Интернет-журнал «Мир науки» / World of Science. Pedagogy and psychology https://mir-nauki.com

2018, №2, Том 6 / 2018, No 2, Vol 6 https://mir-nauki.com/issue-2-2018.html

URL статьи: https://mir-nauki.com/PDF/93PDMN218.pdf

Статья поступила в редакцию 21.04.2018; опубликована 19.06.2018

Ссылка для цитирования этой статьи:
Сиразов Ф.С. О возможности применения системы компьютерной алгебры Maxima к решению неопределенных уравнений // Интернет-журнал «Мир науки», 2018 №2, https://mir-nauki.com/PDF/93PDMN218.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

For citation:
Sirazov F.S. (2018). On the possibility of applying Maxima computer algebra system to the solution of uncertain equations. *World of Science. Pedagogy and psychology*, [online] 2(6). Available at: https://mir-nauki.com/PDF/93PDMN218.pdf (in Russian)

УДК 378, 512

ГРНТИ 14.35.09

Сиразов Фаннур Саматович
ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», Набережные Челны, Россия
Старший преподаватель кафедры «Математики и методики преподавания»
E-mail: fsirazov@yandex.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=557310

О возможности применения системы компьютерной алгебры Maxima к решению неопределенных уравнений

Аннотация. Автором представлена возможность использования свободно распространяемого пакета системы аналитических вычислений Maxima в рамках курса «Абстрактная и компьютерная алгебра» по некоторым разделам абстрактной алгебры для подготовки бакалавров по направлению подготовки Педагогическое образование (с двумя профилями «Математика и информатика»), на примере приложения к решению неопределенных уравнений и их систем. В статье приводится исследование проблемы «Как решить неопределенные уравнения с помощью Maxima?». Возникновение вопроса связано с трудоемкостью алгоритма решения неопределенных уравнений с помощью цепных дробей студентами на практических занятиях по дисциплинам «Теория чисел» и «Абстрактная и компьютерная алгебра». Сначала рассматривается вариант решения одного примера с частичной автоматизацией алгоритма вычисления неопределенных уравнений с помощью приложения цепных дробей. Несмотря на то, что этот процесс занимает много времени для вычисления с приложением Maxima, автор считает такое подробное рассмотрение весьма полезным для будущих преподавателей математики с точки зрения лучшего усвоения алгоритма. В статье параллельно рассматривается и другая проблема, связанная с невозможностью решения некоторых задач абстрактной и компьютерной алгебры только с помощью основных функций Maxima. Выходом из этой ситуации автор видит использование элементов программирования на основе собственного языка Maxima. Результаты исследования возможности применения свободно распространяемой системы компьютерной алгебры Maxima к решению неопределенных уравнений и их систем приведены в виде примеров вычисления с помощью программных кодов различной структуры. В итоге автор приходит к выводу о том, что систему аналитических вычислений Maxima можно использовать как в учебных целях, так и в качестве платформы для вполне серьезных научных разработок.

Ключевые слова: система аналитических вычислений; абстрактная алгебра; компьютерная алгебра; неопределенное уравнение; цепная дробь; алгоритм; программный код; система компьютерной алгебры; система уравнений; система неравенств

Современный этап развития отечественного образования характеризуется интенсивным включением информационных технологий в учебно-воспитательный процесс. В связи с этим возрастает роль педвузов в подготовке будущих учителей к использованию информационных средств в образовательной среде. С этой точки зрения становится актуальным обучение будущих учителей математики и информатики преподаванию с помощью современных систем компьютерной алгебры, которые призваны, не только разнообразить учебно-воспитательный процесс, а также сокращать громоздкие вычисления, тем самым высвобождая время на исследование более сложных математических моделей.

В математической подготовке будущих учителей в нашем вузе мы активно применяем систему компьютерной алгебры Maxima [14]. Данный математический пакет является свободно распространяемым программным продуктом и по возможностям не уступает таким коммерческим аналогам, как Maple и Mathematica. Наличие свободной лицензии позволяет устанавливать данный продукт и в школе, и вузе без дополнительных затрат, что является весьма актуальным в современных условиях. Для ознакомления с основами работы Maxima существует большое количество как электронной, так и печатной литературы. Например, в учебном пособии Троицкой О.Н. «Применение пакетов прикладных программ в математике» можно ознакомиться с возможностями системы компьютерной алгебры Maxima по решению задач алгебры, элементарной математике и математического анализа [18, с. 47-99].

Исследование системы Maxima мы осуществляем в рамках курса «Абстрактная и компьютерная алгебра» [15], когда на лабораторных занятиях совместно со студентами изучаем возможности применения к решению некоторых задач абстрактной алгебры [12]. Проблема состоит в том, что не все задачи решаются с помощью встроенных в программу функций. После проведения исследования всех основных функций, с помощью которых, например, можно найти всех делителей числа, сумму делителей числа, деление с остатком, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное и т. д., приступаем к записи новых алгоритмов с помощью собственного языка программирования Maxima.

Данная статья посвящена поиску ответа на вопрос «Как решить неопределенные уравнения с помощью Maxima?», который возник тогда, когда мы со студентами на практическом занятии разбирали решение неопределенных уравнений с помощью цепных дробей. Стало интересно, возможно ли решать данные примеры быстрее, то есть поручить программе повторяющиеся громоздкие вычисления и получать только ответ. Сначала перешли к частичной автоматизации вычислений, так как встроенные функции Maxima позволяют, например, разложить дробь в цепную дробь, вычислить наибольший общий делитель, последние две подходящие дроби и т. д.

В качестве примера рассмотрим приложение Maxima к решению следующей задачи, алгоритм вычисления которой на практическом занятии у доски с мелом сводится к использованию неопределенных уравнений первой степени.

Пример 1. Сколько билетов стоимостью 30 и 50 рублей можно купить на 1490 рублей, если все деньги должны быть израсходованы?

Решение:

Введем следующие обозначения:

x – количество билетов стоимостью 30 рублей;

y – количество билетов стоимостью 50 рублей.

Познакомимся с основными функциями, предназначенными для выполнения операций с цепными дробями и их приложений к решению неопределенных уравнений:

1) cf(expr) – преобразует выражение в непрерывную дробь;

2) cfdisrep (list) – представляет данный список в виде разложения цепной дроби;

3) cfexpand (x) – возвращает матрицу из числителей и знаменателей, последних двух подходящих дробей;

4) cflength – данная опция указывает количество повторений периодов бесконечной цепной дроби. По умолчанию cflength:1.

Замечание: Maxima позволяет без потерь скопировать вычисления в текстовой редактор:

```
-->   a: 30; b: 50; c: 1490;
a·x+b·y=c;
(a)     30
(b)     50
(c)     1490
(%o4)  50y + 30x = 1490
```

Решим в целых числах полученное уравнение. Заметим, что выполняются два условия:

```
-->   gcd(a,b);
m: mod(c,%);
(%o5)  10
(m)    0
```

где 10 указывает на количество решений, 0 – на то, что есть целочисленное решение неопределенного уравнения.

```
-->   if is (m=0) then cf(a/b) else print("Нет решения!");
cfexpand(%);
(%o7)  [0,1,1,2]
```

(%o8) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

На данном этапе, если решение отсутствует, то вместо матрицы подходящих дробей программа выдает «Нет решения!». На основании свойства подходящих дробей $P_{k-1} \cdot Q_k - P_k \cdot Q_{k-1} = (-1)^k$ получим:

```
-->   simp: false$
%th(2)[1][2]·%th(2)[2][1]−%th(2)[1][1]·%th(2)[2][2]=(−1)^3;
```

(%o10) $1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = (-1)^3$

Далее немного ручной работы:

```
-->   3·(−2)+5·1=−1;
3·298+5·(−149)=149;
```

[x[0]=298,y[0]=−149];

simp: true$

(%o11) $3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = -1$

(%o12) $3 \cdot 298 + 5 \cdot (-149) = 149$

(%o13) $[x_0 = 298, y_0 = -149]$

и мы получаем частные решения неопределенного уравнения.

Общее решение может быть найдено по формулам: $\begin{cases} x = 298 + 5 \cdot t \\ y = -149 - 3 \cdot t. \end{cases}$

Так как количество билетов – натуральное число, мы можем наложить условия: x > 0, y > 0, т. е. получаем систему неравенств $\begin{cases} 298 + 5 \cdot t > 0 \\ -149 - 3 \cdot t > 0\,. \end{cases}$

Сначала решим соответствующие уравнения:

--> solve(298+5·t);

%, numer;

(%o15) $[t = -\frac{298}{5}]$

(%o16) $[t = -59.6]$

--> solve(−149−3·t);

%, numer;

(%o17) $[t = -\frac{149}{3}]$

(%o18) $[t = -49.66666666666666]$

Замечание: Maxima по умолчанию выводит результат в символьном виде, если «попросить» можно получить ответ и в численной форме.

Получим систему неравенств: $\begin{cases} t > -\frac{298}{5} \\ t < -\frac{149}{3} \end{cases}$ или интервал: $\left(-\frac{298}{5};\ -\frac{149}{3}\right)$.

Условию задачи удовлетворяют только натуральные числа. Отсюда следует, что t – целое число, принадлежащее отрезку $[-59; -50]$.

Так как должны получить 10 пар чисел, применим следующий алгоритм:

--> for t: −59 thru −50 do if integerp(t) then print({x=298+5·t, y=−149−3·t});

$$\{x = 3, y = 28\}$$
$$\{x = 8, y = 25\}$$
$$\{x = 13, y = 22\}$$
$$\{x = 18, y = 19\}$$
$$\{x = 23, y = 16\}$$
$$\{x = 28, y = 13\}$$
$$\{x = 33, y = 10\}$$
$$\{x = 38, y = 7\}$$
$$\{x = 43, y = 4\}$$
$$\{x = 48, y = 1\}$$

(%o19) done

и получим целочисленные пары решений неопределенного уравнения, удовлетворяющие условию задачи.

Таким образом мы решали текстовую задачу с помощью приложения цепных дробей. Данный способ занимает больше времени, однако позволяет закрепить метод решения неопределенных уравнений с помощью цепных дробей, что является очень важным для будущего преподавателя математики.

Исследуя поставленный выше вопрос подробнее, пришли к более быстрому решению с помощью элементов программирования:

```
-->	[n:0, m:0]$;
for x: 1 thru 100 do
for y: 1 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) then if 3·x+5·y=149 then print([x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y]);
```

$$[x_1 = \mathbf{3}, y_1 = \mathbf{28}]$$
$$[x_2 = \mathbf{8}, y_2 = \mathbf{25}]$$
$$[x_3 = \mathbf{13}, y_3 = \mathbf{22}]$$
$$[x_4 = \mathbf{18}, y_4 = \mathbf{19}]$$
$$[x_5 = \mathbf{23}, y_5 = \mathbf{16}]$$
$$[x_6 = \mathbf{28}, y_6 = \mathbf{13}]$$
$$[x_7 = \mathbf{33}, y_7 = \mathbf{10}]$$
$$[x_8 = \mathbf{38}, y_8 = \mathbf{7}]$$
$$[x_9 = \mathbf{43}, y_9 = \mathbf{4}]$$
$$[x_{10} = \mathbf{48}, y_{10} = \mathbf{1}]$$

Решение построено как перебор всевозможных вариантов из определенного списка чисел, который можно задавать исходя из условий задачи. Также добавляем условие целочисленного решения: **integerp(x)** – возвращает целые числа x.

Если рассмотрим неопределенное уравнение, которое не имеет решения, то результат представляется следующим образом:

```
-->	[n:0, m:0]$;
for x: −10 thru 100 do
for y: −10 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) then if 143·x+169·y=5 then print(x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y);
(%o2)	done
```

Пример 2. Решить в целых числах уравнения высших степеней

а) $\boldsymbol{x^2 - x \cdot y - 2 \cdot y^2 = 7}$

```
-->	[n:0, m:0]$;
for x: −100 thru 100 do
for y: −100 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) then if x²−x·y−2·y²=7 then print([x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y]);
```

$$[x_1 = -5, y_1 = -2]$$
$$[x_2 = -3, y_2 = 2]$$
$$[x_3 = 3, y_3 = -2]$$
$$[x_4 = 5, y_4 = 2]$$

b) $x^3 + y^3 = 3333333$

```
-->	[n:0, m:0]$;
for x: −100 thru 100 do
for y: −100 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) then if x³ + y³ = 3333333 then print([x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y]);
(%o6)  done
```

Следовательно, уравнение не имеет решения.

c) $x^3 + y^3 = 4 \cdot (x^2 \cdot y + x \cdot y^2 + 1)$

```
-->	[n:0, m:0]$;
for x: −100 thru 100 do
for y: −100 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) then if x³ + y³ =4·(x²·y+x·y²+1) then print([x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y]);
(%o2)  done
```

Значит, данное уравнение также не имеет решения.

d) $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot u$

```
-->	for x: −10 thru 10 do
for y: −10 thru 10 do
for z: −10 thru 10 do
for u: −10 thru 10 do
if integerp(x) and integerp(y) and integerp(z) and integerp(u) then if x²+y²+z²+u²=2·x·y·z·u then display(x,y,z,u);
```

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$
$$u = 0$$

Следовательно, уравнение имеет единственное решение.

Пример 3. Решить в простых числах уравнение

a) $x^2 - 7 \cdot x - 144 = y^2 - 25 \cdot y$

```
-->	[n:0, m:0]$;
for x: 1 thru 100 do
for y: 1 thru 100 do
if primep(x)=true and primep(y)=true then if x² −7·x−144=y²−25·y then print([x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y]);
```

$$[x_1 = \mathbf{2}, y_1 = \mathbf{11}]$$
$$[x_2 = \mathbf{3}, y_2 = \mathbf{13}]$$
$$[x_3 = \mathbf{5}, y_3 = \mathbf{11}]$$
$$[x_4 = \mathbf{11}, y_4 = \mathbf{5}]$$
$$[x_5 = \mathbf{13}, y_5 = \mathbf{3}]$$

b) $\boldsymbol{x + y = x^2 - x \cdot y + y^{\,2}}$

```
-->  [n:0, m:0]$;
for x: 1 thru 500 do
for y: 1 thru 500 do
if primep(x)=true and primep(y)=true then if x+y=x²−x·y+y² then print(x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y);
```

$$x_1 = \mathbf{2}\ y_1 = \mathbf{2}$$

Пример 4. Решить в натуральных числах уравнение

a) $(x + 1)^{2y} + x^{2y} = (x + 2)^{2y}$

```
-->  [n:0, m:0]$;
for x: 1 thru 100 do
for y: 1 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) then if (x+1)^(2·y)+x^(2·y)=(x+2)^(2·y) then print(x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y);
```

$$x_1 = 3\ y_1 = 1$$

b) $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$

```
-->  [n:0, m:0]$;
for x: 1 thru 100 do
for y: 1 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) then if 3·2^x+1=y^2 then print(x[n:n+1]=x, y[m:m+1]=y);
```

$$x_1 = 3\ y_1 = 5$$
$$x_2 = 4\ y_2 = 7$$

Пример 5. Решить систему уравнений в натуральных числах

a) $\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3 \cdot x \cdot y \cdot z \\ x^2 = 2 \cdot (y + z) \end{cases}$

```
-->  for x: 1 thru 100 do
for y: 1 thru 100 do
for z: 1 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) and integerp(z) then if x³−y³−z³=3·x·y·z and x²=2·(y+z) then display(x,y,z);
```

$$x = 2$$
$$y = 1$$
$$z = 1$$

b) Решить в натуральных числах систему уравнений и найти x+y+z:

$$\begin{cases} 2x^2 + 30y^2 + 3z^2 + 12xy + 12yz = 308 \\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 12xy - 12yz = 92 \end{cases}$$

```
--> for x: 1 thru 100 do
for y: 1 thru 100 do
for z: 1 thru 100 do
if integerp(x) and integerp(y) and integerp(z) then if 2·x²+30·y²+3·z²+12·x·y+12·y·z=308 and 2·x²+6·y²−3·z²+12·x·y−12·y·z=92 then print('x=x, 'y=y, 'z=z, сумма=x+y+z);
```

$$x = 4\ y = 2\ z = 2 \text{ сумма} = 8$$
$$x = 7\ y = 1\ z = 4 \text{ сумма} = 12$$

Следовательно, система уравнений имеет два решения.

Таким образом, мы рассмотрели некоторые возможности применения Maxima в процессе преподавания абстрактной и компьютерной алгебры, в частности ответили на вопрос, который ставили для себя в начале исследования. Как мы увидели, в зависимости от поставленных целей применение системы компьютерной алгебры Maxima в учебном процессе может быть разнообразным. Если мы хотим упростить громоздкие вычисления и получить только ответ, то применяем элементы программирования так, чтобы студенты на выходе увидели лишь конечный результат. Иногда нам важно, чтобы студенты усвоили алгоритм решения некоторой задачи, тогда можно написать такой код программы, который будет демонстрировать и ход решения с выводом результата. Значит, систему аналитических вычислений Maxima можно использовать как в учебных целях, так и в качестве платформы для вполне серьезных научных разработок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашуркин, Д.П. Система компьютерной алгебры SAGE как средство для решения систем уравнений / Д.П. Ашуркин, Н.Ю. Богданова // Молодой исследователь Дона. 2016. № 2. С. 115-120.
2. Васильева, П. Исследование решения системы линейных уравнений средствами системы Maxima / П. Васильева, Р.И. Баженов // В сборнике: Энергетика, информатика, инновации-2016. в 3 томах. Национальный исследовательский университет "МЭИ", филиал в г. Смоленске. 2016. С. 259-261.
3. Галимова, Ф.И. Использование информационно-коммуникационных технологий на уроках математики / Ф.И. Галимова, М.И. Гареева // Молодежная наука в развитии регионов. 2017. Т. 2. С. 332-336.
4. Голубков, А.Ю. Компьютерная алгебра в системе SAGE: учебное пособие / А.Ю. Голубков, А.И. Зобнин, О.В. Соколова – Москва, 2013.
5. Дьяконов В. Новые системы компьютерной алгебры Maxima и wxmaxima // Компоненты и технологии. 2014. № 2 (151). С. 117-126.
6. Костин, А.В. Использование имитационных технологий при подготовке будущих учителей / А.В. Костин, Н.Н. Костина, Е.О. Миннегулова // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 1.

7. Костин, А.В. Изучение неевклидовых геометрий с использованием компьютерных пакетов / А.В. Костин, Н.Н. Костина // В сборнике: Проблемы и перспективы информатизации физико-математического образования. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Елабуга, 14 ноября 2016 г. – С. 44-46.
8. Лубягина, Е.Н. Исследование конечных алгебраических структур в системе Maxima / Е.Н. Лубягина, Р.В. Марков, А.А. Петров, Д.В. Чупраков, Д.В. Широков // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия № 2. Физико-математические и естественные науки. 2017. № 1. С. 35-46.
9. Матвеев, С.Н. Модели конечной проективной прямой, индуцируемые полем Галуа / С.Н. Матвеев, Ф.С. Сиразов //Актуальные проблемы математического образования: сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. – Набережные Челны: ФГБОУ ВПО «НИСПТР», 2015. – С. 37-40.
10. Матвеев, С.Н. О некоторых приложениях системы компьютерной алгебры Maxima в теории полей / С.Н. Матвеев, Ф.С. Сиразов // В сборнике: Информационные технологии. Автоматизация. Актуализация и решение проблем подготовки высококвалифицированных кадров (ИТАП-2016). Сборник материалов Международной научно-практической конференции (дистанционная форма). Под редакцией Л.А. Симоновой, С.К. Савицкого. 2016. С. 61-66.
11. Матвеев, С.Н. Применение системы компьютерной алгебры Maxima в изучении конечных проективных прямых / С.Н. Матвеев, Ф.С. Сиразов // Высшее образование сегодня. – 2015. №2. С. 82-85.
12. Сиразов Ф.С. Абстрактная и компьютерная алгебра с применением Maxima: Учебно-методическое пособие / Набережные Челны, 2014. – 49 с.
13. Сиразов, Ф.С. О применении системы компьютерной математики Maxima при изучении геометрии Лобачевского / Н.Н. Костина, Ф.С. Сиразов // Высшее образование сегодня. ИГ «Логос». – 2014. – № 6. – С. 63-67.
14. Сиразов Ф.С. Применение системы компьютерной алгебры Maxima в обучении элементам абстрактной и компьютерной алгебры // Известия РГПУ им. А.И. Герцена, 2009. -№116. – С. 223-227.
15. Сиразов Ф.С. Применение системы аналитических вычислений Maxima в обучении абстрактной алгебре // Высшее образование сегодня. 2011. № 8. С. 32-35.
16. Сиразов Ф.С. Элементы абстрактной и компьютерной алгебры с применением Maxima: учеб.-метод. пособие. Набережные Челны: НИСПТР, 2011. – 46 с.
17. Стахин Н.А. Пример использования компьютерной алгебры Maxima в дисциплине "Компьютерное моделирование" // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2015. № 12 (165). С. 86-92.
18. Троицкая, О.Н. Применение пакетов прикладных программ в математике: учебное пособие / О.Н. Троицкая, Н.Н. Конечная – Архангельск, 2015. – 100 с.

Издательство «Мир науки» \ Publishing company «World of science» http://izd-mn.com

Sirazov Fannur Samatovich
Naberezhnye Chelny state pedagogical university, Naberezhnye Chelny, Russia
E-mail: fsirazov@yandex.ru

On the possibility of applying Maxima computer algebra system to the solution of uncertain equations

Abstract. The author presents the possibility of using the freely distributed package of maxima analytical calculation system within the course "Abstract and computer algebra" in some sections of abstract algebra for training bachelors in the direction of Teacher education (with two profiles "Mathematics and computer science"), on the example of the application to the solution of uncertain equations and their systems. The article presents a study of the problem " how to solve indefinite equations using Maxima?". The appearance of matter is due to the complexity of the algorithm for the solution of indeterminate equations using continuous fractions students on practical employments on disciplines "Theory of numbers" and "Abstract and computer algebra". First, there is the option of dealing with one example with partial automation of the calculation algorithm of equations with the application of the chain fractions. Despite the fact that this process takes a long time to calculate with the application Maxima, the author believes such a detailed review is very useful for future teachers of mathematics in terms of better understanding of the algorithm. Another problem connected with the impossibility of solving some problems of abstract and computer algebra only with the help of Maxima main functions is considered in parallel in the article. The author sees the use of programming elements based on Maxima own language as a way out of this situation. The results of the study of the possibility of using the freely distributed system of computer algebra Maxima to solve indefinite equations and their systems are given in the form of examples of calculation using program codes of various structures. In the end, the author comes to the conclusion that the computation program can be used in educational purposes and as a platform for very serious scientific research.

Keywords: system of analytical calculations; abstract algebra; computer algebra; undefined equation; continued fraction; algorithm; program code; system of computer algebra; system of equations; system of inequalities