Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply’ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 50

Степенные ряды

Сегодня мы будем решать задачи сходимости функциональных рядов частного вида, которые называются *степенными*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-a)^n, \tag{1}$$

где $a_n, \quad n=1,\,2,\ldots$ – *коэффициенты* степенного ряда.

Типичный пример такого ряда – *разложение Тейлора* в окрестности точки $x=a$ функции $f(x)$, дифференцируемой в окрестности этой точки неограниченное число раз:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,. \tag{2}$$

Остаточный член этого ряда в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}, \qquad 0<\theta<1\,.$$

Ряд вида (2) при $a = 0$ обычно называется *рядом Маклорена*. Приведем разложения Маклорена для некоторых элементарных функций с указанием области их сходимости.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |\,x\,| < \infty,\\
&\sin x \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad |\,x\,| < \infty,\\
&\cos x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |\,x\,| < \infty,\\
&(1+x)^{\alpha} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n, \qquad |\,x\,| < 1,\\
&\ln x \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad -1 < \, x \, \leq 1.
\end{aligned}
$$

В общем виде ряд (1) может иметь *интервал сходимости* вида $|\,x - a\,| < R$, внутри которого ряд (1) сходится *абсолютно* и *равномерно*. В граничных точках $|\,x - a\,| = R$ сходимость бывает не всегда. Число R называется *радиусом сходимости* и вычисляется по формулам

$$(1) \quad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|}$$

или

$$(2) \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\, \frac{a_n}{a_{n+1}} \,\right|,$$

если предел существует.

Исследовать степенной ряд на сходимость - это значит определить радиус сходимости R и исследовать его сходимость в точках $x = a \pm R$. Дадим примеры такого исследования.

Пример 1. *Найти область сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n \,.$$

Решение. Имеем:

$$a = 1, \qquad a_n = \frac{2n+1}{3n^2+2}.$$

Для определения радиуса сходимости естественно воспользоваться формулой (2):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} \cdot \frac{3(n+1)^2+2}{2(n+1)+1} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в области $|\,x-1\,| < 1$, то есть при $x \in (\,0\,,\,2)$.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости $(\,0\,,\,2)$.

Когда $x = 0$ получаем числовой ряд Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n^2+2}\,,$$

который сходится условно, поскольку

$$\frac{2n+1}{3n^2+2} \sim \frac{2}{3n} \qquad (2)$$

(члены расходящегося гармонического ряда).

В случае $x = 2$ “асимптотически гармонический” (см. (2)) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2}\,.$$

Ответ: область сходимости $0 \le x < 2$.

Пример 2. *Найти область сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} (x+1)^n\,.$$

Решение. Имеем:

$$a = -1, \qquad a_n = \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} \qquad (3)$$

Для определения радиуса сходимости естественно воспользоваться формулой (1), поскольку числитель коэффициента a_n имеет вид выражения в степени n. К тому же последовательность $\{ a_n \}$ содержит две подпоследовательности, соответствующих четным и нечетным значениям n. Обычный предел в таких случаях не существует и, в зависимости от ситуации, следует обращаться к верхнему (или нижнему) пределу, равному наибольшему (или наименьшему) из частичных пределов.

Итак,

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n \,|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2+(-1)}{\sqrt[n]{n}} = 3,$$

так как $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Следовательно, $R = 1/3$ и ряд сходится абсолютно в области $|\, x+1 \,| <$ 1.3, то есть при $x \in (\, -4/3\,,\, -2/3)$.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости $x \in (\, -4/3\,,\, -2/3)$, то есть, когда $x + 1 = \pm 1/3$.

При $x + 1 = 1/3$ ряд расходится, ибо члены ряда с $n = 2k$ составляют в сумме гармонический ряд. Тоже самое имеет место и в точке $x+1 = -1/3$. Таким образом, на границе интервала сходимости ряд расходится.

Ответ: область сходимости $|\, x + 1 \,| \,<\, 1/3$.

Замечательно то, что *в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать и при этом радиус сходимости не изменяется.* С помощью этих операций иногда удается ряд просуммировать.

Пример 2. *Вычислить сумму ряда*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots .$$

Решение. По формуле (2) находим, что ряд сходится, когда $|\, x \,| \,<\, 1$. Ели продифференцировать этот ряд почленно, то получим геометрический ряд со знаменателем x^2 :

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots \,=\, \frac{1}{1-x^2}.$$

Следовательно, с точностью до константы

$$S(x) = \int \frac{d\,x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+x}{1-x} + C.$$

Постоянную C можно определить, вычисляя значение $S(x)$ в некоторой точке $x_0 \in (-1, , 1)$, скажем в точке $x = 0$. Переходя почленное к пределу при $x \to 0$, находим, что $S(0) = 0$, откуда следует $\ln 1 + C = 0$, и получаем окончательный

Ответ: $S(x) = \frac{1}{2}\ln 1 + x1 - x$.

Задание 50

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

Исследовать на сходимость следующие степенные ряды.

$$\mathbf{20.7(3)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}\,,$$

$$\mathbf{20.7(4)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n+3}{3n^2+4} x^{2n+1}\,,$$

$$\mathbf{20.8(1)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1}\, x^n\,,$$

$$\mathbf{20.8(2)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln\frac{3n-2}{3n+2}\,,$$

$$\mathbf{20.8(4)}^*\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) x^n, \qquad a > 0\,,$$

$$\mathbf{20.9(1)}^*\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}\, (x+2)^n\,,$$

$$\mathbf{20.9(4)}^*\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}\right) (x-1)^n\,,$$

$$\mathbf{20.10(1)}^* \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^a}\,.$$

Вычислить сумму ряда.

$$\mathbf{2909}^*\text{(Демид.)} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\,.$$