и т.п.

Некоторые из таких бинарных связей вам хорошо известны:

1. На множестве Z задано бинарное отношение – равенство: про любые два целых числа можно сказать, что они либо равны (связь есть), либо не равны (связи нет).
2. На множестве всех прямых на плоскости задано бинарное отношение – перпендикулярность: про любые две прямые можно сказать, что они либо перпендикулярны, либо нет.
3. На множестве всех треугольников задано бинарное отношение – равновеликость (равенство площадей): про любые два треугольника, можно сказать, что они либо равновелики, либо не равновелики.

Обычно бинарное отношение обозначается буквой $\Re$ (от английского relation – отношение).

Бинарное отношение – понятие весьма широкое. Нас будут интересовать бинарные отношения, подчиненные некоторым дополнительным условиям. Рассмотрим некоторые из них.

Общие свойства отношений. Отношение может быть:

1. рефлексивно (от латинского reflexivus – «повернутый назад», т.е. если каждый элемент множества связан этим отношением сам с собой.

$$a \Re a$$

Например, равенство и равновеликость, самообслуживание, «иметь общий делитель» обладают свойством рефлексивности, а перпендикулярность, отношения <, >,»быть братом» не обладают этим свойством или говорят антирефлексивно;

2. симметрично. Бинарное отношение $\mathfrak{R}$ называется симметричным, если из того, что элемент a связан с элементом b этим отношением, вытекает, что и элемент b связан с элементом a этим же отношением

$$a \,\mathfrak{R}\, b \Rightarrow b \,\mathfrak{R}\, a$$

Например, равенство, равновеликость, перпендикулярность, расстояние между двумя точками, «быть братом» обладают свойством симметричности, а бинарное отношение «быть отцом» не обладает этим свойством, а следовательно антисимметрично.

3. транзитивно (от латинского transeo –«перехожу»). Бинарное отношение $\mathfrak{R}$ называется транзитивным, если из того, что элемент a связан с элементом b отношением $\mathfrak{R}$, а элемент b, в свою очередь, связан с элементом c этим же отношением, вытекает, что и элемент a связан с элементом c отношением $\mathfrak{R}$

$$a \,\mathfrak{R}\, b \quad b \,\mathfrak{R}\, c \quad \Rightarrow a \,\mathfrak{R}\, c.$$

Например, равенство, равновеликость, «быть делителем», «быть родственником» обладают свойством транзитивности, а перпендикулярность не обладает этим свойством.

Отношение эквивалентности представляет собой экспликацию (перевод интуитивных представлений в ранг строгих математических понятий) таких обыденных слов, как «одинаковость», «неразличимость», «взаимозаменяемость». Другими словами, отношение эквивалентности является обобщением понятия равенства. Ясно, что в реальности тождественных элементов не бывает. Наоборот, каждый элемент наделен массой индивидуальных признаков, среди которых имеются как существенные для наших рассмотрений, так и несущественные. Эквивалентность можно рассматривать как совпадение элементов только по части (существенных) признаков. Эквивалентность удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и обычно обозначается знаком «~».

Отношение порядка обладает свойствами транзитивности и антисимметричности. Если между элементами множества может быть установлено отношение «старшинства», «важности», «первичности» или «предшествования», говорят об упорядоченном множестве. Например, студенты какой-либо группы могут быть упорядочены по возрасту, успеваемости, алфавиту. Примером абсолютно неупорядоченного множества является набор монет одинакового достоинства в кошельке.

Если между любыми тремя элементами множества a, b, c установлено отношение $a<b$, $b<c$, из которого следует, что $a<c$, множество называют линейно упорядоченным. Например, линейно упорядоченными являются точки прямой, отрезка, произвольной кривой линии.

Различают отношения нестрого порядка (оно рефлексивно), например, множество натуральных чисел, и отношение строгого порядка (оно антирефлексивно), например, служебная иерархия, результаты жеребьевки.

Отношение толерантности удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Для этого отношения, в отличие от эквивалентности, транзитивность не обязательна, и значит эквивалентность есть частный случай толерантности. Отношение толерантности представляет собой экспликацию интуитивных представлений о сходстве и неразличимости. Каждый объект неразличим сам с собой (рефлексивность), а сходство двух объектов не зависит от того, в каком порядке они сравниваются (симметричность). В то же время, если один объект сходен с другим, а другой сходен с третьим, то это вовсе не означает, что все они обязательно сходны между собой, т.е. свойство транзитивности может не выполнятся.

Сходство между различными объектами имеет точный смысл только тогда, когда указана совокупность признаков, относительно которой это сходство устанавливается. Два объекта считаются сходными (толерантными), если они обладают хотя бы одним общим признаком. Например, если определить отношение между словами как наличие хотя бы одной общей буквы, то толерантными будут пересекающиеся слова кроссворда.

Задача. Определить является ли отношение «сходство между четырехбуквенными словами, отличающимися только одной буквой» отношением толерантности.

Решение. Это отношение является отношением толерантности, доказательством этого является цепочка четырехбуквенных слов, «превращающих муху в слона»

Муха – мура – тура – тара – кара – каре – кафе – кафр – каюр – каюк – крюк – крок – срок – сток – стон – слон.

Отношение может быть определено не только для пары объектов, но и для троек, четверок и т.д. (n-мерное отношение). Примером трехместных (тернарных) отношений являются арифметические операции над числами, отношения между родителями и детьми (отец, мать, ребенок) и т.п.

1.8. Бинарные отношения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

Пусть среди трех людей: Андрей (А), Василий (В) и Сергей (С) двое знакомы друг с другом (Андрей и Василий) и знают третьего – Сергея, но Сергей их не знает. Как описать отношения между этими людьми?

Имеем исходное множество $X = \{A, B, C\}$. Далее из элементов множества X составим упорядоченные пары: (A, B), (B, A), (A, C), (B, C). Это множество пар и описывает связи между элементами множества X. Кроме того, множество этих пар есть подмножество декартова произведения $X \times X$.

Определение. На множестве X задано бинарное отношение R, если задано подмножество декартова произведения $X \times X$ (т. е. $R \subset X \times X$).

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Зададим на X следующие отношения:

$T = \{(x, y) \mid x, y \in X; x = y\}$ – отношение равенства;

$P = \{(x, y) \mid x, y \in X; x = y - 1\}$ – отношение предшествования;

$Q = \{(x, y) \mid x, y \in X$; x делится на $y\}$ – отношение делимости.

Все эти отношения заданы с помощью характеристического свойства. Перечислим элементы этих отношений для заданного множества $X = \{1,2,3,4\}$:

$T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$;

$P = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$;

$Q = \{(4,4), (4,2), (4,1), (3,3), (3,1), (2,2), (2,1), (1,1)\}$.

Тот факт, что пара (x, y) принадлежит данному отношению R, будем записывать: $(x, y) \in R$ или xRy. Например, для отношения Q запись $4Q2$ означает, что 4 делится на 2 нацело, т. е. $(4,2) \in Q$.

Областью определения D_r бинарного отношения R называется множество $D_R = \{x \mid (x, y) \in R\}$.

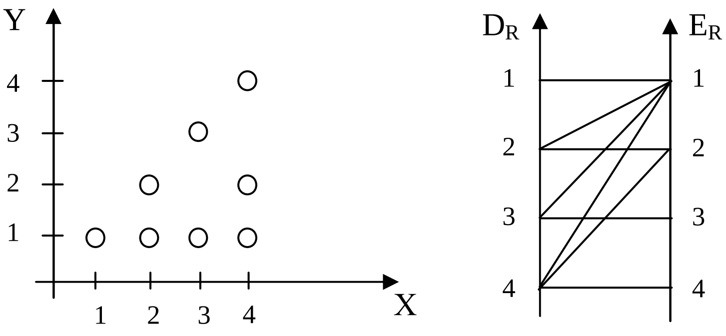
Областью значений E_R бинарного отношения R называется множество $E_R = \{y \mid (x, y) \in R\}$.

В примере для отношения P областью определения является множество $D_R = \{1,2,3\}$, а областью значений является множество $E_R = \{2,3,4\}$.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

Бинарное отношение можно задать, указав характеристическое свойство или перечислив все его элементы. Существуют и более наглядные способы задания бинарного отношения: график отношения, схема отношения, граф отношения, матрица отношения.

График отношения изображается в декартовой системе координат: на горизонтальной оси отмечается область определения, на вертикальной - область значений отношения. Элементу отношения (x, y) соответствует точка плоскости с этими координатами.



а б

Рисунок 18. График отношения Q (а) и схема отношения Q (б)

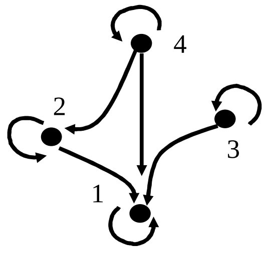
Схема отношения изображается с помощью двух вертикальных прямых, левая из которых соответствует области определения отношения, а правая – множеству значений отношения. Если элемент (x, y) принадлежит отношению R, то соответствующие точки из D_R и E_R соединяются прямой.

Граф отношения $R \subset X \times X$ строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки - элементы множества X. Пара точек x и y соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (x, y) принадлежит отношению R.

Матрица отношения $R \subset X \times X$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества X. На пересечении строки x и столбца y ставится 1, если пара $(x, y) \in R$; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй – номеру столбца.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогда матрица отношения $R \subset X \times X$ имеет n строк и n столбцов, а ее элемент r_{ij} определяется по правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_i, y_j) \in R, \text{ где } i = l, 2, ..., n; \ j = l, 2, ..., n. \\ 0, \text{ если } (x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$$



а

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

б

Рисунок 19. Граф отношения Q (а) и матрица отношения Q (б)

СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

1. Отношение R на множестве X называется **рефлексивным**, если для всех $x \in X$ выполняется условие $(x, x) \in R$. Отношение R на множестве X называется **нерефлексивным**, если условие $(x, x) \in R$ не выполняется хотя бы при одном $x \in X$.

2. Отношение R на множестве X называется **симметричным**, если из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$. Отношение R на множестве X называется **несимметричным**, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \notin R$.

3. Отношение R на множестве X называется **транзитивным**, если для любых $x, y, z \in R$ из одновременного выполнения условий $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$.

Пример. Рассмотрим следующие отношения на множестве X={1,2,3,4,5,6,7}:

$G = \{(x, y) \mid x, y \in X; x > y\}$;

$L = \{(x, y) \mid x, y \in X; x \le y\}$;

$M = \{(x, y) \mid x, y \in X; (x - y)$ делится на $3\}$;

$К = \{(x, y) \mid x, y \in X; x^2 + y^2 \le 20\}$.

Исследуем, какими свойствами они обладают.

Среди приведенных в примере отношений **рефлексивными** являются отношение L (т. к. $x \le x$ справедливо при всех $x \in X$) и отношение M (т. к. x - x

= 0 делится на 3, поэтому пара (x, x) принадлежит отношению M при всех $x \in X$).

Симметричными являются отношения M (если x - y делится на 3, то и y - x делится на 3) и K (если $x^2 + y^2 \le 20$, то и $y^2 + x^2 \le 20$).

Транзитивными являются отношения G, L, M.

ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Бинарные отношения делятся на типы в зависимости от свойств, которыми они обладают.

Отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности**, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Важной особенностью отношений эквивалентности является то, то они разбивают все множество X на непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.

Классом эквивалентности, порожденным элементом $x \in X$, называется подмножество [x] множества X, для элементов которого выполняется условие $(x, y) \in R$, $y \in X$.

Таким образом, класс эквивалентности:

$[x] = \{y \mid y \in X; (x, y) \in R\}$.

Классы эквивалентности образуют систему непустых непересекающихся подмножеств множества X, в объединении дающую все множество X – т. е. образуют разбиение множества P(X).

Обозначим отношение эквивалентности символом ≡, тогда класс эквивалентности записывается в виде:

$[x] = \{y \mid y \in X; x \equiv y\}$.

Из рассмотренных в примере отношений только отношение M является отношением эквивалентности.

Отношение M разбивает множество X = {1,2,3,4,5,6,7} на три класса эквивалентности:

$[1] = \{1,4,7\}$, $[2] = \{2,5\}$, $[3] = \{3,6\}$.

Классы, порожденные элементами 4, 5, 6 и 7 совпадают с этими классами:

[4] = [1], [5] = [2], [6] = [3], [7] = [1].

1.9. Отображения множеств

Пусть X и Y – два непустых множества. Закон G, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $y \in Y$, называется **однозначным отображением** X в Y. Отображение является обобщением понятия функции, определенной на X и принимающей значения на Y.

Используются следующие эквивалентные записи:

$$G: X \to Y$$

или

$$y = G(x);\ \text{где } x \in X,\ y \in Y.$$

В случае однозначного отображения элемент y называется образом элемента x, а x – прообразом y.

Возможна ситуация, когда каждому $x \in X$ отображение G ставит в соответствие некоторое подмножество $G(x) \subset Y$. Тогда образом элемента x будет подмножество G(x). Отображение G в этом случае будет являться **многозначным отображением.**

Отображение является, таким образом, всюду определенным отношением и определяется тройкой множеств (X, Y, G).

Интересным является случай, когда множества X и Y совпадают: X = Y. Отображение $G: X \to X$ представляет собой отображение множества X самого в себя и определяется парой множеств (X, G), где $G \subset X \times X$. Подробным изучением таких отображений занимается теория графов. Рассмотрим здесь лишь нескольких операций над ними.

Пусть G и H – отображения множества X в X. Композицией этих отображений назовем отображение GH, которое определяется следующим образом:

$$GH(x) = G(H(x)).$$

В частном случае при H = G получим отображения:

$$G^2(x) = G(G(x)), \qquad G^3(x) = G(G^2(x)) \text{ и т. д.}$$

Для произвольного $S \geq 2$ имеем: $GS(x) = G(GS\ \text{-}1(x))$.

Введем для общности соотношение: $G^0(x) = x$. Тогда можно записать:

$$G^0(x) = G(G^{-1}(x)) = GG^{-1}(x) = x.$$

Это означает, что $G^{-1}(x)$ представляет собой обратное отображение. Тогда

$$G^{-2}(x) = G^{-1}(G^{-1}(x)) \text{ и т. д.}$$

Пример. Пусть X – множество людей. Для каждого человека $x \in X$ обозначим через G(x) множество его детей. Тогда:

$G^2(x)$ – множество внуков x,

$G^3(x)$ – множество правнуков x,

$G^{-1}(x)$ – множество родителей x и т. д.

Изображая людей точками и рисуя стрелки, идущие из x в G(x), получим родословное, или генеалогическое дерево, представленное на рис. 20.

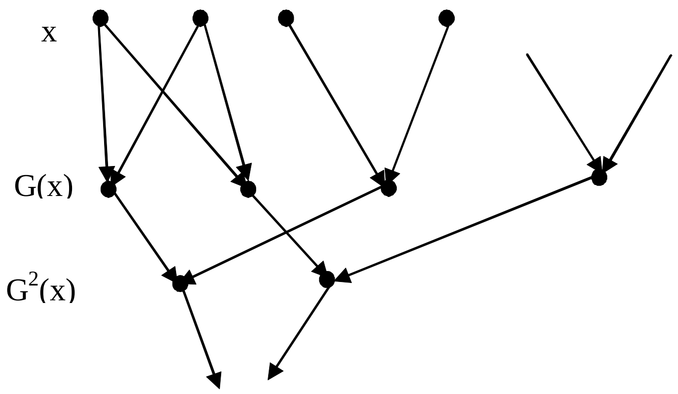


Рисунок 20 Генеалогическое дерево

1.10. Задания для практики

1. Для каждого из слов: «педагог», «психолог», «филолог», «историк», «археолог», «литературовед», «переводчик», «юрист», «стилист», «экономист», составьте множество его различных букв.

2. Задайте слова, буквы которых содержатся в множестве {м, о, р, ж, е, н}.

3. Задайте тремя способами множество следующих элементов: 3, 6, 9. 12,15.

4. Замените знак вопроса элементом множества, при котором будет верно следующее выражение: A={7, 6, 2, 5}, T={2, ?, 8, 9}, A\T={6, 7}.

5. Заполните таблицу:

	A={5,6,8,9}	C={-1,0,6,7,8}	Д={2,3,4,5,6}	F={-1,2,5,9,10}
B={-1, 0, 1, 2, 3}	B∪A	B∩C	B\D	BΔF
K={6, 7, 8, 9, 10}	A\K	K∪C	K\D	K∩F
Y={2, 6, 10}	YΔA	Y∪C	Y∪D	F\Y
R={-1, 2, 3, 7}	R∪F	RΔC	D∩R	R\F

6. Даны множества A, B, C, P. Задайте списком множество M=(A∩B) ∪ (C∩P), если:

а) A={0,1,2,3,4,5,6,7}, B={3,4,5,6,7,8,9}, C={-3,-2,-1,0,1,2,3,4}, P={2,3,4,5,6};

б) A={0,1,2,3,6,7}, B={3,6,7,8,9}, C={-3,-2,-1,0,1,2,3,4}, P={2,3,4,5,6}.

7. Составьте множества M, P, T, так, чтобы M∪P={4,5,9}, P∩T={5,10}.

8. Задайте множества B, T, и C так, чтобы A=T∪C∩B, если A={3,6,9,2,5}.

9. Вставьте обозначения числовых множеств:

$\square$ – множество натуральных чисел;

$\square$ – множество целых чисел;

$\square$ – множество рациональных чисел;

$\square$

– множество действительных чисел.

10.Вставьте пропущенный знак $\in$ или $\notin$:

117 ___ N; 22,4 ___ Z; 4/3___Q;

$\sqrt{2}$ ___ Q; $\sqrt{75}$ ___ R; π ___ Z.

11.Принадлежит ли множеству корней уравнения
$x^2 - 5x + 6 = 0$ число $x = -3$?

12.Какими способами можно задать множество?

13.Запишите множество действительных корней уравнения $3x + 4 = 0$. Как записать ответ, если требуется найти множество целых корней этого уравнения?

14.Что такое подмножество данного множества? Какой символ используется для записи «множество A является подмножеством множества B»? Запишите его: A ____ B.

15.Вставьте пропущенный символ $\in$ или $\subset$:

1 ___ {1,2,3}; {1} ____ {1,2,3};

$\varnothing$ ___ {1,2,3}; {2,3} ____ {1,2,3}.

16.Вставьте пропущенные знаки операций на множествах:

{a,b,c} ____ {d,b,e} = {b};

{a,b,c} ____ {c, d} = {a,b,c,d};

{a,b,c} ____ {a,d} = {b,c}.

17.Что такое булеан множества X?

18. Является ли булеаном множества {a,b,c} система подмножеств {{a},{b},{c}}?

19. Является ли разбиением множества {a,b,c} система подмножеств {{a,b},{b,c},{a,c}}?

20. Нарисуйте диаграммы Эйлера для левой и правой частей закона де Моргана. Сравните их.

21. Запишите законы алгебры множеств. Запомните их названия.

22. Даны множества A = {0,1,2,3,4,5} и B = {4,5,6,7} на универсуме десятичных цифр. Выполнить операции над множествами:
   - объединение $A \cup B$;
   - пересечение $A \cap B$;
   - разность $A \setminus B$;
   - разность $B \setminus A$;
   - симметрическая разность $A \oplus B$;
   - симметрическая разность $B \oplus A$;
   - дополнение $\bar{A}$;
   - дополнение $\bar{B}$;
   - пересечение дополнений $\bar{A} \cap \bar{B}$;
   - дополнение объединения $\overline{A \cup B}$.

23. Даны множества цветов флагов Российской Федерации (R) и Украины (U). R = {б,с,к} и U = {ж,г}, на универсуме семи цветов радуги (к,о,ж,з,г,с,ф) с добавлением белого (б) цвета. Выполнить операции над множествами:
   - объединение $R \cup U$;
   - пересечение $R \cap U$;
   - разность $R \setminus U$;

- разность $U\setminus R$;
- симметрическая разность $U\oplus R$;
- симметрическая разность $R\oplus U$;
- дополнение $\overline{R}$;
- дополнение $\overline{U}$;
- пересечение дополнений $\overline{R}\cap\overline{U}$;
- дополнение объединения $\overline{R}\cup\overline{U}$.

24.Выполнить операции над множествами, заданными формулой, с использованием диаграмм Эйлера. Заштриховать соответствующую формуле область на диаграмме Эйлера для трех взаимно пересекающихся множеств A, B, C и записать ответ в стандартном виде, т.е. в виде объединения пересечений с использованием, где необходимо, операции дополнения (в виде конституент I либо 0).

1) $(A\setminus B)\cup\overline{B}\cup C$;

2) $((\overline{A}\cap C)\setminus B)\cup(A\cup B)$;

3) $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)$;

4) $((A\setminus B)\cap(B\setminus C)$;

5) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cup(A\cap C)$;

6) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$;

7) $((A\cap B)\setminus C)\cup A$;

8) $((C\setminus A)\cap\overline{B})\cup(A\cap B\cap C))$;

9) $((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cup C))\setminus(A\cap B\cap C)$;

10) $(A\cap B\cap C)\setminus\overline{A}$;

11) $(B\cup C)\setminus(\overline{B}\cap C)$;

12) $(A\setminus(B\cap C))\setminus(B\setminus C)$;

13) $(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)\setminus(B\cap C)$;

17) $(C\setminus(A\cup B))\cup(B\setminus(A\cup C)$;

18) $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})$;

19) $((A\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))\cap\overline{C}$;

20) $(\overline{A}\cap\overline{C}\cap B)\cup(A\cap C)$;

21) $(A\cup B)\setminus(A\cup C)$;

22) $(A\setminus(\overline{B}\cap\overline{C}\cap A))$;

23) $((B\cup C)\setminus A)\cap(A\cup C)$;

24) $((\overline{A}\cap\overline{B})\cup C)\setminus A$;

25) $((A\cap B)\setminus(A\cap B\cap C))\cup C$;

26) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap\overline{C})$;

27) $(A\cup C)\setminus(A\cap B)$;

28) $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(B\cap C\cap\overline{A})$;

29) $(A\cap C\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C}\cap B)$;

14) $((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B)$;

15) $((B \cup C) \setminus \bar{C}) \cap B \cup A$;

16) $\left(\overline{A \cap B \cap C}\right) \cap (A \cap B)$;

---

30) $\overline{((A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C))}$;

31) $\overline{(B \cup C)} \setminus A$;

32) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

25.По заданному десятичному числу заштриховать на диаграмме Эйлера для трех взаимно пересекающихся множеств A, B, C соответствующую область и записать ее в виде объединения конституент единицы – I и нуля – 0.

Десятичное число задается следующим образом: 100+номер студента по списку в журнале учебной группы.

Выполнить дополнение множества, заданного таким десятичным числом, а также операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности этого множества с множеством 100.

26.Вставьте пропущенный знак = или ≠:

$\{3,5\}$ _____ $\{5,3\}$; $(3,5)$ _____ $(5,3)$.

27.Нарисуйте график декартова произведения $X \times Y$, где $X = \{1,5\}$, $Y = \{2,3\}$. Совпадает ли он с графиком $Y \times X$?

28.Дайте определение бинарного отношения на множестве.

29.Обведите кружком номер правильного ответа. Областью определения бинарного отношения R называется множество

а) $\{(x, y) | (x, y) \in R\}$;

б) $\{x | (x, y) \in R\}$;

в) $\{y | (x, y) \in R\}$.

30.Какими способами можно задать бинарное отношение?

31. Какое отношение является рефлексивным?

32. Какой особенностью обладает матрица рефлексивного отношения? А матрица симметричного отношения?

33. Закончите фразу: Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, называется отношением

____.

34. Запись [x] используется для обозначения

____.

Раздел 2. Элементы алгебры логики

Математика развивается по своим внутренним законам, а именно по законам логики. Математическая логика – это теория верных рассуждений. Слово «верных», как и везде в математике, не следует понимать в абсолютном смысле. Большинстве математических дисциплин строится на основе некоторых исходных договоренностей, или аксиом, которые формулируются исходя из соображений здравого смысла. Далее из аксиом выводятся следствия, причем доказательство строится по законам логического вывода. Эти законы обеспечивает как раз математическая логика. Из другой системы аксиом и по другим законам вывода может получится совершенно другая наука. Чудесная загадка математики, которую М.Клайн называет «необъяснимой эффективностью», состоит в том, что несмотря на кажущийся произвол своего построения, математика в состоянии описывать реальный мир с удивительной точностью. Игра ума – вывод математических теорий по логическим законам – оказалась гораздо ближе к действительности, чем можно было ожидать.

Алгебра логики тесным образом связана с теорией множеств. Множества можно задавать двумя способами: перечислением и описанием, т.е. указанием свойства, которым обладают элементы множества. Описательный способ задания множеств связывает учение о множествах с учением о высказываниях, составляющее первую и наиболее простую часть научной дисциплины называемой математической логикой.

Высказыванием называется каждое утверждение, которое может быть истинным или ложным. Высказывания обычно рассматривают относительного некоторого универсального множества I. Отдельные элементы этого множества будут обладать различными свойствами и в соответствии с этим могут образовывать различные группы, представляющие собой подмножества множества I.

Под **логическим высказыванием** понимается повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, но не то и другое вместе.

Примеры:

1. Волга впадает в Каспийское море.
2. Два больше трёх.
3. Я лгу.

Примеры 1, 2 являются высказываниями (1 – истинно, 2 –ложно). Пример 3 – не высказывание (если предположить, что оно истинно, то в силу его смысла оно одновременно ложно и, наоборот, из ложности этого предложения вытекает его истинность).

Так, если **I - множество слушателей в группе**, его подмножествами могут быть:

X - множество отличников;

Y - множество слушателей, проживающих в общежитии;

Z - множество слушателей, имеющих средне-специальное образование и т.д.

После того, как выделены свойства, которыми обладают отдельные подмножества, можно делать определенные утверждения относительно того, обладает ли тот или иной элемент множества I. требуемыми свойствами. Эти утверждения и будут высказываниями. Примерами высказываний являются: **он отличник**, **он живет в общежитии** и пр.

В алгебре логики не рассматривают внутреннюю структуру высказываний, а ограничиваются рассмотрением их свойства представлять истину или ложь. Поэтому на высказывание можно смотреть, как на величину, которая может принимать только одно из двух значений: **«истина»** или **«ложь»**.

Каждое из высказываний может быть *истинным* или *ложным* по отношению к рассматриваемому элементу универсального множества I.

Так, высказывание: *слушатель Иванов отличник*, **истинно,** если слушатель Иванов относится к подмножеству **X**, и **ложно**, если он к нему **не относится**.

2.1. Простые и составные высказывания

Будем обозначать высказывания строчными буквами латинского алфавита и каждому из них приписывать условные значения 1 и 0 в зависимости о того, является ли высказывание истинным или ложным. Пусть, например, x означает высказывание «он отличник». Его численные значения равны:

$$X=\begin{cases} 1, \text{ если x истинно, т.е. } x\in X; \\ 0, \text{ если x ложно, т.е. } x\notin X. \end{cases}$$

Высказывания x, y, z, которым соответствуют простые множества истинности X, Y, Z, называются *простыми* высказываниями. Однако множеством истинности может оказаться множество Q, получаемое из множеств X, Y, Z, посредством какой-либо алгебраической операции над этими множествами. При этом множеству истинности Q будет соответствовать высказывание q, называемое *составным* высказыванием. Например, множеству истинности $Q=X\cap У$, обладающему свойством X (отличник), так и свойством Y (проживает в общежитии), будет соответствовать составное высказывание «он отличник и проживает в общежитии».

В данном случае мы получили составное высказывание, связав два высказывания союзом <и>. Можно было бы получить составное высказывание, использовав другие связки: <или>, <если-то> и т.п. Из одного высказывания можно получить новое, отрицая его. Каждому из этих новых высказываний будут соответствовать свои множества истинности на универсальном множестве I, а значит составные высказывания также могут быть истинными или ложными, т.е. принимать численные значения 1 и 0.

Рассматривая высказывания как величины, принимающие значения 1 и 0, можно определить над ними операции, которые позволяют из данных высказываний получать новые. Эти операции и будут выражать упомянутые выше связи, употребляемые в обычной речи.

Операции, производимые над высказываниями, называются *логическими операциями.* Совокупность рассматриваемых далее логических операций получила название *алгебры высказываний* или *булевой алгеброй.*

В обычной речи сложные предложения образуются из простых предложений с помощью **связок: «и»**, **«или»**, **«если..., то…»** и т. д.

Примеры:

1. Светит солнце, и идёт дождь.
2. Шесть делится на два или шесть делится на три.
3. Если контакт замкнут, то лампа горит.

Связки можно рассматривать как **операции** над высказываниями. В алгебре логики вводят операции, аналогичные связкам обычной речи. При этом истинность или ложность сложного высказывания полностью определяется истинностью или ложностью его составляющих.

2.2. Алгебра высказываний

а) отрицание

Пусть х - высказывание, множеством истинности которого является Х.

Отрицание можно обозначать по-разному: $\neg A$, $\overline{A}$. Обозначим через $\overline{x}$ (читается <не х>) новое высказывание, имеющее множеством истинности $\overline{X}$ и называемое *отрицанием* Х.

Выражение $\overline{\mathbf{A}}$ («не А») означает высказывание, которое истинно, когда А ложно и ложно, когда А истинно.

Такое высказывание называют **отрицанием высказывания** А.

Символ $\overline{}$ над буквой обозначает операцию отрицания.

В обычной речи этой операции соответствует частица «**не**». Например, для истинного высказывания: «восемь делится на четыре» отрицанием является ложное высказывание: «неверно, что восемь делится на четыре» или «восемь не делится на четыре».

Пусть, например, A = «Завтра пойдет дождь».Что значит «НЕ (Завтра пойдет дождь)»: «Дождь пойдет не завтра», «Завра пойдет не дождь», «Завтра не пойдет дождь»? Здравый смысл подсказывает, что отрицанием высказывания A является третье предложение.

Отрицанием высказывания A называтся такое высказывание, которое принимает значение ложно, если высказывание A истино, и значение истино, если высказывание A ложно.

б) логическое сложение

Пусть x и y - высказывания, имеющие множествами истинности X и Y соответственно. Обозначим через x+y (иногда пишут x∨y и читают x или y) новое высказывание, имеющее множеством истинности $X \cup Y$ и называемое *логической суммой* или *дизъюнкцией* x и y.

Выражение A ∨ B («A или B») означает высказывание, истинное, если хотя бы одно из высказываний A или B является истинным.

Такое высказывание называют **дизъюнкцией высказываний** A и B. Символ ∨ обозначает операцию дизъюнкции. Эта операция соответствует союзу «**или**» в обычной речи, применяемому в неисключающем смысле.

Дело в том, что в обычной речи союз «**или**» может иметь два смысловых значения: неисключающее и исключающее. В первом случае подразумевается, что из двух высказываний, по крайней мере, одно истинно, а может быть и оба истинны. Пример такого высказывания: «В жаркую погоду пьют воду или едят мороженое». Во втором случае полагают, что из двух высказываний истинным является только одно. Пример такого высказывания: «Сегодня мы поедем на экскурсию или пойдем на пляж». Конъюнкция высказываний соответствует первому случаю.

Дизъюнкция – это высказывание, которое получается из двух данных высказываний А и В с помощью союза «или». Допускается дизъюнкция любых, самых далеких по смыслу высказываний: «Дважды два – четыре **или** Париж – столица Англии». Дизъюнкция $A \vee B$ истинна, когда истинно по крайней мере одно из высказываний А и В или оба вместе. Другими словами, дизъюнкция ложна в том и только в том случае, когда оба высказывания ложны.

В нашем примере: А – дважды два – четыре; В – Париж – столица Англии. А –истинно; В – ложно (т.к. Париж – столица Франции), однако $A \vee B$ – истинно.

Логическое сложение удобно записать в виде правил, несколько напоминающих правила обычного арифметического сложения:

0+0=0; 1+0=1;

0+1=1; 1+1=1.

Правило логического сложения легко распространяется на случай трех и более высказываний.

в) логическое умножение

Пусть x и y - высказывания, имеющие множествами истинности X и Y соответственно. Обозначим через xy (иногда пишут $x \wedge y$ и читают x **и** y) новое высказывание, имеющее множеством истинности $X \cap Y$ и называемое *логическим произведением* или *конъюнкцией* x **и** y.

Конъюнкция – это высказывание, которое получается из двух данных высказываний А и В с помощью союза «и»:

Выражение A ∧ B («А и В») означает высказывание, истинное только в том случае, когда А и В истинны.

Такое высказывание называют **конъюнкцией высказываний** А и В. Символ ∧ обозначает операцию конъюнкции. Эта операция соответствует союзу **«и»** в обычной речи. В алгебре логики знак операции «∧» можно опускать или заменять на «•».

В обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далекие по содержанию. В алгебре высказываний операция конъюнкции может быть применена к любым двум высказываниям. Например, для высказываний: «пять больше трех» и «трава зеленая» их конъюнкция является истинным высказыванием.

«Сегодня четверг **и** Шекспир – это группа авторов».

Конъюнкция $A \wedge B$ высказываний А и В истинна в том и только в том случае, когда оба высказывания истинны. В нашем примере: А – сегодня четверг, В – Шекспир – это группа авторов. А – ложно, В – ложно, следовательно $A \wedge B$ – ложно.

Это соотношение можно представить в виде правил логического умножения, совпадающих с правилами арифметического умножения:

0*0=0; 0*1-0;

1*0=0; 1*1=1.

Правила логического умножения легко распространяются на случай трех и более высказываний.

г) Булевые функции

Операции отрицания, логического сложения и логического умножения представляют собой некоторые функции о логических переменных. Особенность этих функций состоит в том, что они могут принимать, как и отдельные высказывания, только два значения 0 и 1.

Функции, у которых как аргументы, так и сами функции могут принимать только два различных значения, называются булевыми функциями.

Важно подчеркнуть, что все булевы функции от двух логических переменных могут быть представлены с помощью трех рассмотренных ранее логических операций: отрицания, логического сложения, логического умножения.

д) Импликация

Импликация образуется из высказываний А и В с помощью слов «если … то…». Получается высказывание вида «если А, то В». Напомним, что математическая логика носит формальный характер, содержание высказываний она не занимается. Так, импликация может связывать далекие по смыслу высказывания:

«**Если** функция f взаимно однозначна, **то** красный конь купается»;

«**Если** 2+2=5, **то** 3+3=10»;

«**Если** Аннушка пролила масло, **то** будет дорожное происшествие».

На примере импликации хорошо видна разница между обычным языком и языком логики. В обычном языке сложное предложение «если A, то B» предполагает между A и B отношение посылки и следствия или же причины и обусловленного ею действия, как например, в таком предложении: «Если заточить карандаш, то можно нарисовать дом». В логике импликация связывает любые два высказывания.

Выражение A $\to$ B («если A, то B» или «A влечет B») означает высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Такое высказывание называют **импликацией высказываний** A и B. Высказывание A называется **условием** (посылкой), высказывание B – **заключением** (следствием) импликации. Символ $\to$ обозначает операцию импликации.

В обычной речи операции импликации соответствует связка «**если ..., то…»**. Отличие состоит в том, что связка предполагает смысловую зависимость соединяемых высказываний, а для операции $\to$ смысловая связь несущественна.

Например, высказывания: «если 2 * 2 = 5, то трава синяя» и «если два больше трех, то восемь делится на четыре» являются истинными, так как у первого из них ложная посылка, а у второго – истинное следствие. Импликация: «если 2 * 2 = 4, то 5 < 2» ложна, поскольку ее условие истинно, а заключение ложно.

Импликация обозначается A$\Rightarrow$B, при этом говорят: «A влечет B» или «B при условии, что A», «B, если A», «A есть достаточное условие для B», «B есть необходимое условие для A»

Договорились, что импликация $A \Rightarrow B$, ложна в том и только в том случае, когда высказывание А истинно, а высказывание В ложно. Такое определение подсказано здравым смыслом: разумно считать импликацию истинной, если В истинно, независимо от значения А; если оба участника импликации ложны, импликация, естественно, также истинна. В единственном случае, когда «предпосылка» импликации истинна, а»вывод» ложен, импликация считается ложной.

$1 \Rightarrow 1$, импликация истинна;

$0 \Rightarrow 1$, импликация истинна;

$0 \Rightarrow 0$, импликация истинна;

$1 \Rightarrow 0$, импликация ложна.

Например, следующие три импликации истинны:

«Если 7 – простое число, то 2*2=4»

«Если 8 – простое число, то 2*2=4»

«Если 8 – простое число, то 2*2=5»

А импликация ««Если 7 – простое число, то 2*2=5» по определению ложна.

е) Эквиваленция

Эквиваленция образуется из высказываний А и В с помощью слов «…тогда и только тогда, когда …»:

«Треугольники подобны тогда и только тогда, когда их углы совпадают»;

«Луна – живое существо **тогда и только тогда, когда** Маккартни поет колыбельную».

Подчеркнем, что утверждение «А тогда и только тогда, когда В» не означает в логике, что составляющие высказывания А и В имеют один и тот же смысл.

Выражение А ~ В («А эквивалентно В») означает высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда А и В оба истинны или оба ложны.

Такое высказывание называют **эквивалентностью высказываний** А и В. Символ ~ означает операцию эквивалентности.

В обычной речи этой операции соответствует связка: «**тогда и только тогда, когда»**. Примером эквивалентности может служить высказывание: «Треугольник ABC равнобедренный тогда и только тогда, когда угол при вершине B равен углу при вершине C».

Эквиваленция обозначается A⇔B. Синонимы для эквиваленции: «если A, то B, и если B, то A», «A в том и только в том случае, когда B», «A есть необходимое и достаточное условие для B», «B есть необходимое и достаточное условие для A». Разумное определение эквивалентности: эквиваленция истинна в том и только в том, когда высказывания A и B имеют одинаковое значение истинности (либо оба истинны, либо оба ложны). Поэтому следующие эквиваленции истинны:

«7 – простое число **тогда и только тогда, когда** 2*2=4» (истина ⇔ истина);

«8 – простое число **тогда и только тогда, когда** 2*2=5» (ложь ⇔ ложь).

Новые высказывания (отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация и эквиваленция) образуются из существующих высказываний с помощью операций, или логических связок, имеющих также названия. Логические связки удобно определять с помощью таблиц истинности составляющих высказываний и указывается соответствующее значение истинности высказывания, полученного в результате действия логической операции:

отрицание

A	**¬A**
1	**0**
0	**1**

дизъюнкция

A	**B**	**A∨B**
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

конъюнкция

A	**B**	**A∧B**
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

импликация

A	**B**	**A⇒B**
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

эквиваленция

A	**B**	**A⇔B**
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**1**

Логические связки позволяют из простых высказываний получить новые, сколь угодно сложные высказывания. Рассмотрим пример:

«Если завтра будет дождь или снег, то я возьму зонт и надену пальто или свитер». Введем обозначения:

А= «завтра будет дождь»; В= «завтра будет снег»; С= «я возьму зонт»; Д= «я надену пальто»; Е= «я надену свитер».

Тогда наше предложение можно записать в виде $(А \vee В) \Rightarrow (С \wedge (Д \vee Е))$.

В логике как и в арифметике, операции делятся по старшинству. Это позволяет при записи сложных высказываний избегать большого количества скобок.

Порядок выполнения операций таков:

1. приоритет имеет отрицание,
2. затем конъюнкция,
3. следующая связка – дизъюнкция,
4. и наконец, на одном уровне – импликация и эквиваленция.

Поэтому составленное выше высказывание можно записать короче: $А \vee В \Rightarrow С \wedge (Д \vee Е)$. Одной пары скобок не избежать т.к. $С \wedge Д \vee Е$ непонятно.

Таблица 9. Таблица истинности основных функций

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$	$\overline{x}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Пример. Формулу $F = x \wedge y \vee z$ следует понимать так:

$$F = (x \wedge y) \vee z.$$

Возможен случай, когда две формулы имеют одну и ту же таблицу истинности, т.е. определяют одну и ту же логическую функцию. Такие формулы называют **равносильными**. При этом количество и состав переменных в формулах не обязательно должны совпадать.

Пример. Следующие две формулы:

$$F_1 = \overline{y} \vee z \quad \text{и} \quad F_2 = ((x \vee y) \wedge \overline{z}) \to (\overline{x \to y})$$

являются равносильными. Они определяют одну и ту же функцию f(x,y,z), что следует из таблицы 10.

Если все значения функции в таблице истинности равны 1, то функции называется **тождественно истинной.** Формула для такой функции называется **тавтологией**. Тавтологичность формулы можно легко обнаружить с помощью таблиц истинности.

Таблица 10. Таблица для равносильных формул

x	y	z	$F_1 = \overline{y} \vee z$	$F_2=((x \vee y) \wedge \overline{z}) \to (\overline{x \to y})$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Два сложных высказываний (из еще называют составными формулами) применяют также таблицы истинности, где перебираются все возможные значения истинности составляющих высказываний (элементарных формул, простых компонент, т.е. таких высказываний, которые нельзя представить как результат действия логических операций). Такая таблица содержит 2^n, где n – количество простых компонент.

Например, составим таблицу истинности для высказывания **(A∨B)∧(B⇒**$\overline{C}$**)**:

A	**B**	**C**	**A∨B**	**¬C**	**B⇒¬C**	**(A∨B)∧(B⇒¬C)**
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0

Высказывание содержит три простые компоненты A, B, C, поэтому в таблице 2^3=8 строк.

ЗАКОНЫ И ТОЖДЕСТВА АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Выражения, построенные из конечного числа логических переменных, знаков логического сложения, логического умножения и логического отрицания называются булевыми формулами.

Каждая булева формула может рассматриваться как представление некоторой булевой функции от переменных x,y,z..., значение которой на конкретном наборе переменных легко получить, если подставить значения переменных на этом наборе (0 или 1) в булеву формулу и произвести указанные логические операции.

Для алгебры высказываний справедливы тождества, аналогичные тождествам алгебры множеств, например:

xy+z=(x+z)(y+z),

которое, как отмечалось выше, не справедливо в обычной алгебре.

По аналогии законам и тождествам алгебры множеств отметим основные законы и тождества математической логики.

2.3. Логические функции

Логическая функция f ($x1,x2,...,x_n$) - это функция, принимающая значения 0 и 1, аргументы которой ($x1,x2,...,x_n$) также принимают значения 0 и 1. Здесь 0 и 1 - не арифметические величины, а истинностные значения.

0 - "нет" - ЛОЖЬ;

1 - "да" - ИСТИНА.

Вторым названием *логических функций* является название **булевы функции**, которые названы так в честь английского математика Джорджа Буля, который впервые в 1849 описал использование подобных функций.

Первоначально логические функции использовались для описания схем на основе переключательных (двухстабильных) элементов, которые назывались *переключательные схемы* (switching circuits).

Отдавая дань традиции современные цифровые схемы также называются переключательными, и для их описания используются *переключательные функции*. В дальнешем изложении термины "булевы функции", "переключательные функции" и "логические функции" используются в тексте как синонимы.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая логическое значение (1 или 0**)** и зависящая от логических переменных, называется **логической функцией.** Логическую функцию можно представить в виде отображения $f: E^n \rightarrow E$, где множество $E^n = E \times E \times \ldots \times E$ есть декартово произведение всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ таких, что $x_i \in E$, $i = 1,2,\ldots, n$.

Рассмотрим область определения и область значений булевой функции. Аргументы булевой функции n переменных можно рассматривать как выборку из n элементов (выборку размерности n), каждый из которых принимает два значения { 0, 1 }. *Область определения* такой булевой функции (всевозможные наборы аргументов) можно рассматривать как множество перестановок с повторениями в выборке размерности n из двух элементов {0, 1}. Таким образом, количество входных наборов m булевой функции n переменных вычисляется по формуле

$$m = 2^n.$$

В свою очередь количество различных булевых функций K для m входных наборов (*область значений* булевой функции) можно определить как перестановки с повторениями значений функции {0,1} на выборке из m входных наборов, т.е.

$$K = 2^m, \quad \text{или} \quad K = 2^{2^n}.$$

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Всякая логическая функция может быть задана одним из нижеперечисленных способов.

Словесный - при этом способе словесное описание однозначно определяет все случаи, при которых функция принимает значения 0 или 1. Например, многовходовая функция ИЛИ может иметь такое словесное описание : функция принимает значение 1, если хотя бы один из аргументов принимает значение 1, иначе - 0.

Числовой - функция задается в виде десятичных (или восьмеричных, или шестнадцатиричных) эквивалентов номеров тех наборов аргументов, на которых функция принимает значение 1. Условие, что функция f (x1, x2, x3) = 1 на наборах 1,3,5,6,7 записывается f (1, 3, 5, 6, 7) = 1. Аналогичным образом булева функция может быть задана по нулевым значениям. При нумерации наборов переменным x1, x2, x3 ставится в соответствие веса 2^2, 2^1, 2^0, т.е. 6 набору соответствует двоичный эквивалент 110, а 1 набору - 001.

$X_1X_2X_3$	$f(X_1X_2X_3)$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Табличный - Функция задается в виде *таблицы истинности* (соответствия), которая содержит 2^n строк (по числу наборов аргументов), n столбцов по числу переменных и один столбец значений функции. В такой таблице каждому набору аргументов соответствует значение функции. n = 3, число строк 2^3 = 8, число возможных функций трех переменных 2^{2^3} $=2^8 = 256$.

Аналитический - Функция задается в виде алгебраического выражения, получаемого путем применения каких-либо логических операций к перемененным алгебры логики. Применяя операции конъюнкции и дизъюнкции можно задать функцию выражением $f(x1,x2,x3)=x1x2 \vee x3$. Способ получения такого аналитического описания булевой функции будет рассмотрен в последующих разделах.

Координатный - при этом способе задания таблица истинности функции представляется в виде координатной карты состояний, которая часто называется *картой Карно*. Такая карта содержит 2^n клеток по числу наборов всевозможных значений n переменных функции. Переменные функции разбиваются на две группы так, что одна группа определяет координаты столбца, а другая - координаты строки. При таком способе построения клетка определяется координатами переменных, соответствующих определенному двоичному набору. Внутри клетки карты Карно ставится значение функции на данном наборе. Переменные в строках и столбцах располагаются так, чтобы соседние клетки карты Карно различались только в одном разряде переменных, т.е были соседними. Такой способ представления очень удобен для наглядности при минимизации булевых функций.

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1

Диаграммный - является способом представления функционирования схемы, реализующей булеву функцию, во времени. Изображается в виде системы графиков, у которых ось X соответствует автоматному времени (моментам времени), а ось Y соответствует напряжению дискретных уровней сигналов "логический 0" (0,4 в) и "логическая 1" (2,4 в).

Графический - Функция задается в виде n-мерного единичного куба, *вершинам* которого соответствуют наборы значений аргументов и приписаны значения функции на этих наборах. Куб назван единичным, так как каждое ребро соединяет вершины, наборы которых различаются только по одной переменной, т.е. являются *соседними*. Такой способ задания булевых функций иногда называют геометрическим, но чаще всего *кубическим*. Кубическое представление наиболее пригодно для машинных методов анализа булевых функций, так как позволяет компактно представлять булевы функции от большого количества переменных.

Любой набор переменных в кубическом представлении булевых функций принято называть *кубом* или *вектором*. Переменные куба называют *координатами*. Количество переменных в кубе определяет его *мерность* (3-мерный,...n-мерный). Количество символов X в кубе определяет его *ранг*. Куб нулевого ранга называют 0-куб, первого ранга 1-куб и т.д. 1-куб(ребро) покрывает 2 набора, 2-куб(грань) покрывает 4 набора и т.д. Набор кубов, покрывающих все наборы функции, называется *покрытием*. Кубы, на которых функция равна 0, называют 0-покрытием, равна 1 - 1-покрытием. Кубическое представление булевых функций и операции над кубами называется *кубическим исчислением*.

Таким образом, область определения логической функции – совокупность всевозможных n-мерных наборов из нулей и единиц, а для её задания достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов (табл. 11).

Наборы в таблице будем располагать в порядке возрастания их номера N**.** Такой порядок расположения наборов называется **стандартным** или **естественным**.

При таком порядке каждому набору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_i есть 0 или 1, ставится в соответствие целое число

$N = \alpha_1 2^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} 2^1 + \alpha_n$.

Наборам (0, 0, ...,0, 0), (0, 0, ..., 0, 1), ..., (1, 1, ..., 1, 1) соответствуют числа N = 0, 1,..., 2^n-1. Количество входных наборов для функции n переменных равно k = 2^n.

Таблица 11. Задание логической функции

N	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n)$
0	0	0	…	0	0	f(0, 0, ..., 0, 0)
1	0	0	…	0	1	f(0, 0, ..., 0, l)
…	…	…	…	…	…	………………
2^n-2	1	1	…	1	0	f(l, 1, …, 1, 0)
2^n-1	1	1	…	1	1	f(l, 1, …, 1, 1)

Все множество наборов переменных по значениям функции на них можно разбить на 2 подмножества:

[1] – единичное множество наборов, на которых f = 1;

[0] – нулевое множество наборов, на которых f = 0.

Теперь определим количество различных функций n переменных. Каждая функция задается набором своих k значений, которому также можно поставить в соответствие k-разрядное двоичное число.

Располагая функции в таблице в порядке возрастания соответствующих им чисел, мы получим все возможные различные функции. Количество таких функций будет равно $2^k = 2^{2^n}$.

Далее рассмотрим логические функции одной и двух переменных, которые определяют также и операции, используемые при записи логических формул. Их можно считать «элементарными» функциями (табл. 12, 13).

Таблица 12. Функции g(x)

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 13. Функции двух переменных $f(x_1, x_2)$

x_1 x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функции одной переменной

Функция $g_2(x) = x$ определяет логическую операцию – **повторение** переменной x**,** а функция $g_3(x) = \overline{x}$ определяет логическую операцию – **отрицание** переменной x**.**

$g_1(x)$ и $g_4(x)$ по сути являются не функциями, а константами 0 и 1.

Функции двух переменных

$f_2 = x_1 \wedge x_2$ – конъюнкция или логическое умножение

$f_8 = x_1 \vee x_2$ – дизъюнкция или логическое сложение.

$f_{10} = x_1 \sim x_2$ – эквивалентность;

$f_7 = x_1 \oplus x_2$ – неэквивалентность;

$f_{12} = x_2 \rightarrow x_1$ – функция следования (импликации) x_1;

$f_{14} = x_1 \rightarrow x_2$ – функция следования (импликации) x_2;

$f_3 = x_1 \leftarrow x_2$ – функция запрета x_1;

$f_5 = x_2 \leftarrow x_1$ – функции запрета x_2;

$f_9 = x_1 \downarrow x_2$ – функция (стрелка) Пирса;

$f_{15} = x_1 \mid x_2$ – функция (штрих) Шеффера.

Причем, функции f_2, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{14} определены ранее как основные логические функции (табл. 9).

Функции f_3, f_5, f_7, f_9, f_{15} являются производными от них:

$f_3 = \overline{f_{14}}$ или $x_1 \leftarrow x_2 = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$,

$f_5 = \overline{f_{12}}$ или $x_2 \leftarrow x_1 = \overline{x_2 \rightarrow x_1}$,

$f_7 = \overline{f_{10}}$ или $x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2}$,

$f_9 = \overline{f_8}$ или $\overline{x_1 \downarrow x_2} = x_1 \vee x_2$.

$f_{15} = \overline{f_2}$ или $\overline{x_1 \mid x_2} = x_1 \wedge x_2$

Остальные 6 функций, по сути, не являются функциями от двух переменных. Функции f_4, f_6, f_{11}, f_{13} зависят существенно только от одной переменной:

$f_4(x_1, x_2) = x_1$, $f_6(x_1, x_2) = x_2$,

$f_{11}(x_1, x_2) = \overline{x_2}$, $f_{13}(x_1, x_2) = \overline{x_1}$.

Функции f_1, f_{16} не зависят ни от одной переменной и являются функциями – константами:

$f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_{16}(x_1, x_2) = 1$.

Замечание. Операция неэквивалентности $(x_1 \oplus x_2)$, определяющая функцию $f_7(x_1, x_2)$, имеет и другие названия. В математической логике она известна еще как операция «исключающее или», а в двоичной алгебре – как операция «сложение по модулю два».

Исходя из рассмотренных элементарных функций, можно построить формулы для более сложных функций трех и более числа переменных.

Пример. Формула $F = ((x_1 \oplus x_2) \bullet \overline{x_2}) \rightarrow x_3$ определяет функцию трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$.

Таким образом, суперпозиция элементарных функций позволяет получить другие логические функции конечного или бесконечного числа переменных. Совокупность всех возможных логических функций образует множество, которое обозначим P_2.

2.4. Законы булевой алгебры

Существуют много видов алгебр логики, в которых произвольная логическая функция представляется как суперпозиция некоторых базисных функций. Например, широко известной является булева система функций:

конъюнкция ($\wedge$), дизъюнкция ($\vee$) и отрицание ($\overline{\ }$). Эта система функций в качестве базиса была введена английским математиком Булем, с именем которого связано начало всей математической логики. Поэтому алгебра логики на основе этих операций называется алгеброй Буля или булевой алгеброй. Рассмотрим законы булевых операций.

Аксиоматические свойства

$x \bullet x = x, \quad x \vee x = x,$

$x \bullet \bar{x} = 0, \quad x \vee \bar{x} = 1,$

$x \bullet 0 = 0, \quad x \vee 0 = x,$

$x \bullet 1 = x, \quad x \vee 1 = 1.$

Переместительный (коммутативный) закон:

a)x+y=y+x; b)xy=yx;

Сочетательный (ассоциативный) закон:

c) (x+y)+z=x+(y+z); d) (x+y)z=xz.+yz ;

Распределительный (дистрибутивный) закон:

e) (x+y)z=xz+yz; f) xy+z==(x+z)(y+z);

Принцип двойственности (Закон де Моргана)

$\overline{x_1 \bullet x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2,$

$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2.$

Закон двойного отрицания: $x = \bar{\bar{x}}.$

Тождества булевой алгебры

$$x\bar{x} = 0; \quad x + \bar{x} = 1; \quad \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}; \quad \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y};$$
$$xx = x; \quad \bar{x} + \bar{y} = 1; \quad x + x = x;$$
$$x * 1 = 1; \quad x + 0 = x;$$

Следующие 3 правила доказываются на основе законов дистрибутивности, противоречия и "исключенного третьего".

Поглощение (элиминация) :

а) $x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$ б) $x_1 (x_1 \vee x_2) = x_1$

Закон Блейка-Порецкого :

а) $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2$ б) $x_1(\bar{x}_1 \vee x_2) = x_1 x_2$

Склеивание (объединение) :

а) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$ б) $x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1$

Приведенные аксиомы, теоремы и тождества булевой алгебры позволяют осуществлять любые преобразования булевых функций, получая в результате переключательные схемы нужной структуры и свойств.

2.4. Составление логической формулы по заданной таблице

Методы алгебры логики широко применяются при проектировании технических устройств, моделировании социальных процессов. Однако редко удается построить техническую схему или описать социальное явление непосредственно с помощью логической формулы. Обычно на первом этапе используется словесное описание решаемой задачи, на основании которого удается составить таблицу, связывающую численные значения входных и выходных логических переменных. Переход от таблицы к логической формуле является вторым этапом синтеза модели в рамках категорий алгебры логики.

Рассмотрим пример моделирования мнения большинства некоторой группы респондентов по вопросу социальной удовлетворенности.

Вопрос следующий: **Как вы считаете, когда человек чувствует себя спокойно - если у него есть или нет денег и если у него есть или нет автомобиля**.

Положительный результат был получен в случаях: нет автомобиля и нет денег; нет автомобиля, но есть деньги; есть автомобиль, и есть деньги.

Неудовлетворительный ответ был получен, когда нет денег, но есть автомобиль.

Обозначим через х - автомобиль, через у - деньги и составим таблицу полученных высказываний

x	**y**	**q**

0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

По таблице легко определиться с логической формулой проведенного опроса:

выбираем высказывания, которые соответствуют положительному результату и присваиваем ему статус истинного, т.е. 1. Получаем формулу:

q = $\bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}y + xy$

Воспользовавшись тождествами математической логики, формулу можно упростить:

q= $\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + xy = \bar{x}(\bar{y} + y) + xy = \bar{x} + xy = (\bar{x} + x)(\bar{x} + y) = \bar{x} + y,$

Следовательно, общее мнение опрошенных можно свести к следующему: более менее человек себя чувствует спокойно в случае, если у него нет автомобиля, но есть деньги.

Приведенный пример свидетельствует о том, что по словесному описанию задачи можно построить в терминах алгебры логики модель в виде булевой формулы, при возможности минимизации привести ее к более простому виду. В дальнейшем, в случае необходимости, построить по полученной математической модели ее эквивалент в алфавите логических технических устройств и использовать в практическом приложении.

2.5. Упрощение булевых формул

Для упрощения булевых формул используются тождества математической логики. Существуют некоторые стандартные приемы, которые в большинстве случаев позволяют успешно проводить упрощение сложных формул.

Упрощение булевой формулы следует начинать с отыскания одной из следующих форм:

$$A\overline{B} + AB, \quad A + AB, \quad A + \overline{A}B,$$

где A и B означают или сами логические переменные или логические произведения нескольких переменных. Каждое из полученных выражений можно записать в более простом виде:

$$A\overline{B} + AB = A(\overline{B} + B) = A;$$
$$A + AB = A(1 + B) = A;$$
$$A + \overline{A}B = (A + AB) + \overline{A}B = A + B.$$

При упрощении логических формул следует всегда иметь ввиду тождество A+A=A, из которого следует, что каждое из слагаемых можно использовать в комбинациях с другими слагаемыми неоднократно.

Когда дальнейшее упрощение формулы с помощью известных тождеств не удается, следует проверить - не содержит полученная формула лишних слагаемых. При этом слагаемое будет называться лишним, если на любом из наборов переменных, на котором оно обращается в единицу, в единицу же обращается какая-либо группа других слагаемых. Так, например, в формуле

$q = xy + x\overline{z} + yz$

слагаемое x и y обращается в единицу на наборе x=1, y=1. При этом сумма двух других слагаемых дает

$$x\overline{z} + yz = z + \overline{z} = 1.$$

Таким образом, слагаемое xy является лишним и его можно исключить из формулы, что дает окончательно

$$q = x\overline{z} + yz.$$

В булевой алгебре любая логическая функция может быть представлена булевой формулой в виде совершенной дизъюнктивной формы (СДНФ). Причем, как будет показано ниже, представление произвольной логической функции в виде СДНФ является единственным.

2.6. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

В данном подразделе более подробно рассматривается аналитическое представление булевых функций в виде уравнений (булевых уравнений) с использованием операций дизъюнкции (ИЛИ), которую принято обозначать "v", конъюнкции (И), которую принято обозначать "&", " · " или не обозначать вовсе, и отрицания (инверсии), которую обозначают горизонтальной чертой ("–") над выражением, например, $\overline{x}$. Рассмотрим основные понятия и определения, используемые при аналитическом представлении булевых функций.

Рассмотрим возможность представления произвольной функции в виде булевой формулы, содержащей только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Теоремы 1 и 2 доказывают возможность такого представления. Введем некоторые понятия.

Элементарное произведение – произведение (конъюнкция) любого числа букв (переменных) булевой функции, взятых с отрицанием или без.

Элементарная сумма – логическая сумма (дизъюнкция) любого числа букв (переменных) булевой функции, взятых с отрицанием или без.

Элементарной конъюнкцией (ЭК) называется выражение $U_i = X_{i_1}^{\sigma_1} ... X_{i_r}^{\sigma_r}$,где все X_{i_j} $(j = 1, ..., r)$ – различны, а r – **ранг конъюнкции**. Функция-константа единица (U_i = 1) считается конъюнкцией нулевого ранга.

Элементарной дизъюнкцией (ЭД) называется выражение $U_i = X_{i_1}^{\sigma_1} \vee ... \vee X_{i_r}^{\sigma_r}$, где все X_{i_j} $(j = 1, ..., r)$ – различны, а r – **ранг дизъюнкции**. Функция-константа единица (U_i = 0) считается дизъюнкцией нулевого ранга.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – дизъюнкция элементарных произведений. Термин "нормальная" означает, что в данном выражении отсутствуют групповые инверсии, т.е инверсия над несколькими переменными сразу.

Совершенной ДНФ (СДНФ) называется ДНФ, содержащая все полные элементарные конъюнкции данной булевой функции, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций, и каждая из них содержит <u>все переменные</u> данной булевой функции, причем каждую переменную – только один раз (включая вхождения с отрицанием или без отрицания).

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция $N=U_1 \vee U_2 \vee ... \vee U_k$ элементарных конъюнкций $U_1, U_2, ..., U_k$. Совершенная ДНФ – частный случай ДНФ, элементарные конъюнкции которой содержат все переменные и ранг их равен n.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – конъюнкция элементарных сумм. Термин "нормальная" означает, что в данном выражении отсутствуют групповые инверсии, т.е инверсия над несколькими переменными сразу.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция $N=U_1 \wedge U_2 \wedge ... \wedge U_k$ элементарных дизъюнкций $U_1, U_2, ..., U_k$. Совершенная КНФ – частный случай КНФ, элементарные дизъюнкции которой содержат все переменные и ранг их равен n.

Совершенной КНФ (СКНФ) называется КНФ, содержащая все полные элементарные дизъюнкции данной булевой функции, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций, и каждая из них содержит все переменные данной булевой функции, причем каждую переменную – только один раз (включая вхождения с отрицанием или без отрицания).

Теорема 1. Произвольную логическую функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}, \quad (2)$$

где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $x_i^0 = \overline{x_i}$, $x_i^1 = x_i$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и дизъюнкция берётся по всем n-мерным наборам из нулей и единиц.

Доказательство. Покажем, что левая и правая части соотношения (2) совпадают. Подставим в (2) произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где каждое $\alpha_i \in \{0,1\}$. В левой части получим $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а в правой части:

$$\bigvee_{\sigma=(0,\ldots,0)}^{\sigma=(1,\ldots,1)} f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}..\alpha_n^{\sigma_n} = f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}..\alpha_n^{\sigma_n} = f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

Равенства в правой части вытекают из свойств конъюнкции, дизъюнкции и из того, что: $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, то соотношение (2) можно переписать в форме:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}. \tag{3}$$

Эта формула (3) называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Следствие. Для произвольной логической функции существует взаимнооднозначное соответствие между ее СДНФ и таблицей истинности:

а) СДНФ содержит ровно столько элементарных конъюнкций, сколько единичных наборов у функции;

б) каждому единичному набору $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ соответствует элементарная конъюнкция всех переменных функции, в которой для $\sigma_i=0$ переменная x_i берется с отрицанием и для $\sigma_i=1$ – без отрицания**.**

Рассмотрим построение СДНФ по таблице истинности функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Для каждого набора $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из единичного множества [1] **(**такого, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$), составляется выражение ЭК: $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$. Затем эти конъюнкции соединяются знаком дизъюнкции.

Пример. Построим СДНФ для функции неэквивалентности $f_7(x_1, x_2)=(x_1 \oplus x_2)$. Исходя из единичного множества этой функции $[1]=\{(0,1),(1,0)\}$ формула СДНФ будет иметь вид: $F_{СДНФ} = \overline{x}_1 \bullet x_2 \vee x_1 \bullet \overline{x}_2$.

Теорема 2. Произвольную логическую функцию f $(x_1, x_2,..., x_n)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigwedge_{\sigma=(0,...0)}^{\sigma=(1,...1)} (f(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n) \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}), \tag{4}$$

где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $x_i^0 = x_i$, $x_i^1 = x_i$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

и конъюнкция берётся по всем n-мерным наборам из нулей и единиц.

Доказательство. Из свойства булевой функции имеем f $(x_1, x_2,..., x_n)$ = $\bar{\bar{f}}$ $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Для функции $\bar{f}(x_1, x_2,..., x_n)$ по теореме 1 существует представление в виде

$$\bar{f}(x_1, x_2,..., x_n) = \bigvee_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} (\bar{f}(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}),$$

тогда имеем:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \overline{\bigvee_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} (\bar{f}(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n})} =$$

$$\bigwedge_{\sigma=(0,...0)}^{\sigma=(1,...1)} (f(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n) \vee \overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee ... \vee \overline{x_n^{\sigma_n}}),$$

что следует из закона де Моргана.

Заметим также, что $\overline{x_i^{\sigma_i}} = x_i^{\bar{\sigma}_i}$. Следовательно,

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigwedge_{\sigma=(0,...,0)}^{\sigma=(1,...,1)} (f(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n) \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \not\equiv 1$, то соотношение (4) можно переписать в форме

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigwedge_{\forall \sigma: f(\sigma)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}). \tag{5}$$

Эта форма называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (СКНФ).

Следствие. Для произвольной логической функции также существует взаимнооднозначное соответствие между ее СКНФ и таблицей истинности:

а) СКНФ содержит ровно столько элементарных дизъюнкций, сколько нулевых наборов у функции;

б) каждому нулевому набору $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ соответствует элементарная дизъюнкция всех переменных функции, в которой для $\sigma_i = 1$ переменная x_i берется с отрицанием и для $\sigma_i = 0$ – без отрицания.

Рассмотрим построение СКНФ по таблице истинности функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Для каждого набора $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из нулевого множества [0] (такого, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)=0$), составляется выражение ЭД: $x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$. Затем эти дизъюнкции соединяются знаком конъюнкции.

Пример. Построим СКНФ для функции неэквивалентности $f_7(x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2)$. Исходя из нулевого множества этой функции [0] = {(0, 0), (1, 1)} формула СКНФ будет иметь вид: $F_{СКНФ} = (x_1 \vee x_2) \bullet (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$.

В связи с тем, что одной и той же булевой функции могут соответствовать различные формы аналитической записи, то возникает задача нахождения такой формы записи, при которой каждой функции будет соответствовать одна и только одна формула стандартного типа, и каждой формуле стандартного типа будет соответствовать одна и только одна функция. Такие формы записи булевых функций называются *каноническими*. СДНФ и СКНФ являются каноническими формами представления булевых функций.

Скобочные формы

Если сравнивать между собой различные элементарные конъюнкции (дизъюнкции) одной булевой функции, то можно заметить, что они имеют общие части. Если общие части различных элементарных конъюнкций (дизъюнкций) на основе дистрибутивного закона "вынести за скобки", то получившуюся в результате этого аналитическую запись булевой функции принято называть *скобочной формой* (СФ).

Например, для функции четырех переменных f(11,13,14,15)=1, ДНФ имеет вид $f=x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4$. Если в первых двух элементарных произведениях вынести за скобки x_1x_2, то получим скобочную форму $f=x_1x_2(x_3 \vee x_4) \vee x_1x_3x_4$, которая содержит на две буквы меньше, чем исходная ДНФ.

Переход от табличной формы задания булевых функций к аналитическим

Особый интерес представляет переход от табличных формы представления булевых функций к аналитическим. Для получения СДНФ и СКНФ исходя из *таблицы истинности* можно сформулировать следующие правила.

Для получения СДНФ на основе таблицы истинности необходимо:

1) Каждый из входных наборов, на которых булева функция принимает значения 1, представить в виде элементарного произведения (конъюнкции), причем если переменная равна 0, то она входит в конъюнкцию с инверсией, а если 1 - то без инверсии.

2) Полученные элементарные конъюнкции объединяются знаками дизъюнкции.

Для получения СКНФ на основе таблицы истинности необходимо:

1) Каждый из входных наборов, на которых булева функция принимает значения 0, представить в виде элементарной логической суммы (дизъюнкции), причем если переменная равна 1, то она входит в дизъюнкцию с инверсией, а если 0 - то без инверсии.

2) Полученные элементарные дизъюнкции объединяются знаками конъюнкции.

В качестве примера рассмотрим булеву функцию трех переменных, $f(1,3,5,6,7)=1$. Ниже приведены таблица истинности и полученные на ее основе СДНФ и СКНФ.

x_1 x_2 x_3	f (x_1, x_2, x_3)
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

СДНФ

$f=\bar{x}1\bar{x}2x3 \vee \bar{x}1x2x3 \vee x1\bar{x}2x3 \vee x1x2\bar{x}3 \vee x1x2x3$;

СКНФ

$f=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\ (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

Минимальные ДНФ и КНФ этой функции будут иметь вид :

ДНФ $f=x_1x_2 \vee x_3$;

КНФ $f=(x_1 \vee x_3)\ (x_2 \vee x_3)$.

ИНВЕРСНЫЕ ФУНКЦИИ

Так как в булевой алгебре функции принимают только два значения 0 и 1, то существует особый класс функций, являющихся *инверсными* по отношению к рассматриваемым функциям, т.е. на тех наборах, где данная функция принимает значение 0 (1), инверсная функция принимает значение 1 (0) соответственно.

На основании закона Де-Моргана можно сформулировать правило получения инверсной функции.

Для получения аналитического выражения инверсной функции необходимо в исходной функции все переменные заменить на инверсные им, все знаки дизъюнкции заменить на знаки конъюнкции и наоборот.

Например, для ДНФ $f=x_1x_2 \vee x_3$, $\bar{f}=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\,\bar{x}_3$; Полученную таким образом инверсную функцию называют *обратной КНФ*.

Для КНФ $f=(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$, $\bar{f}=\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$; Полученную таким образом инверсную функцию называют *обратной ДНФ*.

2.7. Полные системы логических функций

Система функций $\sum = \{f_1(x_{11},\ldots, x_{1p1}), \ldots, f_s(x_{s1}, \ldots, x_{sps}),\ldots\}$ называется **полной**, если любую логическую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде суперпозиции функций $\{f_1, \ldots, f_s, \ldots\}$ и переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Функции, входящие в полную систему, называются базисными, а сама полная система функций $\sum$ – **базисом**.

ПРИМЕРЫ ПОЛНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ (БАЗИСОВ)

1. Булевый базис $\sum_0 = \{x_1 \bullet x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$.

Полнота булева базиса следует из того, что для любой логической функции можно построить СДНФ или СКНФ.

2. Конъюнктивный булевый базис $\sum_1 = \{x_1 \bullet x_2, \bar{x}\}$. Полнота этого базиса следует из п. 1 и представления дизъюнкции в виде:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2}.$$

3. Дизъюнктивный булевый базис $\sum_2 = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$.

Полнота этого базиса следует из п. 1 и представления конъюнкции в виде:

$$x_1 \bullet x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}.$$

4. Базис Жегалкина $\sum_3 = \{x_1 \bullet x_2, x_1 \oplus x_2, 1\}$.

Полнота этого базиса следует из п. 2 и представления отрицания в виде: $\bar{x}=x\oplus 1$.

Теорема 3. Любую логическую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде полинома Жегалкина:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} x_1 \ldots x_n, \qquad (6)$$

где $a_i \in \{0,1\}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

Доказательство. Система функций $\sum = \{x_1 \bullet x_2, x_1 \oplus x_2, 1, 0\}$ полна. Из формулы СДНФ (3), пользуясь свойствами:

$x \oplus x = 0, \qquad x \cdot x = x, \qquad x \oplus 0 = x,$

$x \cdot 0 = 0, \qquad x \cdot 1 = x, \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1,$

$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, \quad (x_1 \oplus x_2) \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_3) \oplus (x_2 \cdot x_3),$

получим представление функции в виде полинома (6).

Следствие. Для любой логической функции, наряду с СДНФ и СКНФ в случае булева базиса, существует единственный полином Жегалкина вида (6).

Далее в теореме 4 формулируется критерий полноты системы логических функций, на основе которого можно проверить полноту данной системы функций, а также построить другие базисы.

Теорема 4 (о полноте). Для того чтобы система функций $\{f_1(x_{l1} ..., x_{1p1}), ..., f_s (x_{s1}, ..., x_{sps}), ...\}$ была полна, необходимо и достаточно, чтобы она содержала функцию, не сохраняющую 0; функцию, не сохраняющую 1; несамодвойственную функцию; немонотонную функцию; нелинейную функцию.

КЛАСС ФУНКЦИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ НОЛЬ

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется сохраняющей ноль, если она на нулевом наборе принимает значение 0, то есть $f(0, ..., 0) = 0$.

Пример. $f(x) = 0$, $f(x) = x$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ сохраняют ноль; $f(x) = 1$, $f(x) = \overline{x}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ не сохраняют ноль.

Лемма 1. Из функций, сохраняющих ноль, суперпозицией можно получить только функции, сохраняющие ноль.

Доказательство. Функции, равные переменным, сохраняют ноль. Поэтому достаточно показать, что функция

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

сохраняет ноль, если функции f, f_l, …, f_m сохраняют ноль. Последнее следует из

$$f(f_1(0, ..., 0), ... f_m(0, ..., 0)) = f(0, ..., 0) = 0.$$

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль.

КЛАСС ФУНКЦИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ЕДИНИЦУ

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется сохраняющей единицу, если она на единичном наборе принимает значение 1, то есть $f(1, ..., 1) = 1$.

Пример. Функции $f(x) = 1$, $f(x) = x$ – сохраняют единицу; функции $f(x) = 0$, $f(x) = \overline{x}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – не сохраняют единицу.

Лемма 2. Из функций, сохраняющих единицу, суперпозицией можно получить только функции, сохраняющие единицу. Доказательство очевидно.

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу.

КЛАСС САМОДВОЙСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Функция $f(x_1,..., x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$.

Пример. $f(x) = x$, $f(x) = \overline{x}$ – самодвойственные функции; $f(x_1, x_2) = x_1 \bullet x_2$, $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – несамодвойственные.

Лемма 3. Из самодвойственных функций суперпозицией можно получить только самодвойственные функции.

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну несамодвойственную функцию.

КЛАСС МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Набор $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ предшествует набору $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ ($i = l, 2, ..., n$). Это обозначаем как $\alpha \leq \beta$. Наборы, которые находятся в отношении $\leq$ называются сравнимыми.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется монотонной, если для любой пары наборов α и β таких, что при $\alpha \le \beta$: $f(\alpha) \le f(\beta)$.

Пример. $f(x) = x$, $f(x_1, x_2) = x_1 \bullet x_2$, $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – монотонные функции, а $f(x) = \overline{x}$ – немонотонная функция.

Лемма 5. Из монотонных функций суперпозицией можно получить только монотонные функции.

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну немонотонную функцию.

КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется линейной, если полином Жегалкина этой функции имеет линейный вид:

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n,$$

где $a_i \in \{0,1\}$ $(i = 0, l, ..., n)$.

Пример. $f(x) = x$, $f(x) = \overline{x} = x \oplus 1$ – линейные функции; $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \bullet x_2$ – нелинейная функция.

Лемма 7. Из линейных функций суперпозицией можно получить только линейные функции.

Следствие. Полная система функций должна содержать хотя бы одну нелинейную функцию.

Таблица 14. Свойства функций двух переменных

Обозначение функции	Свойства функции				
	Сохраняющая 0	Сохраняющая 1	Самодвойственность	Монотонность	Линейность
$f_1 = 0$	+	–	+	+	+
$f_2 = x_1 \wedge x_2$	+	+	–	+	–
$f_3 = x_1 \leftarrow x_2$	+	–	–	–	–

$f_4 = x_1$	+	+	+	+	+
$f_5 = x_2 \leftarrow x_1$	+	–	–	–	–
$f_6 = x_2$	+	+	+	+	+
$f_7 = x_1 \oplus x_2$	+	–	–	–	+
$f_8 = x_1 \vee x_2$	+	+	–	+	–
$f_9 = x_1 \downarrow x_2$	–	–	–	–	–
$f_{10} = x_1 \sim x_2$	–	+	–	–	+
$f_{11} = \overline{x_2}$	–	–	+	–	+
$f_{12} = x_2 \rightarrow x_1$	–	+	–	–	–
$f_{13} = \overline{x_1}$	–	–	+	–	+
$f_{14} = x_1 \rightarrow x_2$	–	+	–	–	–
$f_{15} = x_1 \mid x_2$	–	–	–	–	–
$f_{16} = 1$	–	+	+	+	+

В таблице 14 дается полезная информация о свойствах всех функций двух переменных. Пользуясь этой таблицей можно проверить полноту заданной системы функций, а также построить другие базисы.

2.8. Задача минимизации ДНФ (КНФ)

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорема о полноте даёт ответ на вопрос, из какой системы функций можно получить в виде суперпозиции любую функцию. Но в практических задачах нужна не столько возможность, сколько правила, пользуясь которыми можно получить представление, оптимальное в некотором смысле. Каждое представление функции в виде суперпозиции можно охарактеризовать некоторым числом, которое называется **сложностью данного представления** (например, число применений операции суперпозиции) и зависит от конкретной задачи. Тогда можно поставить задачу об отыскании представления логической функции наименьшей сложности. В принципе, такую задачу всегда можно решить последовательным перебором различных суперпозиций функций системы.

Рассмотрим теперь суперпозиции над булевой системой функций, содержащей лишь конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Именно для этих суперпозиций методы минимизации разработаны достаточно хорошо. Чтобы дать точную формулировку задачи, приведем некоторые определения.

Минимальной ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется ДНФ $N = U_1 \vee U_2 \vee ... \vee U_k$, представляющая функцию $f(x_1, ..., x_n)$ и содержащая наименьшее количество букв по сравнению с другими ДНФ, то есть число букв в N равно $\min\sum_{i=1}^{k} r_i$, где r_i – ранг конъюнкции U_i, а минимизация проводится по всем ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$.

Тогда задача об отыскании представления функции наименьшей сложности формулируется так: для всякой функции найти представление в виде минимальной ДНФ.

Прежде чем описать метод решения задачи дадим ещё несколько определений.

Импликантом функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется элементарная конъюнкция $U_i = X_{i_1}^{\sigma_1}...X_{i_r}^{\sigma_r}$, если выполнено соотношение $U_i \to f(x_1, ..., x_n) \equiv 1$. Это означает, что если на некотором наборе импликант U_i обращается в единицу, то функция $f(x_1, ..., x_n)$ на этом наборе тоже обращается в единицу. Любая элементарная конъюнкция произвольной СДНФ является импликантом данной функции.

Простым импликантом функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется импликант функции $f(x_1, ..., x_n)$, если элементарная конъюнкция, получающаяся из него удалением любой буквы, не является импликантом функции.

Сокращенной ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется дизъюнкция всех простых импликантов функции $f(x_1, ..., x_n)$.

Теорема 5 (без доказательства). Сокращённая ДНФ представляет функцию $f(x_1,..., x_n)$.

Теорема 6 (без доказательства). Минимальная ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$ получается из ее сокращённой ДНФ удалением некоторых элементарных конъюнкций.

ЭТАПЫ МИНИМИЗАЦИИ ДНФ

В силу теоремы 6 получение минимальной ДНФ можно разбить на два этапа

1. Нахождение сокращенной ДНФ.

*2. Нахождение **тупиковых** ДНФ (таких, из которых нельзя удалить ни одного простого импликанта) путём удаления подмножества элементарных конъюнкций из сокращённой ДНФ. Выбор минимальной из полученных тупиковых ДНФ.*

Рассмотрим первый этап получения минимальной ДНФ. Метод получения сокращённой ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$ из ее совершенной ДНФ состоит в применении следующих эквивалентных преобразований:

***а) операции полного склеивания**, которая состоит в замене выражения $A x \vee A \bar{x}$ на A, так как*

$A x \vee A \bar{x} \equiv A (x \vee \bar{x}) \equiv A \bullet 1 \equiv A;$

***б) операции неполного склеивания**, которая состоит в замене $A x \vee A \bar{x}$ на $A x \vee A \bar{x} \vee A$, так как*

$A x \vee A \bar{x} \vee A \equiv A (x \vee \bar{x}) \vee A \equiv A \bullet 1 \vee A = A;$

***в) операции поглощения**, которая состоит в замене $AB \vee A$ на A, так как*

$AB \vee A \equiv A (B \vee 1) \equiv A.$

Здесь А и В – произвольные элементарные конъюнкции.

Теорема 7 (без доказательства). Сокращённую ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$ можно получить из ее совершенной ДНФ, применяя все возможные операции неполного склеивания, а затем операции поглощения.

Пример. Построить сокращённую ДНФ функции $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ из ее СДНФ:

$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_1x_2 =$

$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2.$

Теперь перейдем ко второму этапу получения минимальной ДНФ.

Пусть дана сокращённая ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$:

$N = U_1 \vee U_2 \vee \ldots \vee U_k$. Простой импликант называется **ядерным** (входящим в ядро функции $f(x_1, ..., x_n)$), если

$$U_i \to \bigvee_{j=1, i \neq j}^{k} U_j \not\equiv 1.$$

Эта запись означает, что простой импликант U_i является ядерным импликантом функции $f(x_1, ..., x_n)$, если существует набор $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, на котором импликант U_i обращается в 1, а все остальные импликанты сокращённой ДНФ – в ноль.

Пример. Найти ядерные импликанты функции $f(x_1, ..., x_n)$, заданной своей сокращённой ДНФ:

$\bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3.$

Простой импликант $x_2 \bar{x}_4$ является ядерным, так как на наборе (0,0,0,0) $\bar{x}_2 \bar{x}_4 = 1$, а дизъюнкция оставшихся импликантов:

$x_1 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = 0.$

Простой импликант $x_1 \bar{x}_4$ – неядерный, так как он равен единице на наборах {1,0,0,0}, {1,0,1,0}, {1,1,0,0}, {1,1,1,0}, но на этих же наборах:

$\bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 =1,$

следовательно

$x_1 \bar{x}_4 \to \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \equiv 1.$

Простой импликант $x_1 x_2$ – ядерный, т.к. на {1,1,0,1}:

$x_1 x_2 = 1$, а $\bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = 0.$

Простой импликант $x_2 x_3 x_4$ – неядерный, так как на наборах {0,1,1,1}, {1,1,1,1}:

$\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor x_1\ \bar{x}_4 \lor x_1\ x_2 \lor\ \bar{x}_1\ x_3\ x_4 \lor\ \bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3 = 1.$

Простой импликант $\bar{x}_1\ x_3\ x_4$ – неядерный, так как на наборах {0,0,1,1}, {0,1,1,1}:

$\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor x_1\ \bar{x}_4 \lor x_1\ x_2 \lor x_2\ x_3\ x_4 \lor\ \bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3 = 1.$

Простой импликант $\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3$ – неядерный, так как на наборах {0,0,1,0}, {0,0,1,1}:

$\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor x_1\ \bar{x}_4 \lor x_1\ x_2 \lor x_2\ x_3\ x_4 \lor\ \bar{x}_1\ x_3\ x_4 = 1.$

Теорема 8 (без доказательства). Простой импликант U_i входит во все тупиковые ДНФ тогда и только тогда, когда U_i входит в ядро функции $f(x_1, ..., x_n)$, то есть тогда и только тогда, когда он является ядерным.

Следствие. Пусть ядро $f(x_1, ..., x_n)$ состоит из импликантов $U_{l1}, ... ,U_{lm}$ тогда импликант U_l, для которого выполнено соотношение: $U_l \rightarrow \bigvee_{j=1}^{m} U_{lj} \equiv 1.$

То есть, импликант U_l обращается в единицу на тех же наборах, что и дизъюнкция ядерных импликантов: не входит ни в одну из тупиковых ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$.

Возвращаясь к примеру 2, отметим, что:

Импликант $x_1\ \bar{x}_4$ удовлетворяет следствию из теоремы 8:

$x_1\ \bar{x}_4 \rightarrow\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor x_1\ x_2 \equiv 1$

и поэтому не входит ни в одну тупиковую форму.

Импликант $x_2\ x_3\ x_4$, для которого

$x_2\ x_3\ x_4 \rightarrow\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor x_1\ x_2 \not\equiv 1$ не удовлетворяет следствию.

Импликант $\bar{x}_1 x_3 x_4$, для которого

$\bar{x}_1\ x_3\ x_4 \rightarrow\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor x_1\ x_2 \not\equiv 1$, не удовлетворяет следствию.

Импликант $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 x_3$, для которого

$\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3 \rightarrow\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4 \lor x_1\ x_2 \not\equiv 1$, не удовлетворяет следствию.

Таким образом, последовательность действий при выполнении второго этапа состоит в следующем:

1) для каждого простого импликанта сокращённой ДНФ проверить, входит он в ядро или нет. Отметить неядерные импликанты;

2) проверить для отмеченных импликантов выполнение следствия из теоремы 8. Простые импликанты, для которых выполнено следствие, удалить из сокращённой ДНФ;

3) проверить возможность удаления оставшихся отмеченных конъюнкций. Из полученных тупиковых ДНФ выбрать минимальную ДНФ.

Рассмотрим эту последовательность действий на примере 2.

1) нашли ядро функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, состоящее из простых импликантов $\bar{x}_2\ \bar{x}_4$ и $x_1\ x_2$. Отметим курсивом в сокращённой ДНФ неядерные импликанты:

$$\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \vee \mathit{x_1\ \bar{x}_4} \vee x_1\ x_2 \vee \mathit{x_2\ x_3 x_4} \vee \mathit{\bar{x}_1\ x_3\ x_4} \vee \mathit{\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3};$$

2) среди помеченных импликантов нашли удовлетворяющий следствию из теоремы 8. Это импликант $x_1\ \bar{x}_4$. Удалим его из сокращённой ДНФ:

$$\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \vee x_1\ x_2 \vee \mathit{x_2\ x_3 x_4} \vee \mathit{\bar{x}_1\ x_3\ x_4} \vee \mathit{\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3};$$

3) для получения тупиковых ДНФ удаляем подмножества отмеченных импликантов. Можно удалить следующие подмножества:

$\{x_2\ x_3\ x_4,\ \bar{x}_1\ x_3\ x_4,\ \bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\}^{\mathrm{I}}$, $\{x_2\ x_3\ x_4,\ \bar{x}_1\ x_3\ x_4\}^{\mathrm{II}}$, $\{x_2\ x_3\ x_4,\ \bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\}^{\mathrm{III}}$, $\{\bar{x}_1\ x_3\ x_4,\ \bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\}^{\mathrm{IV}}$, $\{x_2\ x_3\ x_4\}^{\mathrm{V}}$, $\{\bar{x}_1\ x_3\ x_4\}^{\mathrm{VI}}$, $\{\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\}^{\mathrm{VII}}$.

При каждом удалении нужно проверять, представляет ли оставшаяся ДНФ функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Если удалить подмножество I, то получим ДНФ, не представляющую функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, так как на наборе {0,1,1,1} функция:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$, а $\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \vee x_1x_2 = 0$.

Если удалить подмножество II, то получим ДНФ, не представляющую функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, так как на наборе {0,1,1,1} функция

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$, а $\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \vee x_1\ x_2 \vee \bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3 = 0$.

Если удалить подмножество III, получим минимальную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$\bar{x}_2\ \bar{x}_4 \vee x_1\ x_2 \vee\ \bar{x}_1\ x_3\ x_4$ **– минимальная ДНФ.**

Пример.

Найти минимальную ДНФ функции $Y=f(x_1,x_2,x_3)$; $f(0,2,3,4,5,7)=1$.

Решение.

Построим таблицу истинности функции Y.

x_1	x_2	x_3	$f\ (x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

По данным таблицы запишем аналитическое выражение:

$Y=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$

Применим склеивание следующим образом: $Fx \vee F\bar{x} = F$

Получим:

$Y=\bar{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$

Данная ДФ является избыточной, так как отдельные конъюнкции могут быть лишними, т.е. их составные части могут включаться в другие конъюнкции. У данной функции существует пять безизбыточных ДФ, из которых только две являются минимальными:

$Y_1=\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$;

$Y_2=\bar{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$;

$Y_3=\bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$;

$Y_4=\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2$;

$Y_5=\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2$.

Их приведенных зависимостей видно, что только функции Y_1 и Y_4 являются минимальными формами функций, так как они содержат наименьшее число конъюнкций и имеют минимальный ранг этих конъюнкций.

МИНИМИЗАЦИЯ ДНФ МЕТОДОМ КВАЙНА

Существуют и другие методы, позволяющие независимо от исходной формы представления функции найти все ее тупиковые формы и выбрать из них минимальную. Одним из них является метод Квайна. В соответствии с этим методом отыскание минимальной ДНФ проводится в несколько этапов.

Первый этап. Функция, заданная в виде логической формулы произвольной формы, представляется в СДНФ. При этом:

1) последовательным применением эквивалентных преобразований логическая функция приводится к ДНФ, то есть к форме, не содержащей знаков отрицания над функциями, более сложными, чем один из аргументов;

2) каждый член ДНФ, представляющий собой конъюнкцию менее n членов (n – количество аргументов функции), развертывается в дизъюнкцию нескольких элементарных конъюнкций умножением на выражение вида $(x_1\vee \bar{x}_1)\bullet(x_2\vee \bar{x}_2)\bullet\ldots$, тождественно равное единице;

3) приводятся, если возможно, подобные члены.

Второй этап. Отыскиваются все простые импликанты данной функции. Для этого выписываются все элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ. Каждая из пар этих конъюнкций исследуется на возможность склеивания. Члены, участвовавшие хотя бы в одном склеивании, отмечаются, но не исключаются из дальнейших сравнений.

В результате выявляются группы конъюнкций, содержащие по (n - 1) члену. С этой группой конъюнкций проводится та же процедура, после которой получим группы конъюнкций, содержащие по (n - 2) членов и так далее, пока не останется ни одного члена, допускающего склеивания с каким либо другим членом.

Добавление к исходной ДНФ любого количества «склеенных» членов не изменяет вида функции. Последующее исключение всех членов, отмеченных в процессе склеивания, тоже не изменяет функцию, так как они поглощаются склеенными членами. Все неотмеченные в процессе преобразований члены представляют собой простые импликанты, а их дизъюнкция эквивалентна исходной функции.

Третий этап. Дизъюнкция всех простых импликантов может оказаться избыточной формой представления функции. Поэтому исследуется возможность удаления некоторых из них. Для этого составляется импликантная таблица, строки которой обозначаются выявленными на втором этапе простыми импликантами, а столбцы –элементарными конъюнкциями, входящими в СДНФ.

Любая клетка этой таблицы отмечается, если простой импликант, записанный в соответствующей строке, является составной частью элементарной конъюнкции, записанной в соответствующем столбце. Иначе говоря, данный простой импликант покрывает нашу функцию на наборе, соответствующем элементарной конъюнкции, записанной в столбце.

В каждом столбце при этом может оказаться несколько отмеченных клеток. Задача упрощения ДНФ сводится к вычеркиванию из таблицы максимального количества строк таким образом, чтобы заданная функция на всех наборах, обращающих ее в единицу, оказалась покрытой хотя бы одним простым импликантом.

Эту задачу можно выполнить в следующей последовательности:

1) выявляются столбцы, содержащие только одну помеченную клетку. Простые импликанты, соответствующие этим клеткам, записываются в окончательное выражение для ДНФ как обязательные члены. После этого в

таблице вычеркиваются строки, соответствующие обязательным простым ипликантам и столбцы, содержащие отмеченные клетки в вычеркнутых строках. Вычеркивание столбцов возможно потому, что соответствующие им элементарные конъюнкции уже покрыты обязательными простыми импликантами, и поэтому их можно исключить из дальнейшего рассмотрения;

2) если после этого в таблице окажутся такие пары столбцов, что всем отмеченным клеткам второго столбца соответствуют в тех же строках отмеченные клетки первого столбца, а возможно, и некоторые другие отмеченные клетки, то первый столбец вычеркивается. Это возможно потому, что какую бы совокупность простых импликантов, покрывающую элементарную конъюнкцию, которая соответствует второму столбцу мы ни подобрали, этой совокупностью автоматически будет покрываться и конъюнкция, соответствующая первому столбцу;

3) строки, не содержащие после выполнения п.п. 1 и 2 ни одной отмеченной клетки, также вычеркиваются. Это возможно потому, что все конъюнкции, которые могут быть покрыты данным простым импликантом, уже покрыты другими простыми импликантами, которые должны войти в окончательное выражение для ДНФ;

4) в сокращенной таблице выявляется пара строк, содержащая хотя бы по одной отмеченной клетке в каждом столбце. Простые импликанты, соответствующие этим строкам, добавляются к ДНФ;

5) если оказывается несколько вариантов выполнения п. 4, то все они сравниваются, и выбирается простейший вариант.

Пример. Минимизировать функцию:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\, x_2\, x_4 \vee x_2\, x_3\, x_4 \vee \overline{x_1}\ \overline{x_2}\, x_3 \vee \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_4}$.

В результате развертывания элементарных конъюнкций получим:

$x_1x_2x_3x_4$

$x_1x_2\bar{x}_3x_4$

$x_1x_2x_3x_4$

$\bar{x}_1x_2x_3x_4$

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

После приведения подобных слагаемых:

1) $x_1x_2x_3x_4$
2) $x_1x_2\bar{x}_3x_4$
3) $\bar{x}_1x_2x_3x_4$
4) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
5) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$
6) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

После склеивания получим:

1) $x_1x_2x_4$ (1,2),
2) $x_2x_3x_4$ (1,3),
3) $\bar{x}_1x_3x_4$ (3,4),
4) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ (4,5),
5) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ (5,6).

Таблица 15. Импликантная таблица

	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
$x_1x_2x_4$	X	X				
$x_2x_3x_4$	X		X			
$\bar{x}_1x_3x_4$			X	X		
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$				X	X	
$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$					X	X

Вычеркивая строки и столбцы, соответствующие обязательным импликантам $x_1x_2x_4$ и $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$, получим упрощенную импликантную таблицу (табл. 15).

Таблица 16. Упрощенная импликантная таблица

	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
$x_2x_3x_4$	X	
$\bar{x}_1x_3x_4$	X	X
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$		X

Из упрощенной таблицы видно, что простой импликант $\bar{x}_1 x_3 x_4$ покрывает обе оставшиеся конъюнкции. Теперь можно окончательно записать минимальную ДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4.$$

Для уменьшения количества проверок на возможность склеивания целесообразно все элементарные конъюнкции, содержащие одинаковое число букв, сгруппировать по признаку одинакового количества инвертированных (или не инвертированных) букв.

2.9. Синтез логических схем

С помощью аппарата логических функций можно получить наиболее компактное автоматное описание системы управления. Кроме того, этот аппарат может быть эффективно использован при переходе от автоматного описания к структурной реализации системы управления. Приведем одну из методик синтеза логической схемы с одним выходом, основанную на исходном представлении в виде совокупности таблиц истинности логических функций. Для полноты изложения перечислим все этапы проектирования, хотя некоторые из них уже были рассмотрены ранее.

Первый этап

1. По заданному в техническом задании алгоритму выделяем независимые аргументы (входы) и выписываем все их комбинации (входные наборы). При большом количестве входов следует попытаться объединить их или реализовать устройство по частям.

2. Отмечаем запрещенные наборы, т.е. комбинации входных сигналов, которые не могут возникнуть.

3. Выписываем все значения выхода для каждого незапрещенного набора. При этом нужно проверить, зависит ли это значение только от комбинации

входов, или еще и от последовательности их появления в каждой комбинации. В первом случае получим таблицу истинности. Во втором случае делаем вывод о том, что заданный алгоритм нельзя реализовать с помощью комбинационного устройства.

4. Доопределяем таблицу на запрещенных наборах, пользуясь информацией, имеющейся в алгоритме, либо руководствуясь следующим (не всегда наилучшим) соображением: если в таблице больше единичных значений выхода, чем нулевых, она доопределяется единичными значениями и наоборот.

5. Записываем аналитическое выражение выхода как логической функции входов в СДНФ, если единичных значений выхода в таблице меньше, и в СКНФ – в противном случае.

Второй этап

6. Упрощаем полученное выражение. Для этой цели можно либо использовать известные методы минимизации логических функций, дающее минимально возможное в некотором смысле выражение, либо применить систему эквивалентных преобразований.

Эффект применения эквивалентных преобразований зависит от последовательности их применения. Наиболее важными являются склеивание $x_i \vee \overline{x_i}=1$ и поглощение $x_i \vee x_i x_j = x_i$. К сожалению, нельзя указать такой порядок применения эквивалентных преобразований, который обеспечивал бы наиболее простую форму записи функции.

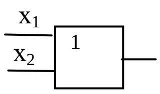
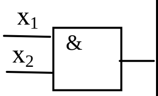
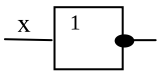
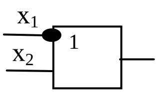
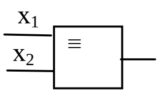
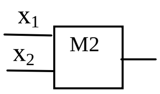
Третий этап

7. Пользуясь таблицами, имеющимися в литературе, преобразуем полученные на втором этапе выражения в такие, логические операции которых соответствуют выбранному функционально полному набору элементов. При этом следует иметь в виду, что в новом базисе минимальность выражения не гарантируется.

8. Выбираем обозначение для каждой логической операции, реализуемой

элементами данного набора. Существуют стандартные изображения базисных функций как некоторых блоков, техническая реализация которых может быть основана на использовании различных физических явлений: магнитных, явлений в полупроводниках и т. д. Примеры таких символических обозначений представлены в таблице 17.

Таблица 17 Логические элементы и их обозначения

Элемент	Дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	Конъюнкция $x_1 \cdot x_2$	Отрицание $\overline{x}$	Импликация $x_1 \rightarrow x_2$	Эквивалентность $x_1 \sim x_2$	Сложение по mod 2 $x_1 \oplus x_2$
Обозначение						

9. По аналитическому выражению строим логическую схему. При этом необходимо соблюдать очередность, раскрывая выражение «изнутри наружу». Полученная в результате логическая схема может оказаться избыточной.

Пример. Пусть функция $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана минимальной булевой формулой:

$$F = (x_1 \vee x_2)\, x_3 \vee \overline{(x_1 \vee x_2)\, x_4}.$$

При построении логической схемы по этой формуле потребуется шесть элементов, реализующих 6 операций. Но два из них реализуют одну и ту же функцию ($x_1 \vee x_2$). Поэтому можно упростить логическую схему, используя 5 логических элементов и задавая соответствующие связи между ними. Окончательно получим схему, изображенную на рис. 21.

Четвертый этап

10. От логической схемы выражения, описывающего работу системы управления, можно непосредственно перейти к принципиальной схеме устройства, так как каждому условному изображению функции на логической схеме соответствует физический элемент, реализующий данную операцию и

имеющий несколько вариантов принципиальной схемы в зависимости от элементной базы. Соединения между элементами задаются связями на логической схеме.

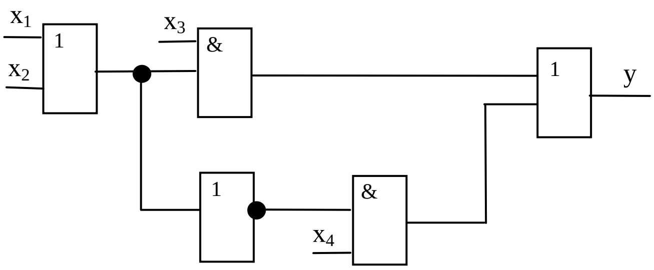


Рисунок 21. Логическая схема

2.10. Задачи для практики

1. Записать высказывания на языке логики с помощью логических связок:

а) Идет дождь или кто-то выключил душ.

б) Если вечером будет туман, то Сергей или останется дома, или должен будет взять зонт.

в) Петр сядет, и он или Сергей будет ждать.

г) Ни Север, ни Юг не победил в гражданской войне.

д) Если я устал или голоден, я не могу заниматься.

е) Если Маша встанет и пойдет в школу, она будет довольна, а если не встанет, она не будет довольна.

ж) Если мыши живут на Марсе, а мыши, читающие Фолкнера, говорят по-английски, то мыши не живут на Марсе.

2. Пусть C = «Сегодня ясно», R = «Сегодня идет дождь», S = «Сегодня идет снег», Y = «Вчера было пасмурно». Перевести на русский язык следующие высказывания:

а) $C \Rightarrow \neg(R \vee S)$;

б) $Y \Leftrightarrow C$;

в) $Y \wedge (C \vee R)$;

г) $Y \Rightarrow R \vee C$.

3. Составить таблицы истинности для следующих высказываний:

а) $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$;

б) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$;

в) $P \Rightarrow \neg (Q \vee R)$;

г) $(P \Rightarrow Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q)$

3. Для высказывания A: «Любые два треугольника подобны» сформулируйте отрицание и двойное отрицание. Какие из этих трех высказываний истинны?
4. Даны высказывания: «Я купил велосипед» (A); «Я путешествовал по России» (B) и «Я участвовал в соревнованиях по велосипеду» (C). Сформулируйте высказывания, соответствующие формулам:

$A \wedge B$, $A \wedge B \wedge C$, $A \wedge \overline{C}$, $\overline{A \wedge B}$, $\overline{B} \wedge \overline{C}$.

5. Даны высказывания:

«Четырехугольник MNPQ – параллелограмм» (A);

«Диагонали четырехугольника MNPQ в точке пересечения делятся пополам» (B). Сформулируйте высказывания, соответствующие формулам:

$A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \rightarrow B$, $\overline{B} \rightarrow A$.

6. Составьте таблицы истинности для следующих формул:

$F_1 = X \rightarrow (Y \vee Z)$ и $F_2 = (X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z)$.

7. Покажите, что формулы являются тавтологиями:

$F1 = X \wedge Y \sim Y \wedge X$;

$F2 = X \vee Y \sim Y \vee X$;

$F3 = ((X \rightarrow Y) \wedge X) \rightarrow Y$.

8. Докажите равносильность формул:

а) $F1 = X \wedge (Y \vee Z)$ и $F2 = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$;

б) $F1 = X \vee (Y \wedge Z)$ и $F2 = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$;

в) $F1 = \overline{X \vee Y}$ и $F2 = \overline{X} \wedge \overline{Y}$;

г) $F1 = \overline{X \wedge Y}$ и $F2 = \overline{X} \vee \overline{Y}$;

д) $F1 = X \to (Y \to Z)$ и $F2 = (X \wedge Y) \to Z$;

е) $F1 = (X \to Y) \wedge (X \to Z)$ и $F_2 = X \to (Y \wedge Z)$.

9. Постройте совершенные ДНФ и КНФ функций:

$x_1 \mid x_2$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \sim x_2$.

10. Запишите СДНФ и СКНФ для логической функции $f(x_1, x_2, x_3)$, принимающую значение 1 на наборах с номерами: 0, 3, 7. Определите, к каким классам функций относится эта функция.

11. Проверьте справедливость равенств:

а) $x = \overline{x} \oplus 1$;

б) $x1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$.

12. Составьте таблицу свойств логической функции двух переменных. Из таблицы выпишите все полные системы булевых функций.

13. Проверьте линейность логической функции f(x1, x2, x3), принимающей значение 1 на наборах с номерами: 0, 1, 5, 6.

14. Синтезируйте логические схемы функций из задач № 9, 12.

15. Найдите минимальную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, принимающей значение 1 на наборах с номерами: 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 12, 13.

16. Приведите примеры:

а) монотонной функции, которая одновременно была бы линейной;

б) самодвойственной функции, которая одновременно была бы линейной;

в) линейной и монотонной функций.

17. Покажите, что функции Шеффера и Пирса не являются ни линейными, ни монотонными, ни самодвойственными.

18. Докажите полноту системы функций $\Sigma = \{\vee, \sim, 0\}$, состоящей из дизъюнкции, эквивалентности и константы 0.

19. Для функций, заданных по Вашему варианту, построить таблицы истинности, аналитическое выражение в КФ и ДФ и попытаться его минимизировать. Записать инверсную функцию.

Варианты:

1) f (1,2,3,4) = 1 ; f (2,4,5,6,7) = 1 ; f (1,2,3,8,13,14,15) = 1;
2) f (1,2,4,5) = 1 ; f (3,4,5,6,7) = 1 ; f (1,2,4,8,12,14,15) = 1;
3) f (1,2,5,6) = 1 ; f (1,3,5,6,7) = 1 ; f (1,2,5,7,13,14,15) = 1;
4) f (1,2,6,7) = 1 ; f (1,3,4,6,7) = 1 ; f (1,2,4,9,11,12,15) = 1;
5) f (0,2,4,6) = 1 ; f (1,2,4,5,7) = 1 ; f (0,3,5,10,12,13,14) = 1;
6) f (0,3,5,6) = 1 ; f (0,1,2,6,7) = 1 ; f (1,2,3,5,7,10,14) = 1;
7) f (1,2,5,7) = 1 ; f (0,3,4,5,7) = 1 ; f (1,2,4,5,8,12,13) = 1;
8) f (0,4,5,7) = 1 ; f (1,2,3,6,7) = 1 ; f (4,5,6,8,9,11,12) = 1;
9) f (0,1,2,3) = 1 ; f (3,4,5,6,7) = 1 ; f (8,9,11,12,13,14,15) = 1;
10) f (2,3,4,5) = 1 ; f (0,1,3,6,7) = 1 ; f (7,10,11,12,13,14,15) = 1;
11) f (3,4,5,6) = 1 ; f (0,1,2,5,7) = 1 ; f (0,4,8,12,13,14,15) = 1;
12) f (1,2,3,5) = 1 ; f (0,3,4,6,7) = 1 ; f (2,4,7,8,9,12,15) = 1;
13) f (1,2,3,6) = 1 ; f (0,2,4,5,7) = 1 ; f (3,6,9,12,13,14,15) = 1;
14) f (1,2,3,7) = 1 ; f (0,1,4,6,7) = 1 ; f (2,4,6,8,11,13,15) = 1;
15) f (1,2,4,6) = 1 ; f (0,1,4,5,7) = 1 ; f (0,5,7,10,11,12,13) = 1;

16) f (1,2,4,7) = 1 ; f (0,2,4,6,7) = 1 ; f (1,6,9,10,11,12,14) = 1;

17) f (0,1,3,6) = 1 ; f (1,2,4,5,6) = 1 ; f (0,2,4,9,11,12,13) = 1;

18) f (0,1,4,5) = 1 ; f (1,2,3,4,6) = 1 ; f (0,1,4,5,8,9,12) = 1;

19) f (0,1,3,5) = 1 ; f (1,2,4,6,7) = 1 ; f (1,2,4,15,9,10,12) = 1;

20) f (1,5,6,7) = 1 ; f (0,1,2,3,4) = 1 ; f (6,7,9,11,12,13,15) = 1;

Раздел 3. Элементы комбинаторики

О необходимости изучения в школе элементов комбинаторики и теории вероятностей речь идет очень давно. Так ещё в 1899 году попечитель Московского учебного округа профессор П. А. Некрасов на совещании по вопросам о средней школе говорил об огромном значении в школьном образовании того, что сейчас принято называть стохастической линией в преподавании математики. Методические указания как раз и посвящены изложению тех понятий, фактов, задач и обстоятельств, с которых, собственно, берет свое начало эта самая стохастическая линия:

Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества.

- Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений.
- Решение комбинаторных задач.
- Формула бинома Ньютона.
- Свойства биномиальных коэффициентов.
- Треугольник Паскаля.

Главной целью изучения элементов комбинаторики является формирование специального типа мышления – комбинаторного, связанного с перебором и подсчетом числа конфигураций элементов, удовлетворяющих определенным условиям. Существенность развития комбинаторных возможностей интеллекта студентов очевидна и с общих позиций теории развития личности, и с точки зрения различного рода практических приложений.

Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости.

Данте «Божественная комедия»

Комбинаторика – это раздел дискретной математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов в соответствии с каким-либо правилом. Например, сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, состоящей из 36 карт; или сколькими способами можно составить очередь, состоящей из10 человек и т.д. Каждое правило в комбинаторике определяет способ построения некоторой конструкции, составленной из элементов исходного множества и называемой комбинацией. Основная цель комбинаторики состоит в подсчете количества комбинаций, которые можно составить из элементов исходного множества в соответствии с заданным правилом. Простейшими примерами комбинаторных конструкций являются перестановки, размещения и сочетания.

Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр или иных объектов. Например, начальнику цеха надо распределить несколько видов работ между имеющимися станками, агроному – разместить посевы сельскохозяйственных культур на нескольких полях, заведующему учебной частью школы – составить расписание уроков, лингвисту – учесть различные варианты значений букв незнакомого языка и т.д. Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется комбинаторикой.

Комбинаторика и теория вероятностей, подобно другим математическим наукам, развилась из потребностей практики.

Систематические исследования в области комбинаторики и теории вероятностей началось в XVI в. В жизни привилегированных слоёв тогдашнего общества большое место занимали азартные игры, широко были распространены всевозможные лотереи. В связи с этим, первые комбинаторные и вероятностные задачи касались в основном азартных игр – вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре, каковы шансы выиграть в той или иной ситуации. Но они навсегда остались бы салонными играми, если бы и в практической деятельности (например, в статистике населения) не пришлось решать схожих задач.

Возникновение теории вероятностей и комбинаторики как науки относится в середине XVII в. и связано с исследованиями Б. Паскаля (1623-1662), П. Ферма (1601-1665) и Х. Гюйгенса (1629-1695) в области теории азартных игр. В этих работах постепенно формировались такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание; были установлены свойства и приёмы их вычисления. Особенно большую роль здесь сыграла задача о разделе ставки, которую предложил Паскалю его друг шевалье де Мере, страстный игрок. Проблема состояла в следующем: «матч» в орлянку ведётся до шести выигранных партий; он был прерван, когда один игрок выиграл 5 партий, а другой – 4; как разделить ставку? Было ясно, что раздел в отношении 5:4 несправедлив. Применив методы комбинаторики, Паскаль решил эту задачу. Он рассуждал так:

«Предположим, что ставка каждого игрока составляет 32 червонца и что первому не хватает одной партии до выигрыша, а второму двух. Им предстоит сыграть еще одну партию. Если ее выиграет первый, он получит всю сумму, то есть 64 червонца; если второй, у каждого будет по две победы, шансы обоих станут равны, и в случае прекращения игры каждому, очевидно, надо дать поровну. Итак, если выиграет первый, он получит 64 червонца. Если выиграет второй, то первый получит лишь 32. Поэтому, если оба согласны не играть предстоящей партии, то первый вправе сказать: 32 червонца я получу во всяком случае, даже если я проиграю предстоящую партию, которую мы согласились признать последней. Стало быть, 32 червонца мои. Что касается остальных 32 – может быть, их выиграю я, может быть, и вы; поэтому разделим эту сомнительную сумму пополам. Итак, если игроки разойдутся, не сыграв последней партии, то первому надо дать 48 червонцев, или же 3/4 всей суммы, второму 16 червонцев, или 1/4, из чего видно, что шансы первого из них на выигрыш втрое больше, чем второго (а не вдвое, как можно было бы подумать при поверхностном рассуждении).»

Другое, более общее, решение дал Ферма. Эти труды Паскаля и Ферма, составившие основу теории вероятностей, одновременно содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества, устанавливая тем самым ставшую затем традиционной связь комбинаторики с теорией вероятностей.

Большой вклад в систематическое развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем (1646-1716) в его диссертации «Комбинаторное искусство» (1666), где, по-видимому, впервые появился термин «комбинаторный». Большое значение для становления теории вероятностей и комбинаторики имела работа Я. Бернулли (1654-1706) «Искусство предположений» (1713), посвященная основным понятиям теории вероятностей, где обстоятельно изложен также и ряд комбинаторных понятий и указаны их применения для вычисления вероятностей. Можно считать, что с появлением работ Г. Лейбница и Я. Бернулли комбинаторные методы выделись в самостоятельную часть математики. С работы Бернулли по существу начинается становление теории вероятностей как науки. Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

Возрождение интереса к комбинаторике относится к 50-м годам XX в. Это связано с бурным развитием кибернетики и дискретной математики и широким использованием ЭВМ. В этот период активизировался интерес и к классическим комбинаторным задачам. Быстро выросло число комбинаторных задач и их разнообразие. Во многих областях математики (теория графов, теория чисел, теория групп, кибернетика, вычислительная математика и др.) имеются задачи или группы задач, комбинаторный характер которых угадывается без особых усилий.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором рассматриваются задачи о подсчете числа комбинаций, составленных из некоторых элементов по определенным правилам.

Задача. Сколько различных комбинаций из трех букв можно составить из пяти букв русского алфавита: А, Б, В, Г, Д.

Решение. Комбинации можно получить следующим образом: взять любую букву из названных (пусть это будет буква А) и приписать к ней еще по букве. В результате получиться пять двухсимвольиых последовательностей: АА, АБ, АВ, АГ, АД. А так как нам было предложено для рассмотрения пять букв, то для каждой из них также получим по пять комбинаций. Всего имеем 5*5=25 комбинаций:

АА, АБ, АВ, АГ, АД

БА, ББ, БВ, БГ, БД

ВА, ВБ, ВВ, ВГ, ВД

ГА, ГБ, ГВ, ГГ, ГД

ДА, ДБ, ДВ, ДГ, ДД.

Итак, существует $5^2=25$ двухсимвольных комбинаций из двух букв, составленных из 5 предложенных. Но за каждой из комбинаций снова можно поставить любую из пяти допустимых букв. В результате получим $5^2*5=125$ трехсимвольных комбинаций. А если взять не трехзначные, а четырехзначные последовательности, то будем иметь $5^4=625$ комбинаций.

Рассмотренный пример относится к задачам типа ***размещения с повторениями***. Число таких расстановок из n элементов по k в каждой расстановке обозначают

$\overline{A}_n^k = n^k$

Под повторениями в данном случае понимаются комбинации, которые имеют одинаковые объекты, в рассматриваемом случае - символы: АА, ББ, ВВ, ГГ, ДД.

3.1. Общие правила комбинаторики

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Принцип сложения можно применять в тех случаях, когда все множество перечисляемых комбинаций разбивается на попарно непересекающиеся группы комбинаций. Обобщим принцип сложения на случай, когда могут иметь место случаи непустых пересечений.

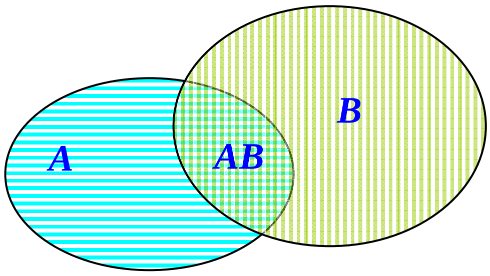


Рисунок 22

Пусть имеется n предметов, которые могут обладать двумя свойствами A и B. При этом каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или обоими свойствами. Обозначим через n(A), n(B), n(AB) количество предметов, обладающих свойством A, свойством B, обоими свойствами. Тогда число предметов, обладающих хотя бы одним из указанных свойств, равно

$$n(A+B)=n(A)+n(B)-n(AB). \quad (*)$$

Появление третьего слагаемого связано с тем, что число предметов обладающих обоими свойствами при сложении n(A) и n(B) учитывались дважды (см. рис. 22).

Формула (*) является частным случаем более общей формулы:

$$n(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = n(A_1) + \ldots + n(A_m) - n(A_1A_2) - \ldots - n(A_1A_m) -$$
$$- n(A_2A_3) - \ldots - n(A_2A_m) - \ldots - n(A_{m-1}A_m) + n(A_1A_2A_3) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{k+1} n(A_1 \ldots A_k) + \ldots + (-1)^{m+1} n(A_1 \ldots A_m), \qquad (**)$$

которую называют формулой перекрытий, или формулой включений и исключений. Чаще эту формулу записывают в следующем виде.

Обозначим символом $\overline{A}$ свойство A, которым данные предметы не обладают. Тогда число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств, будет равно

$$n(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_m) = n - n(A_1) - \ldots - n(A_m) +$$
$$+ n(A_1A_2) + \ldots + n(A_1A_m) + n(A_2A_3) + \ldots + n(A_2A_m) + \ldots + n(A_{m-1}A_m) -$$
$$- n(A_1A_2A_3) + \ldots + (-1)^k n(A_1 \ldots A_k) + \ldots + (-1)^m n(A_1 \ldots A_m). \qquad (***)$$

Здесь алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств $A_1,\ldots,A_m$ (без учета их порядка), причем знак «+» ставится, если число учитываемых свойств четно, и знак «–», если это число нечетно. Название формулы (13.2) как формулы включений и исключений связано с тем, что сначала исключаются все предметы, обладающие хотя бы одним из свойств, потом включаются предметы, обладающие по крайней мере двумя из этих свойств, после этого исключаются предметы, обладающие по крайней мере тремя свойствами, и т.д.

В случае трёх свойств формулы (**) и (***) примут вид:

$$n(A+B+C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC),$$

$$n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = n - n(A) - n(B) - n(C) + n(AB) + n(AC) + n(BC) - n(ABC).$$

Пример. В научно-исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 – немецкий язык и 23 – оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языков?

Решение. Обозначим через A – сотрудников, знающих английский язык, через B – сотрудников, знающих немецкий язык. По условию

$$n = 67, \quad n(A) = 47, \quad n(B) = 35, \quad n(AB) = 23$$

Тогда

$$n(\overline{A}\,\overline{B}) = n - n(A) - n(B) + n(AB) = 67 - 47 - 35 + 23 = 8.$$

Итак, 8 человек не знают ни английского, ни немецкого языка.

Пример. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых данные два элемента a и b не стоят рядом? Данные три элемента a, b, c не стоят рядом (в любом порядке)? Никакие два из элементов a, b, c не стоят рядом?

Решение. Если a и b стоят рядом, то их можно объединить в один знак. Учитывая, что a и b можно переставлять местами, получаем $2(n-1)!$ перестановок, в которых a и b стоят рядом. Тогда в

$$n! - 2(n-1)!$$

случаях они не стоят рядом. Точно также получаем, что a, b, c не стоят рядом

$$n! - 6(n-2)!$$

случаях. Никакие два из элементов a, b, c не стоят рядом

$$n! - 6(n-1)! + 6(n-2)!$$

случаях (формула включений и исключений).

Пример. Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичан, 3 французов и 3 немцев так, чтобы никакие три соотечественника не сидели рядом?

Решение. 9 человек можно пересаживать 9! способами. Найдём, во скольких перестановках 3 англичанина сидят рядом. Все такие перестановки получаются из одной пересаживанием между собой англичан (3! способов) и 3 французов и 3 немцев и компании из трех англичан (7! способов). Всего получаем 3!7! перестановок. Во стольких же перестановках сидят рядом 3 французов и во стольких же – 3 немцев. Далее, в (3!)25! перестановках сидят рядом трое англичан и трое французов, а также трое англичан и трое немцев, трое французов и трое немцев. И, последнее, в (3!)4 перестановках сидят рядом и англичане, и французы, и немцы. В результате, по формуле включений и исключений, находим

$$9! - 3\cdot 3!7! + 3(3!)^2 5! - (3!)^4 = 283\,824$$ способа.

3.2. Задачи для практики

1. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38 человек, с ветчиной – 42 человека, и с сыром и с колбасой – 28 человек, и с колбасой и с ветчиной – 31 человек, и с сыром и с ветчиной – 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а несколько человек вместо бутербродов захватили с собой пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

Ответ: 25.

2. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык, 6 человек знает английский язык, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Сколько человек знают только один язык?

Ответ: По формуле включений и исключений число работающих равно 6+7+6–4–3–2+1=11. Только английский знают 6–4–2+1=1, только немецкий 6–4–3+1=0, только французский 7–3–2+1=3. Т.о., только один язык знают 4 человека.

3. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: «В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся

на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и занимаются спортом». Покажите, что в этих сведениях есть ошибка.

Ответ: Число школьников, которые не учатся на хорошо и отлично и не занимаются спортом, равно 45–30–28+17=4. Число мальчиков, которые не учатся на хорошо и отлично и не занимаются спортом, равно 25–16–18+15=6, т.е. их больше 4, что не может быть.

4. В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на четырех этажах так, чтобы на каждом этаже вышел, по крайней мере, один человек?

Ответ: 8 пассажиров могут распределиться между этажами 48 способами. Из них в 38 случаях на данном этаже, 28 случаях на данных двух этажах и в 1 случае на данных трех этажах не выйдет ни один человек. По формуле включений и исключений получаем $4^8 - 4\cdot 3^8 + 6\cdot 2^8 - 4 = 40\,824$ способа.

5. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших чем миллион, содержит все цифры 1, 2, 3, 4? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

Ответ: По формуле включений и исключений получаем, что все цифры 1, 2, 3, 4 содержат $10^6 - 4\cdot 9^6 + 6\cdot 8^6 - 4\cdot 7^6 + 6^6 = 23\,160$ чисел. Только из цифр 1, 2, 3, 4 состоят $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 = \dfrac{4^7 - 4}{3} = 5\,460$ чисел.

6. Вычислить:

а) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}$,	б) $\dfrac{A_{12}^6 \cdot 5!}{A_{11}^9}$,	в) $\dfrac{C_{100}^{98} + C_{1000}^{998}}{C_{1000}^2 + C_{100}^2}$,
г) $\left(\dfrac{P_5}{A_5^4} + \dfrac{P_4}{A_5^3} + \dfrac{P_3}{A_5^2} + \dfrac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2$,	д) $\dfrac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \dfrac{A_3^2}{P_2}$,	е) $\dfrac{\frac{1}{3}C_6^2 - \frac{1}{28}C_8^3 + \frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3 A_5^3}$.

Ответ: а) $\dfrac{11}{2}$; б) 4; в) 1; г) 42; д) 4; е) $\dfrac{1}{3}$.

7. Упростить:

а) $\dfrac{C_{2n}^{n-2}}{C_{2n+1}^{n-1}}$,	б) $\dfrac{P_{n+2}}{A_n^m P_{n-m}}$,	в) $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4}$,
г) $\dfrac{(n-5)!A_{n-3}^2}{(n-2)!}+\dfrac{2(n-3)}{C_{n-2}^2}$,	д) $\dfrac{C_n^3 C_n^1}{\left(C_n^2\right)^2}+\dfrac{P_n P_{n+1}(n^2-n)^2}{4\left(C_n^2\right)^2(n!)^2}$,	е) $\dfrac{A_n^3}{C_n^2}+\dfrac{2C_n^{n-2}}{n-1}$.

Ответ: а) $\dfrac{n+2}{2n+1}$; б) $(n+1)(n+2)$; в) $\dfrac{1}{2n(n+1)}$; г) $\dfrac{5}{n-2}$; д) $\dfrac{3n^2+2n-7}{3n-3}$; е) $3n-4$.

8. Решить уравнения (n∈∞):

а) $\dfrac{C_{n+1}^3}{C_n^4}=\dfrac{6}{5}$,	б) $\dfrac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}}=\dfrac{2}{3}$,	в) $\dfrac{C_{n+1}^{n-4}}{A_{n+1}^3}=\dfrac{7}{15}$,
г) $12C_{n+3}^{n-1}=55A_{n+1}^2$,	д) $A_n^3+C_n^{n-2}=14n$,	е) $A_{n+1}^3+C_{n+1}^{n-1}=14n(n+1)$.

Ответ: а) 8; б) 4; в) 10; г) 8; д) 5; е) 4.

9. Найти все n∈′, удовлетворяющие условию:

а) $C_{n+1}^{n-1}<21$,	б) $5C_n^3<C_{n+2}^4$,	в) $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4}<\dfrac{1}{14P_3}$,
г) $C_{n-1}^4-C_{n-1}^3<\dfrac{5}{4}A_{n-2}^2$,	д) $C_{n+1}^{n-2}-C_{n+1}^{n-1}\le 100$,	е) $C_{n+5}^4-\dfrac{143}{96}\dfrac{P_{n+5}}{P_{n+3}}<0$.

Ответ: а) $1\le n\le 3$; б) $n\ge 14$; в) $n\ge 7$; г) $5\le n\le 10$; д) $2\le n\le 9$; е) $-1\le n\le 3$.

10. Доказать справедливость равенств:

а) $nC_{2n}^n=(n+1)C_{2n}^{n+1}$,	б) $C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$,	в) $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$,
г) $C_{n+1}^{k+1}=C_n^k\dfrac{n+1}{k+1}$,	д) $P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2=n\,k!\,A_{n+5}^5$,	е) $C_n^k+2C_n^{k+1}+C_n^{k+2}=C_{n+2}^{k+2}$.

11. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить:

а) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^7$,	б) $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$,	в) $\left(a-2b\right)^6$,	г) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$.

Ответ: а) $\frac{a^7}{128}+\frac{7a^6b}{64}+\frac{21a^5b^2}{32}+\frac{35a^4b^3}{16}+\frac{35a^3b^4}{8}+\frac{21a^2b^5}{4}+\frac{7ab^6}{2}+b^7$;

б) $29\sqrt{2}+41$; в) $a^6-12a^5b+60a^4b^2-160a^3b^3+240a^2b^4-192ab^5+64b^6$;

г) $x^8+4x^6+7x^4+7x^2+\frac{35}{8}+\frac{7}{4x^2}+\frac{7}{16x^4}+\frac{16}{16x^6}+\frac{1}{256x^8}$.

12. Найти средние члены разложения:

а) $\left(a^3+ab\right)^{31}$,

б) $\left(a^3+ba\right)^{30}$.

Ответ: а) $C_{31}^{15}a^{63}b^{15}$ и $C_{31}^{16}a^{61}b^{16}$; б) $C_{30}^{15}a^{60}b^{15}$.

13. Решите уравнения:

а) $A_x^2\cdot C_x^{x-1}=48;$ б) $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^3=7(x-1);$ в) $A_x^2+\overline{C}_x^2=13x.$

Ответ: а) 4; б) 5; в) 9.

14. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. а) Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого? б) То же самое, но меняются две книги одного на две книги другого.

Ответ: а) $7\cdot 8=56$; б) $C_7^2C_9^2=21\cdot 36=756$.

15. Несколько человек садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. а) Сколькими различными способами можно посадить четырех человек? б) семь человек? в) Во скольких случаях два данных человека

из семи оказываются соседями? г) Во скольких случаях данный человек (из семи) имеет двух данных соседей?

Решение: а) Отношение соседства сохраняется при циклических перестановках и при симметричном отражении. В случае четырех человек мы имеем 2·4=8 преобразований, сохраняющих отношение соседства. Т.к. общее число перестановок 4 человек равно 4!=24, то имеем 24/8=3 различных способа рассадки.

б) Если за столом сидят 7 человек, то имеем 7!/14=360 способов, вообще, а в случае n человек (n–1)!/2 способов.

в) Число способов, при которых 2 данных человека сидят рядом, вдвое больше числа способов посадить 6 человек (в силу возможности поменять этих людей местами). Значит оно равно $\frac{2\cdot 6!}{12}=5!=120$.

г) Находится аналогичным образом: $\frac{2\cdot 5!}{10}=4!=24$.

16. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? Если они садятся не за круглый стол, а за карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

Ответ: $2\cdot(5!)=28800$, $28800/10=2880$.

17. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? Во скольких случаях ровно один туз? Во скольких случаях не менее двух тузов? Ровно два туза?

Ответ: $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}$, $C_4^1C_{48}^9$, $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}-4C_{49}^9$, $C_4^2C_{48}^8$.

18. В купе ж/д вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, а трое – спиной, остальным безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

Решение: Сначала выберем, кто из трех пассажиров, кому безразлично как сидеть, сядет лицом к паровозу. Этот выбор можно сделать 3 способами. На каждом диване можно пересаживать пассажиров 5! Способами. Всего получаем $3(5!)^2 = 43200$ способов.

19. У мамы 2 одинаковых яблока и 3 одинаковых груши. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает по одному фрукту. а) Сколькими способами это можно сделать? б) Если яблок m, а груш n. в) 2 яблок,3 груши, 4 апельсина.

Ответ: а) $C_5^2 = 10$; б) C_{n+m}^m, в) $P(2;3;4) = 1260$.

20. У отца есть 5 различных апельсинов, которые он выдает своим 8 сыновьям так, что каждый получает либо один апельсин, либо ничего. Сколькими способами можно это сделать? Решите эту задачу при условии, что число апельсинов, получаемых каждым сыном, неограниченно.

Ответ: $A_8^5 = 6720$; $\overline{A}_8^5 = 8^5 = 32768$.

21. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин. Надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не меньше 2 женщин. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^2 = 371$.

22. Найти сумму всех трёхзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4. А если никакая цифра не должна появляться дважды в записи каждого числа?

Решение: Всего таких чисел $\overline{A}_4^3 = 4^3$, в них $3 \cdot 4^3$ цифр, каждая из 4 цифр употребляется $3 \cdot 4^2$ раза – в каждом из трёх разрядов $4^2 = 16$ раз, поэтому сумма цифр первого разряда даст 16 (1+2+3+4)=160, второго –1600 и третьего –16000. Сумма равна 17760.

Если цифры не повторяются, то таких чисел $A_4^3 = 24$, в них 72 цифры, каждая из 4 цифр употребляется в каждом из 3 разрядов 6 раз, поэтому сумма 6(1+2+3+4)(1+10+100)=6660.

23. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1,2, 3, 4, 5, если каждая цифра может встречаться в записи

числа несколько раз? А если каждая цифра встречается лишь один раз?

Решение: Число должно оканчиваться: 12, 24, 32, 44, 52; первые же две цифры могут быть произвольными. Всего получаем $5^2 \cdot 5 = 125$ чисел. Во втором случае число должно оканчиваться на одну из четырёх комбинаций: 12, 32, 52, 24; первые же две цифры могут быть выбраны из оставшихся трёх $A_3^2 = 6$ способами. Всего получаем 24 числа.

24. Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует парами. а) Если в каком-либо танце участвуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались неприглашенными? б) Решить те же вопросы, если относительно двух девушек можно с уверенностью утверждать, что они будут приглашены на танец.

Ответ: а) $A_{10}^7 = 604800$, $C_{10}^3 = 120$. б) $A_7^2 A_8^5 = 282\,240$, $C_8^3 = 56$.

25. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов, 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? Решить эту задачу, при условии, что в отряд должны войти командир роты и старший из сержантов.

Ответ: $C_3^1 C_6^2 C_{60}^{20}$; $C_5^1 C_{60}^{20}$.

26. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

Ответ: $C_{12}^4 A_{15}^4 = 17\,417\,400$.

27. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

Ответ: Добавим к 20 книгам 4 одинаковых разделительных предмета и рассмотрим все перестановки полученных объектов. Их число равно $24!/4!$.

28. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

Ответ: Точно так же как предыдущей задаче $8!/3! = 6720$.

29. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами

могут распределиться голоса, если каждый голосует за одно предложение и учитывается лишь число голосов, полученных за каждое предложение?

Решение: Так как учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение, то надо распределить 30 одинаковых «предметов» по 5 «ящикам». Для этого добавим 4 одинаковых разделительных предмета и рассмотрим все перестановки полученных объектов. Их число равно $P(30,4)=46\,376$. Каждой перестановке соответствует своё распределение голосов.

30. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должны быть переплетены хотя бы одна книга?

Решение: 12 книг можно переплести в переплеты трёх цветов 3^{12} способами. Из них в $3\cdot 2^{12}$ случаях книги будут переплетены в не более чем два цвета, а в трех случаях – в один цвет. По формуле включений и исключений в $3^{12}-3\cdot 2^{12}+3=519\,156$ случаях книги будут переплетены в переплеты всех цветов.

31. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

Ответ: $C_{17}^{12}-C_{15}^{10}$.

32. Хор состоит из 10 участников. Сколькими способами можно в течение трех дней выбирать по 6 участников, так, чтобы каждый день были различные составы хора?

Ответ: $C_{10}^{6}(C_{10}^{6}-1)(C_{10}^{6}-2)=9\,129\,120$.

33. Человек имеет 6 друзей и в течение 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: Так как $C_{6}^{3}=20$, то каждый способ выбора компании будет использован ровно один раз. Число перестановок этих способов равно 20!

34. Для премии по математической олимпиаде выбраны 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими

способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и никому не дают две книги сразу? Если никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги?

Решение: Сначала выберем призеров, а потом распределим между ними книги. В результате по принципу умножения получаем $C_{20}^{6}P(3,2,1)$ способов. Во втором случае сначала выберем, кто получил первую книгу, потом, кто получил вторую, и, наконец, кому достанется третья книга. Всего получаем $C_{20}^{3}C_{20}^{2}C_{20}^{1}$ способов распределения премий.

35. Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестерку для запряжки так, чтобы вошли 3 лошади из шестерки ABCA'B'C', но ни одна из пар AA', BB', CC'?

Решение: Выберем по одной лошади из каждой пары AA', BB', CC' (8 способов выбора), трех лошадей из остальных 10 ($C_{10}^{3}=120$ способов) и выберем порядок запрягания лошадей (6! способов). Всего $8\cdot 6!\cdot C_{10}^{3}=691\,200$ способов.

36. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «фатеция» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

Решение: Выпишем сначала гласные в данном порядке. Тогда для буквы «ф» имеем 5 мест. После того как они выписаны, имеем 6 мест для буквы «ц» и, наконец, 7 мест для буквы «м». Всего $5\cdot 6\cdot 7=210$ способов.

37. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «параллелизм» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

Ответ: $A_{4}^{7}/P_{3}=277\,200$ (следует учесть, что буква «л» входит в слово трижды.

38. Сколькими способами можно переставить буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

Ответ: $P_{6}/P_{3}=120$.

39. Сколькими способами можно переставить буквы слова «пастух» так, чтобы между двумя гласными были две согласные?

Ответ: Сначала фиксируем порядок гласных (2 способа), затем поставим между этими гласными 2 согласные ($A_4^2 = 12$ способов). Первую из оставшихся согласных букв можно поставить до или после обеих гласных (два способа), а для второй имеем уже три места. Всего получаем $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3 = 144$ способа.

40. Сколькими способами можно распределить 3n предметов между тремя людьми так, чтобы каждый получил n предметов?

Ответ: Расставим предметы в некотором порядке и отдадим первому человеку первые n предметов, второму – вторые n предметов и последнему – оставшиеся предметы. Поскольку порядок элементов в группах не играет роли, получаем $C_{3n}^n C_{2n}^n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

41. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по 2 книги в каждой (порядок бандеролей не принимается во внимание)?

Ответ: $\frac{10!}{2^5 \cdot 5!} = 945$.

42. Сколькими способами можно раздать 18 различных предметов 5 участникам так, чтобы четверо из них получили по 4 предмета, а пятый – два предмета. Если трое получают по 4 предмета, а двое – по 3 предмета?

Решение: Располагаем участников раздела в некотором порядке. После этого располагаем всеми способами 18 предметов по порядку и делим на 4 группы по 4 предмета и 1 группу в 2 предмета. Группу в 2 предмета отдаём одному из 5 участников раздела, а остальные группы даём остальным (первую группу – первому, вторую – второму и т.д.) Так как порядок элементов в группах не играет роли, получаем $\frac{5 \cdot 18!}{(4!)^4 2!}$ способов раздела. Во втором случае точно так же получаем $\frac{18! C_5^2}{(4!)^3 (3!)^2}$ способов.

43. Сколькими способами можно раздать 27 книг лицам A, B и C так, чтобы A и B вместе получили вдвое больше книг, чем C?

Решение: Сначала выберем 9 книг для C. Это можно сделать C_{27}^9

способами. Оставшиеся 18 книг можно разделить между А и В 218 способами. Всего имеем $2^{18} \cdot C_{27}^{9}$ способов раздела.

44. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 100 три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Решение: Возможны следующие случаи: на 3 делятся все три слагаемых, одно слагаемое и ни одного из слагаемых. В первом случае слагаемые можно выбрать C_{33}^{3} способами. Во втором случае одно слагаемое дает в остатке 1, а другое – 2. Так как чисел от 1 до 100, дающих в остатке 1, имеется 34, а чисел, делящихся на 3, а также дающих в остатке 2, имеется по 33, то во втором случае имеем $C_{34}^{1}\left(C_{34}^{1}\right)^{2}$ способов. Если все три слагаемых не делятся на 3, то они дают либо остатки 1, 1 и 1, либо 2, 2 и 2. Соответственно получаем C_{34}^{3} или C_{33}^{3} способов. Всего имеем $2C_{33}^{3}+C_{34}^{3}+C_{34}^{1}\left(C_{34}^{1}\right)^{2}=53\,922$ способа.

45. Сколькими способами можно выбрать из 3n последовательных целых чисел три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $3C_{n}^{3}+\left(C_{n}^{1}\right)^{3}=\dfrac{n}{2}\left(3n^{2}-3n+2\right)$.

46. На плоскости проведены 4 прямые линии, из которых никакие две не являются параллельными и никакие 3 не проходят через одну точку. Сколько получится треугольников?

Ответ: 4.

47. На плоскости задано n точек, из которых p лежат на одной прямой, а кроме них никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

Решение: Если бы никакие три из n точек лежат на одной прямой, то было бы C_{n}^{3} треугольников с вершинами в этих точках. Но p точек лежат на одной прямой, и поэтому C_{p}^{3} треугольников надо отбросить. Остается $C_{n}^{3}-C_{p}^{3}$ треугольников.

48. На прямой взяты p точек, а на другой прямой – ещё q точек.

Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

Ответ: Можно взять две вершины на одной прямой, а третью – на другой. Поэтому получаем $C_p^2C_q^1 + C_p^1C_q^2 = \frac{pq}{2}(p+q-2)$ треугольников.

49. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки деления?

Решение: Треугольники могут быть двух видов: либо все три вершины лежат на разных сторонах квадрата, либо две вершины лежат на одной стороне квадрата, а третья – на какой-либо другой. В первом случае надо выбрать три стороны квадрата из четырех ($C_4^3 = 4$), а потом на каждой из трех сторон по одной точке из n–1. Всего имеем $4\left(C_{n-1}^1\right)^3$ способов выбора. Во втором случае надо выбрать сторону, где лежат две вершины (4 способа выбора) и две точки из n–1 (C_{n-1}^2 способов), после чего выбрать одну из трёх оставшихся сторон (три способа) и точку на ней (C_{n-1}^1 способов). Всего во втором случае имеем $12C_{n-1}^1C_{n-1}^2$ способов выбора. Итого получим $4\left(C_{n-1}^1\right)^3 + 12C_{n-1}^1C_{n-1}^2 = 2(n-1)^2(5n-8)$ способов.

50. Переплётчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Решение: 12 книг можно переплести в переплеты 3 цветов 312 способами. Из них в $3\cdot 2^{12}$ случаях книги будут переплетены в не более чем два цвета, а в 3 случаях – в один цвет. По формуле включений и исключений получаем, что $3^{12} - 3\cdot 2^{12} + 3 = 519\,156$ случаях книги будут переплетены всех трех цветов.

Часто при составлении комбинации из двух элементов известно, сколькими способами можно выбрать первый элемент, и сколькими способами второй, причем число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент. Пусть первый элемент можно выбрать m способами, а второй n способами. Тогда пару этих элементов можно выбрать m*n способами. Иными словами:

Если объект А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то выбор пары (A,B) в указанном порядке можно осуществить m*n способами.

Задача. Сколькими способами можно выбрать одну гласную **и** одну согласную буквы из слова "здание".

Решение. В слове "здание" 3 гласных буквы и 3 согласных, следовательно, получаем 3*3=9 способов выбора гласной и согласной букв.

ПРИНЦИП УМНОЖЕНИЯ

При решении комбинаторных задач используются два правила: принцип умножения и принцип сложения.

Принцип умножения. Если элемент А можно выбрать из некоторого множества m способами и если после каждого такого выбора элемент В можно выбрать n способами, то пара элементов (А,В) в указанном порядке может быть выбрана (m·n) способами.

Пример. Из пункта А в пункт В ведут 3 дороги, а из пункта В в пункт С – 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В?

Решение. В пункте А есть 3 способа выбора дороги в пункт В, а в пункте В есть 4 способа попасть в пункт С. Согласно принципу умножения, существует 3·4=12 способов попасть из пункта А в пункт С.

Принцип умножения легко обобщается на случай выбора трех и более элементов.

Пример. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если: а) цифры не повторяются; б) повторение допустимо; в) числа должны быть нечетные и без повторения.

Решение. а) Первую цифру можно выбирать 5-ю способами. Так как в числе цифры не повторяются, то вторую цифру уже можно выбрать из четырех оставшихся 4-мя способами. Далее получаем, что третью цифру можно выбрать 3-мя способами и четвертую – двумя. Таким образом, число возможных четырехзначных чисел равно $N=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$.

б) Так как повторения допустимы, то каждую цифру можно выбирать каждый раз из 5 имеющихся цифр, т.е. пятью способами. Тогда число возможных чисел равно $N=5\cdot5\cdot5\cdot5=54=625$.

в) У нечетного числа последняя цифра нечетная, т.е. в данном случае может быть либо 1, либо 3, либо 5. Поэтому на это место можно поставить любую из этих трех чисел. После этого на оставшиеся места можно поставить: четыре цифры, три цифры и две цифры, ибо никакие из пяти цифр нельзя использовать более одного раза. Таким образом, $N=3\cdot4\cdot3\cdot2=72$.

Комбинаторные задачи бывают самых различных видов. Но большинство задач решается с помощью двух основных правил - правила суммы и правила произведения.

Часто удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. Ясно, что в этом случае *общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах*. Это утверждение называют *правилом суммы*.

Если некоторый объект А можно выбрать m способами, а другой объект В можно выбрать n способами, то выбор <либо А, либо В> можно осуществить m+n способами

ПРИНЦИП СЛОЖЕНИЯ

Если элемент А можно выбрать из некоторого множества m способами, а другой элемент В – n способами, причём выборы А и В таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть выбраны одновременно, то выбор какого-либо одного из этих элементов (либо А, либо В) можно осуществить (m+n) способами.

В качестве иллюстрации данного принципа рассмотрим следующий простой пример.

Пример. Пусть из города А в город В можно добраться одним авиамаршрутом, двумя железнодорожными маршрутами и тремя автобусными маршрутами. Сколькими способами можно добраться из города А в город В?

Решение. Все условия принципа сложения здесь выполнены, поэтому, в соответствии с этим принципом, получим 1+2+3=6 способов.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий различие принципов умножения и сложения.

Пример. В магазине электроники продаются три марки телевизоров и два вида видеомагнитофонов. У покупателя есть возможности приобрести либо телевизор, либо видеомагнитофон. Сколько способами он может совершить одну покупку? Сколько различных комплектов, содержащих телевизор и магнитофон, можно приобрести в этом магазине, если покупатель собирается приобрести в паре и телевизор, и видеомагнитофон?

Решение. Один телевизор можно выбрать тремя способами, а магнитофон – другими двумя способами. Тогда телевизор или магнитофон можно купить 3+2=5 способов.

Во втором случае один телевизор можно выбрать тремя способами, после этого видеомагнитофон можно выбрать двумя способами. Следовательно, в силу принципа умножения, купить телевизор и видеомагнитофон можно $3\cdot 2=6$ способами.

Замечание. Обычно принцип сложения применяется в тех случаях, когда в задачах встречаются союзы «или», «либо, либо» (телевизор или видеомагнитофон), а принцип умножения – в задачах, содержащих союз «и» (телевизор и видеомагнитофон).

Рассмотрим теперь примеры, в которых применяются оба правила комбинаторики: и принцип умножения, и принцип сложения.

Пример. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает либо яблоко, либо апельсин, после чего Надя выбирает из оставшихся фруктов и яблоко и апельсин. Сколько возможно таких выборов?

Решение. Ваня может выбрать яблоко 12 способами, апельсин – 10 способами. Если Ваня выбирает яблоко, то Надя может выбрать яблоко 11 способами, а апельсин – 10 способами. Если Ваня выбирает апельсин, то Надя может выбрать яблоко 12 способами, а апельсин – 9 способами. Таким образом, Ваня и Надя могут сделать свой выбор $12 \cdot 11 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \cdot 9 = 2400$ способами.

Пример. Есть 3 письма, каждое из которых можно послать по 6 адресам. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В данной задаче мы должны рассмотреть три случая:

а) все письма рассылаются по разным адресам,

б) все письма посылаются по одному адресу,

в) только два письма посылаются по одному адресу.

Если все письма рассылаются по разным адресам, то число таких способов легко находится из принципа умножения: $n_1=6\cdot5\cdot4=120$ способов. Если все письма посылаются по одному адресу, то таких способов будет $n_2=6$.

Таким образом, остается рассмотреть только третий случай, когда только 2 письма посылаются по одному адресу. Выбрать какое-либо письмо мы можем 3 способами и послать его по какому-либо выбранному адресу можем 6 способами. Оставшиеся два письма мы можем послать по оставшимся адресам 5 способами. Следовательно, послать только два письма по одному адресу мы можем $n_3=3\cdot6\cdot5=90$ способами. Таким образом, разослать 3 письма по 6 адресам в соответствие с принципом сложения можно

$n_1+n_2+n_3=120+6+90=216$ способами.

Задача. Сколькими способами можно выбрать одну гласную **или** одну согласную букву из слова "здание".

Решение. В слове "здание" 3 гласных буквы и 3 согласных. Гласные буквы можно выбрать 3 способами, согласные тоже 3 способами. Гласную или согласную букву: 3+3=6 способами.

ФАКТОРИАЛ

Для любого натурального числа n произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ обозначается n! (читается «эн факториал»), т.е.

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!$$

Считается, что 0!=1.

Пример. Вычислить

$$\frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!}-\frac{9!}{2!7!}\right).$$

Решение. Так как $10! = 7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10$ и $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, то

$$\frac{7!4!}{10!}=\frac{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{30}.$$

Поскольку

$$\frac{8!}{3!5!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5!}=56 \text{ и } \frac{9!}{2!7!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 7!}=36,$$

то

$$\frac{8!}{3!5!}-\frac{9!}{2!7!}=56-36=20.$$

Поэтому

$$\frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!}-\frac{9!}{2!7!}\right)=\frac{1}{30}\cdot 20=\frac{2}{3}.$$

Пример. Упростить выражение

$$\frac{5!}{n(n+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-1)!\,3!} \quad (n\geq 1).$$

Решение. Так как $5! = 3!\cdot 4\cdot 5$ и $(n+1)! = (n-1)\cdot n\cdot(n+1)$, то

$$\frac{5!}{n(n+1)} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!\,3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{n(n+1)} \cdot \frac{(m-1)!\cdot m\cdot (m+1)}{(m-1)!\,3!} = 20.$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$$, где n≥1.

Решение. Так как $n! = (n-1)\cdot n$, то

$$n!-(n-1)! = (n-1)!n-(n-1)! = (n-1)!(n-1)).$$

Кроме того, $(n+1)! = (n-1)!n(n+1)$. Итак, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{(n-1)!(n-1)}{(n-1)!n(n+1)} = \frac{1}{6}.$$

Если n=1, то уравнение примет вид

$$\frac{0!\cdot 0}{0!\cdot 1\cdot 2} = \frac{1}{6},$$

т.е. получается противоречие 0=1/6, следовательно, n=1 не является решением уравнения. Если n≥2, то уравнение примет вид

$$\frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{1}{6},$$

т.е. $(n-2)(n-3) = 0$. Отсюда получаем $n_1=2$ и $n_2=3$.

Выражение n! означает, что перемножаются все натуральные числа подряд и наибольший из сомножителей равен n. Выражение n!! означает, что перемножаются натуральные числа через одно и наибольший сомножитель также равен n. Таким образом, если n чётное, то n!! есть произведение всех чётных чисел, не превышающих n ($n!! = 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot n$); если же n нечётное, то это произведение всех нечётных чисел, не превышающих n ($n!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

Аналогично, если после числа расположено три восклицательных знака, то перемножаются каждое третье число, а если четыре – каждое четвёртое. Например, $(4n-2)!!!!=2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-2)$.

3.3. Размещения

Задача. Зубной врач может обслужить в день 5 человек. Группе из 10 человек необходимо пройти диспансеризацию. Чтобы упорядочить процесс осмотра необходимо составить порядковый список слушателей. Сколькими способами можно составить очередь на прием к врачу

Эта задача решается на основе правила произведения. Первым на прием может записаться любой из 10 желающих. Другими словами, здесь у нас 10 возможностей. Но если этот первый посетитель обслужен, то остается 9 человек на претенденты быть обслуженными вторыми. Повторения здесь не может быть один и тот же человек не может быть и первым и вторым.

Значит, после первого посетителя вторым может быть любой из оставшихся 9. Точно также если уже два человека обслужены, то третьим может быть любой из оставшихся 8 и т.д. Значит, по правилу произведения получаем, что слушатели могут быть распределены 10*9*8*7*6=30240 способами.

Решенная задача относится к классу комбинаторных задач о размещении без повторений. Общая формулировка этих задач такова:

Имеется n различных предметов. Сколько из них можно составить k-расстановок?

При этом две расстановки считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Такие расстановки называются ***размещениями без повторений***, а их число обозначается

$$\mathbf{A_n^k=n*(n-1)*\ldots*(n-k+1).}$$

См. задача. Если в решении задачи убрать комбинации АА, ББ, ВВ, ГГ, ДД, то получим размещения без повторений:

АА, АБ, АВ, АГ, АД

БА**,** **ББ,** БВ, БГ, БД

ВА, ВБ, **ВВ,** ВГ, ВД

ГА, ГБ, ГВ, **ГГ,** ГД

ДА, ДБ, ДВ, ДГ, **ДД**

Всего будем иметь A^2_5=5*4=20 комбинаций.

Определение: комбинации, составленные из **k** элементов, взятых из **n** данных элементов ($0<k\leq n$), и отличающиеся одна от другой либо составом, либо порядком расположения элементов, называются **размещениями** из n элементов по k элементов.

Пусть имеется некоторое множество, содержащее n элементов. Выберем из этого множества k элементов без возвращения, но упорядочивая их по мере их выбора в последовательную цепочку. Такие цепочки называются размещениями.

Размещениями из n элементов по k элементов называются такие комбинации, из которых каждое содержит k элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одного), либо порядком их расположения.

Поясним это на следующем примере. Пусть имеется три элемента: a, b и c. Тогда из этих трёх элементов можно составить шесть размещений по два элемента: ab, ac, ba, bc, ca, cb. Все приведённые размещения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или порядком их расположения.

Число размещений A_n^k (читается: число размещений из n элементов по k элементов) можно найти из принципа умножения. Первый элемент размещения можно выбрать n способами. Как только такой выбор будет сделан, останется (n–1) возможностей, чтобы выбрать второй элемент; после этого останется (n–

2) возможностей для выбора третьего элемента и т.д.; для выбора k-го элемента будет (n–k+1) возможностей. По принципу умножения находим

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k\ \text{множителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Легко понять, что $A_n^1 = n$.

Пример. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить 4 различных фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение. Для размещения фотографий следует отобрать 4 различных страницы из 12 имеющихся. Затем нужно отобранные страницы упорядочить, т.е. определить, на какую страницу поместить первую фотографию, на какую – вторую и т.д. Полученная упорядоченная совокупность страниц является, согласно определению, размещением из 12 элементов по 4, а число таких размещений является искомым результатом:

$$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880.$$

Пример. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани пяти различных цветов? Решите эту же задачу при условии, что одна полоса должна быть красной.

Решение. Поскольку в данной задаче важен порядок следования полос и все цвета во флаге должны быть разными, то исходная задача сводится к подсчету числа размещений из 5 по 3:

$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов.

При условии, что одна полоса должна быть красной, получаем, что для выбора места для красной полосы существует 3 способа, а для оставшихся двух полос останется $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ способов. Таким образом, трехцветный полосатый флаг из имеющихся 5 цветов при условии, что один цвет должен быть красным можно составить

$$3 \cdot A_2^4 = 3 \cdot 12 = 36$$ способами.

Пример. Сколькими способами 10 человек можно поставить парами в ряд?

Решение. Первую пару можно выбрать A_{10}^2 способами, вторую – A_8^2 способами, и т.д. В результате получаем

$$A_{10}^2 \cdot A_8^2 \cdot A_6^2 \cdot A_4^2 \cdot A_2^2 = 10!$$ способами.

3.4. Перестановки

Рассмотрим частный случай, когда k=n. Соответствующее этому случаю размещение называется перестановкой.

Перестановками из n элементов называются такие комбинации, каждая из которых содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Поясним это на следующем примере. Из этих трёх элементов: a, b и c. можно составить шесть перестановок: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Все приведённые перестановки отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок n различных элементов обозначают символом Pn и равно

$$P_n = A_n^n = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

Решение. Будем считать выделенные книги за одну книгу. Тогда уже для шести книг существует $P_6=6!=720$ перестановок. Однако четыре определенные книги можно переставить между собой $P_4=4!=24$ способами. По принципу умножения имеем

$P_6P_4 = 720\cdot24 = 17280$.

Пример. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждая цифра в изображении числа встречается один раз?

Решение. Рассматриваемое число может быть представлено как некоторая перестановка из цифр 0, 1, 2, 3, в которой первая цифра отлична от нуля. Так как число перестановок из четырех цифр равно $P_4=4!$ и из них 3! перестановок начинаются с нуля, то искомое количество равно

$4! - 3! = 3\cdot3! = 3\cdot1\cdot2\cdot3 = 18$.

Пример. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Решение. Естественно предположить, что как мужчины, так и женщины различимы. Предположим также, что места за столом также различимы. Пронумеруем их. Если женщины займут чётные места n! способами, то мужчины будут занимать нечётные места тоже n! способами и наоборот. По правилу умножения получаем $2(n!)^2$.

Если места за столом неразличимы, то стол можно поворачивать на одно место, то при этом расположение сидящих не изменится (такая ситуация имеет место, например, на карусели). Поскольку имеется n способов расположения стола относительно сидящих, то предыдущий результат нужно разделить на n.

$$\frac{2(n!)^2}{n} = 2n!(n-1)!$$

Вопрос. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n супружеских пар, если супруги должны сидеть рядом?

При составлении размещений без повторений из **n** элементов по **k** мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все **n** элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют *перестановками из n элементов,* или просто ***n-перестановками.***

Число n-перестановок обозначают через P_n. Формула для P_n сразу получается из формулы для числа размещений без повторений.

$$P_n=A^k_n=n*(n-1)*\ldots*2*1=n!.$$

Таким образом, чтобы узнать, сколько перестановок можно составить из n элементов, надо перемножить все натуральные числа от 1 до n. Это произведение обозначается n! (читается n-факториал). Таким образом,

$$P_n=n!=1*2*\ldots*n$$

Определение: комбинации из n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, называются **перестановками** из n элементов.

Пример. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, имея в наличии материал трех цветов.

Решение. Флаг представляет собой три сшитые полосы материала разного цвета. Следовательно, если в этой комбинации поменять цвета местами, то получим другой флаг, отличный от первого. Всего можно получить $P_3=3!=1*2*3=6$ различных флагов.

СВОЙСТВА РАЗМЕЩЕНИЙ И ПЕРЕСТАНОВОК

Рассмотрим задачи, связанные со свойствами размещений и перестановок.

Пример. Вычислить

$$\frac{A_{49}^{12}+A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}}-\frac{A_{17}^{10}+A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{A_{49}^{12}+A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}}=\left(\frac{49!}{37!}+\frac{49!}{11!}\right)\frac{39!}{49!}=\frac{39!}{37!}+\frac{39!}{38!}=39\cdot 38+39=39^2$$

и

$$\frac{A_{17}^{10}+A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}=\left(\frac{17!}{10!}+\frac{17!}{9!}\right)\frac{9!}{17!}=\frac{9!}{7!}+\frac{9!}{8!}=9\cdot 8+9=9^2,$$

то

$$\frac{A_{49}^{12}+A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}}-\frac{A_{17}^{10}+A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}=39^9-9^2=(39-9)(39+9)=30\cdot 48=1440.$$

Пример. Упростить выражение

$$\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}\quad (n\geq 6).$$

Решение. Поскольку

$$A_n^6=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5),\ A_n^5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

$$A_n^6+A_n^5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^2,$$

$$A_n^4=n(n-1)(n-2)(n-3),$$

то

$$\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^2}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=(n-4)^2.$$

Пример. Решить неравенство

$$\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\frac{15}{(n-1)!}.$$

Решение. Из условия задачи следует, что n≥1 и n∈ ∞. Поскольку

$$A_{n+4}^4=(n+4)(n+3)(n+2)(n+1),\ (n+2)!=(n-1)!n(n+1)(n+2),$$

то

$$\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n-1)!n(n+1)(n+2)}=\frac{(n+4)(n+3)}{(n-1)!n}$$

и данное в условии неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(n+4)(n+3)}{(n-1)!n} < \frac{15}{(n-1)!}.$$

Пусть n≥2, тогда $\frac{5\cdot 4}{0!\cdot 1} < \frac{15}{0!}$, т.е. 20<15. Противоречие, следовательно, n=1 не является решением данного неравенства.

Пусть n=1, тогда исходное неравенство равносильно следующему

$$\frac{(n+1)(n+3)}{n} < 15 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+7n+12<15n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2-8n+12<0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-2)(n-6)<0.,$$

Отсюда следует, что первоначальное неравенство имеет три решения: n1=3, n2=4 и n3=5.

3.5. Сочетания

Встречаются задачи, в которых нет необходимости рассматривать порядок, в котором располагаются элементы.

Пусть опыт состоит в выборе k элементов без возвращения и без упорядочения из некоторого множества, содержащего n элементов. Исходами такого опыта будут подмножества, содержащие k элементов и отличающиеся друг от друга только составом. Получаемые при этом комбинации элементов называются сочетаниями.

Сочетаниями из n элементов по k элементов называются такие комбинации, из которых каждое содержит k элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Поясним это на следующем примере. Пусть имеется три элемента: a, b и c. Из этих трёх элементов, в отличие от размещений, можно составить три сочетания по два элемента: ab, ac, bc, ca. Все приведённые сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Для иллюстрации различий между сочетаниями и размещениями рассмотрим следующий пример. Пусть выбирается делегация в составе 3 человек из 30 учеников. Здесь, очевидно, не надо учитывать порядок выбранных делегатов, т.к. все члены делегации равноправны. Поэтому каждый такой выбор будет сочетанием из 30 по 3. Однако, выбирая старосту, профорга и физорга из тех же учеников, порядок уже приходится учитывать. В этом случае каждый конкретный результат будет уже размещением из 30 по 3.

Найдем число возможных сочетаний C_n^k. Чтобы получить размещение из n элементов по k, а их число равно A_n^k, надо выбрать k элементов из множества, содержащего n элементов, что можно сделать C_n^k способами, и организовать из них упорядоченное подмножество. Последнюю операцию можно выполнить Pn способами. Таким образом, чтобы получить A_n^k размещений, надо выполнить две операции, которые можно осуществить C_n^k и Pn способами, соответственно. Поэтому, согласно принципу умножения, можно записать

$$A_n^k = C_n^k P_k$$

Отсюда получаем, что число сочетаний будет равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Заметим, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$.

Пример. Сколькими способами можно составить комиссию в составе из трех человек из имеющихся 9 человек, 4 женщин и 5 мужчин, если: а) не важен пол членов комиссии; б) комиссия должна состоять из двух женщин и одного мужчины.

Решение. а) Из смысла задачи следует, что порядок выбора членов комиссии не играет роли. Здесь важен только состав. Тогда выбрать комиссию из трех человек из 9 имеющихся можно

$$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$$

способами.

б) Двух женщин из 4 имеющихся можно выбрать C_4^2 способами, а одного мужчину из 5 можно C_5^1 способами. Тогда общее количество способов выбора комиссии, в соответствии с принципом умножения, можно

$C_4^2 C_5^1 = 6 \cdot 5 = 30$ способами.

Пример. Сколькими различных правильных дробей можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, берущихся попарно?

Решение. Различных пар из данных чисел, в которых первый элемент меньше второго, будет, очевидно, столько, сколько можно составить сочетаний из 7 по 2:

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Пример. Сколько существует делителей числа 210?

Решение. Разложим данное число на простые множители: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Число делителей, составленных из произведения двух простых множителей, равно $C_4^2 = 6$ (а именно числа 6, 10, 14, 15, 21, 35); число делителей, составленных из произведения трёх простых множителей, равно $C_4^3 = 4$ (а именно числа 30, 42, 70, 105); число простых делителей равно четырём (а именно 2, 3, 5, 7). Кроме того, делителями являются число 1 и число 210. Итак, согласно принципу сложения, число всех делителей равно

$$6 + 4 + 4 + 1 + 1 = 16.$$

Эту задачу можно решить и по-другому. Натуральное число N можно разложить на простые множители следующим образом:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

α_1, α_2, …, α_n – некоторые натуральные числа. Число p_i может войти в данный делитель с показателем 0, 1, …, ρ_n – всего ρ_n+1 способами. Из принципа умножения получаем, что число делителей числа N равно

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$.

Для числа 210 число делителей по формуле будет равно ($\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=1$) $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$.

Определение: комбинации, составленные из k элементов, взятых из n данных элементов ($0<k\leq n$), отличающиеся друг от друга составом элементов, называются **сочетаниями** из n элементов по k элементов.

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_n}=\frac{n!}{(n-k)!*k!}$$

Пример. В полуфинале первенства России по шахматам участвует 20 человек, а в финал выходят лишь трое. Сколько различных комбинаций по три шахматиста можно получить в данном случае?

В данной задаче не играет роли в каком порядке расположатся в тройке шахматисты: Иванов, Петров, Сидоров или Петров, Иванов, Сидоров, лишь бы попасть в тройку!

В тех случаях, когда нас не интересует порядок моментов в комбинации, а интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях. Итак, ***k-сочетанишми из n элементов*** называют всевозможные k-расстановки, составленные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Число к сочетаний, которые можно составить из n элементов, обозначают через C^k_n.

Применяя формулу, легко решить задачу, рассмотренную выше. Число различных исходов полуфинала шахматного первенства дается формулой

$$C_{20}^3=\frac{20!}{3!\cdot17!}=1140.$$

Если в решении задачи убрать комбинации АА, ББ, ВВ, ГГ, ДД и комбинации с одними и теми же символами: например, АБ, БА, то получим число сочетаний из n элементов по k:

АА, АБ, АВ, АГ, АД

БА, ББ, БВ, БГ, БД

ВА, ВБ, ВВ, ВГ, ВД

ГА, ГБ, ГВ, ГГ, ГД

ДА, ДБ, ДВ, ДГ, ДД

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 10\,\textit{комбинаций}$$

СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ

Отметим некоторые свойства сочетаний:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойство симметрии).

Например, $C_7^5 = C_7^2, \quad C_{20}^{14} = C_{20}^6.$

2. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ (свойство Паскаля).

Данное равенство является рекуррентным соотношением для числа сочетаний. С помощью этого равенства можно составить таблицу для нахождения числа сочетаний. Расположим сочетания в виде треугольной таблицы

$$\begin{array}{c} C_0^0 \\ C_1^0 \quad C_1^1 \\ C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\ C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\ C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

Полученную треугольную таблицу принято называть треугольником Паскаля.

3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Пример. Решить уравнение

$$C_{n-1}^{n-2} = n^2 - 13.$$

Решение. Поскольку $C_{n-1}^{n-2} = C_{n-1}^1 = n-1$, то получим квадратное уравнение

$$n-1=n^2-13 \quad \Rightarrow \quad n^2-n-12=0 \quad \Rightarrow \quad (n-4)(n-3)=0.$$

Учитывая, что $C_{n-1}^{n-2}>0$, получаем решение

$n=4$.

Пример. Решить неравенство

$C_{n+1}^{n-2}-C_{n+1}^{n-1}\le 100$.

Решение. Из условия задачи следует, что n≥2 и n∈∞. Поскольку

$$C_{n+1}^{n-2}=C_{n+1}^{3}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}, \quad C_{n+1}^{n-1}=C_{n+1}^{2}=\frac{(n+1)n}{2!}, \text{ то}$$

$$C_{n+1}^{n-2}-C_{n+1}^{n-1}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}-\frac{(n+1)n}{2!}=\frac{(n+1)n(n-4)}{6}.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству

$(n+1)n(n-4)\le 600$.

Поскольку при n=10 получаем $11\cdot 10\cdot 6=660>600$, а при n=9 получаем $10\cdot 9\cdot 5=450<600$. Учитывая, что n≥2 получаем

$2\le n\le 9$.

Пример. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

Решение. Для звукосочетания клавиши нажимаются одновременно, поэтому для k звуков имеем C_{10}^{k} звукосочетаний. Таким образом, искомое количество есть

$C_{10}^{3}+C_{10}^{4}+\ldots+C_{10}^{10}$.

Учитывая свойство 3, т.е., что

$$C_{10}^{0}+C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+C_{10}^{3}+C_{10}^{4}+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10},$$

получим

$$C_{10}^{3}+C_{10}^{4}+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10}-C_{10}^{0}-C_{10}^{1}-C_{10}^{2}=1024-1-10-45=968.$$

СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Свойство 3 является следствием формулы бинома Ньютона:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^nb^n.$$

Поэтому сочетания еще иногда называют биномиальными коэффициентами.

Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2n. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, и равно 2n–1.

Пример. Найти разложение степени бинома (2x–3)5.

Решение. Полагая a=2x, b=–3, получим

$$(2x-3)^5=C_5^0(2x)^5+C_5^1(2x)^4(-3)+C_5^2(2x)^3(-3)^2+C_5^3(2x)^2(-3)^3+$$
$$+C_5^4(2x)^1(-3)^4+C_5^1(2x)^0(-3)^5=32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243.$$

Пример. Пятый член разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x. Найти n.

Решение. Пятый член разложения T_5 имеет следующий вид:

$$T_5=C_n^4\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4=C_n^4\cdot x^{\frac{n-4}{3}-4}.$$

По условию T_5 не зависит от x; это означает, что показатель степени при x равен нулю, т.е. (n–4)/3–4=0. Из последнего уравнения находим n=16.

Пример. Вычислить сумму

$$C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5.$$

Решение. Согласно формуле бинома Ньютона, при любом x имеем равенство:

$$(x+2)^5=C_5^0x^5+C_5^1x^42^1+C_5^2x^32^2+C_5^3x^22^3+C_5^4x^12^4+C_5^52^5.$$

Полагая здесь x=1, получим

$$(1+2)^5 = C_5^0 + C_5^1 2^1 + C_5^2 2^2 + C_5^3 2^3 + C_5^4 2^4 + C_5^5 2^5.$$

Итак, искомая сумма равна 35, т.е. 243.

Обобщим полученные сведения в таблице

Комбинации без повторений

Название **Комбинации**	Характерный **признак Отличия**	Пример	Формула **подсчета вариантов**
Размещения	Состав Порядок	a, b, c размещения из 3 по 2 ab, bc, ca, ba, cb, ac	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Перестановки	Порядок	a, b, c перестановки из 3 abc, bca, cba, cab, bac, acb	$P_n = n!$
Сочетания	Состав	a, b, c сочетания из 3 по 2 ab, bc, ca	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

3.6. Комбинации с повторениями

На практике, часто используются комбинации с повторяющимися элементами. Две комбинации с повторениями могут отличаться друг от друга либо порядком, либо составом входящих в них элементов, либо и тем и другим.

Определение: размещениями с повторениями из элементов n классов по k, называются такие выборки, которые имея по k элементов, выбранных из числа элементов n классов с повторениями, отличаются друг от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Пусть выбор k элементов из некоторого множества, состоящего из n элементов, производится с возвращением и с упорядочением их в последовательную цепочку. Различными исходами такого выбора будут всевозможные наборы (вообще говоря, с повторениями) отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования. Получаемые в результате комбинации называются размещениями с повторениями из n элементов по k элементов.

Поясним это на следующем примере. Пусть имеется три элемента: a, b и c. Тогда из этих трёх элементов можно составить девять размещений с повторениями по два элемента: ab, ac, ba, bc, ca, cb, aa, bb, cc.

Таким образом, размещение с повторениями из n элементов по k элементов (при этом допускается, что m>n) может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k включительно или не содержать его совсем, т.е. каждое размещение с повторениями из n элементов по k элементов может состоять не только из различных элементов, но и k каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Число размещений с повторениями $\overline{A}_n^k$ можно найти из принципа умножения. Первый элемент размещения можно выбрать n способами. Второй элемент также можно выбрать n способами (ведь элементы могут повторяться) и т.д. По принципу умножения находим

$$\overline{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\ \text{раз}} = n^k.$$

Пример. В лифт восьмиэтажного дома вошли 5 пассажиров. Сколькими способами могут выйти пассажиры на каждом этаже, начиная со второго?

Решение. Задача сводится к распределению 5 пассажиров по 7 этажам (т.е. набор упорядоченный), причем возможны повторения (т.е. несколько пассажиров могут выйти на одном этаже). Таким образом, задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями:

$$\overline{A}_7^5 = 7^5 = 16807.$$

Пример. Сколькими способами можно 5 шариков разбросать по 8 лункам, если каждая лунка может вместить все 5 шариков?

Решение. Данная задача есть задача на отыскание числа размещений с повторениями

$$\overline{A}_8^5 = 8^5 = 32768.$$

Пример. Буквы азбуки Морзе состоят из символов – точка и тире. Сколько букв получим, если потребуем, чтобы каждая буква состояла не более чем из пяти указанных символов?

Решение. Число всех букв, каждая из которых записывается одним символом, равно $\overline{A}_2^1 = 2^1 = 2$.

Число всех букв, каждая из которых записывается двумя символами, равно $\overline{A}_2^2 = 2^2 = 4$.

Число всех букв, каждая из которых записывается тремя символами, равно $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

Число всех букв, каждая из которых записывается четырьмя символами, равно $\overline{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Число всех букв, каждая из которых записывается пятью символами, равно $\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32$.

Число всех указанных букв будет равно 62.

Пример. Сколько можно составить пятизначных телефонных номеров?

Решение: Любой телефонный номер состоит из цифр. Всего на циферблате телефонного аппарата расположены 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мы составляем пятизначный телефонный номер. Следовательно заполняем цифрами 5 мест в номере, причем цифры в номере могут повторятся, и порядок расположения цифр для нас важен. Значит, число вариантов пятизначных номеров можно определить по формуле:

$n = 10,\ k = 5$

$$\overline{A}_{10}^{5} = 10^5 = 1000000$$

Определение: перестановками с повторениями называются такие размещения из элементов n классов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

k_1 – класс элементов a, a, a, …, a

k_2 – класс элементов b, b, b, …b

…………………….

k_n – класс элементов z, z, z, …z

$k_1+k_2+\ldots+k_n=k$ k – всего элементов в комбинации

$$\overline{P_{k_1,k_2,\ldots k_n}} = \frac{k!}{k_1!*k_2!*\ldots*k_n!}$$

Общую задачу сформулируем следующим образом.

Имеется n элементов k различных типов: n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, …, n_k элементов k-го типа, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Сколько можно составить различных перестановок из этих элементов?

Число перестановок с повторениями обозначают $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Сколько же их? Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы n!. Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. В первой группе элементы (первого типа) можно переставлять друг с другом n1! способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то перестановки ничего не меняют. Точно также ничего не меняют n2! перестановок элементов во второй группе и т.д. Перестановки элементов в разных группах можно делать независимо друг от друга. Поэтому (из принципа умножения) элементы можно переставлять друг с другом $n_1!n_2!\ldots n_k!$ способами так, что она остаётся неизменной.

Число различных перестановок с повторениями, которые можно составить из данных элементов, равно

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!},$$

где $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Замечание. Отметим, что формула числа сочетаний из n элементов по k элементов совпадает с формулой для числа перестановок с повторениями из k элементов одного типа и n–k элементов другого типа:

$$C_n^k = P(k, n-k) = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Пример. Сколькими способами можно нанизать на нить 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бус?

Решение. Речь идет об отыскании числа перестановок с повторениями, которые можно сделать из k1=4 элементов первого типа (зеленых бус), k2=5 элементов второго типа (синих бус) и k3=6 элементов третьего типа (красных бус). По формуле (6) получаем

$$P(4,5,6) = \frac{(4+5+6)!}{4! \cdot 5! \cdot 6!} = \frac{15!}{4! \cdot 5! \cdot 6!} = 630630.$$

Пример. У мамы было 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых груши и 4 одинаковых апельсина. Каждый день она давала ребенку по одному фрукту. Сколькими способами она могла это сделать?

Решение. Данная задача есть задача на отыскание числа перестановок с повторениями:

$$P(2,3,4) = \frac{(2+3+4)!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260.$$

Пример. Сколько различных браслетов можно сделать из пять одинаковых изумрудов, шести одинаковых рубинов и семи одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?

Решение. Камни можно переставлять P(5, 6, 7) способами. При циклических перестановках и при зеркальном отражении браслет остается неизменным. В результате получаем

$$\frac{P(5,6,7)}{36}=\frac{18!}{36\cdot 5!\cdot 6!\cdot 7!}.$$

Пример. Сколько способами можно переставлять буквы слова «огород» так, чтобы: а) три буквы «о» не стояли рядом? б) если запрещается, чтобы две буквы «о» стояли рядом?

Решение. а) Буквы данного слова можно переставлять P(3,1,1,1) способами. Если три буквы «о» стоят рядом, то их можно считать за одну букву. Тогда буквы можно переставлять 4! Способами. Вычитая этот результат из предыдущего, получим

$$P(3,1,1,1)-4!=96.$$

б) Сначала расставляем согласные (3! способов). Для трёх букв «о» остаётся 4 места, и их можно расставить $C_4^3=4$ способами. Всего получаем $3!\cdot 4=24$ способа.

Пример. Сосчитать, сколько можно сделать перестановок в словах: замок, топор, ротор, колокол.

Решение.

Замок: В слове 5 букв. Буквы все различные и не повторяются.

$$P_5=5!=5*4*3*2*1=120$$

Топор: В слове 5 букв, k=5.

Среди этих 5 букв – буква «т» встретилась 1 раз; $k_1=1$

буква «о» встретилась 2 раза; $k_2=2$

буква «п» встретилась 1 раз; $k_3=1$

буква «р» встретилась 1 раз; $k_4=1$.

$$\overline{P_{1,2,1,1}} = \frac{5!}{1!*2!*1!*1!} = 60$$

Ротор: В слове 5 букв, k=5.

Среди этих 5 букв – буква «т» встретилась 1 раз; k_1=1

буква «о» встретилась 2 раза; k_2=2

буква «р» встретилась 2 раза; k_4=2.

$$\overline{P_{1,2,1}} = \frac{5!}{1!*2!*1!} = 30$$

Колокол: В слове 7 букв, k=7.

Среди этих 7 букв – буква «к» встретилась 2 раза; k_1=2

буква «о» встретилась 3 раза; k_2=3

буква «л» встретилась 2 раза; k_4=2.

$$\overline{P_{2,3,2}} = \frac{7!}{2!*3!*2!} = 210$$

Определение: сочетаниями с повторениями из n классов по k называются такие размещения с повторениями из n классов по k, которые отличаются одно от другого хотя бы одним элементом. Их число подсчитывается по формуле:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(k+n-1)!}{k!*(n-1)!}$$

Пусть имеются предметы n различных типов. Сколькими способами можно составить из них комбинацию из k элементов, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации, но при этом предметы одного и того же типа могут повторяться? Иными словами, различные комбинации должны отличаться количеством предметов хотя бы одного типа. Такие комбинации называются сочетаниями с повторениями, а их общее число будем обозначать $\overline{C}_n^k$.

Поясним это на следующем примере. Пусть имеется три элемента: a, b и c. Тогда из этих трёх элементов можно составить шесть сочетаний с повторениями по два элемента: ab, ac, bc, aa, bb, cc.

Таким образом, сочетание с повторениями из n элементов по k элементов (при этом допускается, что k>n) может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k включительно или не содержать его совсем, т.е. каждое сочетание с повторениями из n элементов по k элементов может состоять не только из k различных элементов, но и k каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Следует отметить, что если, например, две комбинации по k элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, то они не считаются различными сочетаниями.

Существует специальная формула для вычисления числа сочетаний с повторениями:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Выведем эту формулу. Прежде всего надо занумеровать возможные типы элементов числами от 1 до n (иначе можно оказаться в положении мужа, который никак не мог вспомнить, что ему поручила купить жена: 5 пакетов молока и 2 банки пива или наоборот 2 пакета молока и 5 банок пива). Теперь можно каждую комбинацию зашифровать с помощью последовательности единиц и палочек: для каждого типа с 1-го до n-го по порядку написать столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделять друг от друга палочками.

Например, в кондитерском магазине продаются пирожные 4 видов: корзиночки, наполеоны, песочные и эклеры. Если куплено 3 корзиночки (к), 1 наполеон (н), 2 песочных (п) и 1 эклер (э), то получим такую запись:

$$\underset{ккк}{111}|\underset{н}{1}|\underset{пп}{11}|\underset{э}{1}$$

В этой записи палочки отделяют одну группу пирожных от другой. Если же куплено 2 корзиночки и 5 песочных, то получим запись $11||11111$. Ясно, что разным покупкам соответствуют при этом разные комбинации из 7 единиц и 3 палочек. Обратно, каждой комбинации единиц и палочек соответствует какая-то покупка. Например, комбинации $|111|1111|$ соответствует покупка 3 наполеонов и 4 песочных (крайние группы отсутствуют).

В результате мы получим столько единиц, сколько предметов входит в комбинацию, т.е. k, а число палочек будет на 1 меньше, чем число типов предметов, т.е. n–1. Таким образом, мы получим перестановки с повторениями из k единиц и n–1 палочек. Различным комбинациям при этом соответствуют различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторениями соответствует своя комбинация.

Итак, число $\overline{C}_n^k$ сочетаний с повторениями из элементов n типов по k равно числу P(k,n–1) перестановок с повторениями из n–1 палочек и k единиц. А

$P(k,n-1)=\dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$. Поэтому $\overline{C}_n^k=\dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}=C_{n+k-1}^k$.

Пример. В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

Решение. В задаче требуется найти число всевозможных групп по 9 элементов, которые можно составить из данных трех различных элементов, причем указанные элементы в каждой группе могут повторяться, а сами группы отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Это задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из трех элементов по девять. Следовательно,

$$\overline{C}_3^9=C_{11}^9=C_{11}^2=\frac{11\cdot 10}{2!}=55.$$

Пример. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

Решение. Данная задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из 10 элементов по 10. Следовательно,

$$\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = \frac{21!}{12! \cdot 9!} = 293930 \text{ ,} \quad \overline{C}_{10}^{8} = C_{17}^{8} = \frac{17!}{8! \cdot 9!} = 24310 \text{ .}$$

Пример. В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими различными способами можно образовать набор из 12 открыток?

Решение. Всего видов открыток 10. Следовательно, n=10.

Необходимо составить наборы из 12 открыток. Отсюда, k=12. Поскольку в каком порядке мы будем укладывать открытки для нас не важно, а важно только какие виды открыток попадут в эти наборы, то число комбинаций считаем по формуле:

$$\overline{C}_{10}^{12} = \frac{(10+12-1)!}{12!*(10-1)!} = 293930$$

Обобщим полученные сведения в таблице

Комбинации с повторениями

Название Комбинации	**Характерный признак Отличия**	**Пример**	**Формула подсчета вариантов**
Размещения с повторениями	Состав Порядок	a, b, c размещения из 3 по 2 ab, bc, ca, ba, cb, ac, aa, bb, cc	$\overline{A}_n^k = n^k$
Перестановки с повторениями	Порядок	a, b, перестановки из 2 ab, ba, aa, bb	$\overline{P} = \frac{k!}{k_1!*k_2!*...*k_n!}$
Сочетания с повторениями	Состав	a, b, c сочетания из 3 по 2 ab, bc, ca, aa, bb, cc	$\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!*(n-1)!}$

3.7. Задания для практики

1. Вычислить:

   а) $\dfrac{99!-98!}{97!}$ (9604),

   б) $\dfrac{50!}{48!}-\dfrac{30!}{28!}$ (1580).

2. Упростить:

   а) $\left[\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}\right]n!$ ($\dfrac{n}{n+1}$),

   б) $\left[\dfrac{1}{m!}+\dfrac{1}{(m+1)!}\right](m+1)!$ (m+2).

3. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=72$ (8).

4. В забеге участвуют 5 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места в результате забега? (120)

5. Вычислить:

   а) $\dfrac{A_5^2}{P_2}+\dfrac{A_{10}^5}{7P_5}$, (46)

   б) $\dfrac{A_5^3-A_5^2}{P_2}+\dfrac{P_5}{P_2}$ (80).

6. Упростить: $\dfrac{n!}{(n-3)!A_n^2}-\dfrac{P_{n+1}}{(n+2)!}$. ($\dfrac{n^2-5}{n+2}$)

7. Решить неравенство $\dfrac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}}-\dfrac{143}{4P_{n-1}}<0$. ($2\le n\le 36,\quad n\in \mathbb{N}$)

8. Вычислить 4!, 5!, 6!

9. Вычислить A_7^5, P_5, C_7^5.

10. Сколько трехзначных номеров машин, без повторяющихся цифр для службы ГАИ можно составить?

11. Сколькими различными способами можно рассадить 10 человек на одной скамейке?

12. На тренировках занимается 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано стартовых пятерок?

13. В классе 30 учеников. Необходимо избрать старосту, культорга и казначея класса. Сколькими способами можно образовать руководящую тройку, если одно лицо может занимать только один пост? (24360)

14. Сколько разных пятизначных чисел можно составить цифр 1, 2, 3, 4, 5, при условии, что ни одна цифра не повторяется? (120)

15. Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из числа 10 волейболистов? (210)

16. В кружке математиков 25 человек. Необходимо избрать председателя кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно образовать руководящую четверку, если одно лицо может занимать только один пост? (303600)

17. Школьная молодежная организация, в которой 50 человек, выбирает 6

делегатов на конференцию. Сколькими способами может быть избрана делегация?

18. В колоде 32 карты. Сколько может быть способов появления туза среди розданных карт?

19. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж: командир корабля, первый помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командная тройка может быть отобрана из 25 летчиков, 2 бортинженера из 20 специалистов, в совершенстве знающих устройство корабля, и врач – из 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж?

20. Для несения почетного караула из 10 человек могут быть приглашены офицеры пехотных войск, авиации, погранвойск, артиллерии, офицеры морского флота, ракетных войск. Сколькими способами можно избрать состав караула? (3003)

21. Сколько машин можно обеспечить шестизначными номерами? (1000000)

22. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что так или иначе они экзамен сдали? (81)

23. Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, если цифры могут повторяться? (54)

24. На конференцию собрались школьники 9, 10,11 классов. В президиум приглашаются 10 человек. Сколькими способами можно его составить

при условии участия в нем хотя бы одного 11-классника? (55)

25. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не повторяются? (60)

26. Буквы азбуки Морзе образуют последовательность точек и тире. Сколько различных групп можно образовать, если использовать 5 символов? (32)

27. Требуется составить расписание отправления поездов на разные дни недели. При этом необходимо, чтобы 3 дня отправлялось по 2 поезда в день, 2 дня по поезду в день, 2 дня по 3 поезда в день. Сколько можно составить расписаний? (210)

28. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма? (20)

29. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с неё? Решите ту же задачу при дополнительном условии, что подъём и спуск происходят по разным дорогам. (20)

30. При составлении одного варианта письменной контрольной работы по математике преподаватель располагает 4 задачами по геометрии, 8 – по алгебре и 3 – по тригонометрии. Сколькими способами можно составить этот вариант, если в него должно войти по одной задаче из перечисленных разделов? (96)

31. Из двух полуфинальных групп, каждая их которых содержит по 6 команд, в финал выходит по одной команде. Сколько может быть

различных вариантов участников финального матча? (36)

32. В книге из 20 страниц на каких-либо трех страницах надо поместить по одной разной иллюстрации. Сколькими способами это можно сделать? (6840)

33. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево? (900)

34. Сколькими способами Чип и Дейл могут поделить между собой 5 разных орешков? (32)

35. На складе имеются 6 ящиков с различными фруктами и 3 ящика с различными овощами. Сколькими способами можно каждой из двух овощных палаток выдать по одному ящику с фруктами и овощами? (180)

36. В урне содержится 3 синих, 5 красных и 2 белых шара. Сколькими способами можно вытащить из урны либо два белых шара, либо два цветных шара, из которых один синий, а другой – красный? (17)

37. Имеется 6 различных конвертов без марок, 4 различные марки и 3 различных конверта с марками. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма? (27)

38. Семья новоселов хочет приобрести письменный стол, книжный шкаф и диван. В мебельном магазине имеется 6 письменных столов, 4 книжных шкафа и 12 диванов, Кроме того, есть 2 гарнитура, содержащих письменный стол и диван, и 8 гарнитуров, содержащих книжный шкаф и

письменный стол. Сколькими способами может быть сделана покупка? (392)

39. В букинистическом магазине лежат 6 разных изданий романа И.С. Тургенева «Рудин», 3 издания его романа «Дворянское гнездо» и 4 издания романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 разных сборников, в каждом из которых есть романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 сборников с романами «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

    А если в магазине есть ещё 3 сборника, содержащие романы «Рудин» и «Отцы и дети», и 5 книг, содержащих все три романа? (148)

40. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост? (303 600)

41. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление различных видов деталей (по одному виду на каждого). (336)

42. Из 10 книг выбирают 4 для рассылки по разным адресам. Сколькими способами это можно сделать? (5040)

43. Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый ящик опускают не более одного письма? (55 440)

44. Студенту необходимо сдать 5 экзаменов в течение 12 дней. Сколькими

способами можно составить расписание экзаменов, если в течение дня он может сдать не более одного экзамена? (665 280)

45. Сколькими способами можно преподнести 4 различных подарка 6 ученикам таким образом, чтобы каждый ученик получил не более одного подарка? (360)

46. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, …, 9, если каждая цифра в обозначении числа встречается не более одного раза? (Учесть, что число не может начинаться с нуля.) (4 536)

47. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани 6 различных цветов и все стулья должны быть разного цвета. (720)

48. Дачник выделил на своём участке семь грядок для выращивания овощей, т.к. хочет иметь свои помидоры, огурцы, перец, лук, чеснок, салат и кабачки. Каждый вид должен иметь отдельную грядку. Сколькими способами он может расположить грядки для посадки? (5 040)

49. Пассажирский поезд состоит из трех багажных вагонов и восьми купированных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные вагоны должны находиться в его начале? (241 920)

50. В первенстве края по футболу участвуют 11 команд. Сколько существует различных способов распределения мест в таблице розыгрыша, если на первое место могут претендовать только 4 определенные команды? (4*10!)

51. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ так,

чтобы каждое чётное число стояло на чётном месте? ($(n!)^2$)

52. Четыре мальчика и четыре девочки рассаживаются в ряд на восемь подряд расположенных мест, причем мальчики садятся на четные места, а девочки – на нечетные. Сколькими способами они могут это сделать? (576)

53. Сколькими способами можно посадить за круглый стол трех мужчин и трех женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? (72)

54. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если Б не должен выступать до того, как выступил А? Решите эту же задачу, если Б должен выступить сразу после А. (24)

55. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

а) $A_n^2 = 12$, (4)

б) $A_n^3 + 3A_n^2 = \frac{1}{2}P_{n+1}$, (4)

в) $\frac{P_{n+5}}{A_{n+4}^m \cdot P_{n+4-m}} = 15$. (10)

56. Доказать, что $A_n^m = A_{n-1}^m + mA_{n-1}^{m-1}$.

57. Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов из состава конференции, на которой присутствуют 15 человек? (693)

58. У одного студента есть 11 книг по математике, а другого – 15 книг.

Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги для обмена? (75 075)

59. Сколько прямых провести через 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (28)

60. Найти число диагоналей n-угольника. ($\frac{n(n-3)}{2}$)

61. Компания из 15 человек разделяется на две группы, одна из которых состоит из 6 человек, а другая – из 9 человек. Сколькими способами это можно сделать? (5 005)

62. В пространстве даны 7 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти точки? (210)

63. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Из нее одновременно вынимают три шара одного цвета. Сколькими способами это можно сделать? (76)

64. В колоде десять карт, из которых три – тузы. Наудачу последовательно вынимается, запоминаются и возвращаются в колоду четыре карты. После каждого возвращения карты колода перемешиваются. Сколько возможно случаев, когда среди вытянутых карт окажется хотя бы один туз? (490)

65. В лаборатории работают 8 физиков и 10 химиков. Надо создать рабочие группы по трем темам. В первую группу должны войти 4 физика, во вторую – 5 химиков, а третья должна состоять из 3 человек, которые могут быть как физиками, так и химиками. Сколькими способами можно

создать такие группы?

66. Вычислить: а) $C_5^3C_4^2 + C_4^2C_3^1 + C_3^1C_3^0$, (81) б) $\dfrac{C_{21}^4}{C_{19}^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3}$.(1)

67. Упростить: $\dfrac{1}{n+2}\left(C_{n+3}^2 - 2C_{n+2}^3 + C_{n+2}^2\right) + \dfrac{n^2 - 5n}{6}$. (2)

68. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

а) $C_n^{n-2} + 2n = 9$, (3)

б) $\dfrac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \dfrac{16}{29}$. (14)

69. Решить неравенство:

а) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$, ($n > 6, \quad n \in Ґ$)

б) $C_{13}^n < C_{13}^{n+2}$. ($1 \le n \le 5, \quad n \in Ґ$)

70. Доказать, что $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m \dfrac{n+1}{m+1}$.

71. Имеется 12 различных цветов. Сколькими способами можно составить букет из данных цветов, если в букет должно входить не менее 3 цветов? (4 017)

72. Напишите разложение степени бинома

а) $(x+1)^7$;

б) $(3x + 2y)^4$;

в) $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$.

73. Найдите пятый член разложения $\left(\sqrt{x}+x\right)^{10}$.

74. Найдите два средних члена разложения $\left(a^3+ab\right)^{21}$.

75. Найдите в биномиальном разложении $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^{16}$ член, не содержащий x.

76. Найдите сумму $C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\ldots+3^nC_n^n$. ($4^n$)

77. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3}{2nx^2}\right)^n$ равна 64. Напишите член, не содержащий переменную x.

78. Сколькими способами девочка Яна может разложить 12 кукол по трём ящикам, если каждый ящик может вместить все куклы?

79. Сколькими способами Пончик может рассовать 6 конфет по 9 карманам, если каждый карман может вместить все конфеты?

80. Сколькими способами можно разместить 8 пассажиров по трем вагонам?

81. Сколькими различных восьмизначных чисел можно написать, пользуясь только тремя цифрами 3, 5, 7 при условии, что цифра 5 в каждом числе встречается ровно два раза?

82. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа $\overline{abcde}$ (повторение цифр разрешается). Сколько среди них чисел, у которых: 1)

$a=1$; 2) $a \neq 2$; 3) $a=3$, $b=2$; 4) $a=3$, $b=4$, $c=5$?

83. Сколько чисел, меньших миллиона, можно написать с помощью цифр: а) 8 и 9; (126)

б) 7, 8, 9; (1 092)

в) 0, 8, 9 (с цифры 0 число начинаться не может)? (728)

84. Имеется три курицы, четыре утки и два гуся. Сколькими способами можно выбрать из них несколько птиц так, чтобы среди выбранных оказались и куры, и утки, и гуси? (315)

85. Сколькими способами можно расположить в ряд две зелёные и четыре красные лампочки? (15)

86. Десять человек надо разбить на три группы соответственно по 2, 3, 5 человек в группе. Сколькими способами можно это сделать? (2 520)

87. Сколькими способами можно упаковать девять различных книг в трёх бандеролях соответственно по два три, четыре книги в каждой бандероли? (1 260)

88. Группу командировочных из восьми человек требуется расселить в три комнаты, из которых две трёхместные и одна двухместная. Сколько вариантов расселения возможно? (560)

89. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в следующих исходных словах: а) академия, б) электротехника, в) молокопродукт?

90. Сколькими способами можно разделить 12 предметов между тремя студентами, чтобы каждому досталось ровно по четыре предмета? (3 150)

91. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 4 экземпляра другой и 8 экземпляров третьей. Сколькими способами могут быть распределены эти премии между 30 участниками олимпиады, если каждому вручается не более одной книги?

92. Сколькими способами можно переставить буквы слова «обороноспособность» так, чтобы две буквы «о» не шли подряд? (166 320)

93. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом? (720)

Раздел 4. Элементы теории графов

Возникновение и становление того или иного научного направления, той или иной научной теории – явление многосложное, которое к тому же часто оказывается нетривиально погруженным в окружающие нас пространственно-временные обстоятельства. Однако иногда дата рождения новой математической науки может также быть указана поразительно точно, особенно если следы первых заметных успехов сохранились в дошедших до нас письменных источниках-статьях, записках или письмах. Вот лишь несколько наиболее ярких примеров:

1736 год- теория графов (Леонард Эйлер)

1832 год- теория групп (Эварист Галуа)

1926 год- теория игр (Джон фон Нейман)

Начало теории графов как математической дисциплины было положено Эйлером в 1736 г., когда им была написана статья о Кенигсбергских мостах. Однако она была единственной в течение почти ста лет. Интерес к этой науке возродился около середины XIX в связи с развитием естественных наук (исследования электрических сетей, моделей кристаллов и структур молекул), формальной логики. Кроме того, оказалось, что многие математические головоломки могут быть сформулированы в терминах теории графов.

«Мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто 7 мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще до сих пор не смог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот хотя и банальный, показался мне достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. После долгих размышлений я нашел легкое правило, основанное на вполне убедительном доказательстве, при помощи которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может?»

Из письма Л. Эйлера от 13 марта 1736 года.

Город Кенигсберг (ныне Калининград) располагался на обоих берегах реки Прегель и на двух островах, которые соединялись семью мостами.

План расположения:

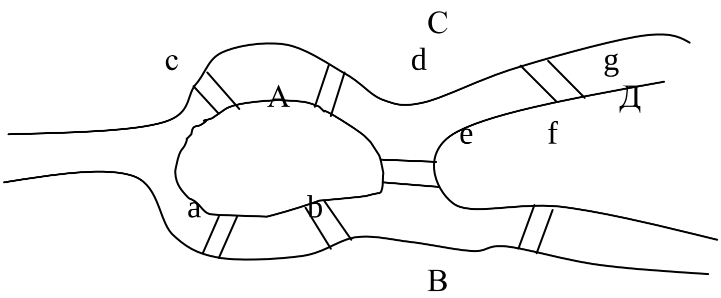


Рисунок 23

На практике часто бывает полезно изобразить некоторую ситуацию в виде рисунков, составленных из точек (вершин), представляющих основные ситуации, и линий (ребер), соединяющих определенные пары этих вершин и представляющих связи между ними. Таким способом удобно представлять структуру системы, в которой вершины – это блоки, а ребра – связи между блоками. Такие рисунки известны под общим названием графов. Графы встречаются в разных областях под разными названиями: «структуры» в гражданском строительстве, «сети» в электротехнике, «социограммы» в социологии и экономике, «молекулярные структуры» в химии и т.д. Удобны графы и при исследовании систем методом пространства состояний. В этом случае вершины – состояния системы, процесса, ребра – действия, которые могут изменить состояние. При решении оптимизационных задач вершинами могут быть предполагаемые решения, ребрами – правила для их нахождения.

Задача: Необходимо во время прогулки пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную точку.

Замечание: Считается, что обрисовать заданную фигуру можно только одним росчерком (не прерывая и не повторяя линии). Такого рода развлечения имеют довольно таки давнюю историю (например, изображающие фигуру известную под названием сабли Магомета).

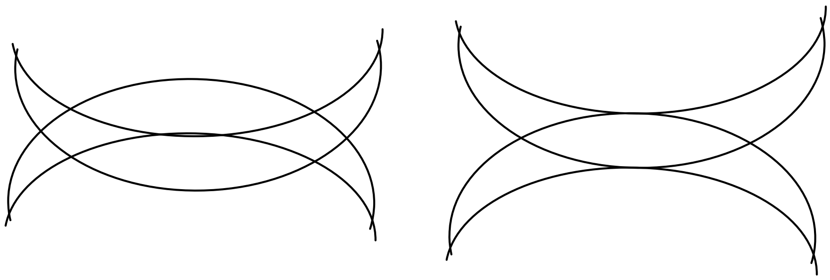


Рисунок 24

Так как нас интересуют только переходы по мостам, то план города можно заменить схемой, представленной на рисунке.

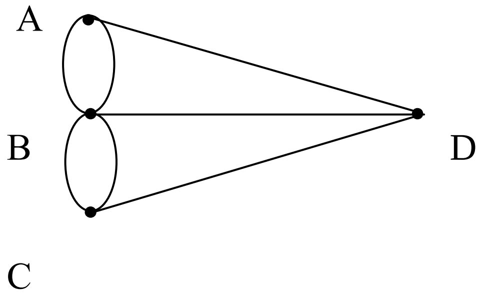


Рисунок 25

На этой схеме земельные участки, разделенные рукавами реки, как бы сжаты в точках A, B, C, D (вершины)., а мосты вытянуты в линии a, b, c, d, e, f, g (ребра). Нетрудно проверить, что фигуру, изображенную на схеме нельзя обвести острием пера, не отрывая его от бумаги и проходя по любой дуге ровно 1 раз. Решив эту задачу, Эйлер решил более общую задачу. Однако введем некоторые определения.

Последние 35-40 лет ознаменовали новый период интенсивных разработок теории графов. Появились новые области приложения: системы телекоммуникаций, биология, психология и другие.

4.1. Элементы теории графов

Фигура, состоящая из точек (вершин) и соединяющих их линий (ребер), называется *графом.*

Например:

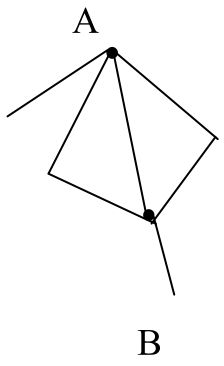


Рисунок 26. Пример графа

Граф G задается множеством **вершин** (точек) $X = \{x_1, ..., x_n\}$ и множеством **ребер** (линий) $A = \{a_1, .., a_n\}$, соединяющих между собой все или часть этих вершин. Таким образом, граф G полностью определяется заданием двух множеств (X, A).

Другое часто употребляемое описание графа состоит в задании множества вершин X и соответствия (отношения) G, которое показывает, как между собой связаны вершины. То есть граф задается следующим образом.

Пусть дано множество элементов X (вершин) графа и закон G, позволяющий установить соответствие между каждым элементом x множества X и некоторыми его подмножествами G(x). Тогда граф полностью определяется множеством X и соответствием G, то есть граф обозначается парой (X,G). Удобно использовать обозначение G(X) по аналогии с функцией.

Пример. Для графа, изображенного на рис. 3.1: множество вершин $X = \{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ и закон соответствия между вершинами:

$G(x_0) = \{x_1, x_2\}$,

$G(x_1) = \{x_0, x_2, x_4\}$,

$G(x_2) = \{x_0, x_1, x_5\}$,

$G(x_3) = \{x_4\}$,

$G(x_4) = \{x_1, x_3\}$,

$G(x_5) = \{x_2\}$,

$G(x_6) = \varnothing$.

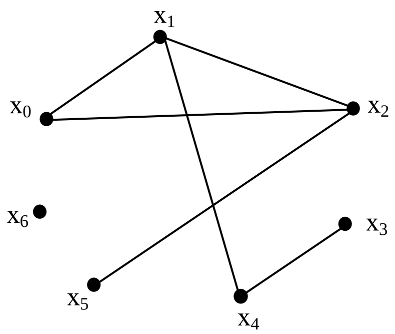


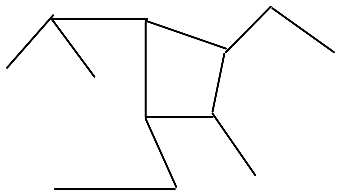
Рисунок 27. Пример задания графа

Ребра графа – линии, соединяющие вершины, указывают на соответствие между вершинами в графе.

Запись $g = (x_i, x_j)$ говорит, что ребро g **инцидентно** вершинам x_i и x_j, а вершины x_i, x_j **инцидентны** ребру g. Две вершины x_i, x_j называются **смежными**, если они определяют ребро графа. Два ребра графа называются **смежными**, если их концы имеют общую вершину.

Вершина, не инцидентная никакому ребру графа, называется **изолированной**. Если граф состоит из изолированных вершин, его называют **ноль-графом**.

Маршрутом, соединяющим вершины A и B графа, называется такая последовательность его ребер, в которой конец каждого ребра (кроме последнего) совпадает с началом следующего за ним, при этом первое ребро выходит из вершины A, а последнее входит в вершину B. В этом случае вершины A и B называются *связными*. *Граф* называется *связным,* если любая пара его вершин связанна.



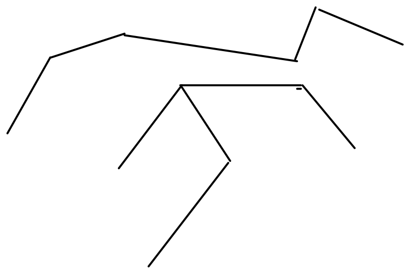


Рисунок 28. Связный граф Рисунок 29. Не связный граф

Маршрут называется цепью, если каждое ребро встречается в нем не более одного раза (вершины и цепи могут повторяться и несколько раз). Цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают, называется циклом. Вершина называется четной (или имеющей четную степень), если в ней сходится четное число ребер, и нечетной (имеющей нечетную степень), если число всех сходящихся в ней ребер нечетно.

Наконец, граф называется конечным, если множество его ребер конечно. Примером бесконечного графа может служить прямоугольная сетка, задаваемая на всей плоскости.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА: В любом конечном связном графе, все вершины которого четны, существует цикл, в котором каждое ребро графа участвует ровно один раз (Подробнее далее на стр.205).

В честь Эйлера такой цикл называют эйлеровым циклом, а граф, в котором существует эйлеров цикл – эйлеровым графом.

Обратимся к графу в задаче о кениксбергских мостах, заметим, что все его 4 вершины являются нечетными: B, C, D - сходятся по 3 ребра, в A – сходятся 5 ребер.

Это значит, что этот граф - не эйлеров.

4.2. Практические рекомендации

Если вам удавалось бывать в Санкт-Петербурге, то отказать себе в удовольствии побродить по залам Эрмитажа вы, по-видимому, уж никак не могли? Пользовались ли вы при этом планом музея? Если нет, то во время посещения почти наверняка вдруг обнаруживали, что именно в этом месте уже были раньше (и не один раз). А устав (музей то огромный) не так быстро смогли найти выход. И это не случайно- музейный лабиринт неохотно отпускает посетителей.

Устроители больших выставок вынуждены решать всегда одну и ту же задачу: *как обеспечить просмотр выставленных экспонатов, за наименьшее время с тем, чтобы дать возможность осмотреть всю экспозицию в отведенное время наибольшему числу желающих*.

Нетрудно сообразить, что необходимо расставить указатели таким образом, чтобы двигаясь в соответствии с ними, любой посетитель мог осмотреть любой экспонат по одному разу.

Если вход и выход совпадают, то разместить экспонаты надо так, чтобы экспедиция была ЭЙЛЕРОВЫМ ГРАФОМ. Что же касается указателей то они должны описывать эйлеров цикл. Если же вход и выход разные, то схема размещения экспонатов должна быть графом, у которого лишь две нечетные вершины, соответствующие входу и выходу.

Теория графов тесно связана с такими разделами математики, как теория множеств, теория матриц, математическая логика, теория вероятностей. Во всех этих разделах графы применяются для представления различных математических объектов, и тоже время сама теория графов широко использует аппарат родственных разделов математики.

4.3. Ориентированные графы

Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее движение автомобилей, отношения между людьми могут быть определены подчиненностью или старшинством. Ориентированные связи характеризуют переход из одного состояния в другое. Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют дугой, а граф с ориентированными ребрами – ориентированным графом.

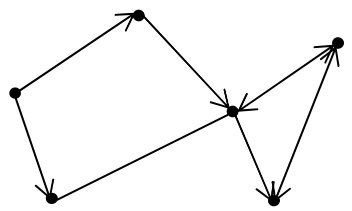


Рисунок 30. Ориентированный граф

Ребро графа называется **неориентированным**, если порядок расположения его концов (направление стрелок) в графе не принимается во внимание.

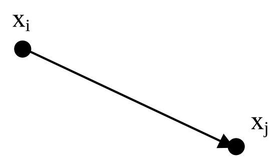


Рисунок 31. Дуга ориентированного графа

Ребро графа называется **ориентированным**, если этот порядок существенен. В этом случае говорят, что для ребра $g = (x_i, x_j)$: x_i – начальная, а x_j – конечная вершины ребра.

Ориентированное ребро называют дугой графа (рис. 31).

Граф называется **неориентированным или неорграфом**, если каждое ребро его не ориентированно, и **ориентированным или орграфом**, если каждое ребро его ориентированно. Если граф содержит ориентированные и неориентированные ребра, он называется **смешанным.**

Полным неориентированным графом называется граф U(X), ребрами которого являются всевозможные пары (x_i, x_j) для всех возможных вершин

$x_i, x_j \in X, i \neq j$.

В таком графе все вершины являются смежными (рис. 32).

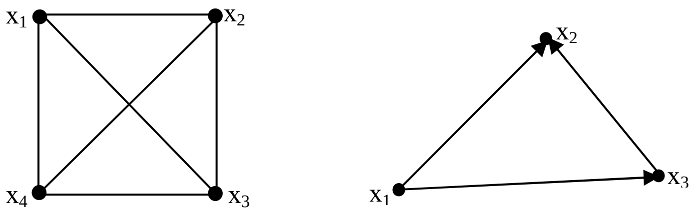


Рисунок 32. Полные неориентированный и ориентированный графы

Полным ориентированным графом $U_0(X)$ называется граф, у которого любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении.

Петлей называется ребро $g = (x_i, x_i)$, у которого начальная и конечная вершины совпадают (рис. 33) Петля обычно считается неориентированной.

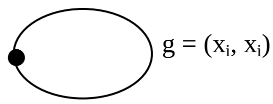


Рисунок 33. Петля

Мультиграфом называется граф, в котором пара вершин соединяется несколькими различными ребрами или дугами (рис.34).

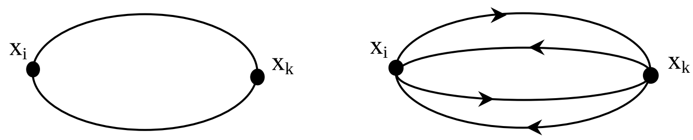


Рисунок 34. Неориентированный и ориентированный мультиграфы

Дополнением графа $G(X)$ является такой граф $G_d(X)$, который совместно с графом $G(X)$ образуют полный граф: $U(X) = G(X) \cup G_d(X)$.

Маршруты в графах

Маршрутом в произвольном графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной. В простом графе маршрут однозначно определяется только последовательностью вершин. Будем рассматривать следующие конечные маршруты, которые часто используются в задачах обхода графа: цепи, циклы и пути.

Для неориентированных графов справедливы следующие понятия.

Цепь – последовательность ребер $S = (g_1, g_2, ..., g_n)$, в которой у каждого ребра g_k одна из вершин является вершиной ребра g_{k-1}, а другая - вершиной ребра g_{k+1}. При этом одно и то же ребро или вершина может встречаться несколько раз. Пример цепи для графа (рис. 35):

$S = (g_0, g_l, g_2, g_3, g_4, g_5, g_2, g_б) = ((x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4),$ $(x_4, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_5))$.

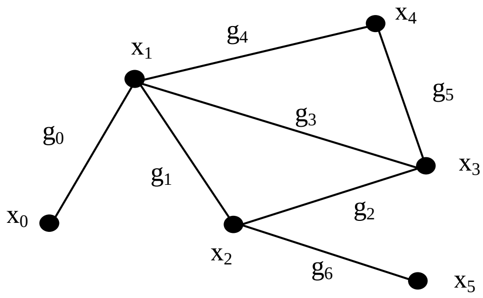


Рисунок 35. Пример цепи

Цепь называется **простой**, если все ребра в ней различны, и **сложной (составной)** – в противном случае. Вершины в простой цепи могут повторяться.

Цепь называется **элементарной**, если в ней ни одна из вершин не повторяется.

Циклом называется конечная цепь, начинающаяся на некоторой вершине x_i, и окачивающаяся на ней же. Простые, сложные и элементарные циклы определяются по аналогии с цепями.

Для ориентированных графов введены следующие дополнительные понятия.

Путем в графе G(X) называется такая последовательность дуг $(g_l, g_2, \ldots)$, что конец каждой предыдущей дуги является началом следующей. Существуют простые, сложные и элементарные пути.

Контур графа – это конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Существуют простые, сложные (составные) и элементарные контуры.

Длина пути есть число дуг L(s) в последовательности дуг пути s. В случае бесконечного пути $L(s) = \infty$.

Граф называется **симметрическим,** если $\forall$ x_i, x_j из того, что $x_i \in G(x_j) \Rightarrow x_j \in G(x_i)$, то есть две смежные вершины x_i, x_j всегда соединены противоположно ориентированными дугами (рис.36).

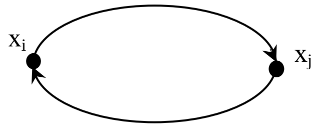


Рисунок 36. Симметрический граф

Граф называется **антисимметрическим**, если $\forall$ x_i, x_j $x_i \in G(x_j) \Rightarrow x_j \notin G(x_i)$, то есть каждая пара смежных вершин соединена только в одном направлении.

Граф называется **конечным**, если число его вершин конечно и **бесконечным,** если число вершин бесконечно. Граф G(X) называется **G – конечным**, если для каждой его вершины $x \in X$ множество G(x) конечно.

4.4. Частичные графы и подграфы

Граф H(x) называется **частичным** для графа G(X), если все ребра H(X) являются ребрами G(X) и множество вершин графа H(X) совпадает с множеством вершин графа G(X), то есть $H(x) \subset G(x)$ $\forall$ $x \in X$ (рис.3.8).

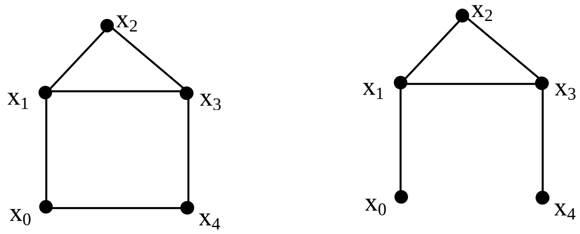


Рисунок 37. Граф G(X) и частичный для него граф H(X)

Частичный граф содержит ***часть ребер*** (дуг). Он также может быть ориентированным или неориентированным в зависимости от исходного графа.

Отметим, что ноль-граф графа G(X) считается его частичным графом. Все частичные графы H(X) для G(X) можно получить, выбирая в качестве ребер H(X) всевозможные подмножества множества ребер графа G(X).

Подграфом $G_A(A)$ графа G(X), где $A \subset X$, называется граф, вершинами которого являются элементы множества $A \subset X$, а ребрами – все ребра из G, концевые вершины которых лежат в A (рис.38).

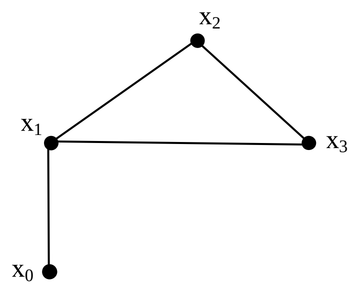


Рисунок 38. Подграф $G_A(A)$ графа G(X)

Таким образом, подграф содержит ***часть вершин*** вместе с ребрами, соединяющими эти вершины. Иначе, $G_A(A)$ – подграф графа G(X), если $A \subset X$ и $G_A(x) = G(x) \cap A \ \forall \ x \in X$.

Если $A = X$, то $G_A(A) = G(X)$. Для единственной вершины $A = \{a\}$ подграф $G_A(a)$ состоит из петель вокруг a. Подграфом $G_A(A)$ графа G(X) будет ноль-граф, если $A \subset X$ есть подмножество изолированных вершин графа.

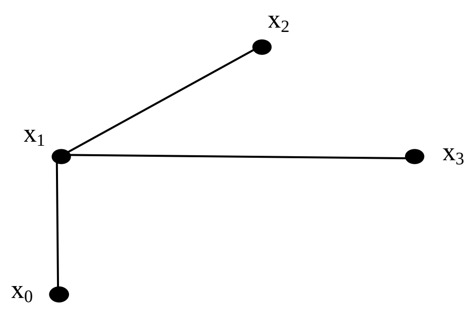


Рисунок 39.Частичный подграф $H_A(A)$ графа G(X)

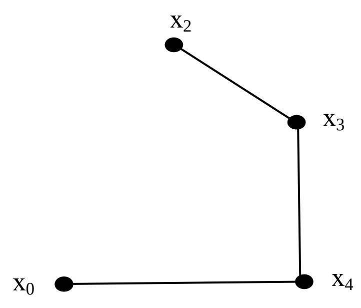


Рисунок 40. Дополнительный частичный граф H(A) графа G(X)

Подграф будет ориентированным или неориентированным в зависимости от исходного графа.

Частичным подграфом $H_A(A)$, $A \subset X$ графа $G(X)$ называется подграф (рис. 39), ребрами которого являются некоторые ребра из $G(X)$, оба конца которых лежат в A. Иначе, $H_A(A)$ – частичный подграф графа $G(X)$, если $A \subset X$ и $H_A(x) \subset G(x) \cap A \ \forall x \in X$.

Дополнительным частичным графом $H(A)$ графа $G(X)$ является единственный граф, состоящий из ребер графа $G(X)$, не принадлежащих некоторому частичному подграфу $H_A(A)$ графа $G(X)$ (рис. 40).

Связность в графах

Рассмотрим вопрос о связности в графах. Пусть $G(X)$ – неориентированный граф. Две вершины x_i и x_j называются **связными**, если существует цепь S с концами x_i и x_j. Если S проходит через некоторую вершину x_k более одного раза, то можно удалить цикл в вершине x_k из цепи S. Отсюда следует, что вершины, связанные цепью, связаны элементарной цепью.

Неориентированный граф называется связным, если любая пара его вершин связана. Отношение связности для вершин графа есть отношение эквивалентности ($x_i \sim x_j$, $x_j \sim x_k \Leftrightarrow x_i \sim x_k$).

Компонентой связности неориентированного графа $G(X)$ называется подграф $H_A(A)$ графа $G(X)$ с множеством вершин $A \subset X$ и множеством ребер в $G(X)$, инцидентных только вершинам из A, причем ни одна вершина $x_i \in A$ не смежна с вершинами из множества $X \setminus A$ (рис. 41).

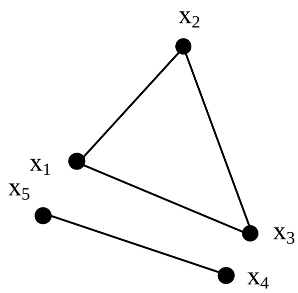


Рисунок 41. Граф с двумя компонентами связности

Ориентированный граф называется **сильно связным**, если для любой пары вершин найдется путь, соединяющий их.

Компонентой сильной связности ориентированного графа G(X) называется подграф $H_A(A)$ графа G(X) (подчиняющийся определению сильно связного графа) с множеством вершин $A \subset X$ и множеством дуг, имеющих начало и конец в A, причем ни одна из вершин $x_i \in A$ и $x_j \in X \setminus A$ не смежны между собой (рис. 42).

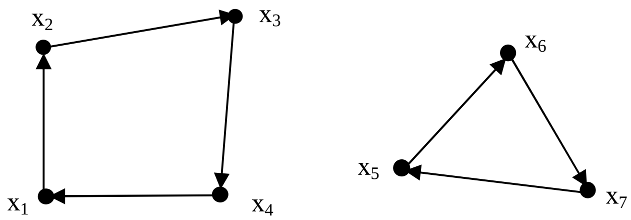


Рисунок 42. Ориентированный граф с двумя компонентами сильной связности

Очевидно, что ориентированный граф G(X) сильно связан тогда и только тогда, когда он имеет одну компоненту связности.

4.5. Взвешенные графы

Дальнейшее обобщение отображения связей между объектами с помощью графов состоит в преписывании ребрам и дугам некоторых количественных значений, качественных признаков или характерных свойств, называемых весами. В простейшем случае это может быть порядковая нумерация ребер и дуг, указывающая на очередность при их рассмотрении (приоритет или иерархия). Вес ребра или дуги может означать длину (пути сообщения), количество набранных очков (турниры), характер отношений между людьми (сын, брат, отец, подчиненный, учитель и т.д).

Вес можно приписывать не только ребрам и дугам, но и вершинам (вес вершины означает любую характеристику соответствующую ей объекта (цвет, изображенного вершиной предмета, возраст человека и т.д.)

4.6. Деревья и лес

Особый интерес представляют связные акциклические графы, называемые деревьями. Дерево на множестве P вершин всегда содержит q=p-1 ребер, т.е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связанным. При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из который представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязанный граф, компоненты которого являются деревьями, называется лесом. Примерами древовидной структуры являются генеологический граф (родословное дерево), а также совокупность всех файлов, размещенных на жестком диске компьютера или дискете. Каждый логический диск имеет каталог, называемый главным или корневым. Он имеет оглавление, подобное оглавлению книги. В оглавлении корневого каталога перечислено содержимое диска: имена файлов этого каталога и других каталогов, вложенных в него.

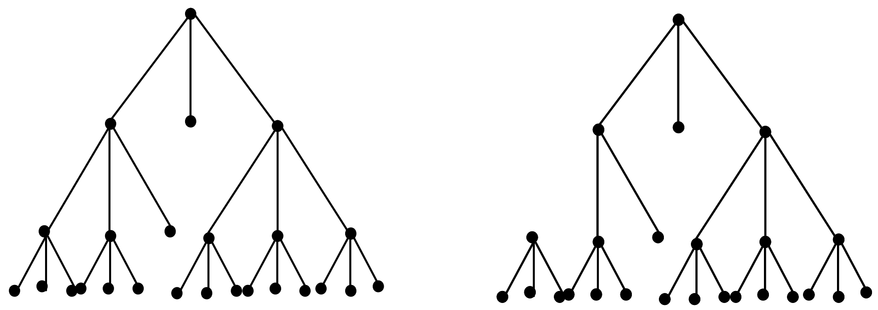


Рисунок 43. Пример графа дерево и графа лес

На практике широко используются такие виды графов, как деревья и прадеревья.

Деревом называется конечный связный неориентированный граф, состоящий, по крайней мере, из двух вершин и не содержащий циклов. Такой граф не имеет петель и кратных ребер (рис. 44).

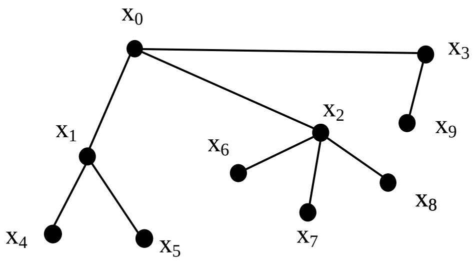


Рисунок 44. Дерево

Ветвями дерева называются ребра графа, входящие в дерево. **Хордами дерева** называются ребра, входящие в граф, дополнительный к данному дереву. **Лагранжевым деревом** называется дерево, все ветви которого имеют общую вершину.

Лесом называется несвязный граф, каждая компонента связности которого является деревом.

Прадеревом называется ориентированный граф $G(X)$ с корнем $x_0 \in X$, если в каждую вершину $x_i \neq x_0$ ($x_i \in X$) заходит ровно одна дуга, а в корень x_0 не заходит ни одна дуга. Прадерево не содержит контуров (рис.45).

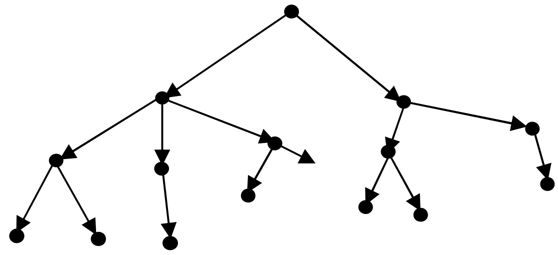


Рисунок 45. Прадерево

4.7. Изоморфизм. Плоские графы

В изображении графа имеется относительно большая свобода в размещении вершин и в выборе формы соединяющих их ребер. Поэтому один и тот же граф может быть представлен по-разному (рис. 46).

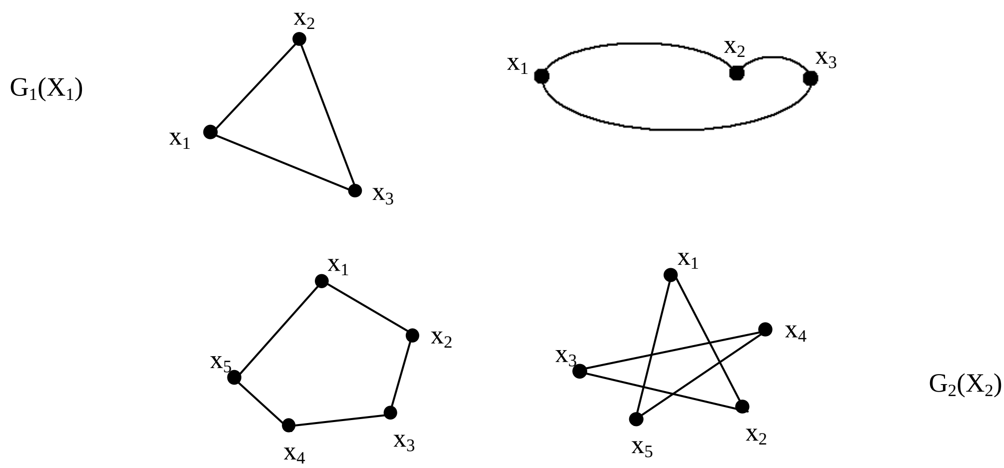
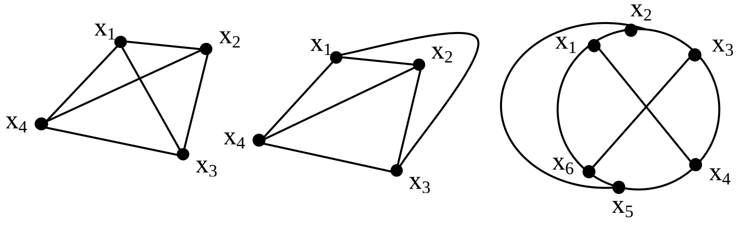


Рисунок 46. Примеры изоморфных графов

Графы $G_1(X_1)$ и $G_2(X_2)$ называются **изоморфными**, если между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность вершин. Иначе, если вершины являются смежными (соединены ребрами) в одном из графов, то соответствующие им вершины в другом графе также являются смежными. Если ребра графов ориентированы, то их направление в изоморфных графах также должно соответствовать друг другу.

Граф $G(X)$ называется плоским, если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения его ребер являются вершинами графа $G(X)$ (рис. 47).



а) б)

Рисунок 47. Примеры плоского (а) и неплоского (б) графов

4.8. Отношения на множествах и графы

Каждый ориентированный граф G(X) определяет некоторое отношение на множестве X своих вершин. Это отношение может быть записано как x_i G x_j. Оно означает, что в графе есть дуга, идущая от x_i к x_j.

Отношению со свойством **рефлексивности** (x R x) должна соответствовать на графе *петля* в вершине. Если это отношение соблюдается во всех вершинах $x \in X$, то соответствующий граф G(X) должен иметь петлю в каждой своей вершине.

В случае **антирефлексивного** отношения на множестве X, соответствующий граф ни в одной из вершин не имеет петли.

Симметрическому отношению на множестве X соответствует граф с *неориентированными* ребрами и, наоборот, граф с неориентированными ребрами определяет некоторое симметрическое отношение.

В случае **антисимметрического** отношения на графе невозможно присутствие двух дуг (x_i, x_j), (x_j, x_i) на графе, то есть существование неориентированного ребра. Кроме того, на этих графах нет петель, то есть соответствующее антисимметрическое отношение антирефлексивно.

Отношение, обладающее свойством **тождественности**, соответствует графу с антисимметричным отношением на множестве вершин (ориентированному графу) и добавлением петли в каждой вершине. Этот граф не должен иметь контуров.

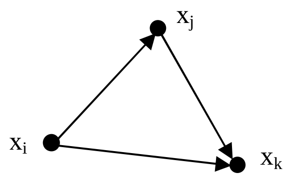
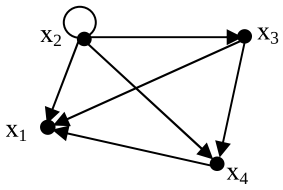


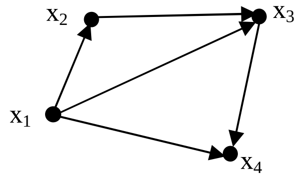
Рисунок 48. Свойство транзитивности на графе

Граф, соответствующий **транзитивному** отношению (рис. 48), обладает следующими свойствами: для любой пары ориентированных ребер (дуг) графа

(x_i, x_j), (x_j, x_k) имеется замыкающая дуга (x_i, x_k). Можно сказать, что в графе, который соответствует транзитивному отношению, для каждого пути S(x_i, x_k) имеется дуга (x_i, x_k) (рис.49).



а)



б)

Рисунок 49. Транзитивный (а) и нетранзитивный (б) графы

Отношение, обладающее свойством **полноты**, определено на множестве вершин полного ориентированного графа.

Нулевое отношение определено на множестве вершин ноль-графа.

Универсальное отношение определено на множестве вершин полного неориентированного графа с петлями. **Дополнительное** к R отношение $\overline{R}$ определено на множестве вершин дополнительного графа G_d(X) к G(X).

Графы, соответствующие отношению **эквивалентности**, представляют собой совокупность компонент связности (для каждого класса эквивалентности своя компонента) несвязного графа. Каждая компонента несвязного графа должна быть полным неориентированным графом с петлями (рис. 50).

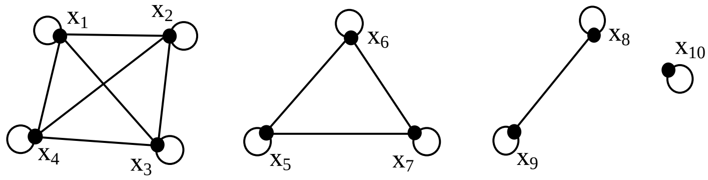


Рисунок 50. Граф, соответствующий отношению эквивалентности

4.9. Матрицы смежности и инциденций графа

Если в графе G(X) через a_{ij} обозначить число дуг, идущих из x_i в x_j, то матрица A = ‖ a_{ij} ‖ (i = 1, ..., n; j=1, ..., n; где n – число вершин графа) называется

матрицей смежности вершин графа.

Наличие нулевого элемента на главной диагонали означает отсутствие петли в соответствующей вершине.

Матрица $A^т$ соответствует графу $G^{-1}(X)$. Матрица A является симметрической тогда и только тогда, когда граф G(X) – симметрический. Матрица A антисимметрична тогда и только тогда, когда граф G(X) – антисимметрический. Матрица A полна тогда и только тогда, когда граф G(X) – полный ($a_{ij} + a_{ji} \geq 1$).

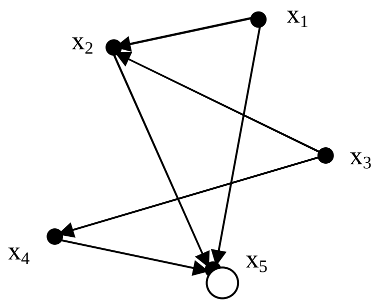


Рисунок 51. Пример графа для определения матрицы смежности A

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрицей смежности ребер графа называется такая матрица $B = \| b_{ij} \|$ (I = 1, ..., m; j = 1, ..., m; где m - число ребер графа), что:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребра } g_i \text{ и } g_j \text{ имеют общий конец,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $g_1, ..., g_m$ – дуги, $x_1, ..., x_n$ – вершины ориентированного графа G(X). Матрица $S = \| s_{ij} \|$ (I = 1, ..., n – номер вершины графа, j = 1, ..., m – номер дуги графа), такая что:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } g_j \text{ исходит из } x_i, \\ -1, \text{ если } g_j \text{ заходит в } x_i, \\ \end{cases}$$

0, если g_j не инцидентна x_i

называется **матрицей инциденций** для дуг графа.

Для неорграфа матрица R = || r_{ij} || размером n x m, где:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \ (i = 1, ..., n) \text{ инцидентна } g_j \ (j = 1, ..., m), \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

называется **матрицей инциденций для ребер** графа.

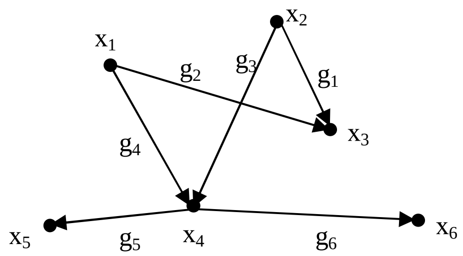


Рисунок 52. Пример графа для определения матриц S и R

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.10. Операции над графами

Сумма графов

Пусть даны два графа $G_1(X)$ и $G_2(X)$ на одном и том же множестве вершин. Тогда **суммой** графов $G_1(X)$ и $G_2(X)$ является граф $G(X)$, состоящий из ребер, принадлежащих $G_1(X)$ или $G_2(X)$.

Таким образом, если $(x_i', x_j') \in G_1(X)$ и $(x_i'',x_j'') \in G_2(X)$, то $(x_i', x_j') \in G(X)$ и $(x_i'', x_j'') \in G(X)$ $\forall$ $(x_i', x_j', x_i'', x_j'') \in X$.

Символически сумму двух графов обозначают следующим образом: $G(X) = G_1(X) \cup G_2(X)$. Аналогично определяется сумма n графов $G_i(X)$ (i=1,..., n):

$$G(X) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(X)$$

как граф, состоящий из ребер, принадлежащих хотя бы одному из графов $G_i(X)$ (рис. 54).

Операция суммирования графов обладает переместительным свойством: $G_1(X) \cup G_2(X) = G_2(X) \cup G_1(X)$.

Рассмотрим случай, когда операция суммы графов применяется к графам, определенным на различных множествах вершин. Тогда суммой G(X) будет граф

$$G(X) = G_1(X_1) \cup G_2(X_2) \cup \ldots \cup G_n(X_n) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(X_i),$$

для которого справедливо:

$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$

и $G(x_j) = G_1(x_j) \cup G_2(x_j) \cup \ldots \cup G_n(x_j) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(x_j)$, $x_j \in X$.

Сумма графов $G_1(X_1)$ и $G_2(X_2)$ изображена на рис. 53.

Пример 1.

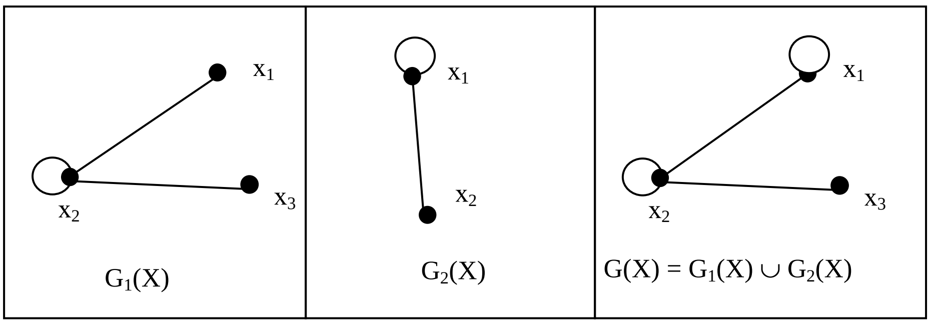


Рисунок 53. Суммирование графов с различными множествами вершин

Пример 2

а)

б)

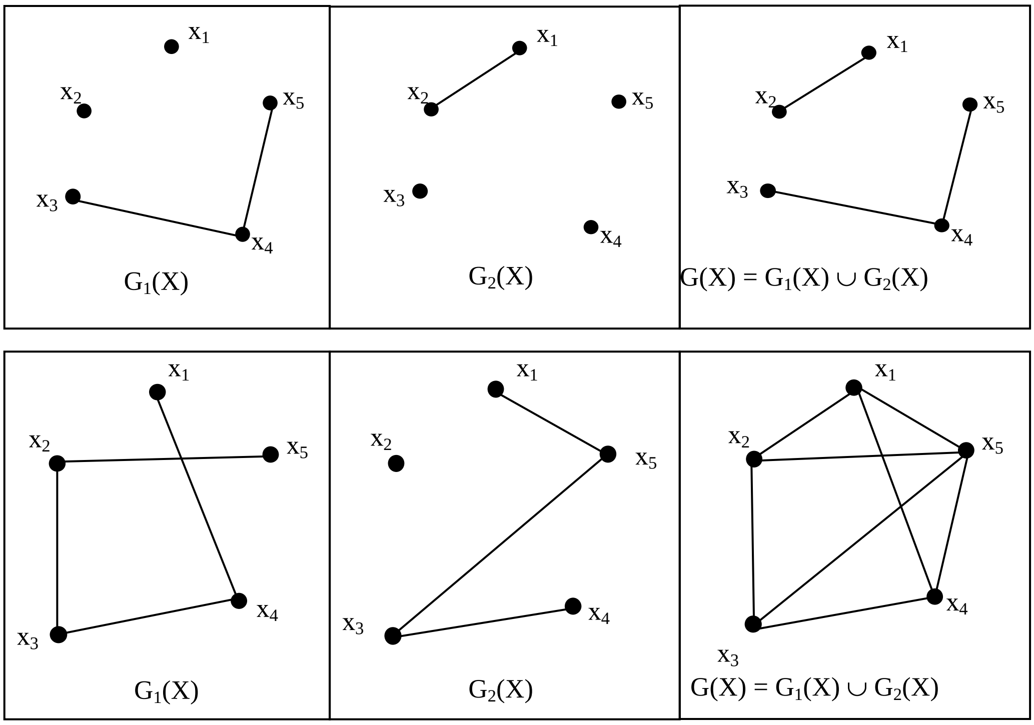


Рисунок 54. Суммирование графов с одинаковыми множествами вершин

Пересечение графов

Пусть даны два графа $G_1(X)$ и $G_2(X)$ на одном и том же множестве вершин. Тогда **пересечением** графов $G_1(X)$ и $G_2(X)$ называется граф $G(X)$, состоящий из ребер, принадлежащих и $G_1(X)$ и $G_2(X)$, то есть если $(x_i, x_j) \in G_1(X)$ и $(x_i, x_j) \in G_2(X)$, то $(x_i, x_j) \in G(X)$.

Обозначение пересечения двух графов:

$G(X) = G_1(X) \cap G_2(X)$.

Аналогично пересечение n графов $G_i(X)$ $(i = 1, ..., n)$ обозначается как $G(X) = \bigcap_{i=1}^{n} G_i(X)$ и определяет граф $G(X)$, состоящий из ребер, принадлежащих всем графам $G_i(X)$.

Для графов примера 2 (рис. 54) имеем:

а) пересечение $G_1(X) \cap G_2(X) = \varnothing$ (ноль-граф);

б) пересечение $G_1(X) \cap G_2(X)$ (рис. 55).

Для графов, определенных на различных множествах вершин операция пересечения определяется следующим образом:

$$G(X) = G_1(X_1) \cap G_2(X_2) \cap \ldots \cap G_n(X_n) = \bigcap_{i=1}^{n} G_i(X_i)$$

где $X = X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$

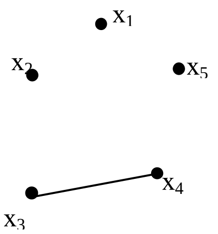


Рисунок 56.
Пересечение графов
примера 2, б

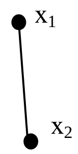


Рисунок 56.
Пересечение графов
примера 1

и $G(x_j) = G_1(x_j) \cap G_2(x_j) \cap \ldots \cap G_n(x_j) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i(x_j)$, $x_j \in X$.

4.11. Степени графов

Степени неориентированных графов

Пусть $G(X)$ – неориентированный граф. **Степенью m(x)** графа $G(X)$ в вершине x называется число ребер, инцидентных вершине x. Если все числа $m(x)$ для $x \in X$ конечны, то граф называется **локально конечным**. Петли можно считать одинарным или двойным ребром в зависимости от конкретной задачи.

Обозначим $m(x_i, x_j) = m(x_j, x_i)$ – число ребер, соединяющих вершины x_i и x_j. Если в графе $G(X)$ нет кратных ребер, то $m(x_i, x_j) = 0$ или $m(x_i, x_j) = 1$.

Очевидно, что

$$m(x_i) = \sum_{x_j \in X} m(x_i, x_j).$$

Поскольку каждое ребро учитывается в двух вершинах x_i и x_j, то общее число ребер m графа $G(X)$:

$$m = \frac{1}{2}\sum_{x_i \in X} m(x_i) = \frac{1}{2}\sum_{x_i \in X}\ \sum_{x_j \in X} m(x_i, x_j). \qquad (*)$$

Это выражение справедливо и для графов с петлями, если петлю считать двойным ребром.

Так как $\sum_{x_i \in X} m(x_i)$ – четное число, то можно сделать вывод о том, что в конечном графе **число вершин с нечетной степенью четно**. Это следует из того, что если из суммы вычесть все слагаемые, соответствующие вершинам с четной степенью, она останется четной.

Граф, степени всех вершин в котором равны, называется **однородным**, т.е. $m(x_i) = m_n\ \forall\ x_i \in X$.

Конечные однородные графы могут быть представлены в виде правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра и т.д. Примеры бесконечных однородных графов изображены на рис. 57.

Из (*) следует, что в однородном графе степени m_n, число ребер равно $m = \frac{1}{2} m_n \times n$, где n - число вершин.

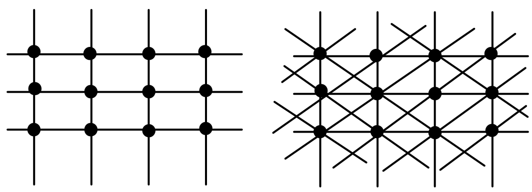


Рисунок 57. Бесконечные однородные графы

Степени ориентированных графов

В ориентированном графе существуют такие понятия, как **полустепени исхода и захода**.

Полустепенью исхода $m'(x)$ называется число дуг, выходящих из вершины x. Полустепень захода $m''(x)$ – число дуг, входящих в вершину x. Петли считают по одному разу в каждой из полустепеней.

Аналогом кратности неориентированных ребер $m(x_i,x_j)$ в ориентированном графе являются две кратности: $m'(x_i, x_j)$ – число дуг, направленных от x_i к x_j, $m''(x_i,x_j)$ – число дуг, направленных от x_j к x_i.

Таким образом:

$m'(x_i, x_j) = m''(x_j, x_i)$.

Число дуг, выходящих из вершины x_i, определится суммой

$$m'(x_i) = \sum_{x_j \in X} m'(x_i, x_j) = \sum_{x_j \in X} m''(x_j, x_i),$$

а число дуг, входящих в вершину x_i равно

$$m''(x_i) = \sum_{x_j \in X} m''(x_i, x_j) = \sum_{x_j \in X} m'(x_j, x_i),$$

Отсюда общее число дуг графа:

$$m = \sum_{x_i \in X} m'(x_i) = \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} m'(x_i, x_j) = \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} m''(x_j, x_i),$$

Если все полустепени $m'(x)$ и $m''(x)$ равны для всех $x \in X$, то ориентированный граф $G(X)$ называется **однородным графом** степени m_n.

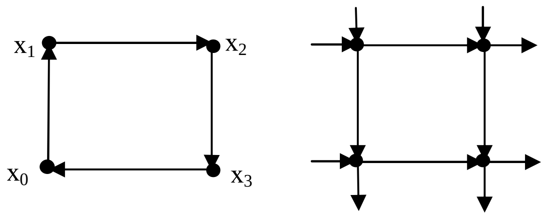


Рисунок 58. Однородные ориентированные графы

Для такого графа $m = m_n \times n$, где n число вершин графа $G(X)$. Примеры однородных ориентированных графов приведены на рис. 58.

4.12. Характеристики графов

Характеристики расстояний в графах

Пусть $G(X)$ – конечный или бесконечный ориентированный граф. **Отклонением** $d(x_i, x_j)$ его вершины x_i от вершины x_j называется длина кратчайшего пути из x_i в x_j:

$d(x_i, x_j) = \min \{l[S_k(x_i, x_j)]\}$.

Отклонение $d(x_i, x_j)$ удовлетворяет следующим аксиомам метрического пространства:

1. $d(x_i, x_j) \geq 0$;

2. $d(x_i, x_j) = 0 \Leftrightarrow x_i = x_j$;

3. $d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_k)$ – неравенство треугольника и не удовлетворяет четвертой аксиоме, а именно:

4. d(xi, xj) ≠ d(xj, xi), так как граф ориентирован.

Необходимо отметить, что если $x_j \notin G(x_i)$, то $d(x_i, x_j) = \infty$. **Отклоненностью** вершины x_i называется наибольшее из отклонений $d(x_i, x_j)$ по всем x_j:

$$d(x_i) = \max_{x_j \in X}\{d(x_i, x_j)\} = \max_{x_j \in X}\{\min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}\}.$$

В качестве примера рассмотрим схему первой (1870 г.) сети связи для почтовых голубей (рис. 59).

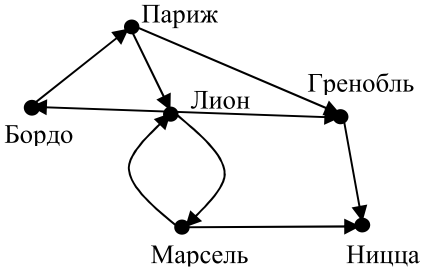


Рисунок 59. Схема первой сети связи для почтовых голубей

Граф, представляющий ее, изображен на рис. 3.29, а матрица отклонений и вектор отклоненностей – в табл. 8 и табл. 19 соответственно.

Таблица 18. Отклонения $d(x_i, x_j)$

Города	**П**	**Б**	**Л**	**Г**	**М**	**Н**
Париж	0	2	1	1	2	2
Бордо	1	0	2	2	3	3
Лион	2	1	0	1	1	2
Гренобль	∞	∞	∞	0	∞	1
Марсель	3	2	1	2	0	1
Ницца	∞	∞	∞	∞	∞	0

Таблица 19. Вектор отклонений

Города	П	Б	Л	Г	М	Н
$d(x_i)$	2	3	2	∞	3	∞

Для неориентированного графа, соответствующего графу, изображенному на рис. 59, можно найти аналогичные характеристики, но без учета ориентации дуг. При этом матрица $d(x_i, x_j)$ оказывается симметричной.

В связном неориентированном графе понятиям отклонения и отклоненности соответствуют понятия: **расстояние** и **удаленность**.

Пусть G(X) – связный неориентированный граф. В соответствии с определением связности для вершин x_i и x_j графа существует элементарная цепь $S(x_i, x_j)$ с концами x_i и x_j, причем $l(S) \geq 0$.

Расстоянием $d(x_i, x_j)$ между вершинами x_i и x_j называется длина цепи $S(x_i, x_j)$ наименьшей длины

$$d(x_i, x_j) = \min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}.$$

Удаленность вершины x_i графа G(X) есть число

$$d(x_i) = \max_{x_j \in X} \{d(x_i, x_j)\} = \max_{x_j \in X} \{\min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}\}.$$

Центром графа называется вершина, в которой достигается наименьшая из отклоненностей (удаленностей), если таковая является конечным числом. В графе может быть несколько центров (Париж, Лион), а может не быть ни одного.

Периферийной вершиной графа называется вершина с наибольшей отклоненностью или удаленностью (Гренобль, Ницца).

Радиусом р(G) ориентированного графа называется отклоненность его центра.

$$\rho(G) = \min_{x_i \in X} d(x_i) = \min_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} \{ \min_k \{l[S_k(x_i, x_j)]\}\}$$

В примере (рис. 59) $\rho(G) = 2$ ($d(П) = d(Л) = 2$). Если в графе нет центров, то полагают, что $\rho(G) = \infty$. В неориентированном графе $\rho(G)$ – удаленность центра.

Диаметром неориентированного графа называется удаленность периферийной вершины.

Характеристические числа графов

Решение многих технических задач методами теории графов сводится к определению тех или иных характеристик графов, поэтому полезно знакомство со следующими характеристиками.

Цикломатическое число. Пусть G(X) – неориентированный граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности. Цикломатическим числом графа G называется число $\mu(G) = m - n + k$.

Это число имеет интересный физический смысл: оно равно наибольшему числу базисных (независимых) циклов в графе. При расчете электрических цепей цикломатическим числом можно пользоваться для определения числа независимых контуров.

Хроматическое число. Пусть p – натуральное число. Граф G(X) называется p-хроматическим, если его вершины можно раскрасить различными цветами так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково. Наименьшее число p, при котором граф является p-хроматическим, называется хроматическим числом графа и обозначается $\gamma(G)$.

Если $\gamma(G) = 2$, то граф называется **бихроматическим**. Необходимым и достаточным условием того, чтобы граф был бихроматическим, является отсутствие в нем циклов нечетной длины.

Хроматическое число играет важную роль при решении задачи наиболее экономичного использования ячеек памяти при программировании. Однако его определение, за исключением $\gamma(G) = 2$, представляет собой довольно трудную задачу, требующую применения ЭВМ.

Множество внутренней устойчивости. Множество $S \subset X$ графа G(X) называется внутренне устойчивым, если никакие две вершины из S не являются смежными, то есть для любого $x \in S$ имеет место:

$G(x) \cap S = \varnothing$.

Множество внутренней устойчивости, содержащее наибольшее число элементов, называется **наибольшим** внутренне устойчивым множеством, а число элементов этого множества называется числом **внутренней устойчивости** графа G. Наибольшее внутренне устойчивое множество играет важную роль в теории связи.

Множество внешней устойчивости. Множество $T \subset X$ графа $G(X)$ называется внешне устойчивым, если любая вершина, не принадлежащая T, соединена дугами с вершинами из T, то есть для любого $x \notin T$ имеет место: $G(x) \cap T \neq \varnothing$.

Множество внешней устойчивости, содержащее наименьшее число элементов, называется **наименьшим** внешне устойчивым множеством, а число элементов этого множества называется **числом внешней устойчивости** графа G(X).

4.13. Циклы и разрезы графа

Остов и кодерево

Остовом T графа G называется называется подграф графа в виде дерева, содержащий все его вершины. Остов определяет каркас графа. **Кодеревом T^*** остова T называется подграф графа G, содержащий все вершины и только те ребра, которые не входят в остов T. Ребра остова называют ветвями, а ребра кодерева - хордами.

Из определений остова и кодерева следует:

1. Объединение остова T и кодерева T^* есть граф G:

$T \cup T^* = G$.

2. Кодерево есть дополнение остова T до графа G:

$T^* = G \setminus T = \overline{T}$.

Рассмотрим пример графа, изображенного на рис. 60.

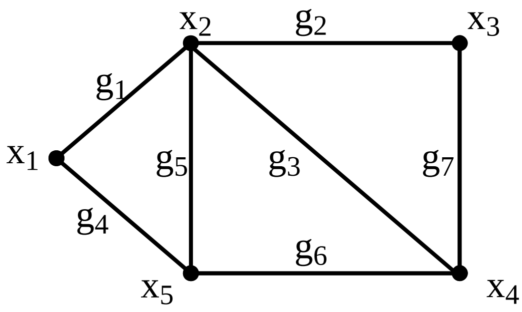


Рисунок 60. Граф

Выберем остов графа в виде связного дерева (рис. 61).

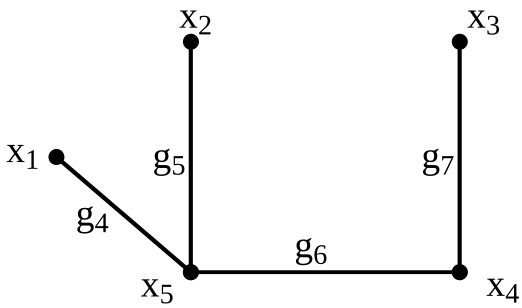


Рисунок 61. Остов графа

Кодерево для данного остова имеет вид несвязного графа (рис. 62), но он может быть и связным.

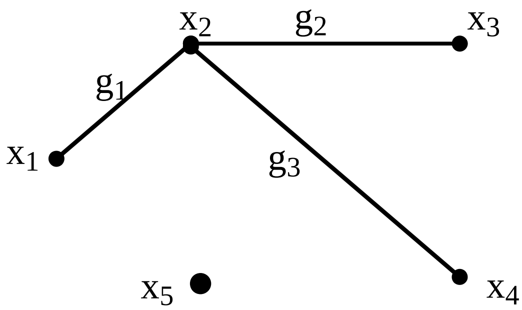


Рисунок 62. Кодерево графа

4.14 . Базисные циклы и разрезающие множества

Пусть T- остов графа G, а g_i^* – хорда кодерева T*. Так как T – ацикличный граф, то граф $T \cup g_i^*$ содержит точно один цикл C_i. Цикл C_i состоит из хорды g_i^*

и тех ветвей остова T, которые образуют единственную простую цепь между концевыми вершинами хорды g_i^*. Цикл C_i, возникающий в графе $T \cup g_i^*$, называется **базисным циклом** относительно хорды g_i^* остова T. Множество всех таких циклов, число которых равно цикломатическому числу $\mu(G)$ графа G, называют **базисным множеством циклов** графа G относительно остова T.

Пусть G(X) – связный граф и $X = \{X_1, X_2\}$ – некоторое разбиение множества его вершин: $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Множество ребер графа G, одна концевая вершина каждого из которых принадлежит X_1, а другая – X_2, называется **разрежающим множеством** или **разрезом** графа. Удаление разрежающего множества – разрез графа, разделяет граф на две компоненты и делает его несвязным.

Пусть T – остов связного графа G, а g_j – ветвь этого остова. Удаление ветви из остова разбивает остов на 2 компоненты T_1 и T_2. Пусть X_1 и X_2 множества вершин, соответственно, компонент T_1 и T_2, а G_1 и G_2 – подграфы графа G, порожденные множествами вершин X_1 и X_2. Очевидно, что T_1 – остов подграфа G_1, а T_2 – остов подграфа G_2. Следовательно, подграфы G_1 и G_2 связны, а разрез, разделяющий X_1 и X_2, является разрежающим множеством графа G.

Разрежающее множество S_j, составленное из ребер, связывающих вершины компонент T_1 и T_2 остова называется **базисным разрежающим множеством** графа G. При этом, компоненты T_1 и T_2 остова образованы удалением ветви g_j остова T.

Свойства базисных циклов и разрежающих множеств

1. Базисный цикл C_i относительно хорды g_i^* кодерева T* связного графа G включает точно те ветви остова T, которым соответствуют базисные разрежающие множества, включающие эту хорду.

2. Базисное разрежающее множество S_j относительно ветви g_j остова T связного графа G включает точно те хорды кодерева T*, которым соответствуют базисные циклы, включающие эту ветвь.

Цикломатическая матрица и матрица разрезов

Рассмотренные ранее такие понятия как цикломатическое число и ранг, являются одними из важных числовых характеристик графов. Они определяют, соответственно, количество базисных циклов и базисных разрежающих множеств следующим образом:

1. Количество базисных циклов графа G равно цикломатическому числу графа - числу ребер в кодереве.

2. Количество базисных разрежающих множеств равно величине ранга графа - числу ребер в остове.

Построим цикломатическую матрицу $C = (c_{ik})$ и матрицу разрезов $S = (s_{jk})$ графа, элементы которых:

$$c_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если } g_k \in C_i; \\ 0, \text{ если } g_k \notin C_i. \end{cases} \qquad s_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ если } g_k \in S_j; \\ 0, \text{ если } g_k \notin S_j. \end{cases}$$

Каждая строка матриц C и S определяет некоторый цикл и разрез графа. Количество строк этих матриц равно числу всех циклов и разрезов исходного графа G соответственно. Эти строки матриц, а также соответствующие им циклы и разрезы, можно получить как суперпозицию базисных циклов и разрежающих множеств.

Суперпозиция осуществляется с помощью операции сложения по модулю 2 двоичной алгебры, обозначаемой символом $\oplus$. Вектор-строка $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})$, описывающая цикл C_i графа, вычисляется как покомпонентная сумма по модулю 2 векторов, соответствующих базисным циклам. Аналогично, вектор-строка $s_j = (s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm})$ описывает разрез S_j графа и вычисляется как сумма по модулю 2 векторов, соответствующих базисным разрезающим множествам.

Рассмотрим пример построения этих матриц для графа, приведенного на рис. 60. Сначала вычислим ранг и цикломатическое число этого. Ранг графа – число ребер в остове (рис. 61) – равен 4. Цикломатическое число графа – число ребер в кодереве (рис. 62) – равно 3. Следовательно, имеем 3 базисных цикла и 4 базисных разрезающих множества. Далее запишем эти базисные циклы и разрезающие множества.

Базисные циклы:

$c_1 = \{g_1, g_4, g_5\}$;
$c_2 = \{g_2, g_5, g_6, g_7\}$;
$c_3 = \{g_3, g_5, g_6\}$.

Базисные разрезающие множества:

$s_1 = \{g_1, g_4\}$;
$s_2 = \{g_1, g_2, g_3, g_5\}$;
$s_3 = \{g_2, g_3, g_6\}$;
$s_4 = \{g_2, g_7\}$.

Составление цикломатической матрицы

C =

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
c_1	1	0	0	1	1	0	0
c_2	0	1	0	0	1	1	1
c_3	0	0	1	0	1	1	0
c_4	1	1	0	1	0	1	1
c_5	1	0	1	1	0	1	0
c_6	0	1	1	0	0	0	1
c_7	1	1	1	1	1	0	1

где

$C_4 = C_1 \oplus C_2$; $C_5 = C_1 \oplus C_3$;
$C_6 = C_2 \oplus C_3$; $C_7 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3$.

Составление матрицы разрезов

S =

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
s_1	1	0	0	1	0	0	0
s_2	1	1	1	0	1	0	0
s_3	0	1	1	0	0	1	0
s_4	0	1	0	0	0	0	1
s_5	0	1	1	1	1	0	0
s_{15}	0	1	0	1	1	1	1

где

$$S_5 = S_1 \oplus S_2, S_6 = S_1 \oplus S_3, S_7 = S_1 \oplus S_4,$$
$$S_8 = S_2 \oplus S_3, S_9 = S_2 \oplus S_4, S_{10} = S_3 \oplus S_4,$$
$$S_{11} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3, S_{12} = S_1 \oplus S_3 \oplus S_4,$$
$$S_{13} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_4, S_{14} = S_2 \oplus S_3 \oplus S_4,$$
$$S_{15} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4.$$

Замечание. Символ $\oplus$ обозначает операцию сложения по модулю 2. Результат этой операции равен 0, если арифметическая сумма чисел есть четное число, и равен 1–в противном случае.

Цикломатическая матрица C и матрица разрезов S являются ортогональными, что математически выражается матричным уравнением: $C \cdot S^T = \theta$. Здесь S^T – транспонированная матрица S, а θ – нулевая матрица.

Ортогональность матриц C и S обусловлена тем, что множество хорд, порождающих базисные циклы, и множество ветвей, порождающих базисные разрезающие множества, не пересекаются (рис. 60). Легко проверить ортогональность полученных матриц.

4.15. Задача определения путей в графах

Определение путей в графе

Решение целого ряда практических задач, описываемых в терминах графов, зависит от существования некоторой цепи, соединяющей данную вершину с какой-либо другой. Например, в качестве вершин графа можно рассматривать исходные позиции или состояния некоторой головоломки или игры, а ребра будут указывать возможные ходы из одной позиции в другую. Ребро будет неориентированным или ориентированным в зависимости от того, обратим переход или нет.

Граф G(X) с двумя отмеченными вершинами x_i, x_j называется (x_i, x_j) – плоским, если граф $G'(X)=G(X)\cup(x_i, x_j)$, полученный добавлением к G(X) ребра (x_i, x_j), является плоским.

Рассмотрим алгоритм определения пути, ведущего из вершины x_i в x_j

плоского графа. Если x_i не является вершиной никакого простого цикла, то при определении алгоритма пути из x_i в x_j в графе G(X) всегда выбирается самый левый или правый коридор (ребро) (рис. 63).

- - - - – путь при выборе левого коридора;

.... – путь при выборе правого коридора.

Аналогичный алгоритм определения пути в прадереве предполагает следующие действия. Из корня идти по какой-либо ветви насколько возможно далеко, затем возвратиться на какой-нибудь перекресток и отправиться по новому направлению (еще не пройденному) и т.д. Искомый путь из x_i в x_j будет состоять из всех тех ребер, которые в процессе поиска были пройдены по одному разу.

При определении пути в произвольном графе, не являющемся прадеревом, приходим к предыдущему случаю следующим образом. Если, пройдя по некоторому ребру g, попадаем на уже пройденный ранее перекресток x, то ребро g «отсекается» от одной из своих концевых точек. После отсечения ребра, пройденные хотя бы один раз, образуют прадерево.

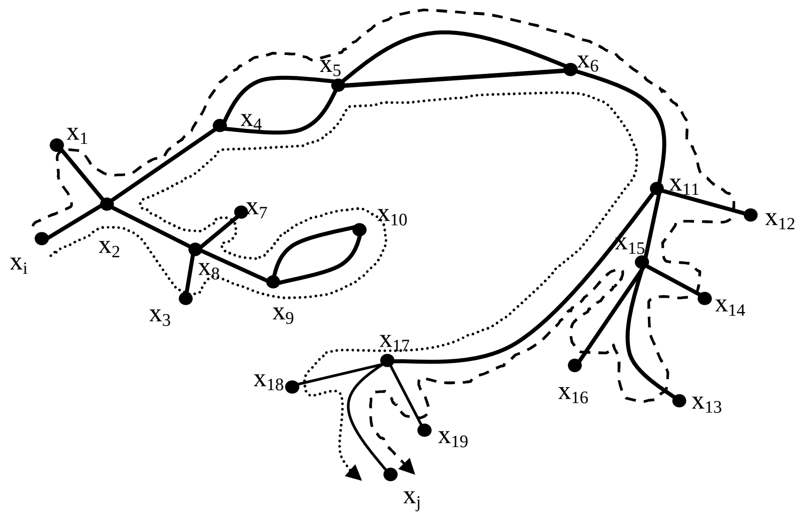


Рисунок 63. Определение пути в графе

При определении пути в графе с помощью **алгоритма Тарри** необходимо в данном алгоритме пользоваться правилом:

а) не проходить дважды по одному ребру в одном и том же направлении;

б) находясь в вершине x, не выбирать того ребра, которое привело в данную вершину в первый раз (если есть возможность другого выбора).

Алгоритм определения кратчайших путей

Эта задача имеет большое значение в практических применениях. К ней сводятся многие задачи выбора наиболее экономичного (с точки зрения расстояния или стоимости) маршрута на имеющейся карте дорог, наиболее экономичного способа перевода динамической системы из одного состояния в другое и т.д. Существует много математических способов решения, но часто методы, основанные на теории графов, наименее трудоемки.

Рассмотрим **задачу о кратчайшем пути**. Пусть дан граф G(X), дугам которого приписаны веса (расстояния, стоимости и т.п.), задаваемые матрицей $C = \| c_{ij} \|$.

Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины **s** $\in$ X до заданной конечной вершины **t** $\in$ X при условии, что такой путь существует. В общем случае возможно $C_{ij}>0$, $C_{ij}<0$, $C_{ij}=0$. Единственное ограничение состоит в том, чтобы в графе G(X) **не было циклов** с отрицательным суммарным весом.

Приведем очень простой и эффективный **алгоритм Дейкстры** решения этой задачи для случая $C_{ij} \geq 0 \ \forall$ i, j. Алгоритм основан на приписывании вершинам временных пометок, причем пометка вершины дает верхнюю границу длины пути от **s** к этой вершине. Величины этих пометок постепенно уменьшаются с помощью некоторой итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации точно одна из временных пометок становится постоянной. Это означает, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от **s** к рассматриваемой вершине. Пусть $l(x_i)$ – пометка вершины x_i. Опишем основные этапы алгоритма.

Алгоритм Дейкстры

Шаг 1. Присвоение начальных значений. Для исходной вершины s положим l (s) = 0 и эта пометка будет постоянной. Для всех других вершин имеем: $1(x_i) = \infty \ \forall \ x_i \neq s$. Эти пометки временные. Положим $p = s$ и составим множество образов этой вершины: $G(p)$.

Шаг 2. Обновление пометок. Для всех $x_i \in G(p)$, пометки которых являются временными, изменить пометки в соответствии с выражением:

$1(x_i) = \min [1(x_i), 1(p) + c(p, x_i)]$ (*)

Шаг 3. Превращение пометок в постоянные. Среди всех вершин с временными пометками найти такую x_i^*, для которой $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$. Считать пометку вершины x_i^* постоянной и положить $p = x_i^*$.

Шаг 4. Переход к шагу 2, если $p \neq t$. Останов при $p = t$. В случае, если требуется найти лишь путь от **s** к одной вершине **t,** следует окончание счета**.** Длина этого кратчайшего пути будет $1(p)$.

При необходимости нахождения путей от **s** ко всем остальным вершинам графа переходим к шагу 2. Продолжаем вычисления, пока все вершины не получат постоянные пометки. Эти отметки и дают длины кратчайших путей от **s** к этим вершинам.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере графа, изображенного на рис. 64. Матрица весов – в табл. 20. Граф является смешанным, т. е. ребра у него ориентированные и неориентированные. Требуется найти все кратчайшие пути от $\mathbf{x_1}$ ко всем остальным вершинам. Постоянные пометки будем обозначать знаком $^+$.

Шаг 1.

$l(x_1) = 0^+$, $1(x_i) = \infty \ \forall \ x_i \neq x_1$, $p = x_1$.

Первая итерация

Шаг 2.

$G(p) = G(x_1) = \{x_2, x_7, x_8, x_9\}$. Все эти вершины имеют временные пометки.

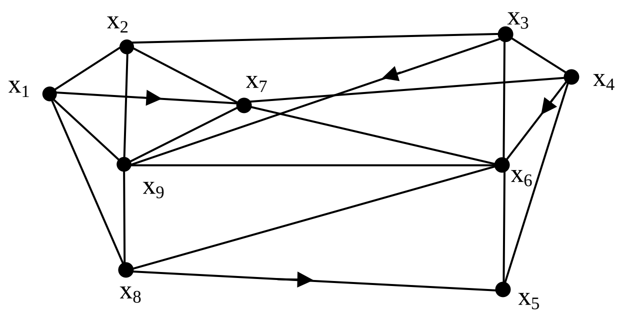


Рисунок 64. Пример графа к алгоритму Дейкстры

Таблица 20. Матрица смежности с весами для графа

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1		10					3	6	12
x_2	10		18				2		13
x_3		18		25		20			7
x_4			25		5	16	4		
x_5				5		10			
x_6			20		10		14	15	9
x_7		2		4		14			24
x_8	6				23	15			5
x_9	12	13				9	24	5	

В соответствии с формулой (*) уточняем пометки:

$l(x_2) = \min(\infty, 0^+ + 10) = 10$; $l(x_7) = 3$; $l(x_8) = 6$; $l(x_9) = 12$.

Шаг 3. $\min(10, 3, \underbrace{6, 12,}\ \infty\ ) = 3$

x_2 x_7 x_8 x_9 x_3, x_4, x_5, x_6

Вершина x_7 получает постоянную пометку: $1(x_7) = 3^+$.

Далее $p = x_7$.

Шаг 4. Так как не все вершины имеют постоянные пометки, то переходим к шагу 2. На рис. 65 приведены значения пометок вершин графа. Здесь выделены вершины с постоянными пометками.

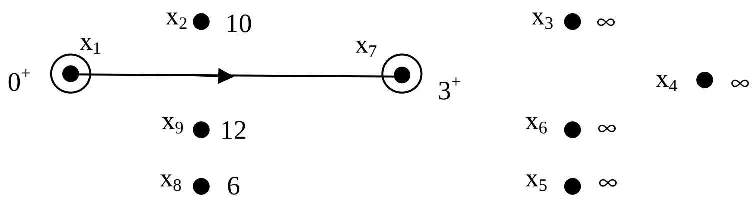


Рисунок 65. Пометки в начале второй итерации

Вторая итерация

Шаг 2. $G(p) = G(x_7) = \{x_2, x_4, x_6, x_9\}$.Пометки всех этих вершин временные. Из (8) получим: $l(x_2) = 5$, $l(x_4) = 7$, $l(x_6)=17$, $l(x_9) = 12$.

Шаг 3. $\min(5, 7, 17, \underbrace{6, 12}, \quad \infty \quad) = 5$.

x_2 x_4 x_6 x_8 x_9 x_3, x_5

Вершина x_2 получает постоянную пометку $1(x_2) = 5^+$.

Далее $p = x_2$.

Шаг 4. Значения пометок приведены на рис. 66. Переходим к шагу 2.

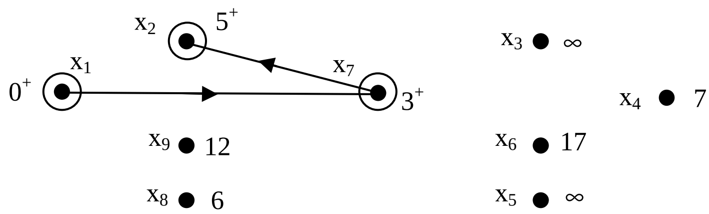


Рисунок 66. Пометки в начале третьей итерации

Третья итерация

Шаг 2. $G(p) = G(x_2) = \{x_1, x_3, x_7, x_9\}$. Только вершины x_3 и x_9 имеют временные пометки. Из (8) получим: $l(x_3) = \min(\infty, 5^+ + 18) = 23$, аналогично $1(x_9) = 12$.

Шаг 3. $\min(23, 7, 17, 6, 12, \infty) = 6$,

x_3 x_4 x_6 x_8 x_9 x_5

Вершина x_8 получает постоянную пометку $1(x_8) = 6^+$, $p=x_8$.

Шаг 4. Перейти к шагу 2 (рис.67).

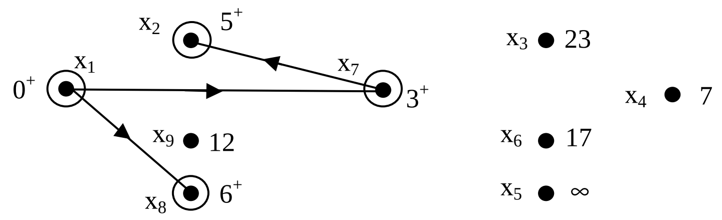


Рисунок 67. Пометки в начале четвертой итерации

Продолжая итерационный процесс, получим в итоге постоянные пометки для всех вершин графа (рис.68) и кратчайшие пути от вершины $\mathbf{x_1}$ ко всем остальным вершинам. Эти пути выделены жирными линиями.

Для нахождения кратчайшего пути между вершиной $\mathbf{x_2}$ и начальной вершиной $\mathbf{x_1}$ последовательно используем соотношение $l(x_i')+C(x_i', x_i)=l(x_i)$. Полагая i = 2 находим вершину x_2', непосредственно предшествующей x_2 в кратчайшем пути от x_1 к x_2:

$1(x_2') + C(x_2', x_2) = l(x_2) = 5$. Этому соотношению удовлетворяет вершина x_7. Следовательно, $x_2' = x_7$. Полагая $i = 7$ и применяя соотношение еще раз, получим $x_7' = x_1$. Поэтому кратчайший путь состоит из вершин x_1, x_7, x_2. Аналогичным образом находим все кратчайшие пути от x_1 к остальным вершинам.

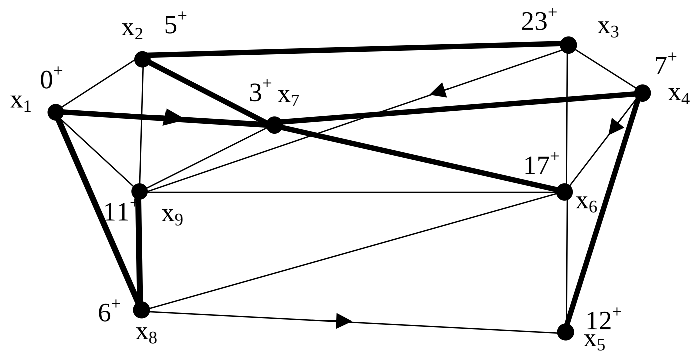


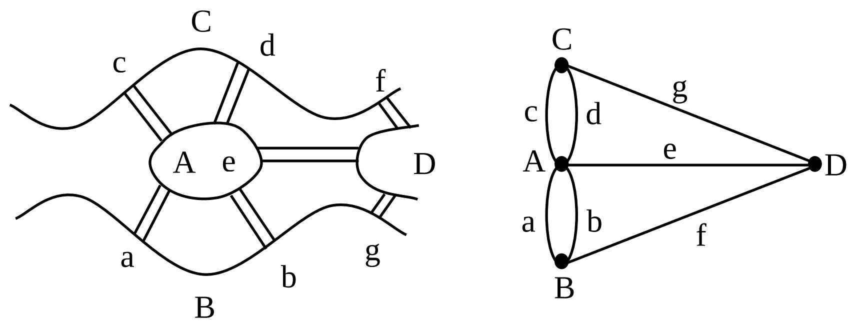
Рисунок 68. Пометки и кратчайшие пути в графе

4.16. Обход графа

В теории графов есть понятие **обход графа.** Это маршрут, содержащий все ребра или вершины графа и обладающий определенными свойствами. Наиболее известными обходами графа являются эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы.

Эйлеровы маршруты

Эти понятия возникли в статье Эйлера в 1735 г., в которой он решал задачу о Кенигсбергских мостах и впервые ввел понятие графа. На рис. 69, а приведен план расположения семи мостов в Кенигсберге (ныне Калининграде). Задача состоит в том, чтобы пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную точку С. Поскольку в конце обхода нужно вернуться в исходную часть города, и на каждом мосту нужно побывать по одному разу, этот маршрут является простым циклом, содержащим все ребра графа. В дальнейшем такие циклы стали называть **эйлеровыми,** а графы, имеющие эйлеров цикл – **эйлеровыми графами.**



а) б)

Рисунок 69. Схема Кенигсбергских мостов и соответствующий граф

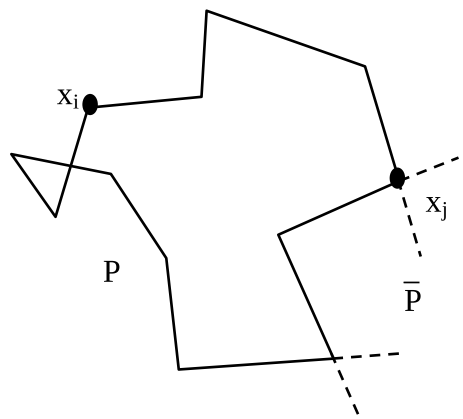
Эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги. Таким образом, эйлеровы графы – это графы, которые можно изобразить одним росчерком пера, причем процесс такого изображения начинается и заканчивается в одной и той же точке.

Обнаружив, что в данном графе не существует циклических обходов, проходящих по всем ребрам по одному разу, Эйлер обратился к общей задаче: при каких условиях в графе можно найти такой цикл? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1 (Эйлера). Конечный связный неориентированный мультиграф является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют вершины нечетной степени.

Доказательство. Каждый раз, когда эйлеров цикл проходит через какую-либо вершину, он должен войти в нее по одному ребру, а выйти по другому. Поэтому условие отсутствия вершин нечетной степени в эйлеровом графе является ***необходимым.***

Для доказательства ***достаточности*** предположим, что все вершины графа имеют четные степени. Начнем цепь P в произвольной вершине x_i графа G (рис. 70, а), и будем продолжать ее, насколько возможно, все время через новые ребра. Так как в каждой вершине число ребер четно, этот процесс может закончиться только в x_i. Если цикл P содержит не все ребра графа G, то удалим из G часть, соответствующую циклу P. Графы P и G имеют четные степени всех вершин. То же должно быть справедливо и для оставшегося графа $\overline{P}$.



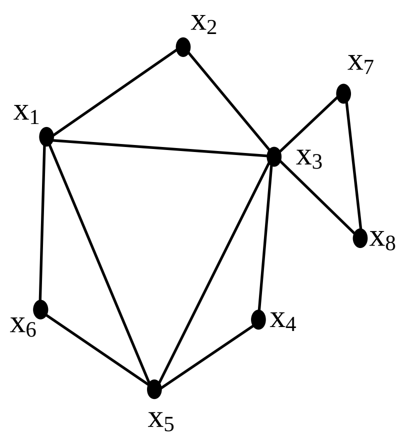


Рисунок 70. Иллюстрация доказательства теоремы Эйлера (а) и пример построения эйлерова цикла (б)

Так как граф G связен, в цикле P должна найтись вершина x_j, инцидентная также ребрам $\overline{P}$. Из x_j можно построить новую цепь P', содержащую только ребра из $\overline{P}$. И снова такая цепь может закончиться только при возвращении в x_j

.

Процесс построения эйлерова цикла иллюстрирует рис. 70, б. Объединяя, например, циклы (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) и (x_3, x_7, x_8, x_3,x_5, x_1 x_3), получим эйлеров цикл (x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_3, x_5, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1).

Как граф с эйлеровым циклом можно рассмотреть схему обхода выставки по различным коридорам, которую посетители должны пройти согласно указателям так, чтобы увидеть каждый экспонат по одному разу.

Эйлеровой цепью называется цепь, включающая все ребра данного конечного неориентированного графа G(X), но имеющая различные начало x_i и конец x_j. Чтобы в графе существовала эйлерова цепь, он должен быть связным и все вершины в нем, кроме x_i и x_j, должны иметь четные степени. Степени вершин x_i и x_j должны быть нечетными, что естественно, так как из x_i мы лишний раз выходим, а в x_j мы лишний раз входим. Эти условия являются **достаточными для существования эйлеровой цепи.**

Важен также следующий вопрос: каково **наименьшее количество не пересекающихся по ребрам цепей,** покрывающих конечный связный граф G(X) (покрыть – значит включить все ребра графа в цепь)? На этот вопрос отвечает теорема 2.

Теорема 2. В конечном связном неориентированном графе G(X) с k вершинами нечетной степени минимальное число непересекающихся по ребрам цепей, покрывающих G(X) равно k/2.

Доказательство. Пусть G(X) не является эйлеровым графом и k – число его вершин нечетной степени. Ранее было доказано, что k четно. Каждая вершина нечетной степени должна быть концом хотя бы одной из покрывающих граф цепей. Следовательно, число таких цепей не меньше, чем k/2. Но можно показать, что и не больше. Соединим попарно вершины нечетной степени k/2 ребрами. Тогда степень каждой вершины увеличится на единицу и станет четной. Получится эйлеров граф, в котором существует эйлеров цикл.

Теперь будем постепенно выбрасывать присоединенные ребра. При выбрасывании первого ребра эйлеров цикл превратится в эйлерову цепь, а при выбрасывании каждого последующего ребра одна из возникших к этому моменту цепей разобьется на две части. Таким образом, общее число этих цепей равно k/2.

Следствие. Из теоремы 2 следует, что если в связном неориентированном мультиграфе имеются две вершины нечетной степени x_i и x_j, то существует эйлерова цепь, начинающаяся в x_i, и кончающаяся в x_j.

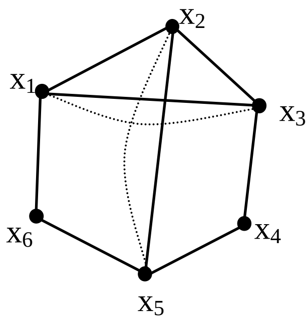


Рисунок 71. Пример построения покрывающих цепей

В качестве примера рассмотрим граф на рис. 71. В нем x_1, x_2, x_3, x_5 – вершины нечетной степени. Добавим два ребра: (x_2, x_5), $(x_1\ x_3)$ (штриховые линии). Получим эйлеров граф с эйлеровым циклом $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_2, x_5, x_6, x_1, x_3, x_1)$. Убрав (x_3, x_1), получим эйлерову цепь. Убрав (x_2, x_5), получим 2 покрывающих цепи: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_2)$ и (x_5, x_6, x_1, x_3).

Рассмотрим теперь случай конечного **ориентированного графа.** Чтобы в конечном ориентированном графе существовал эйлеров цикл **(контур),** необходимо и достаточно, чтобы полустепени исхода и захода вершин этого графа по входящим и исходящим дугам были равны:

$m'(x_i) = m''(x_i),\ \forall\ x_i \in X.$

Доказательство то же, что и для неориентированного графа.

Гамильтоновы маршруты

Гамильтоновой цепью в неориентированном графе называется цепь, проходящая через каждую его вершину один и только один раз.

Гамильтоновым циклом в неориентированном графе называется цикл, проходящий через каждую вершину один и только один раз за исключением начальной вершины, которая совпадает с конечной.

Гамильтоновым путем в ориентированном графе называется путь $S = (x_1, ..., x_n)$, проходящий через все вершины графа, притом только по одному разу.

Гамильтоновым контуром называется контур $M=(x_0, x_1, ..., x_n, x_0)$ в ориентированном графе $G(X)$, если он проходит через все вершины графа по одному разу.

Существует следующая распространенная интерпретация задачи о гамильтоновых циклах. Обед накрыт на круглом столе. Среди гостей некоторые являются друзьями. При каких условиях можно рассадить всех так, чтобы по обе стороны от каждого из присутствующих сидели его друзья?

В применении графов к играм вершины соответствуют различным позициям. Существование гамильтонова цикла равносильно существованию циклической последовательности ходов, содержащей каждую позицию по одному разу. Примером является задача о шахматном коне: можно ли, начиная с произвольного поля на доске, ходить конем в такой последовательности, чтобы пройти каждое из шестидесяти четырех полей и вернуться в исходное?

К гамильтоновым циклам относится также известная задача о бродячем торговце (задача о коммивояжере). Район, который должен посетить коммивояжер, содержит определенное количество городов. Расстояния между ними известны, и нужно найти кратчайшую дорогу, проходящую через все пункты и возвращающуюся в исходный. Эта задача имеет ряд приложений в экономике и исследовании операций.

Сформулирован целый ряд достаточных условий существования гамильтоновых цепей, циклов, путей и контуров. Приведем некоторые из них без доказательства.

Теорема Кёнига. В полном конечном графе всегда существует гамильтонов путь.

Если в графе G(X) с n вершинами для любой пары вершин x_i и x_j справедливо неравенство

$m(x_i) + m(x_j) \geq n - 1,$

где $m(x_i)$, $m(x_j)$ – степени вершин x_i и x_j, то граф G(X) имеет гамильтонову цепь.

Несмотря на сходство в определении эйлерова и гамильтонового циклов, соответствующие теории для этих понятий имеют мало общего. Критерий существования для эйлеровых циклов был установлен просто, для гамильтоновых циклов никакого общего правила неизвестно. Более того, иногда даже для конкретных графов бывает трудно решить, можно ли найти такой цикл. В принципе, поскольку речь идет о конечном числе вершин, задачу можно решить перебором, однако эффективного алгоритма неизвестно.

Пример 1. По графу (рис. 72) получить матрицу смежности и проверить справедливость теоремы о сумме степеней вершин.

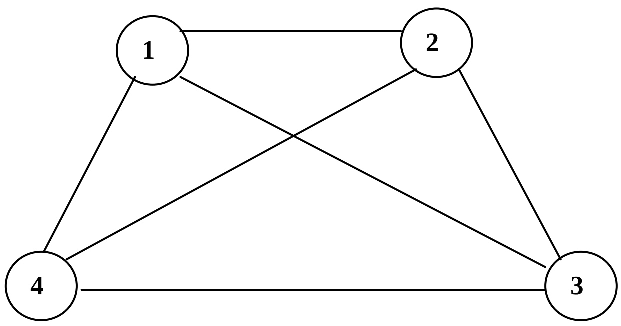


Рисунок 72. Граф для задачи в примере 1.

Матрица смежности - квадратная матрица 4х4 (по числу вершин графа).

На пересечении строки и столбца ставится единица, если имеется ребро из вершины, указанной в строке, в вершину, указанную в столбце.

Решение. Для графа, изображенного на рис. 72, получаем матрицу смежности - табл. 21.

Таблица 21.

	1	**2**	**3**	**4**
1	**0**	**1**	**1**	**1**
2	**1**	**0**	**1**	**1**
3	**1**	**1**	**0**	**1**
4	**1**	**1**	**1**	**0**

В матрице смежности диагональные строки равно нулю, т.е. граф полный, без петель.

По матрице смежности можно получить степени deg (англ. degree — степень) вершин — все они одинаковы и равны 3 (три единицы в строке, т.е. каждая вершина связана с тремя другими вершинами):

deg(l) = 3, deg(2) = 3, deg(3) = 3, deg(4) = 3.

Проверим справедливость теоремы о сумме степеней вершин.

В графе (рис. 72) шесть ребер, m = 6 => 2m = 12, т.е. удвоенное число вершин равно сумме степеней вершин графа:

$$2m = \sum_{i=1}^{m} \deg(i)$$

в однородном графе степени m_n, число ребер равно $m = \frac{1}{2} m_n \times n$, где n - число вершин

Пример 2. Получить теоретико-множественное задание графа, показанного на рис. 72.

Решение. Теоретико-множественное задание графа – это задание несущего множества и бинарного отношения в аналитическом виде:

несущее множество – множество вершин: M = {1,2,3,4};

бинарное отношение – множество пар:

T = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)}.

Всего 12 пар.

Пример 3. Определить цикломатическое число графа (рис. 72).

Цикломатическое число графа $\mu(G)$ – это величина, равная разности числа ребер (m) и вершин (n) плюс 1:

$\mu(G)=m-n+l$.

В нашем случае: $\mu(G)=6-4+1=3$ – эта величина равна числу независимых циклов в графе (рис. 73).

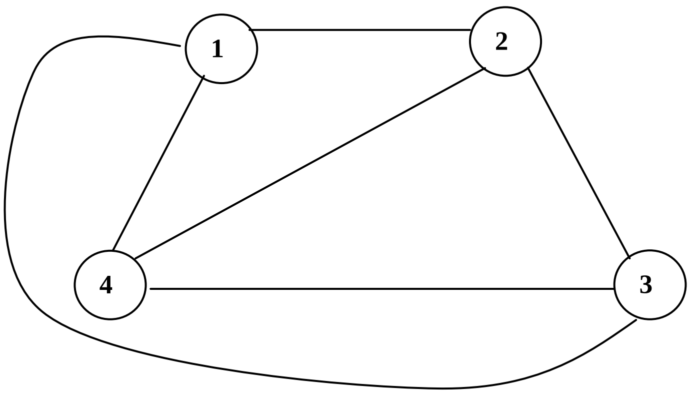


Рисунок 73

Пример 4. Определить вершинное хроматическое число графа (см. рис. 72).

Решение. Хроматическое число графа — это минимальное число «цветов», в которые можно раскрасить вершины так, что соседние вершины (соединенные ребром) не будут раскрашены одинаково.

В данном случае номера присвоенных «цветов» соответствуют номерам вершин, т.е. если вершина 1 окрашена цветом 1, то вершины 2 – 4 окрашиваются в цвета 1 – 3, т.е. хроматическое число равно количеству вершин. Иначе и быть не может – все вершины связаны друг с другом.

Пример 5. Получить матрицу смежности графа в цифровом виде в шестнадцатеричном коде.

Решение. Такое представление предполагает запись строк матрицы в виде одного числа. В двоичном виде это будет выглядеть так:

$0111.1011.1101.1110_2$.

В шестнадцатеричном коде получим:

$7.B.D.E_{16}$.

Можно указать только разряды полуматрицы, поскольку граф ориентированный и его матрица смежности симметрична относительно главой диагонали:

$111.11.1_2$.

Тогда в шестнадцатеричном коде получим последовательность цифр:

$7.3.1_{16}$.

Рисунок графа можно получить по задающей полуматрицу последовательности цифр.

Пример 6. Получить матрицу смежности и рисунок графа по задающей полуматрицу графа из четырех вершин последовательности цифр $4.2.1_{16}$.

Решение. Переводим в двоичный код последовательность $4.2.1_{16}$. Получаем: $100.10.1_2$. Строим полуматрицу смежности (табл. 22)

Таблица 22

	1	**2**	**3**	**4**
1	**0**	**1**	**0**	**0**
2		**0**	**1**	**0**
3			**0**	**1**
4				**0**

Теперь получаем вторую половину матрицы смежности: если вершина 1 смежна с вершиной 2, то и вершина 2 смежна с вершиной 1. Таким образом, получаем матрицу смежности (табл. 23).

Таблица 23

	1	2	3	4
1	**0**	**1**	**0**	**0**
2	**1**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**1**
4	**0**	**0**	**1**	**0**

Граф будет выглядеть так, как показано на рис. 4.3

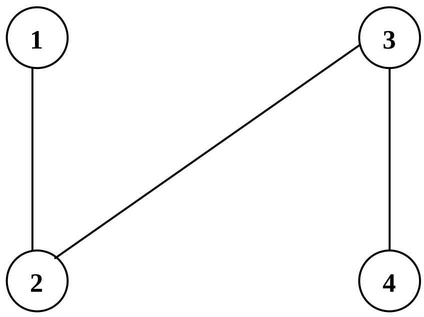


Рисунок 74

Заданные выше графы были неориентированными. Ориентированные графы задаются числовым эквивалентом всей матрицы смежности, полуматрицей здесь не обойдешься.

Пример 7. По последовательности цифр $4.3.1.8_{16}$, задающей матрицу ориентированного графа (орграфа) из четырех вершин, получить матрицу смежности и рисунок графа.

Решение. Переводим в двоичный код последовательность $4.3.1.8_{16}$. Получаем: $0100.0011.0001.1000_2$.

Матрица смежности орграфа показана в табл. 24.

Таблица 24

	1	2	3	4
1	**0**	**1**	**0**	**0**
2	**0**	**0**	**1**	**1**
3	**0**	**0**	**0**	**1**
4	**1**	**0**	**0**	**0**

Соответственно граф будет выглядеть так, как показано на рис. 75.

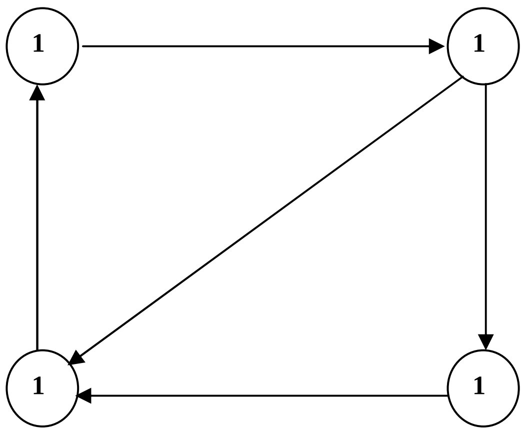


Рисунок 75

Пример 8. Получить матрицу инцидентности для орграфа $4.3.1.8_{16}$ (рис. 76).

Решение. Обозначим дуги графа: t_1 t_2, t_3, t_4, t_5.

Матрица инцидентности (табл. 25) содержит строки по числу вершин графа и столбцы по числу дуг. Если дуга исходит из вершины графа, то в соответствующей клетке матрицы ставится –1, а если входит в вершину – то ставится 1. В каждой строке сумма единиц с минусом – это полустепень исхода (расхода), а сумма единиц без минуса – полустепень захода (прихода).

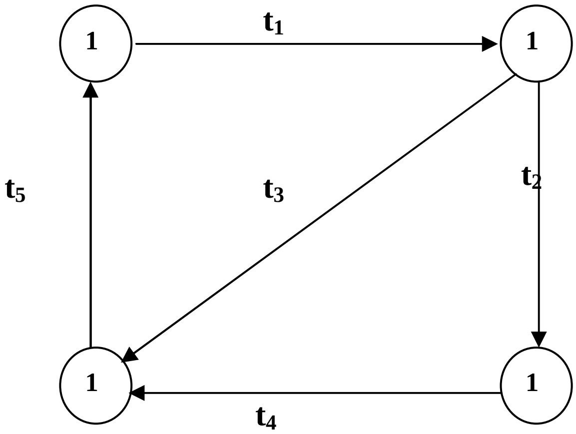


Рисунок 76

Таблица 25

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
1	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**
2	**1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**
4	**0**	**0**	**1**	**1**	**-1**

Пример 9. Для орграфа $4.3.1.8_{16}$ получить матрицу всех путей длиной 2.

Решение. В этом случае матрица смежности графа умножается сама на себя по правилам теоретико-множественных операций с номерами множеств.

Квадрат матрицы смежности представляет собой матрицу всех путей длиной 2, куб – длиной 3 и т.д.

Найдем все пути длиной 2.

Матрица смежности M для орграфа $4.3.1.8_{16}$ показана в табл. 24.

Квадрат матрицы смежности M^2 имеет вид:

$$M^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Процесс получения квадрата матрицы смежности M^2 проиллюстрируем без потери общности на примере вычисления первой строки матрицы.

Первый элемент первой строки определяется как объединение поразрядных пересечений первой строки и первого столбца матрицы М:

$0100 \cap 0001 = (0\cap0)\cup(l\cap0)\cup(0\cap0)\cup(0\cap1)=0$.

Второй элемент первой строки — как объединение поразрядных пересечений первой строки и второго столбца матрицы М:

$0100 \cap 1000=(0\cap1)\cup(1\cap0)\cup(0\cap0)\cup(0\cap0)=0$.

Третий элемент первой строки — как объединение поразрядных пересечений первой строки и третьего столбца матрицы М:

$0100 \cap 0100=(0\cap0)\cup(1\cap1)\cup(0\cap0)\cup(0\cap0)=1$.

Четвертый элемент первой строки — как объединение поразрядных пересечений первой строки и четвертого столбца матрицы М:

$0100 \cap 0110=(0\cap0)\cup(l\cap l)\cup(0\cap l)\cup(0\cap0)=l$.

Таким образом, мы получили первую строку матрицы M^2 – 0011. Эта строка содержит единицы в третьей и четвертой позициях. Действительно, как можно видеть из рис. 76, есть пути длиной 2 из вершины 1 в вершины 3 и 4 (в них можно попасть за два шага через вершину 2).

Пример 10. Решить задачу коммивояжера путем полного перебора маршрутов для нагруженного неориентированного графа (т.е. имеющего неединичные веса ребер), показанного на рис. 77.

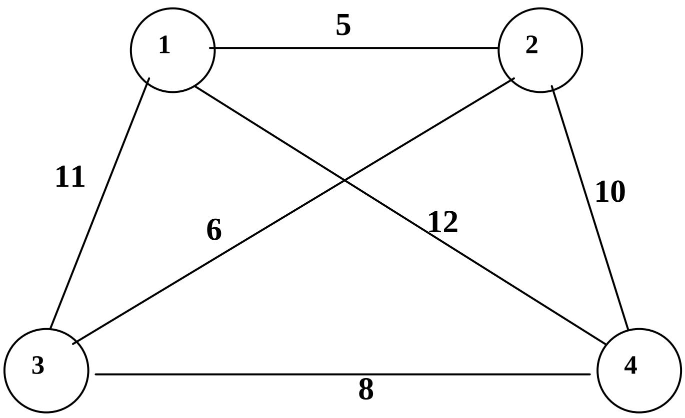


Рисунок 77

Решение. Задача коммивояжера – задача самого дешевого обхода вершин графа с возвратом в исходную вершину 1. Граф нагружен условными единицами стоимости проезда из пункта в пункт.

Для полного перебора маршрутов будем строить дерево обхода вершин, обозначая каждую вершину дерева последовательностью из номеров уже пройденных вершин (рис.77).

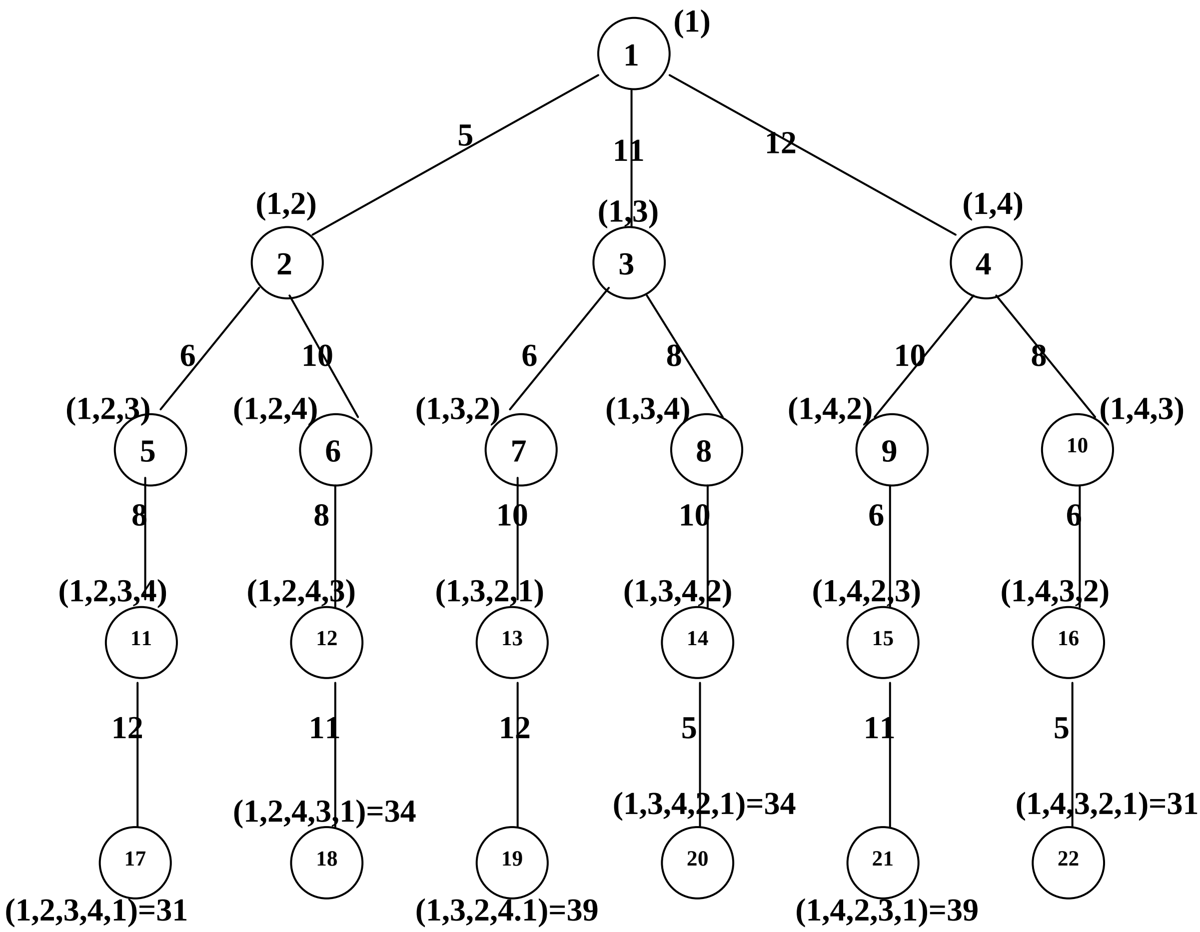


Рисунок 78

Таким образом, лучшие маршруты (1,2,3,4) и (1,4,3,2,1) «стоят» 31 у.е. Здесь в скобках указаны последовательности вершин графа (см. рис.78).

4.17. Задания для практики

1. Нарисуйте конечный связанный граф, все вершины которого четные, степень каждой вершины не меньше четырёх, а общее число вершин не меньше

9. Постройте эйлеров цикл этого графа (замкнутый маршрут, в который ребро графа входит ровно один раз).

2. Нарисуйте конечный граф, все вершины которого (за исключением двух нечетных вершин A и B) четные, степень каждой четной вершины не меньше четырех, а общее число вершин не меньше 9. Постройте маршрут AB, в который каждое ребро графа входит ровно один раз.

3. Нарисуйте конечный связанный взвешенный ориентированный граф для следующего предложения:

«Современное понимание фундаментальности университетского образования связано с его безусловной направленностью на выявление глубинных связей между процессами, протекающими в окружающем нас реальном мире, событиями и объектами, населяющими этот мир, и является надежной основой воспитания в университетских стенах высоко образованных молодых людей.»

4. Покажите, что два графа на рис.79 изоморфны.

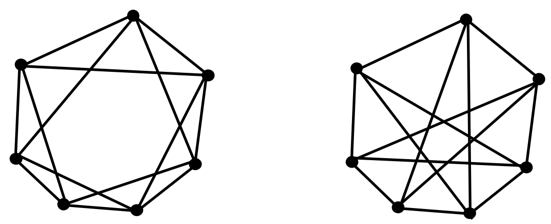


Рисунок 79. Граф к задаче 4

5. «Три дома и три колодца». Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

6. Найдите число частичных графов конечного графа с m ребрами.

7. Каково число ребер в полном неориентированном графе с n вершинами?

8. Пусть U – множество положительных целых чисел, на котором задано отношение «a есть делитель b». Постройте граф этого отношения для множества целых чисел от 1 до 20.

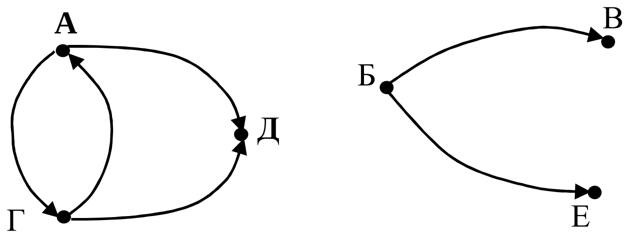


Рисунок 80. Граф к задаче 9

9. Задан граф отношения «быть сестрой» (рис.80) на множестве студентов-родственников нашего фа-культета. Постройте по рис.80 граф отношения «быть братом».

10. Постройте матрицы смежности и инциденций для правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра. Найдите для каждого из них число внутренней устойчивости, число внешней устойчивости, центр, периферийные вершины, радиус, диаметр.

11. Для графа, изображенного на рис. 81, найдите:

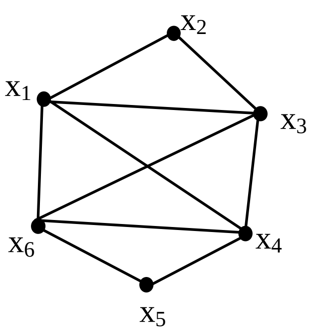


Рисунок 81 Граф к задаче 11.

а) матрицу смежности (вершин);

б) матрицу инциденций;

в) наибольшее внутренне устойчивое множество;

г) наименьшее внешне устойчивое множество;

д) матрицу отклонений;

е) вектор отклоненностей;

ж) центр и радиус графа.

12. Постройте графы, для которых радиус равен 2, 3, и такие графы, для которых диаметр равен 2, 3.

13. Определите, какие из графов трех правильных многогранников (тетраэдр, куб, откаэдр) имеют эйлеровы циклы. В тех случаях, когда эйлерова цикла нет, определите: сколько требуется цепей, чтобы покрыть все ребра графа.

14. Какие из из графов правильных многогранников имеют гамильтоновы цепи и циклы.

15. Построить матрицу смежности графа «крест». Получить теоретико-множественное задание этого графа, степени всех вершин, цикломатическое и хроматическое числа.

16. По задающей полуматрицу неориентированного графа из пяти вершин последовательности цифр $A.7.0.1_{16}$ получить матрицу смежности и рисунок графа. Получить теоретико-мно- жественное задание этого графа, степени всех вершин, цикломатическое и хроматическое числа.

17. По последовательности цифр $3.3.5.2_{16}$, задающей матрицу ориентированного графа из четырех вершин, получить матрицу смежности и рисунок графа. Получить матрицу всех путей длиной 2.

18. Решить задачу коммивояжера путем построения дерева обхода вершин для графа, изображенного на рис.82.

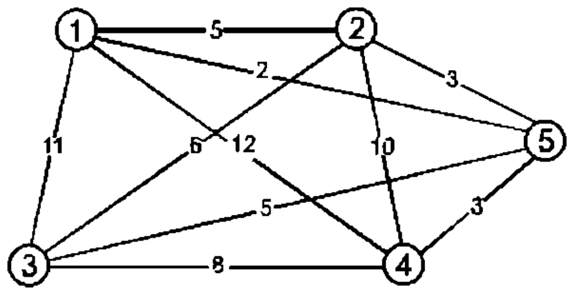


Рисунок 82

19. Найти кратчайший путь из вершины (1-2,0) в целевую вершину для графа задачи о Ханойской башне (см. рис. 83).

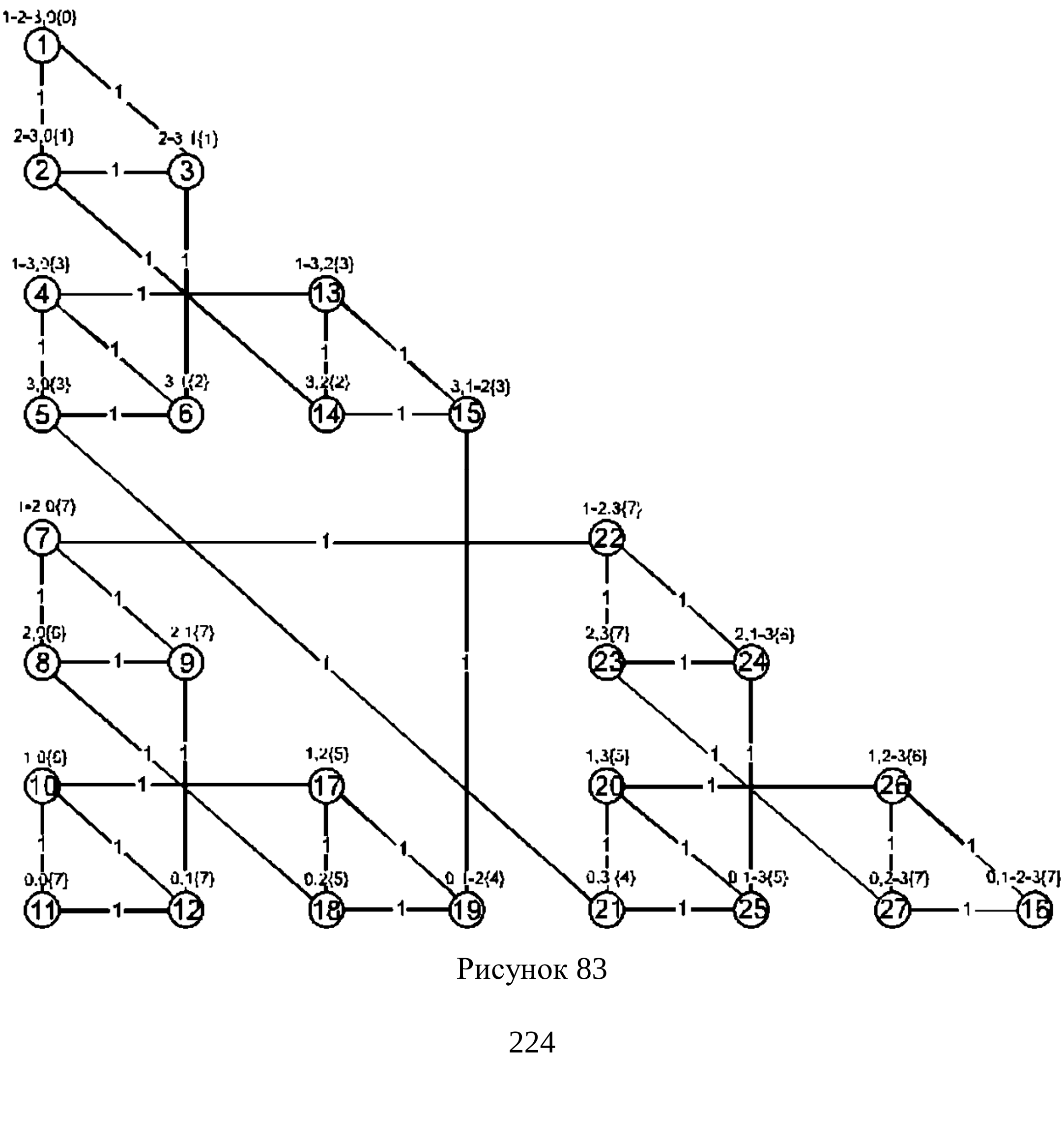


Рисунок 83

20. Найти кратчайший путь из вершины 5 в вершину 9 для графа с ребрами произвольной длины (см. рис. 84).

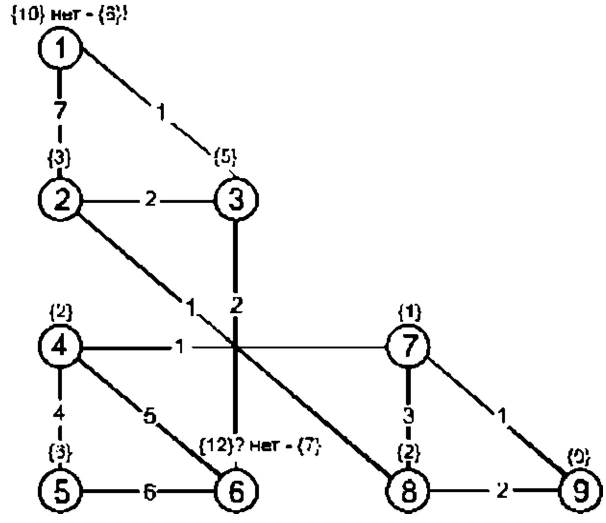


Рисунок 84

21. Задан неориентированный граф без петель из пяти вершин строками полуматрицы смежности в виде последовательности шестнадцатеричных чисел, где первая цифра — первая строка полуматрицы, вторая цифра - вторая строка и т.д. Изобразить по заданному шестнадцатеричному числу граф в виде рисунка и определить степени всех вершин, цикломатическое и хроматическое числа.

1) F721; 2) A321; 3) B331; 4) C421; 5) D431.

22. Изобразить ориентированный граф из четырех вершин по заданному числу, полагая, что каждая цифра — строка матрицы смежности орграфа. Получить матрицу всех путей в графе длиной 2 путем возведения в квадрат соответствующей булевой матрицы.

1) 4AD6; 2) 5BC4; 3) 794E; 4) 385C; 5) 2B18.

23. Найти кратчайший путь из заданной вершины в целевую вершину для графа задачи о Ханойской башне n=3 (см. рис. 4.8). Координата заданной исходной вершины: первая позиция — ось y, вторая позиция — ось x.

1) (0,0); 2) (1-2,3); 3) (2,1); 4) (1-2,0); 5) (2,3).

24. Найти кратчайший путь из заданной вершины в указанную вершину для графа с ребрами произвольной длины (см. рис. 4.9).

1) из 2-й в 9-ю; 2) из 3-й в 9-ю; 3) из 4-й в 9-ю;

4) из 6-й в 9-ю; 5) из 9-й во 2-ю.

25. Задан неориентированный граф без петель из пяти вершин строками полуматрицы смежности в виде последовательности шестнадцатеричных чисел, где первая цифра — первая строка полуматрицы, вторая цифра - вторая строка и т.д. Изобразить по заданному шестнадцатеричному числу граф в виде рисунка и определить степени всех вершин, цикломатическое и хроматическое числа.

1) 9221; 2) F531; 3) E631; 4) D521; 5) C431.

26. Изобразить ориентированный граф из четырех вершин по заданному числу, полагая, что каждая цифра — строка матрицы смежности орграфа. Получить матрицу всех путей в графе длиной 2 путем возведения в квадрат соответствующей булевой матрицы.

1) 19CC; 2) 72DD; 3) 5B16; 4) 6A5C; 5) 2258.

27. Найти кратчайший путь из заданной вершины в целевую вершину для графа задачи о Ханойской башне п = 3 (см. рис. 83). Координата заданной исходной вершины: первая позиция — ось у, вторая позиция — ось х.

1) (2,0); 2) (2,1-3); 3) (0,1); 4) (1,2); 5) (0,1-3).

28. Найти кратчайший путь из заданной вершины в указанную вершину для графа с ребрами произвольной длины (см. рис. 84).

1) из 9-й в 3-ю; 2) из 9-й в 4-ю; 3) из 9-й в 6-ю;

4) из 9-й в 5-ю; 5) из 8-й в 1-ю.

Задачи для самопроверки

1. Докажите равенство: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, где A, B, C - множества.
2. Докажите равенство: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, где A, B, C - множества.
3. Верно ли равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, где A, B, C - множества?
4. Верно ли равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, где A, B, C - множества?
5. Что является дополнением к множеству четных чисел во множестве натуральных чисел?
6. Что является дополнением к множеству {1,3,5} во множестве {1,2,3,4,5,6}?
7. Что является дополнением к множеству {1,3,5} во множестве {1,3,5}?
8. Даны два множества $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,6,8,9\}$; запишите $A \times B$.
9. Даны два множества $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,6,8,9\}$; запишите $B \times A$.
10. Дано множество $A = \{3,2,1,0,7,6\}$. Запишите $A \times A$.
11. Дано множество $A = \{2,5,3,4,8,1\}$. Запишите его диагональ.
12. Приведите пример двух различных рефлексивных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$.
13. Приведите пример четырех различных рефлексивных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$.
14. Приведите пример трех различных отношений на множестве $A = \{2,5,3,4,8,1\}$, не являющихся рефлексивными.
15. Приведите пример двух различных симметричных отношений на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.
16. Приведите пример двух различных, не являющихся симметричными, отношений на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.

17. Приведите пример двух различных антисимметричных отношений на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.

18. Приведите пример двух различных, не являющихся антисимметричными, отношений на множестве $\{1,2,4,6,7,0,10\}$.

19. Построить таблицу значений функции алгебры логики: $f(x, y,z) = x\,y\,z \vee ((x \to y) \oplus (\overline{x} \vee y))$. Найти все существенные переменные.

20. Проверить выполнение следующего соотношения: $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (y \vee z)$.

21. Построить полином Жегалкина функции $f(x, y,z) = (x \vee y) \oplus (\overline{x}\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z})$.

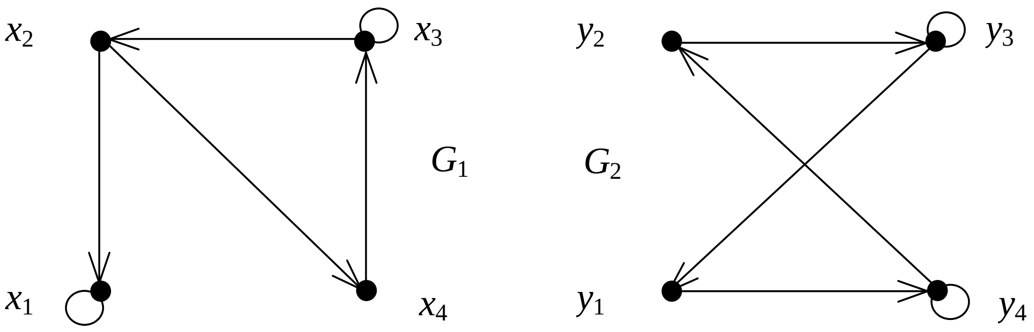
22. Найти совершенную дизъюнктивную и совершенную конъюнктивную нормальные формы функции алгебры логики $f(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$.

23. Задана совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции алгебры логики: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$

Найти все ее тупиковые дизъюнктивные нормальные формы и выбрать из них минимальную.

24. Для графов G1 и G2:

- построить матрицы смежности вершин;
- построить матрицы инциденций;
- выполнить операцию объединения графов в геометрической или матричной формах;
- выполнить операцию пересечения графов в геометрической и матричной формах;
- выполнить операцию композиции графов в геометрической и матричной формах;
- выполнить операцию прямого произведения графов в геометрической и матричной формах;
- выполнить операцию декартова произведения графов в геометрической и матричной формах;



Вопросы для подготовки к экзамену/зачету

1. Понятие множества. Подмножества. Основные операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение. Свойства операций.
2. Конечные множества. Правило суммы. Правило включения-исключения. Правило произведения. Число всех подмножеств конечного множества.
4. Принцип математической индукции.
5. Высказывания и операции над ними.
6. Формулы логики высказываний.
7. Равносильность формул. Основные формулы равносильности.
8. Тождественно истинные формулы.
9. Принцип двойственности.
10. Правила вывода.
11. Предикаты и операции над ними.
12. Правила де Моргана для предикатов.
13. Примеры равносильных и неравносильных формул логики предикатов.
14. Пример выполнимой формулы, которая не выполнима ни на одном непустом конечном множестве.
15. Булевы функции. Число булевых функций от n переменных.

16. Булевы функции одной и двух переменных.
17. Нормальные формы (ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ).
18. Представление булевой функции в виде СДНФ.
19. Основные замкнутые классы булевых функций.
20. Размещения, сочетания, перестановки.
21. Бином Ньютона.
22. Свойства биномиальных коэффициентов.
23. Бином Ньютона для целых отрицательных степеней.
24. Рекуррентные последовательности.
25. Нахождение общего члена рекуррентной последовательности.
26. Числа Фибоначчи. Производящие функции.
27. Начальные понятия теории графов. Матрица смежности. Матрица инцидентности.
28. Пути на графе. Достижимость. Степени матрицы смежности. Связные графы.
29. Деревья. Остовное дерево связного графа.
30. Внешне и внутренне устойчивые множества вершин.
31. Ядро графа.
32. Проверка ацикличности орграфа по его матрице смежности.
33. Порядковая функция ацикличного орграфа.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Адельсон-Вельский Г. М., Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. – М. Энергоатомиздат, 1988.– 479 с.
2. Аляев Ю.А. Дискретная математика и математическая логика / Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 357 с.
3. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика: учеб. пособие для вузов / В.А. Горбатов.- М.: Наука, 2000. - 540 с.
4. Дискретная математика: Практическая дискретная математика и математическая логика: учеб.пособие / С.Ф. тюрин, Ю.А. Аляев. – М.: Финансы и статистика, 2010. – 384 с.:ил.
5. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М: Вузовская книга, 2000.–280 с.
6. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М: Вузовская книга, 2000.–280 с.
7. Корниенко А. В. Дискретная математика: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2000. – 104 с.
8. Нефедов В. Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992.– 262 с.
9. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: Учебное пособие. – СПб: Питер, 2002. –304 с.
10. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: Учебное пособие. – СПб: Питер, 2002. –304 с.
11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программиста / Ф.А. Новиков. - СПб.: Питер, 2001.- 501 с.
12. Сафьянова Е. Н. Дискретная математика. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2000. – 106 с.
13. Сафьянова Е. Н. Дискретная математика. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2000. – 106 с.

14. Смыслова З. А. Дискретная математика: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2000. – 116 с.
15. Смыслова З. А. Дискретная математика: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2000. – 116 с.
16. Толковый словарь по вычислительным системам / Под ред. Иллингуорта и др.: пер. с англ. А.К. Белоцкого и др.; под ред. Е.К. Масловского. — М.: Машиностроение, 2010. — 560 с.
17. Тюрин С.Ф. Метод резолюций и аристотелевская силлогистика в преподавании математической логики / С.Ф. Тюрин, Ю.А. Аляев // Открытое образование. — 2005. — № 6. — С. 54—57.
18. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов: Учебное пособие для вузов / Пер. с англ. – М.: Техносфера, 2003. – 320 с.
19. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов: Учебное пособие для вузов / Пер. с англ. – М.: Техносфера, 2003. – 320 с.
20. Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем: учеб. пособие / Н.Г. Ярушкина. — М.: Финансы и статистика, 2004.- 320 с.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

LABORE ET SCIENTIA

105037 г. Москва, а/я 47,
Академия Естествознания
Тел. (499) 7041341,
7 (499) 709-8104
Тел/Факс: (8452) 477677
E-mail: stukova@rae.ru

№____ от ____19.05.2015 г.______

на №____ от ____________________

Еремина И.И.

Решение о присвоении грифа Учебно-методического объединения по классическому университетскому и техническому образованию Российской Академии естествознания

Учитывая положительное заключение экспертизы, УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию приняло решение (Протокол № 513 от «19» мая 2015 г.) о присвоении учебному пособию **«Введение в дискретную математику: теория и практика»** Еремина И.И. грифа УМО РАЕ:

«Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 01.03.02 (010400.62) – «Прикладная математика и информатика», 38.03.05 (080500.62) – «Бизнес-информатика», 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 210700.62 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 230100.62 (09.03.01) – «Информатика и вычислительная техника», 09.03.03 (230700.62) – «Прикладная информатика (по отраслям)».

____

Текст грифа УМО размещается на левой стороне титульного листа подзаголовочных данных.

Председатель УМО РАЕ
Д.м.н., профессор, академик РАЕ М.Ю. Ледванов

Ученый секретарь
К.м.н. М.Н. Бизенкова

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ * МОСКВА *

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ЗОЛОТОЙ ФОНД ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ

СЕРТИФИКАТ

УЧАСТНИКА МЕЖДУНАРОДНОЙ ВЫСТАВКИ-ПРЕЗЕНТАЦИИ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ИЗДАНИЙ

(Москва, 2015)

Еремина И.И.

Учебное пособие

«ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА»

Набережные Челны: Издательско-полиграфический центр НЧИ КФУ, 2015

ПРЕЗИДЕНТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

академик РАЕ М.Ю.Ледванов

WWW.RAE.RU

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ЗОЛОТОЙ ФОНД ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ

ЛУЧШЕЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ В ОТРАСЛИ

ДИПЛОМ

ЛАУРЕАТА
МЕЖДУНАРОДНОЙ ВЫСТАВКИ

Москва, 2015

Еремина И.И.

Учебное пособие

«ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА»

Набережные Челны: Издательско-полиграфический центр НЧИ КФУ, 2015

ПРЕЗИДЕНТ ***М.Ю.ЛЕДВАНОВ***

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
ДЛЯ ДИПЛОМОВ
МОСКВА

http://www.rae.ru/ru/DIPLOM/

Ирина Ильинична Еремина

Введение в дискретную математику: теория и практика

Учебное пособие

Кафедра Бизнес-информатики и математических методов в экономике

Формат 60x84 1/16. Печать ризографическая.
Бумага офсетная №1 Гарнитура «Timis New Roman»
Усл. печ. л. 14,75. Уч.-изд.л. 15,0 Тираж 300 экз. Заказ №461.

Издательско-полиграфический центр
Набережночелнинского института КФУ
423810, г.Набережные Челны, Новый город, пр.Мира, 68/19