

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Тольяттинский государственный университет**

# **ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

**Сборник трудов  
IV Международной научной конференции  
«Геометрия и геометрическое образование  
в современной средней и высшей школе»  
(к 80-летию Е.В. Потоскуева)**

**29-30 ноября 2019 года**

**Тольятти  
Издательство ТГУ  
2020**

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
«Тольяттинский государственный университет»**

**ГЕОМЕТРИЯ И  
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ  
ОБРАЗОВАНИЕ**

**Сборник трудов**

**IV Международной научной конференции  
«Геометрия и геометрическое образование  
в современной средней и высшей школе»  
(к 80-летию Е.В. Потоскуева)**

**29-30 ноября 2019 года**

**Тольятти  
Издательство ТГУ  
2020**

УДК 372.8:51 +378+514

ББК 22.1 +74.22+74.58

Г35

**Редакционная коллегия:**

*И.В. Антонова*, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ;

*Н.А. Демченкова*, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ;

*С.Н. Дорофеев*, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ;

*Б.В. Уланов*, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ;

*Р.А. Утеева* (отв. редактор), доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая математика и математическое образование» ТГУ.

**Г 35** Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов IV международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 29 – 30 ноября 2019 года /под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. – 268 с.

Сборник содержит статьи, представленные на конференцию и одобренные редакционной коллегией.

Сборник адресован специалистам, преподавателям и учителям математики, докторантам, аспирантам и студентам.

Конференция включена в план проведения научных конференций, совещаний и семинаров Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в 2019 году.

**ISBN**

© Утеева Р.А. – научный руководитель конференции, 2020

© Авторы статей, 2020

© ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», 2020

**THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION  
OF RUSSION FEDERATION**

**TOGLIATTI STATE UNIVERSITY**

# **GEOMETRY AND GEOMETRIC EDUCATION**

**Collected articles**

**IV International Scientific Conference**

**«Geometry and geometric education»**

**(dedicated to the 80<sup>th</sup> anniversary of E.V. Potoskuev)**

**November, 29 -30, 2019 year**

**Togliatti 2020**

- конференции (25-27 мая 2017 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 147-150. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29171398>. – [дата обращения 04.10.2019].
7. *Игумнова Е.А.* Квест-технология в образовании: учеб. пособие / Е.А. Игумнова, И.В. Радецкая; Забайкал. гос. ун-т. – Чита: ЗабГУ, 2016. – 164 с. – URL: <https://kosova-ozgsch4.edumsko.ru/uploads/3000/4196/section/494761/40941.pdf>. – [дата обращения 04.10.2019].
8. *Миронова С.В.* Об использовании тематических образовательных web-квестов для подготовки к итоговой аттестации по математике // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 180-183. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29171409>. – [дата обращения 04.10.2019].
9. *Миронова С.В.* О дидактической структуре тематических образовательных web-квестов / С.В. Миронова, С.В. Напалков // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции (25-27 мая 2017 г.) – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2017. – С. 184-191. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29171410>. – [дата обращения 04.10.2019].
10. *Напалков С.В.* Web-технологии как педагогические формы приобщения школьников к творчеству в процессе обучения математике / С.В. Напалков, Н.В. Гусева // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – №6. – С. 768. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22877991>. – [дата обращения 04.10.2019].
11. *Напалков С.В.* Специфика заданий и задачных конструкций информационного контента тематического образовательного Web-квеста / С.В. Напалков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. – 2014. – №4 (36). – С. 222-226. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22823593>. – [дата обращения 04.10.2019].
12. *Утеева Р.А.* Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. ... д-ра. пед. наук / Р.А. Утеева – М. – 1998. – 363 с. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15969693>. – [дата обращения 15.06.2019].

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ

**Дюпина Анастасия Эдуардовна**

магистрант 2 курса Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского,  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Россия, г. Казань, [anastasiya.dupina@yandex.ru](mailto:anastasiya.dupina@yandex.ru)

**Аннотация.** В исследовании изучается структура геометрического мышления через совокупность пространственного, логического и понятийного видов мышления, отражены результаты экспериментальной работы по развитию уровня геометрического мышления у будущих учителей математики.

**Ключевые слова:** геометрическое мышление, подготовка учителей математики, планиметрия

# ANALYSIS OF GEOMETRIC THINKING STRUCTURE OF PEDAGOGICAL DEPARTMENT STUDENTS

**Dupina Anastasia Eduardovna**

second year master student of N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics,  
Kazan (Volga) Federal University  
Russia, Kazan, anastasiya.dupina@yandex.ru

**Abstract.** *The research studies the structure of geometric thinking through a combination of spatial, logical and conceptual types of thinking, the results of experimental work on the development of the level of geometric thinking in future mathematics teachers are reflected.*

**Keywords:** *geometric thinking, teacher training, Plane geometry.*

«Своеобразие геометрии, выделяющее её среди других разделов математики, да и всех наук вообще, заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой».

*А.Д. Александров*

Многолетняя практика проведения ЕГЭ и ОГЭ по математике[6], результаты Международной программы по оценке образовательных достижений учащихся (Programme for International Student Assessment, PISA) [5] показывают, что учащиеся испытывают большие трудности при решении геометрических задач, несмотря на тесную взаимосвязь предмета с жизненным опытом.

Низкий уровень геометрической подготовки в условиях школьного образования приводит к тому, что абитуриенты оказываются не готовыми к изучению курса элементарной планиметрии, поэтому следует обратить пристальное внимание на подготовку учителей математики в области геометрии. Результаты проекта «Teachers matter» [21] показывают, что успехи образовательных систем ведущих стран мира определяются в первую очередь качеством подготовки педагогических кадров. Согласно ФГОС ВО выпускник педагогического направления должен быть готов к реализации образовательной программы по своему предмету в соответствии с требованиями образовательных стандартов, используя при этом все возможности образовательной среды[9]. Для этого необходимо находить методические приемы и подходы в изучении геометрии для повышения заинтересованности и мотивации будущих учителей.

В психолого-педагогической литературе базовым понятием, определяющим качественный уровень геометрической подготовки, является *геометрическое мышление*. Анализ современных работ [1], [2], [4] показывает, что не существует общепринятого определения геометрического мышления, часто происходит подмена понятий «геометрическое мышление», «пространственное мышление», «пространственное воображение». Можно выделить *два подхода* в определении геометрического мышления: как

врожденное свойство психики человека [10], [3], и как результат математического образования [1], [11], [16].

Наиболее известными теориями, описывающими геометрическое мышление, являются Теория стадий Пиаже и Модель ван Хиле. *Теория Пиаже* связывает развитие геометрического мышления с возрастными особенностями ребенка, опираясь на детскую психологию. В основе лежит идея о том, что мысленное восприятие детьми пространства отличается от восприятия того, что находится вокруг них [1]. По мнению Пиаже [18], [19], ребенок начинает мыслить топологически, постепенно двигаясь к евклидовой геометрии, что противоречит историческому пути развития науки, которая прошла путь от евклидовой геометрии к топологии.

*Модель ван Хиле* описывает непосредственно стадии обучения геометрии, достигаемые в результате математического образования, поэтому она была взята за основу исследования. Данная Модель уже применялась в СССР при изучении влияния на результаты обучения учебного эксперимента, основанного на работах Выготского Л.С., однако не получила должного признания и распространения [14]. В результате анализа зарубежной литературы [11], [13], [14], [15], [16], посвященной вопросам развития геометрического мышления, было выявлено отсутствие определения понятия. К слову, сами создатели теории Пьер ван Хиле и Дина ван Хиле-Гельдоф не давали в своих работах определение геометрического мышления [20].

Согласно теории ван Хиле, геометрическое мышление можно измерить. Учеными были выделены *пять уровней* геометрического мышления, которые имеют строгую иерархию и способны прогнозировать успеваемость в геометрии: визуальный, аналитический, неформальная дедукция (или абстрактный), дедуктивный и строгий [8]. Методика обучения в соответствии с теорией ван Хиле как результат обобщения практической работы не включает в себя определение геометрического мышления и работу над отдельными его компонентами.

Анализ отечественной и зарубежной психолого-педагогической литературы позволил нам сформулировать гипотезу о структуре геометрического мышления как некоторой зависимости трех компонентов – логического, пространственного и понятийного видов мышления:

$$\text{Геометрическое мышление} = f(\text{ЛМ}, \text{ПрМ}, \text{ПМ})$$

Выделение перечисленных компонентов позволит более осознанно подходить к формированию геометрического мышления, влиять на отдельные его компоненты. С этой целью с декабря 2017 г. по настоящее время проводится опытно-экспериментальная работа среди студентов второго курса педагогического отделения ИММ им. Н.И. Лобачевского КФУ при изучении курса «Элементарная математика (планиметрия)», которая включает в себя *следующие этапы*:

1. Измерение уровня геометрического мышления в соответствии с теорией ван Хиле.
2. Определение уровней развития логического, пространственного и понятийного видов мышления, исследование их

взаимосвязей. 3. Разработка методики развития геометрического мышления будущих учителей математики, в частности, с помощью цифровых технологий.

Таким образом, одним из аспектов экспериментальной работы стал анализ соответствия уровня геометрического мышления по ван Хиле и психологических тестов на определение уровня развития логического, пространственного и понятийного видов мышления.

В соответствии с теорией уровней геометрического мышления ван Хиле директором Чикагского математического проекта, педагогом Залманом Узискиным был разработан тест [22] для школьников и студентов. Данный тест был переведен нами на русский язык для проведения эксперимента.

Для определения уровня понятийного мышления был использован тест «Сложные аналогии», который используется для выяснения того, насколько испытуемому доступно понимание сложных логических отношений и выделение абстрактных связей. Измерение уровня пространственного мышления осуществлялось с помощью Субтеста №8 «Пространственное воображение» теста Амтхауера. Логическое мышление было проверено Тестом на выполнение логических операций над геометрическими объектами (ЛОГО). Методика предназначена для диагностики умственного развития учащихся юношеского возраста и позволяет выявлять индивидуально-психологические различия в овладении логическими операциями с геометрическими объектами [10].

В тестировании приняли участие 32 студента 2 курса Педагогического направления Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ.

Наиболее высокие результаты студенты получили по итогам выполнения теста на измерение уровня понятийного мышления (Диаграмма 1).

При выполнении теста «Пространственное воображение» 86% ошибок студенты допустили, отвечая на вторую половину вопросов (с 11 по 20), которые подразумевали не одну операцию поворота или переворота, а их одновременное выполнение. Диаграмма 2 отражает уровень развития геометрического мышления (max – 84, min – 44) и средний балл по трем тестам (max – 81, min – 35). Девять из тридцати двух студентов продемонстрировали уровень развития геометрического мышления, имеющий наименьшую разницу с уровнем развития понятийного, пространственного и логического видов мышления. Разрозненность результатов у других студентов может свидетельствовать о преобладании того или иного вида мышления.

Хуже всего студенты справились с тестом на выполнение логических операций над геометрическими объектами (47% неправильных ответов), который имеет наименьшую погрешность в результатах в сравнении с тестом теории ван Хиле (41% неправильных ответов) (Диаграмма 3).

Подробный анализ данных, полученных в результате тестирований, дает возможность определить уровень развития каждой из трех составляющих геометрического мышления у отдельного студента и выявить, какой тип мышления преобладает в заданиях теста по теории ван Хиле, в которых были допущены ошибки. Понимание трудностей, которые испытывают студенты при

выполнении конкретных заданий, облегчает процесс преподавания, направленный на повышение уровня геометрического мышления каждого студента.

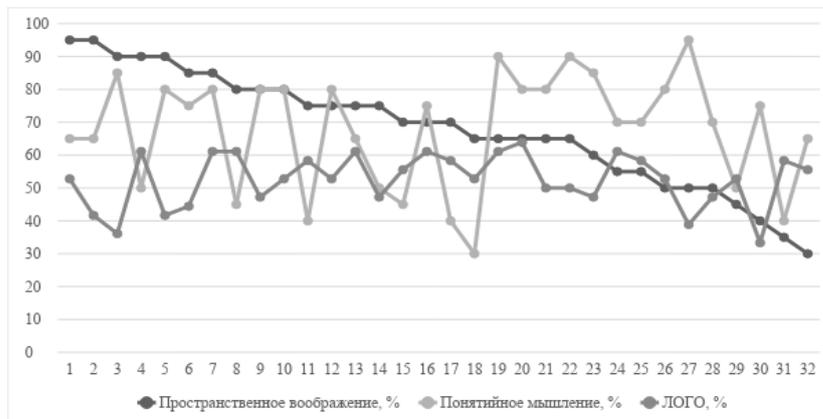


Диаграмма 1. Результаты по трем тестам

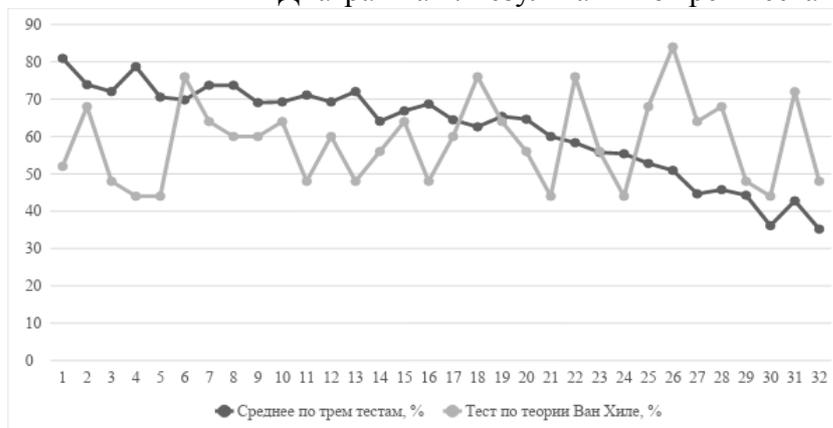


Диаграмма 2. Сравнение среднего показателя по трем тестам с результатами теста по теории ван Хиле

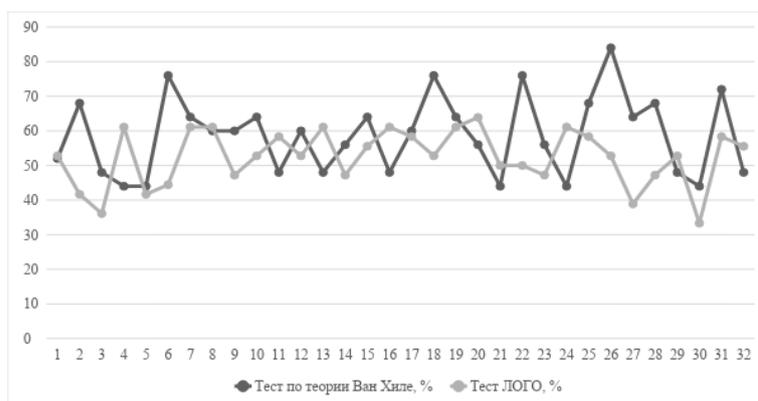


Диаграмма 3. Сравнение результатов теста по теории ван Хиле и теста ЛОГО

Данное исследование является одной из составляющих частей опытно-экспериментальной работы, направленной на повышение качества геометрической подготовки студентов педагогического отделения при помощи технологии смешанного обучения и использования цифровых технологий.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке автора курса «Элементарная математика (планиметрия)» Фалилеевой Марины Викторовны,

кандидата педагогических наук, доцента кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Боровских А.В., Рейхани Э., Розов Н.Х.* Развитие геометрического мышления школьников. [Электронный ресурс] / Режим доступа: [pro.msu.ru/open\\_files/borovskikh/razv\\_geom\\_mish.doc](http://pro.msu.ru/open_files/borovskikh/razv_geom_mish.doc)
2. *Дубинина С.А.* Развитие пространственного мышления детей младшего школьного возраста при изучении геометрического материала. [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://docplayer.ru/55441511-Svetlana-alekseevna-razvitie-prostranstvennogo-myshleniya-detey-mladshego-shkolnogo-vozrasta-pri-izuchenii-geometricheskogo-materiala.html> (Дата обращения: 02.02.2018)
3. *Истратова О.Н.* Справочник психолога-консультанта организации [Электронный ресурс] / справ. / О.Н. Истратова, Т.В. Эксакусто. — Электрон. дан. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2010. — 638 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/70148>
4. *Кайгородцева Н.В.* Геометрия, геометрическое мышление и геометро-графическое образование // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=12330>
5. *Основные результаты* международного исследования PISA-2015 [Электронный ресурс] / Режим доступа: [http://www.osoko.edu.ru/common/upload/osoko/pisa/PISA\\_2015\\_results\\_short\\_report.pdf](http://www.osoko.edu.ru/common/upload/osoko/pisa/PISA_2015_results_short_report.pdf)
6. *Статистико-аналитический отчет* о результатах ЕГЭ. URL: [https://www.ege15.ru/files/common/other/GIA2018/EGE2018/2\\_22\\_%D0%9E%D0%A2%D0%A7%D0%95%D0%A2%20%D0%95%D0%93%D0%AD%202018.pdf](https://www.ege15.ru/files/common/other/GIA2018/EGE2018/2_22_%D0%9E%D0%A2%D0%A7%D0%95%D0%A2%20%D0%95%D0%93%D0%AD%202018.pdf).
7. *Тест структуры интеллекта Амтхауэра.* Психодиагностика. Psyera.ru [Электронный ресурс]: Режим доступа: <https://psyera.ru/2484/test-struktury-intellekta-amthauera> (Дата обращения: 18.12.2017)
8. *Фалилеева М.В., Дюпина А.Э.* Обучение курсу «Элементарная математика» с использованием программы GeoGebra / В сборнике: Преподавание математики и компьютерных наук в высшей школе Материалы международной научно-методической конференции. Научный редактор Е.К. Хеннер. 2017. — С. 88-92. [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29943037>
9. *Приказ от 4 декабря 2015 г. N 1426* об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 педагогическое образование (уровень бакалавриата) [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgosvob/440301.pdf>
10. *Якиманская И.С.* Психологические основы математического образования: Учебное пособие для студентов пед.вузов / Ираида Сергеевна Якиманская. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 320 с.
11. *Clements D. H., & Battista, M. T.* (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420-464). New York: MacMillan.
12. *Frykholm, J. A.* (1994). The significance of external variables as predictors of van Hiele levels in algebra and geometry students. Madison: University of WisconsinMadison. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 372 924)
13. *Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R.* (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- July Raquel Andrea.* "Thinking in three dimensions: Exploring students' geometric thinking and spatial ability with the Geometer's Sketchpad" (2001). ProQuest ETD Collection for FIU. AAI3018479. <http://digitalcommons.fiu.edu/dissertations/AAI3018479>

14. Nasser, L. (1995). Long term effects of a geometry course based on the van Hiele theory. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), Proceedings of the annual conference of the international group for the psychology of mathematics education (19th. Recife Brazil. July 22-27'): Vol 1. (pp. 213).
15. Neslihan Bulut, Mehmet Bulut. Development of pre-service elementary mathematics teachers' geometric thinking levels through an undergraduate geometry course. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 46 (2012) 760 – 763  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812013237>
16. Pavlovičová G., Švecová V., Rumanová L. (2014) Support of Pupil's Creative Thinking in Mathematical Education. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 1715-1719,  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042814004789>
17. Piaget J., Inhelder B. *The Child's Conception of Space*. New York: Norton, (1967).  
 Piaget J., Inhelder B., Szeminski A. *The Child's Conception of Geometry*. London: Routledge & Kegan Paul, (1960).
18. Pierre M. van Hiele. *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Academic Press, 1986: 246 с.
19. *Teachers matter*. Attracting, developing and retaining effective teachers. OECD, 2005.
20. Zalman Usiskin. "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry." University of Chicago, 1982: 438.  
[https://www.researchgate.net/publication/234715504\\_Van\\_Hiele\\_Levels\\_and\\_Achievement\\_in\\_Secondary\\_School\\_Geometry\\_CDASSG\\_Project](https://www.researchgate.net/publication/234715504_Van_Hiele_Levels_and_Achievement_in_Secondary_School_Geometry_CDASSG_Project)

## ВЗАИМОСВЯЗЬ ШКОЛЬНОГО И ВУЗОВСКОГО КУРСОВ ГЕОМЕТРИИ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ»

**Шкурай Ирина Александровна**

магистрант 2 года обучения Института математики, механики  
и компьютерных наук имени И. И. Воровича  
Южный федеральный университет  
Россия, г. Ростов-на-Дону, ishkuray@mail.ru

**Аннотация.** В статье рассматривается история введения темы «Векторы» в школьный курс геометрии. Показана связь школьного курса геометрии с разделом «Векторная алгебра», изучаемого в рамках дисциплины «Геометрия» студентами педагогических вузов. Представлены результаты среза остаточных знаний первокурсников по теме «Векторы».

**Ключевые слова:** вектор, координаты вектора, школьный курс геометрии, векторная алгебра, векторный метод.

**Skuray Irina Aleksandrovna**

magistrant 2 years of study Institute of Mathematics, Mechanics,  
and Computer Science named after of I.I. Vorovich  
Southern federal University  
Russia, Rostov-on-Don, ishkuray@mail.ru

**Abstract.** The article discusses the history of the introduction of the topic "Vectors" in the school course of geometry. The connection of the school course geometry with the section "Vector algebra", studied in the discipline "Geometry" students of pedagogical universities. The results of the study of residual knowledge of first-year students on the topic "Vectors" are presented.

**Keywords:** vector, vector coordinates, school geometry course, vector algebra, vector method.

Вектор – одно из важнейших математических понятий: на нем базируется современное изложение геометрии, алгебры, в меньшей мере математического