КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра астрономии и космической геодезии

А.А. ЗАГИДУЛЛИН, В.С. УСАНИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Казань – 2024

УДК 521.11

ББК 22.62

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИФ

Протокол № 02 от 7 октября 2024 года

Рецензент:

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры автомобильные дороги, мосты и тоннели КГАСУ

В.С. Боровских

Загидуллин А.А., Усанин В.С.

Решение задач по небесной механике / А.А. Загидуллин, В.С. Усанин. – Казань: Казанский федеральный университет, 2024. – 56 с.

В пособии разобраны основные темы по задаче 2-х тел.

Настоящее учебно-методическое пособие адресовано, в первую очередь, студентам таких специальностей, как «Астрономия», «Геодезия и дистанционное зондирование» и т.д., а также широкому кругу читателей, интересующихся указанными проблемами.

Содержание

1. КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА

Согласно первому закону Кеплера, все тела движутся по коническим сечениям. Среди всех сечений для нас наиболее интересен эллипс. Рассмотрим уравнение кривой 2-го порядка в общем виде и научимся выделять из него случаи эллипса. Рассмотрим также ряд полезных свойств уравнения эллипса, которые нам помогут в будущем.

Начнем с уравнения второго порядка, имеющего следующий вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Для выделения стандартного уравнения эллипса осуществим преобразование системы отсчета: сдвиг и поворот по следующим стандартным формулам (используя матрицу вращения и матрицу сдвига):

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{aligned} \tag{2}$$

Задание 1. Осуществите преобразование уравнения (1) в штрихованную систему координат.

Ответ:

$$\begin{aligned} & A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \\ & A' = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha, \\ & B' = B\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha, \\ & C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \\ & D' = a(A\cos\alpha + B\sin\alpha) + b(B\cos\alpha + C\sin\alpha) + D\cos\alpha + E\sin\alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

$$E' = a(B\cos\alpha - A\sin\alpha) + b(C\cos\alpha - B\sin\alpha) - D\sin\alpha + E\cos\alpha,$$

$$F' = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F.$$

Задание 2. Проверить, что детерминант определителя есть инвариант преобразования $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{bmatrix}$.

Решение: Покажем, что детерминант в штрихованной системе совпадает с $AC - B^2$.

$$A'C' - B'^2 = A^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha - 2BA\cos^3\alpha\sin\alpha + AC\cos^4\alpha + 2AB\cos\alpha\sin^3\alpha -$$

$$-4B^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2BC\cos^3\alpha\sin\alpha + CA\sin^4\alpha - 2BC\sin^3\alpha\cos\alpha +$$

$$+C^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha - B^2\cos^2 2\alpha - \frac{1}{4}(C-A)^2\sin^2 2\alpha - B(C-A)\cos 2\alpha\sin 2\alpha.$$

Распишем подробнее последние три слагаемых:

$$-\cos^2 2\alpha = -\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha,$$

$$-\frac{1}{4}(C-A)^2\sin^2 2\alpha = -C^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 2CA\cos^2\alpha\sin^2\alpha - A^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha,$$

$$-B(C-A)\cos 2\alpha\sin 2\alpha = -2BC\cos^3\alpha\sin\alpha + 2BC\sin^3\alpha\cos\alpha + 2BA\cos^3\alpha\sin\alpha -$$

$$-2BA\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

Осуществив подстановку и сократив большую часть слагаемых, осуществим их группировку:

$$(AC - B^2)\cos^4\alpha + (AC - B^2)\sin^4\alpha - 4B^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2B^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha +$$

$$+2AC\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (AC - B^2)\cos^4\alpha + (AC - B^2)\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(AC - B^2).$$

В итоге получаем:

$$(AC - B^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = (AC - B^2).$$

Вернемся к теории. Потребуем, чтобы в штрихованной системе координат произведение $2B'x'y'$ равнялось нулю или, что то же самое, B' был равен нулю. Тогда из формулы (3) будем иметь:

$$0 = B\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha,$$

откуда получаем условие на угол поворота системы отсчета:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \tag{4}$$

Пусть выбором коэффициентов сдвига a, b штрихованные коэффициенты D', E' также сделаны равными нулю, тогда запишем выражение второго порядка в виде:

$$px'^2 + qy'^2 = r,$$

далее опустим штрих в выражениях, тогда получим:

$$\frac{x^2}{\frac{r}{p}} + \frac{y^2}{\frac{r}{q}} = 1.$$

Положив $\frac{r}{p} = \epsilon_1 a^2$, $\frac{r}{q} = \epsilon_2 b^2$, назовем следующее выражение уравнением эллипса если $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Задание 3. Приведите следующее выражение второго порядка к каноническому виду. Постройте эллипс.

$$2x^2 + xy + 2y^2 = 1.$$

Решение: Рассмотрим тангенс двойного угла, чтобы найти угол, на который нужно повернуть систему отсчета:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} = \frac{2 \cdot 0.5}{2 - 2} \to \infty,$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2},$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Подставим найденный угол в уравнения (2) :

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

а теперь подставим данные формулы замены в уравнение задания, после упрощения получаем:

$$\frac{3x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Преобразуем к стандартному выражению:

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Построим график:

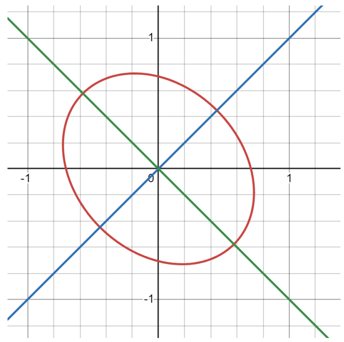

Рис. 1. График эллипса для задания 3

Задание 4. Приведите к каноническому виду и постройте эллипс для уравнения:

$$5x^2 + py^2 - 30x + 18y + 9 = 0.$$

Решение:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} = \frac{0}{5-9} = 0,$$

$$\alpha = 0.$$

Подставим найденный угол в уравнения (2):

$$x = x',$$

$$y = y'.$$

Далее нужно выделить полный квадрат:

$$5(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) + 9 = 0,$$

$$5(x^2 - 2x \cdot 3 + 9 - 9) + 9(y^2 + 2y \cdot 1 + 1 - 1) + 9 = 0,$$

$$5(x-3)^2 - 45 + 9(y+1)^2 - 9 + 9 = 0,$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Таким образом, оси эллипса параллельны основной системе координат, длины его полуосей $a = 3$ и $b = \sqrt{5}$, а сдвиг начала системы координат $x_0 = 3$, $y_0 = -1$. Построим график:

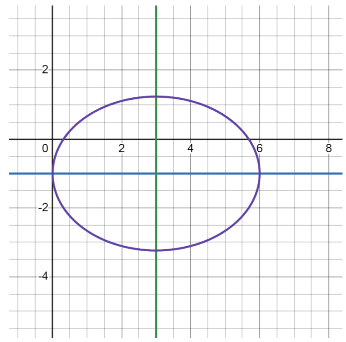

Рис. 2. График эллипса для задания 4

Задание 5. Приведите к каноническому виду и постройте эллипс для уравнения:

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0.$$

Решение:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} = \frac{2 \cdot 6}{17 - 8} = \frac{4}{3}.$$

Воспользуемся формулой двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Обозначим $\operatorname{tg} \alpha = t$:

$$\frac{4}{3} = \frac{2t}{1 - t^2},$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0,$$

$$t_1 = \frac{1}{2},$$

$$t_2 = -2.$$

Эти значения соответствуют двум углам, различающимся между собой на 90°, возьмем из них меньший по модулю:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{4},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставим уравнения замены (2) в наш пример:

$$x'^2(17\cos^2\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha) + x'y'(12\cos^2\alpha - 18\sin\alpha\cos\alpha -$$

$$-12\sin^2\alpha) + y'^2(8\cos^2\alpha - 12\sin\alpha\cos\alpha + 17\sin^2\alpha) - x'(46\cos\alpha + 28\sin\alpha) +$$

$$+y'(46\sin\alpha - 28\cos\alpha) + 17 = 0.$$

Подставив найденные значения синуса и косинуса и упростив, получим выражение следующего вида:

$$(x' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 + \frac{1}{4}(y' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 1.$$

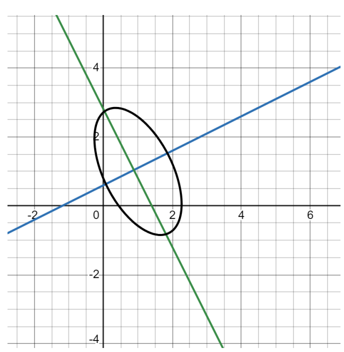

Рис. 3. График эллипса для задания 5

Задание 6. Выразите малую полуось эллипса $r_1 + r_2 = 2a$ через его большую полуось a и эксцентриситет $e = \frac{c}{a}$ (см. рис. 4).

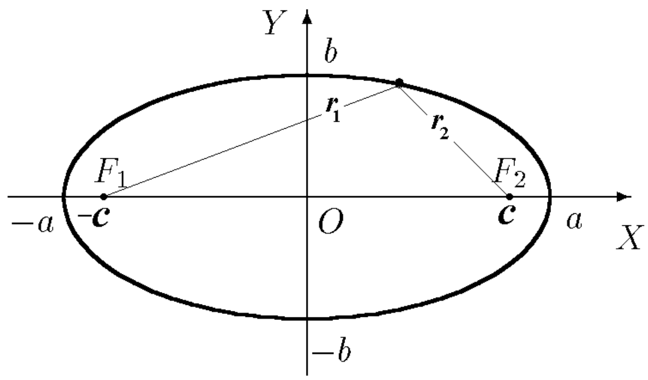

Рис. 4. Эллипс

Решение: Воспользуемся теоремой Пифагора:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Домножим на сопряженное:

$$(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 = 2a(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}),$$

$$4xc = 2a(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}).$$

Объединим следующие уравнения:

$$\frac{2xc}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Сложим полученные выражения:

$$\frac{xc}{a} + a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Возведем в квадрат:

$$\left(\frac{xc}{a}\right)^2 + a^2 + 2xc = (x+c)^2 + y^2,$$

$$x^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2.$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$, тогда:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Заметим, что получили уравнение эллипса, значит величина, обозначенная нами b, соответствует малой полуоси, которую можно выразить через a и e, воспользовавшись определением эксцентриситета: $b = a\sqrt{1-e^2}$.

Задание 7. Найдите площадь эллипса, используя его уравнение, приведенное к каноническому виду.

Решение: Рассмотрим вспомогательный интеграл и сделаем замену $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{\cos 2t d(2t)}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin 2t + \mathrm{const},$$

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{a^2}{2} \sin t \cos t = \frac{x}{2} a \cos t = \frac{xa}{2}\sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Таким образом:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \text{const}.$$

Перейдем теперь к поиску площади эллипса с полуосями a и b. Исходя из симметрии, получаем:

$$S = 2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\frac{b}{a}(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})\Big|_{-a}^{a} = \frac{ba^2}{a}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \pi ab.$$

Самостоятельная работа 1.

Привести уравнение 2-го порядка к каноническому виду и нарисовать эллипс.

Задание 1. $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 16 = 0$.

Ответ: $(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 1$.

Задание 2. $x = 2 - \frac{3}{4}\sqrt{15 - y^2 + 2y}$.

Ответ: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$.

Задание 3. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 94 = 0$.

Ответ: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$.

2. ТЕОРИЯ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим главную тему, на которой базируется весь курс – закон всемирного тяготения. Согласно данному закону, сила взаимодействия между двумя точечными объектами прямо пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, а коэффициент пропорциональности, известный как гравитационная постоянная, равен $6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Вектор силы направлен по линии, соединяющей точечные объекты. Далее запишем уравнения движения 2-х тел в различных системах координат. Пусть имеется неподвижная инерциальная система координат (ξ, η, ζ). Обозначим радиусы-векторы, направленные из центра системы отсчета к телам с массами m_0 и m_1, как $\overrightarrow{\rho_0}$, $\overrightarrow{\rho_1}$. Тогда вектор, направленный от тела с массой m_0 к массе m_1, будет равен $\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}$. Запишем векторы сил, действующих на каждое тело, объединив со вторым законом Ньютона:

$$\overrightarrow{F_1} = -Gm_0m_1\frac{\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}}{|\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}|^3} = m_1\frac{d^2\overrightarrow{\rho_1}}{dt^2},$$

$$\overrightarrow{F_2} = -Gm_0m_1\frac{\overrightarrow{\rho_0} - \overrightarrow{\rho_1}}{|\overrightarrow{\rho_0} - \overrightarrow{\rho_1}|^3} = m_0\frac{d^2\overrightarrow{\rho_0}}{dt^2}.$$

Из полученных выражений получаем формулы для нахождения ускорений каждого тела в абсолютной (инерциальной) системе координат. Очевидно, что полученные по этим выражениям ускорения будут неудобны в использовании. Для практического удобства перейдем в неинерциальную систему отсчета, например, в систему отсчета, привязанную к телу с массой m_0. Обозначим в ней радиус-вектор тела массой m_1 как $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}$. Возьмем от этого выражения вторую производную по времени и сделаем ряд преобразований:

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{\rho_1}}{dt^2} - \frac{d^2\overrightarrow{\rho_0}}{dt^2} = -Gm_0\frac{\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}}{|\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}|^3} - \left(-Gm_1\frac{\overrightarrow{\rho_0} - \overrightarrow{\rho_1}}{|\overrightarrow{\rho_0} - \overrightarrow{\rho_1}|^3}\right) =$$

$$= -G\left(m_0\frac{\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}}{|\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}|^3} + m_1\frac{\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}}{|\overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_0}|^3}\right) = -G(m_0 + m_1)\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3}.$$

Итого, мы имеем уравнение движения тела m_1 относительно тела m_0:

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -G(m_0 + m_1)\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3}. \qquad (6)$$

Рассмотрим следующий вариант записи уравнения движения в задаче 2-х тел относительно центра масс системы (барицентра). По определению, чтобы найти центр масс, нужно воспользоваться формулой $\overrightarrow{r_b} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum m_i}$. Если начало системы отсчета находится в центре масс, то $\overrightarrow{r_b} = 0$, тогда имеем следующее соотношение:

$$m_0 \overrightarrow{\rho_0} + m_1 \overrightarrow{\rho_1} = 0,$$

$$\overrightarrow{\rho_0} = -\frac{m_1}{m_0} \overrightarrow{\rho_1},$$

$$\overrightarrow{\rho_1} = -\frac{m_0}{m_1} \overrightarrow{\rho_0}.$$

Подставим полученные выражения в уравнения движения в абсолютной системе отсчета:

$$\frac{d^2 \overrightarrow{\rho_0}}{dt^2} = -G m_1 \frac{\overrightarrow{\rho_0} - \overrightarrow{\rho_1}}{|\overrightarrow{\rho_0} - \overrightarrow{\rho_1}|^3},$$

$$-\frac{m_1}{m_0} \frac{d^2 \overrightarrow{\rho_1}}{dt^2} = -G m_1 \frac{-\frac{m_1}{m_0} \overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_1}}{|-\frac{m_1}{m_0} \overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_1}|^3}.$$

Сократим на массу m_1, сократим минус в правой части, с учетом того, что минус под модулем в знаменателе исчезнет, перенесем массу m_0 вправо, а также приведем подобные слагаемые:

$$\frac{d^2 \overrightarrow{\rho_1}}{dt^2} = -G \frac{m_0^3}{(m_1 + m_0)^2} \frac{\overrightarrow{\rho_1}}{\rho_1^3}.$$

Осуществив аналогичные преобразования, получим выражение для ускорения тела с массой m_0:

$$\frac{d^2 \overrightarrow{\rho_0}}{dt^2} = -G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_0)^2} \frac{\overrightarrow{\rho_0}}{\rho_0^3}.$$

Считая, что m_0 – это масса Земли, а m_1 – масса спутника, которая существенно меньше массы Земли ($m_1 \to 0$), получим упрощенные формулы:

$$\frac{d^2 \overrightarrow{\rho_1}}{dt^2} = -G m_0 \frac{\overrightarrow{\rho_1}}{\rho_1^3},$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{\rho_0}}{dt^2} = 0.$$

То есть в барицентрической системе координат мы видим, что малый спутник не оказывает воздействия на движение центрального тела. Перейдем к решению задач.

Задание 1. (Гл. II, §1, №3 [1].) Какое из тел, Земля или Солнце, притягивает Луну сильнее, если известно, что среднее расстояние между Луной и Землей 380 000 км, расстояние между Землей и Солнцем 150 млн км, масса Земли в 330 000 раз меньше массы Солнца.

Решение: Запишем модуль силы притяжения между телами (Солнце – s, Земля – e, Луна – m):

$$F_{ms} = G\frac{m_m m_s}{r_{ms}^2},$$

$$F_{me} = G\frac{m_m m_e}{r_{me}^2}.$$

Согласно задаче, разделим одно уравнение на другое и проведем вычисления:

$$\frac{F_{ms}}{F_{me}} = \frac{m_s}{m_e}\frac{r_{me}^2}{r_{ms}^2} = 33 \cdot 10^4 \left(\frac{28 \cdot 10^4 \text{ км}}{15 \cdot 10^7 \text{ км}}\right)^2 = 2,1.$$

Вывод: Солнце притягивает Луну примерно в 2 раза сильнее, чем Земля.

Задание 2. (Гл. II, §1, №5 [1].) Четыре равных однородных шара, каждый массы m, имеют своими центрами вершины квадрата со стороной a. На прямой, соединяющей середины 2-х противоположных сторон квадрата, на расстоянии a от его центра расположена масса $4m$. Насколько изменится сила, с которой четыре шара притягивают эту массу $4m$, если общую массу системы шаров поместить в центр квадрата.

Решение: Поместим начало системы координат в точку с массой $4m$ и направим ось Ox влево, ось Oy вниз. В силу симметрии системы проекция силы

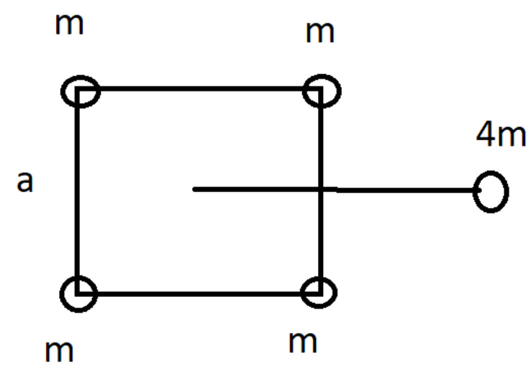

Рис. 5. Рисунок для задания 2

на ось Oy будет равна нулю. Обозначив один из левых шаров индексом 1, а один из правых – 2, горизонтальную проекцию силы сможем записать в виде:

$$F_x = 2F_{1x} + 2F_{2x} = 2F_1 \cos\alpha_1 + 2F_2 \cos\alpha_2,$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{1,5a}{r_1},$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{0,5a}{r_2},$$

$$r_1^2 = (0,5a)^2 + (1,5a)^2 = \frac{10}{4}a^2,$$

$$r_2^2 = (0,5a)^2 + (0,5a)^2 = 0,5a^2,$$

$$F_x = 8Gm^2\left(\frac{\cos\alpha_1}{r_1^2} + \frac{\cos\alpha_2}{r_2^2}\right).$$

Подставим полученные косинусы и модули радиусов-векторов в формулу для проекции полной силы на ось Ox, после упрощения получим:

$$F_x = G\frac{m^2}{a^2}\cdot 4\left(\frac{24}{10^{1,5}} + 2^{1,5}\right) \approx 14,35G\left(\frac{m}{a}\right)^2.$$

Если поместить все 4 массы в центр квадрата, то расстояние между ними равно

a, а сила притяжения:

$$F = G\frac{4m \cdot 4m}{a^2} = 16G\left(\frac{m}{a}\right)^2.$$

Таким образом, сделаем вывод о том, что в данном случае распределенная система притягивает слабее, чем сконцентрированная масса, помещенная в центр.

Задание 3. (Гл. II, §1, №18 [1].) Определите силу, с которой однородный конус с высотой h притягивает точечную массу, помещенную в его вершине. Угол раствора конуса 2α, а плотность σ.

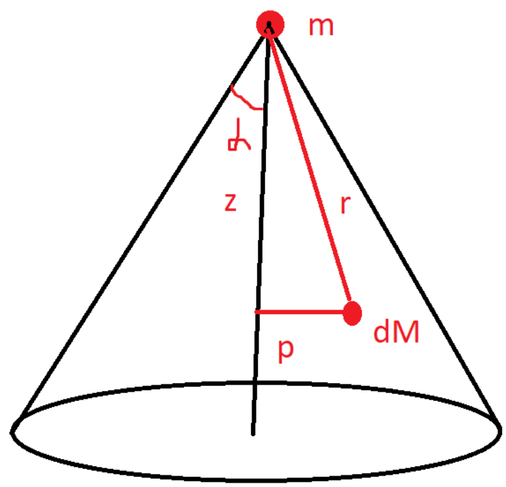

Рис. 6. Рисунок для задания 3

Решение: В силу симметрии задачи, сила будет направлена вдоль оси конуса, модуль силы равен ее вертикальной составляющей: $F = \int dF_z$. Чтобы найти проекцию силы притяжения от элемента массы конуса dM в цилиндрической системе координат (ρ, ϕ, z), необходимо модуль силы умножить на косинус угла между осью Oz и направлением на этот элемент массы: $\cos\beta = \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$, где элемент массы в этой системе выражается как $dM = \sigma dV = \sigma\rho d\rho d\phi dz$. Результат интегрирования по углу ϕ в силу симметрии можно записать сразу: 2π. Запишем полный интеграл и перейдем к его вычислению:

$$F = \int \frac{GmdM}{r^2}\cos\beta = \int \frac{GmdM}{z^2+\rho^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = 2\pi Gm\sigma \int\int \frac{z\rho d\rho dz}{(z^2+\rho^2)^{1,5}}.$$

Расставим теперь пределы интегрирования. Координата z изменяется в конусе от 0 до h, минимальное радиальное расстояние $\rho = 0$, максимальное при координате z: $\rho = z\operatorname{tg}\alpha$.

$$F = 2\pi Gm\sigma \int_0^h \left(\int_0^{z\operatorname{tg}\alpha} \frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{1,5}}\right) zdz.$$

Внутренний интеграл берётся достаточно просто по формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, после соответствующей подстановки получим ответ на поставленный в задании вопрос:

$$F = 2\pi Gm\sigma \int_0^h (1-\cos\alpha)dz = 2\pi Gm\sigma(1-\cos\alpha)h.$$

Самостоятельная работа 2.

Задание 1. Гравиметрические измерения ускорения силы тяжести (не силы гравитационного притяжения) в экваториальных точках поверхности Земли дали значение $g = 9,78034$ м/с^2. Экваториальный радиус Земли равен $6378,165$ км. Необходимо определить гравитационный параметр ($\mu = Gm$) Земли.

Задание 2. Однородная материальная прямая с линейной плотностью σ притягивает точку единичной массы, отстоящую от прямой на расстоянии h. Найдите силу притяжения. Покажите, что она равна силе притяжения однородной полуокружности той же плотности и радиуса h, центр которой совпадает с притягиваемой точкой.

Задание 3. Вычислите энергию однородного гравитирующего шара радиуса R и плотности σ.

3. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ 2-Х ТЕЛ

При решении задачи 2-х тел Ньютоном, а до него Кеплером и другими были открыты алгебраические связи между величинами, которые позднее стали называться интегралами движения, – функции координат и проекций скорости и времени, которые сохраняют при движении тел постоянные значения, определяемые только начальными условиями. Найдем эти интегралы.

Рассмотрим уравнение движения в относительной форме, где $\mu = G(m_0 + m_1)$ – гравитационный параметр:

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}.$$

Умножим данное выражение векторно на радиус-вектор $\overrightarrow{r}$. Так как векторное произведение $[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}]$ равно нулю по определению векторного умножения, получаем:

$$[\overrightarrow{r}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}] = -\mu\frac{[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}]}{r^3} = 0,$$

$$[\overrightarrow{r}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}] = 0.$$

Рассмотрим вспомогательное выражение:

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{r}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}] = [\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}] + [\overrightarrow{r}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}] = 0 + [\overrightarrow{r}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}].$$

Таким образом:

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{r}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}] = 0,$$

$$[\overrightarrow{r}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}] = \overrightarrow{c}.$$

Получаем интеграл, называемый интегралом площадей, в следующей форме:

$$[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}] = \overrightarrow{c}, \tag{7}$$

где $\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ – вектор скорости.

Если умножить полученное выражение скалярно на радиус-вектор, то:

$$(\overrightarrow{r}, [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}]) = (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{c}).$$

Используя свойства смешанного произведения, получаем, что левая часть выражения обращается в нуль и мы имеем $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{c}) = 0$. То есть радиус-вектор в процессе движения системы остается всегда перпендикулярным векторной константе интеграла площадей. Запишем одну из компонент интеграла площадей:

$$c_z = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Пусть (x_1, y_1) – плоскость движения тел. В полярной системе координат (r, u) компоненты радиуса вектора будут выражаться следующим образом:

$$x_1 = r\cos u,$$

$$y_1 = r\sin u.$$

Возьмем полную производную по времени от этих выражений:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos u - r\frac{du}{dt}\sin u,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin u + r\frac{du}{dt}\cos u.$$

Как показано выше, движение является плоским, следовательно компонента $z_1 = 0$, откуда получаем, что $c_x = c_y = 0$, $c_z = c$. Подставим формулы полярной системы отсчета:

$$c = r\cos u(\frac{dr}{dt}\sin u + r\frac{du}{dt}\cos u) - r\sin u(\frac{dr}{dt}\cos u - r\frac{du}{dt}\sin u).$$

После раскрытия скобок $r\cos u\frac{dr}{dt}\sin u$ сокращается, а оставшиеся слагаемые образуют основное тригонометрическое тождество, в итоге имеем:

$$r^2\frac{du}{dt} = c.$$

С другой стороны, если мы рассмотрим малый поворот радиуса-вектора на угол du, то площадь заметаемая радиусом-вектором будет равна $dS = \frac{1}{2}rrdu = \frac{1}{2}r^2du$. Объединив выражения, получаем $\frac{dS}{dt} = \frac{c}{2}$ – второй закон Кеплера, который говорит о том, что за равные промежутки времени заметаемая радиусом-вектором площадь оказывается одинаковой.

Перейдем к следующему интегралу – интегралу энергии. Для этого умножим скалярно на скорость уравнение движения в относительной форме:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt}\right) = -\mu\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right).$$

Рассмотрим вспомогательные выражения, которые позволят упростить полученное уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) + \left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}\right) = 2\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}\right).$$

Отсюда получаем:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dt}.$$

Второе вспомогательное выражение имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}) = \left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}, \overrightarrow{r}\right) + \left(\overrightarrow{r}, \frac{\overrightarrow{r}}{dt}\right) = 2\left(\overrightarrow{r}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right).$$

Отсюда получаем:

$$\left(\overrightarrow{r}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2 = r\frac{dr}{dt}.$$

Подставим полученные два вспомогательных выражения соответственно вместо правой и левой части домноженного скалярно уравнения движения в относительной форме:

$$\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}r\frac{dr}{dt} = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Перенесем двойку вправо и вместе с параметром μ внесем под производную и тогда получим, что и слева и справа стоят полные производные. Взяв интеграл от всего выражения, получаем интеграл энергии, где h – постоянная энергии:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \tag{8}$$

И наконец, перейдем к третьему интегралу, интегралу Лапласа. Чтобы его получить, домножим уравнение движения в относительной форме векторно на постоянную площадей:

$$[\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}, \overrightarrow{c}] = -\frac{\mu}{r^3}[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{c}].$$

Заметим, что $\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$, а также воспользуемся формулой, полученной выше

$\left(\overrightarrow{r}, \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right) = r\frac{dr}{dt}$, тогда выражение справа можно расписать, если подставим определение $\overrightarrow{c}$:

$$[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{r}, [\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}]] = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}) - \overrightarrow{V}(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r} r\frac{dr}{dt} - \overrightarrow{V} r^2 = r\left(\overrightarrow{r}\frac{dr}{dt} - \overrightarrow{V} r\right).$$

Подставим это в правую часть:

$$[\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}, \overrightarrow{c}] = -\frac{\mu}{r^2}\left(\overrightarrow{r}\frac{dr}{dt} - \overrightarrow{V} r\right).$$

Рассмотрим еще одно вспомогательное выражение, чтобы заменить всю правую часть полной производной, как мы это делали ранее:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r}\right) = \frac{\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}r - \overrightarrow{r}\frac{dr}{dt}}{r^2} = -\frac{1}{r^2}\left(\overrightarrow{r}\frac{dr}{dt} - \overrightarrow{V} r\right).$$

Таким образом получили в точности правую часть, подставим:

$$[\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}, \overrightarrow{c}] = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r}\right).$$

Поскольку $\overrightarrow{c}$ векторная константа, то производную из левой части можно вынести, затем взять интеграл от обоих частей уравнений. Получим третий интеграл движения под названием интеграл Лапласа:

$$-[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{V}] - \frac{\mu\overrightarrow{r}}{r} = \overrightarrow{f}. \tag{9}$$

Чтобы выяснить геометрическую природу векторной константы Лапласа $\overrightarrow{f}$, возьмем от выражения (9) скалярное произведение с константой площадей:

$$(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{f}) = ([\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}]\left([\overrightarrow{V}[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}]] - \mu\frac{\overrightarrow{r}}{r}\right)) = ([\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}][\overrightarrow{V}[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}]]) - \frac{\mu}{r}(\overrightarrow{r}[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}]) =$$

$$= (\vec{V}[[\vec{r}, \vec{V}][\vec{r}, \vec{V}]]) - \frac{\mu}{r}(\vec{V}[\vec{r}, \vec{r}]) = 0.$$

Таким образом $(\vec{c}, \vec{f}) = 0$, вектор Лапласа перпендикулярен вектору площадей, а значит лежит в плоскости орбиты. В дальнейшем будет показано, что направление на перицентр задает именно вектор Лапласа.

Задание 1. Доказать справедливость соотношения, связывающего постоянную энергии, постоянную площадей и постоянную интеграла Лапласа по формуле $\mu^2 + hc^2 = f^2$.

Решение:

$$f^2 - hc^2 = \left(-[\vec{c}, \vec{V}] - \frac{\mu \vec{r}}{r}\right)^2 - hc^2 = \left([\vec{c}, \vec{V}] + \frac{\mu \vec{r}}{r}\right)^2 - hc^2 =$$

$$= \left([\vec{c}, \vec{V}]\right)^2 + 2[\vec{c}, \vec{V}]\frac{\mu \vec{r}}{r} + \frac{\mu^2 \vec{r}^2}{r^2} - hc^2 = [[\vec{r}, \vec{V}], \vec{V}]^2 + \frac{2\mu}{r}(\vec{r}[\vec{c}, \vec{V}]) + \mu^2 -$$

$$-hc^2 = (-[\vec{V}[\vec{r}, \vec{V}]])^2 + \frac{2\mu}{r}(\vec{c}[\vec{V}, \vec{r}]) + \mu^2 - c^2(V^2 - \frac{2\mu}{r}) =$$

$$= [\vec{V}[\vec{r}, \vec{V}]]^2 + \frac{2\mu}{r}(-\vec{c}[\vec{r}, \vec{V}]) + \mu^2 - V^2c^2 + \frac{2\mu}{r}c^2 = (\vec{r}(\vec{V}, \vec{V}) -$$

$$-\vec{V}(\vec{V}, \vec{r}))^2 - \frac{2\mu}{r}(\vec{c}, \vec{c}) + \mu^2 - V^2c^2 + \frac{2\mu}{r}c^2 = r^2V^4 - 2(\vec{r}, \vec{V})V^2(\vec{V}, \vec{r}) +$$

$$+V^2(\vec{r}, \vec{r})^2 + \mu^2 - V^2c^2 = r^2V^4 - 2V^2(\vec{r}, \vec{V})^2 + V^2(\vec{r}, \vec{V})^2 + \mu^2 - V^2c^2 =$$

$$= r^2V^4 - V^2(\vec{r}, \vec{V})^2 + \mu^2 - V^2([\vec{r}, \vec{V}][\vec{r}, \vec{V}]) = r^2V^4 - V^2(\vec{r}, \vec{V})^2 + \mu^2 -$$

$$-V^2\vec{r}[\vec{V}[\vec{r}, \vec{V}]] = r^2V^4 - V^2(\vec{r}, \vec{V})^2 + \mu^2 - V^2\vec{r}(\vec{r}V^2 - \vec{r}(\vec{V}, \vec{r})) =$$

$$= r^2V^4 - V^2(\vec{r}, \vec{V})^2 + \mu^2 - V^4r^2 + V^2(\vec{r}, \vec{V})^2 = \mu^2.$$

Задание 2. (Гл. III, §1, №5 [1].) С поверхности планеты вертикально вверх должна быть запущена высотная ракета-зонд. Планету можно считать шаром радиуса R со сферическим распределением плотности. Сопротивлением ее атмосферы можно пренебречь. Ускорение силы тяжести на поверхности равно g. Какую начальную скорость V_0 у поверхности планеты необходимо сообщить ракете, чтобы она поднялась на высоту H над поверхностью планеты? Получить приближенные формулы для вычисления V_0 в случаях, когда

а) H мало и можно пренебречь величиной H/R;

б) H велико и можно пренебречь величиной R/H.

Решение:

Для связи стартовой точки и конечной воспользуемся интегралом энергии. Отметим, что масса зонда существенно меньше массы притягивающего тела, тогда гравитационный параметр $\mu = G(M+m) = GM$ можно выразить через g из определения ускорения свободного падения: $g = \frac{GM}{R^2}$, $\mu = gR^2$. Запишем интеграл энергии:

$$V_0^2 - \frac{2\mu}{R} = 0 - \frac{2\mu}{R+H}.$$

Выразим отсюда искомую величину скорости:

$$V_0^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = \frac{2gRH}{R+H}.$$

В случае, когда высота намного меньше радиуса, получаем $R + H \approx R$, $v_0^2 = 2gH$. Для случая, когда высота больше радиуса $R + H \approx H$, $V_0^2 = 2gR$.

Задание 3. (Гл. III, §2, №12 [1].) Пользуясь интегралом площадей, докажите правило рычага $r_a V_a = r_p V_p$, где a – апоцентр, p – перицентр.

Решение: Запишем модуль интеграла площадей: $r_a V_a \sin(\alpha_a) = r_p V_p \sin(\alpha_p)$, где α – угол между радиусом-вектором и вектором скорости. Поскольку апоцентр и перицентр — это экстремальные точки, то в них производная длины радиуса-вектора обращается в ноль. Эта производная является радиальной компонентной вектора скорости. Следовательно, вся скорость состоит из трансверсальной компоненты, другими словами, радиус-вектор и вектор скорости образуют угол в 90°. Таким образом, синусы в обоих экстремумах равны единице, что доказывает правило рычага.

Самостоятельная работа 3.

Задание 1. 2-я советская космическая ракета, попавшая на поверхность Луны 4 сентября 1959 года, на геоцентрическом расстоянии 320 000 км имела скорость 2,31 км/сек. Какую скорость имела она на расстоянии 230 км от поверхности Земли?

Ответ: 11,11 км/сек.

Задание 2. Запишите в координатной форме векторный интеграл Лапласа в задаче 2-х тел.

Задание 3. Если космическая ракета на высоте 230 км над Землей получит в направлении, перпендикулярном геоцентрическому радиусу-вектору, скорость 10 км/сек, то апогей орбиты будет на геоцентрическом расстоянии 370 000 км. Какую скорость будет иметь ракета в апогее?

Ответ: 179 м/сек.

4. УРАВНЕНИЕ ОРБИТЫ

Для получения уравнения орбиты начнем с поиска астрономического смысла констант в интегралах движения. Введем эклиптическую систему координат (x, y, z) и покажем плоскость, в которой движется небесное тело. На рис. 7 угол между плоскостью (x, y) и плоскостью орбиты называется наклоном i. Угол, отсчитываемый в плоскости (x, y) от оси Ox, соответствующей направлению на точку весеннего равноденствия, до линии пересечения с плоскостью орбиты называется долготой восходящего узла. Также введем нормаль к плоскости орбиты $\overrightarrow{n}$. Рассмотрим треугольник $\triangle nx\Omega$. В нем дуга $\overset{\frown}{x\Omega} = \Omega$, дуга $\overset{\frown}{n\Omega} = 90^\circ$, а угол $\angle n\Omega x = 90^\circ - i$. Тогда по формулам из сферической тригонометрии полу-

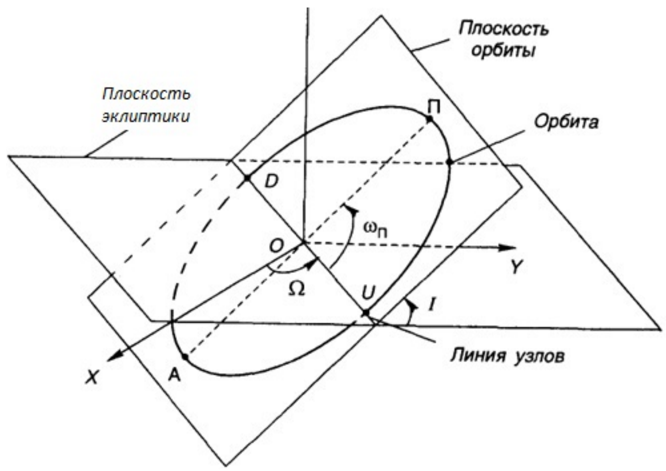

Рис. 7. Орбита в эклиптической системе координат

чаем:

$$\cos\widehat{nx} = \cos\Omega\cos 90^\circ + \sin\Omega\sin 90^\circ\cos(90^\circ - i) = \sin\Omega\sin i.$$

Рассмотрим треугольник $\triangle ny\Omega$ и также воспользуемся формулой из сферической тригонометрии, где $\widehat{y\Omega} = 90^\circ - \Omega$, $\widehat{n\Omega} = 90^\circ$, $\angle n\Omega y = 90^\circ + i$:

$$\cos\widehat{ny} = \cos(90^\circ - \Omega)\cos 90^\circ + \sin(90^\circ - \Omega)\sin 90^\circ\cos(90^\circ + i) = -\cos\Omega\sin i.$$

Из рисунка также очевидно, что угол между осью Oz и нормалью к орбите есть угол наклона i, а значит $\cos\widehat{nz} = \cos i$. Из интеграла площадей известно, что $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{c}) = 0$, а это означает, что вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярен плоскости орбиты, то есть $\overrightarrow{c}||\overrightarrow{n}$, а значит:

$$\cos\widehat{nx} = \cos\widehat{cx} = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}},$$

$$\cos\widehat{ny} = \cos\widehat{cy} = \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}}.$$

Таким образом:

$$\sin\Omega\sin i = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}},$$

$$-\cos\Omega\sin i = \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}},$$

постоянная интеграла площадей связана с долготой восходящего узла и наклоном.

Перейдем теперь в плоскость орбиты, где ось Ox_1 направлена на восходящий узел орбиты на плоскости (x, y), по стандартным формулам полярной системы отсчета, где полярный угол мы обозначаем u, найдем квадрат скорости движения небесного тела:

$$V^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\cos u - r\sin u\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\sin u + r\cos u\frac{du}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cos^2 u - 2r\frac{dr}{dt}\sin u\cos u\frac{du}{dt} + r^2\sin^2 u\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\sin^2 u +$$

$$+2r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\sin u\cos u\frac{du}{dt} + r^2\cos^2 u\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2(\cos^2 u + \sin^2 u) + r^2(\sin^2 u +$$

$$+\cos^2 u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{du}\frac{du}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left(\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + r^2\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \left(\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + r^2\right)\left(\frac{c}{r^2}\right)^2 = \frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}.$$

В последнем преобразовании мы воспользовались интегралом площадей в форме $r^2\frac{du}{dt} = c$. С другой стороны, квадрат скорости можно найти через интеграл энергии $V^2 = \frac{2\mu}{r} + h$. Воспользуемся этими выражениями и выразим du:

$$\frac{2\mu}{r} + h = \frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2},$$

$$du = \frac{cdr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + h - \frac{c^2}{r^2}}}.$$

Выделим полный квадрат из выражения под корнем:

$$\frac{2\mu}{r} + h - \frac{c^2}{r^2} = -\left(\left(\frac{c}{r}\right)^2 - 2\frac{c}{r}\frac{\mu}{c} + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{c}\right)^2 - h\right) = \left(\left(\frac{\mu}{c}\right)^2 + h\right) - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2.$$

Также заметим, что:

$$\frac{cdr}{r^2} = -d\left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right).$$

Тогда, подставляя эти соотношения и интегрируя, получаем:

$$u = \arccos\left(\frac{\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{c}\right)^2 + h}}\right) + \omega,$$

где ω – постоянная интегрирования. Выразим модуль радиуса-вектора из этой формулы, чтобы получить уравнение орбиты, которое совпадет с уравнением эллипса в полярной системе координат:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{10}$$

где v будет называться истинная аномалия, e – эксцентриситет орбиты, p – фокальный параметр:

$$\frac{c}{r} = \frac{\mu}{c} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{c}\right)^2 + h}\cos(u - \omega),$$

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}}\cos(u - \omega)}.$$

Свяжем постоянные интегралов движения с параметрами эллипса:

$$p = \frac{c^2}{\mu},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}},$$

$$v = u - \omega,$$

$$p = a(1 - e^2),$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = ... = -\frac{\mu}{h}.$$

Таким образом, небесное тело движется по эллиптической орбите (1-й закон Кеплера), где параметры конического сечения определяются постоянными энергии, площадей и гравитационной постоянной.

Рассмотрим еще один интеграл движения – интеграл Лапласа. Распишем скалярное произведение радиуса-вектора и вектора Лапласа, откуда получим уравнение орбиты:

$$(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{f}) = (\overrightarrow{r}, ([\overrightarrow{V}, \overrightarrow{c}] - \frac{\mu \overrightarrow{r}}{r})) = (\overrightarrow{r}[\overrightarrow{V}, \overrightarrow{c}]) - \frac{\mu r^2}{r} = (\overrightarrow{c}[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}]) - \mu r = c^2 - \mu r,$$

$$\cos(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{f}) = \frac{(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{f})}{rf} = \frac{c^2 - \mu r}{rf},$$

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu}\cos(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{f})}.$$

Итого, имеем уравнение эллипса с дополнительным геометрическим смыслом постоянной Лапласа. Угол истинной аномалии отсчитывается от направления вектора Лапласа, которое называется перицентром. Из связи $v = u - \omega$ получаем, что ω есть угол от направления на восходящий узел до направления на перицентр, и называется он аргумент перицентра. Угол u, отсчитываемый от направления на восходящий узел до положения небесного тела, называется аргумент широты.

Задание 1. (Гл. III, §1, №6 [1].) Космический аппарат движется в центральном ньютоновском поле по гиперболической орбите. Угол между асимптотами равен 60°. Каков эксцентриситет орбиты?

Решение: Заметим, что когда космический аппарат находится на бесконечности, его радиус-вектор будет параллелен асимптоте и будет образовывать угол $180^\circ - 60^\circ/2 = 150^\circ$ с направлением на перицентр, совпадающий с истинной аномалией. Полагая, что длина радиуса-вектора стремится к бесконечности, найдем из формулы (10) эксцентриситет:

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = r \to \infty,$$

$$\cos v = -\frac{1}{e},$$

$$e = -\frac{1}{\cos 150^\circ} = 1,1547.$$

Задание 2. (Гл. III, §1, №7 [1].) Известно, что среднее арифметическое наименьшего и наибольшего расстояний тела, двигающегося по эллипсу, от притягивающего центра равно большой полуоси орбиты. Покажите, что их среднее геометрическое равно малой полуоси, а среднее гармоническое – фокальному параметру орбиты.

Решение: Из (10) следует, что наименьшее расстояние $q = a(1-e)$, наибольшее – $Q = a(1+e)$. По определению среднего арифметического, $\frac{q+Q}{2} = \frac{a(1-e)+a(1+e)}{2} = a$. Среднее геометрическое рассчитывается по определению $\sqrt{qQ} = a(1-e)a(1+e) = a\sqrt{1-e^2} = b$. Среднее гармоническое рассчитывается по формуле $\frac{2}{\frac{1}{q}+\frac{1}{Q}} = \frac{2qQ}{q+Q} = a(1-e^2) = p$.

Задание 3. (Гл. III, §1, №14 [1].) Космический аппарат движется по кеплеровской орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Какой угол образует вектор скорости с радиусом-вектором в момент времени, когда аппарат отстоит от притягивающего центра на расстояние r?

Решение: Для нахождения угла между вектором скорости и радиусом-вектором воспользуемся интегралом площадей $[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{V}] = \overrightarrow{c}$, а также интегралом энергии $V^2 = \frac{2\mu}{r} + h$:

$$rV\sin\beta = qV_q = QV_Q,$$

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = V_q^2 - \frac{2\mu}{q} = V_Q^2 - \frac{2\mu}{Q}.$$

Выразим синус искомой величины и его квадрат $\sin\beta = \frac{qV_q}{rV}$, $\sin^2\beta = \frac{q^2V_q^2}{r^2V^2}$. Поскольку мы не знаем скорость в данной точке, выразим ее через интеграл энергии $V^2 = V_q^2 - \frac{2\mu}{q} + \frac{2\mu}{r}$ и подставим в квадрат синуса искомого угла:

$$sin^2\beta = \frac{q^2V_q^2}{r^2}\frac{1}{V_q^2 - \frac{2\mu}{q} + \frac{2\mu}{r}}.$$

Свяжем скорость в экстремальных точках:

$$V_Q = \frac{qV_q}{Q},$$

$$V_q^2 - \frac{2\mu}{q} = \frac{q^2V_q^2}{Q^2} - \frac{2\mu}{Q}.$$

Найдем из этого выражения V_q^2:

$$V_q^2\left(1 - \frac{q^2}{Q^2}\right) = \frac{2\mu}{q} - \frac{2\mu}{Q}.$$

Тогда имеем:

$$V_q^2 = \frac{2\mu Q}{q(q+Q)}.$$

Подставив в формулу для квадрата синуса искомого угла, после ряда преобразований получим окончательное выражение $\sin^2\beta = \frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)}$.

Самостоятельная работа 4.

Задание 1. Среднее расстояние Нептуна от Солнца 30,1 а.е., а среднее расстояние между Плутоном и Солнцем 39,5 а.е., эксцентриситет орбиты Нептуна 0,009, а Плутона 0,25. Какая из этих планет ближе подходит к Солнцу?

Ответ: Плутон подходит ближе Нептуна.

Задание 2. Зная большую полуось орбиты Земли 149,6 млн км. и эксцентриситет 0,01679, вычислите наименьшее и наибольшее расстояние Земли от Солнца.

Ответ: $q = 147,09$ млн км., $Q = 152,11$ млн км.

Задание 3. Вычислить большую полуось кеплеровской орбиты, зная а) μ, e, c; б) μ, h.

Ответ: а) $a = \frac{c^2}{\mu(1-e^2)}$; б) $a = -\frac{\mu}{h}$.

5. КРУГОВАЯ И ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ

Круговая скорость вычисляется по формуле $V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$, а параболическая скорость $V_{\text{пар}} = \sqrt{2}V_{\text{кр}}$.

Пусть притягивающее центральное тело представляет собой шар радиуса R со сферическим распределением плотности. Для этого тела можно ввести понятия первой и второй космической скорости. Под первой космической скоростью понимают круговую скорость у поверхности притягивающего тела $V_{\text{I}} = \sqrt{\frac{\mu}{R}}$. Под второй космической скоростью понимают параболическую скорость у поверхности этого тела $V_{\text{II}} = \sqrt{2}V_{\text{I}}$.

Задание 1. (Гл. III, §4, №18 [1].) Докажите, что период обращения пассивно гравитирующего спутника, движущегося непосредственно около поверхности планеты, зависит только от средней плотности планеты, а не от ее размера. Какой период обращения имел бы спутник, если плотность планеты была бы равна плотности воды.

Решение: Период спутника, двигающегося равномерно непосредственно у поверхности планеты, можно вычислить по формуле:

$$P = \frac{2\pi R}{V_{\mathrm{I}}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\mu}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Подставляя плотность воды, получаем $P \approx 3,3$ ч.

Задание 2. (Гл. III, §2, №2 [1].) Какую скорость должен получить спутник Земли, обращающийся по круговой орбите в плоскости экватора, чтобы он во все время движения был над одной и той же точкой поверхности? Какова высота стационарного спутника? Необходимые константы в системе СИ: $\mu = 3,98603 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$, $R = 6378165$ м.

Решение: Начнем с определения круговой скорости $V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$, с другой же стороны $V_{\text{кр}} = \frac{2\pi r}{P}$. Найдем из этих формул модуль радиуса-вектора $r = \left(\frac{\mu P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Подстановка дает величину $4,2164 \cdot 10^7$ м. Величину скорости из двух записанных выше выражений можно вычислить по формуле $V_{\text{кр}}^3 = \frac{2\pi\mu}{P}$, $V_{\text{кр}} = 3,075$ км/с. Соответственно, высота данного геостационарного спутника $H = r - R \approx 35 \cdot 10^3$ км.

Задание 3. (Гл. III, §2, №3 [1].) Советская космическая ракета, запущенная 12 сентября 1960 года и попавшая на поверхность Луны, на геоцентрическом расстоянии 320 000 км имела геоцентрическую скорость 2,31 км/с. Определите, к какому типу конического сечения относилась орбита.

Ответ: Если рассчитать параболическую скорость на геоцентрическом расстоянии 320 000 км, то она будет равна 1,57 км/с. Параболическая скорость меньше той скорости, которая дана в условии задачи, значит ракета движется по гиперболической траектории.

Самостоятельная работа 5.

Задание 1. Космическое тело находиться на гелиоцентрическом расстоянии 149,6 млн км. Вычислите круговую и параболическую скорость относительно Солнца на указанном расстоянии. $\mu = 1,32718 \cdot 10^{20}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$.

Ответ: $V_{\text{кр}} = 29,785$ км/с, $V_{\text{пар}} = 42,122$ км/с.

Задание 2. Вычислите 1-ю и 2-ю космические скорости у поверхности Луны. Радиус Луны 1738 км. $\mu = 4,90287 \cdot 10^{12}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$.

Ответ: $V_{\text{I}} = 1,680$ км/с, $V_{\text{II}} = 2,375$ км/с.

Задание 3. Вычислите модуль скорости и период обращения кругового спутника, движущегося на геоцентрическом расстоянии 6600 км. $\mu = 3,98603 \cdot 10^{14}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$.

Ответ: $V_{\text{кр}} = 7,771$ км/с, $P = 1,48$ ч.

6. СКОРОСТЬ КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Получим альтернативные формулы для расчета скорости движения спутника, опираясь на выражение интеграла энергии. Выразим из $a = -\frac{\mu}{h}$ постоянную энергии $h = -\frac{\mu}{a}$ и подставим в интеграл энергии:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{11}$$

Подставим вместо длины радиуса-вектора уравнение орбиты, а вместо фокального параметра его определение $p = a(1 - e^2)$:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2(1 + e\cos v)}{p} - \frac{1}{a}\right) = \mu\frac{2 + 2e\cos v - 1 + e^2}{a(1 - e^2)} = \frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos v + e^2).$$

Таким образом, получаем, что скорость на кеплеровой орбите можно найти по формуле:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos v + e^2)}. \tag{12}$$

Рассмотрим частный случай, пусть модуль радиуса-вектора постоянный, тогда получаем круговую орбиту и скорость на ней $V^2_{\text{кр}} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\mu}{r}$. Если орбита спутника обладает бесконечной большой полуосью (параболический тип движения), то скорость $V^2_{\text{пар}} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = 2\frac{\mu}{r}$. Другими словами, параболическая скорость отличается от круговой в $\sqrt{2}$ раз, или $V_{\text{пар}} = \sqrt{2}V_{\text{кр}}$.

Найдем теперь компоненту вектора скорости, спроецированную на радиальное направление:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{1 + e\cos v}\right) = \frac{-p}{(1 + e\cos v)^2}(-e\sin v)\frac{dv}{dt} = \frac{pe\sin v}{(1 + e\cos v)^2}\frac{dv}{dt}.$$

Воспользуемся интегралом площадей, чтобы вычислить производную от истинной аномалии:

$$\frac{c}{r^2} = \frac{du}{dt} = \frac{d(v + \omega)}{dt} = \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c(1 + ev)^2}{p^2}.$$

Объединим полученные выражения и учтем, что $p = \frac{c^2}{\mu}$, откуда $c = \sqrt{\mu p}$. Сократив после подстановки на $(1 + e\cos v)^2$, получаем:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin v. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь трансверсальную компоненту (перпендикулярную радиальному направлению), зная полную скорость и радиальную компоненту:

$$V_t^2 = V^2 - V_r^2 = \frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos v + e^2) - \frac{\mu}{p}e^2\sin^2 v = \frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos v + e^2\cos^2 v).$$

Отсюда получаем:

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos v). \tag{14}$$

Задание 1. (Гл. III, §2, №5 [1].) Спутник притягивающего центра находиться в точке орбиты с истинной аномалией v. Известна круговая скорость $V_{\text{кр}}$ в этой точке и эксцентриситет орбиты e. Какую скорость имеет спутник в данный момент?

Решение: Согласно определению круговой скорости, $V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$, и по уравнению орбиты получаем $V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 + e\cos v)}$. Выразим из данной формулы отношение гравитационного параметра к фокальному параметру и подставим в общую формулу модуля скорости (12):

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}} = \frac{V_{\text{кр}}}{\sqrt{1 + e\cos v}},$$

$$V = V_{\text{кр}}\sqrt{\frac{1 + 2e\cos v + e^2}{1 + e\cos v}}.$$

Задание 2. (Гл. III, §2, №23 [1].) Докажите, что при прохождении спутника через конец малой оси эллиптической кеплеровской орбиты скорость спутника по абсолютной величие совпадает с местной круговой скоростью.

Решение: Докажем, что модуль скорости из формулы (11) совпадает с круговой скоростью на конце малой оси эллипса. Для этого покажем, что длина радиуса-вектора, проведенного в конец малой оси, равна большой полуоси орбиты:

$$r = \sqrt{b^2 + (a-q)^2} = \sqrt{a^2(1-e^2) + (a - a + ae)^2} = a.$$

С учетом полученного выражения из (11) получаем:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\mu}{r} = V_{\text{кр}}^2.$$

Задание 3. (Гл. IV, §5, №5 [1].) Космический аппарат должен совершить 2-х импульсный переход с эллиптической орбиты 1 на компланарную и соосную с 1 орбиту 2 (орбита 1 находится внутри 2). Эксцентриситеты и большие полуоси орбит 1 и 2 известны. Для этой цели избран переходной эллипс, который касается орбиты 1 в перицентре и орбиты 2 в апоцентре. Какой полный импульс скорости потребуется для маневра?

Рис. 8. Рисунок для задания 3

Решение: Для нахождения импульса скорости нужно знать скорость до и после перехода. Для этого нужно рассчитать большую полуось переходного эллипса. Из рисунка к данной задаче следует, что $a = \frac{q_1 + Q_2}{2}$. Подставив данную формулу в (11), найдем изменение скорости при переходе с орбиты 1 на переходный эллипс:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} - \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1}\right)} = \ldots = \sqrt{\frac{\mu}{q_1}}\left(\sqrt{\frac{2Q_2}{q_1 + Q_2}} - \sqrt{1 + e_1}\right),$$

где $q_1 = a_1(1 - e_1)$, $Q_2 = a_2(1 + e_2)$. Найдем изменение скорости при переходе с переходного эллипса на орбиту 2:

$$\Delta V_2 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2}\right)} - \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a}\right)} = ... = \sqrt{\frac{\mu}{Q_2}}\left(\sqrt{1-e^2} - \sqrt{\frac{2q_1}{q_1+Q_2}}\right).$$

Полный импульс скорости: $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

Самостоятельная работа 6.

Задание 1. Найдите наименьшую и наибольшую скорости гелиоцентрического кеплерового движения Земли. Сравните найденные значения со средней скоростью движения Земли вокруг Солнца, то есть с той скоростью, которую имела бы Земля, если бы она двигалась вокруг Солнца по окружности с радиусом, равным среднему расстоянию от Земли до Солнца 149,6 млн км. Эксцентриситет земной орбиты равен $\frac{1}{60}$.

Ответ: $V_{min} = 29,30$ км/с, $V_{max} = 30,29$ км/с, $V_{\text{кр}} = 29,79$ км/с.

Задание 2. Космический аппарат совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса и в некоторый момент времени находится в точке P на гелиоцентрическом расстоянии 150 млн км. Скорость относительно Солнца в этот момент равна 35 км/с и составляет с гелиоцентрическим радиусом-вектором аппарата угол в $60°$. Пренебрегая притяжением Земли, вычислите истинную аномалию космического аппарата в данном положении.

Ответ: $86,38°$.

Задание 3. При запуске с северного полюса Земли ракета получала начальную скорость $\overrightarrow{V_0}$, по абсолютной величине совпадающую с первой космической скоростью. Ракета приземлилась на экваторе. Под каким углом к горизонту была запущена ракета? При решении задачи влиянием сжатия Земли и сопротивлением атмосферы пренебречь.

Ответ: $45°$.

7. ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Из школьного курса известен третий закон Кеплера, а в следующей теме покажем его вывод:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}, \tag{15}$$

где P обозначает период обращения.

Задание 1. (Гл. III, §4, №1 [1].) Согласно сообщению ТАСС, опубликованному 16 мая 1958 г., период обращения 3-го советского ИСЗ 15 мая 1958 г. составил 106 минут, а наибольшая высота над поверхностью Земли – 1880 км. Найдите наименьшую высоту спутника над земной поверхностью.

Решение: Запишем третий закон Кеплера и вычислим большую полуось орбиты, которая является средним арифметическим наименьшего и наибольшего расстояний:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}},$$

$$a = \frac{H_{min} + R + H_{max} + R}{2},$$

где H – высота над поверхностью Земли, R – радиус Земли. Выразим минимальную высоту:

$$H_{min} = 2\left(\sqrt[3]{\frac{\mu P^2}{4\pi^2}} - R\right) - H_{max} \approx 220 \text{ км}.$$

Задание 2. (Гл. III, §4, №3 [1].) Космический аппарат совершает перелет к перигею лунной орбиты. Перигей орбиты аппарата находится на высоте 230 км. Известно также, что перигейная скорость аппарата является минимально возможной для реализации рассматриваемого перелета. Вычислите, сколько времени займет полет до перигея лунной орбиты. Решите аналогичную задачу для перелета к апогею лунной орбиты. Геоцентрические расстояния перигея и апогея лунной орбиты принять соответственно равными 363 300 км и 404 000 км.

Решение: Поскольку полет из-за симметрии эллиптической траектории займет половину периода, то рабочие формулы будут следующие:

$$t = \frac{P}{2},$$

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mu}},$$

$$a = \frac{q + Q}{2},$$

$$q = H + R.$$

Для полета до перигея лунной орбиты $Q = q_m$, до апогея $Q = Q_m$. Итого, рабочая формула для двух случаев будет иметь следующий вид:

$$t_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 (H + R + q_m)^3}{8\mu}} \approx 109,94 \text{ ч},$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 (H + R + Q_m)^3}{8\mu}} \approx 128,58 \text{ ч}.$$

Задание 3. (Гл. III, §4, №17 [1].) Один из галилеевых спутников Юпитера, Ганимед, имеет период обращения вокруг Юпитера 7 суток 3 часа 40 минут, а большая полуось его орбиты составляет 15 радиусов Юпитера. Период обращения Луны вокруг Земли равен 27 суток 7 часов 40 минут, а большая полуось ее орбиты равна 60 земным радиусам. Найдите отношение средней плотности Юпитера к средней плотности Земли. Сжатием Земли и Юпитера пренебречь.

Решение: По 3-му закону Кеплера:

$$\frac{P_g^2}{a_g^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_j + m_g)} \approx \frac{4\pi^2}{Gm_j} = \frac{3\pi}{GR_j^3\rho_j},$$

$$\frac{P_m^2}{a_m^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_e + m_m)} \approx \frac{4\pi^2}{Gm_e} = \frac{3\pi}{GR_e^3\rho_e},$$

где j – Юпитер, g – Ганимед, e – Земля, m – Луна. Выразим плотности планет и поделим их друг на друга, после преобразований получим следующую формулу:

$$\frac{\rho_j}{\rho_m} = \left(\frac{a_g R_e}{a_m R_j}\right)^3 \left(\frac{P_m}{P_g}\right)^2 \approx 0,02279.$$

Самостоятельная работа 7.

Задание 1. Орбита корабля-спутника «Восток-2», на котором советский космонавт Г.С. Титов 6 – 7 августа 1961 г. совершил многократный облет вокруг Земли, на первых витках характеризовалась следующими числовыми значениями параметров: $H_{max} = 244$ км, $H_{min} = 183$ км. Найдите сидерический период обращения корабля-спутника.

Ответ: 1,48 часа.

Задание 2. Американская космическая ракета «Пионер-5», запущенная в сторону Луны 11 марта 1960 г. и ставшая искусственной планетой, имела период обращения вокруг Солнца 312 суток. Гелиоцентрическое расстояние перигелия орбиты ракеты равно 120 млн км. Найдите гелиоцентрическое расстояние ракеты в афелии.

Ответ: 149,3 млн км.

Задание 3. Вокруг некоторой планеты движется спутник. Из наблюдений известны период обращения спутника вокруг планеты и период обращения планеты вокруг Солнца. Известны также большие полуоси орбит обоих этих тел.

Вычислите массу планеты, если массу Солнца принять за 1.

Ответ: $(\frac{P_p}{P_s})^2(\frac{a_s}{a_p})^3$.

8. ПОЛЕТ ОТ ПЕРИЦЕНТРА. УРАВНЕНИЕ КЕПЛЕРА

Рассмотрим полученное выше выражение для производной от истинной аномалии:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{(1+e\cos v)^2}{p},$$

$$dt = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\frac{dv}{(1+e\cos v)^2}.$$

Если провести операцию интегрирования, получим явное выражение для поиска промежутка времени, затрачиваемого на перелет спутника из перицентра в точку орбиты с известной истинной аномалией:

$$t - T = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\int_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}, \tag{16}$$

где T – момент прохождения через перицентр орбиты. Чтобы взять этот интеграл, произведем замену (см. рис. 9) истинной аномалии v на новую величину – эксцентрическую аномалию E.

Обратим внимание на то, что вспомогательная окружность имеет радиус, равный большой полуоси орбиты, а ее центр совпадает с центром эллипса. Далее введем систему координат, начало которой совпадает с центральным телом. Тогда с одной стороны прямоугольные координаты спутника будут $x = r\cos v$ и $y = r\sin v$, а с другой стороны через эксцентрическую аномалию, отсчитываемую от оси Ox до проекции спутника на вспомогательную окружность (проецирование перпендикулярно большой оси), $x = a\cos E - ae$ и $y = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\sin E$. Для дальнейших преобразований, запишем в виде

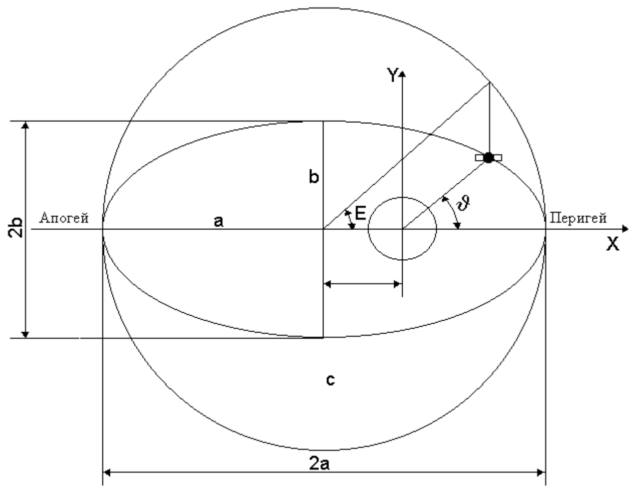

Рис. 9. Эксцентрическая аномалия

системы:

$$\begin{cases} r\cos v = a\cos E - ae, \\ r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E. \end{cases} \qquad (17)$$

Возведем левые и правые части в квадрат и сложим, таким образом мы найдем уравнение орбиты через эксцентрическую аномалию:

$$r^2 = (a\cos E - ae)^2 + (a\sqrt{1-e^2}\sin E)^2 = ... = a^2(1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E),$$

$$r = a(1 - e\cos E). \qquad (18)$$

Установим теперь связь между аномалиями:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2 v/2}{\cos^2 v/2}} = \sqrt{\frac{(1-\cos v)/2}{(1+\cos v)/2}} = \sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}} = \sqrt{\frac{(1-\cos v)(1+\cos v)}{(1+\cos v)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos^2 v}}{1+\cos v} = \frac{\sin v}{1+\cos v} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E/r}{1+(a\cos E - ae)/r} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E}{r + a\cos E - ae} =$$

$$= \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E}{a(1-e\cos E) + a\cos E - ae} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E + \cos E - e} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{(1+\cos E) - e(1+\cos E)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e}\frac{\sin E}{1+\cos E} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

В итоге мы получили, что эксцентрическая аномалия связана с истинной по следующей формуле:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{19}$$

Вернемся к основному вопросу, связанному с тем, как проинтегрировать выражение (16). Для этого нужно заменить интегрирование по истиной аномалии на интегрирование по эксцентрической аномалии. Найдем приращения аномалий путем применения операции дифференцирования к уравнению орбиты, записанному двумя способами:

$$\frac{p}{1+e\cos v} = a(1-e\cos E),$$

$$\frac{-p}{(1+e\cos v)^2}(-e\sin v)dv = a(-e(-\sin E))dE,$$

$$\frac{pe\sin v}{(1+e\cos v)^2}dv = ae\sin E dE.$$

Выразим подынтегральную часть:

$$\frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \frac{a\sin E}{p\sin v}dE = \frac{\sin E dE}{(1-e^2)\sin v}.$$

Интегрированию по E мешает $\sin v$, выразим его из равенства компонент y (17):

$$\sin v = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E}{r} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E},$$

$$\frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \frac{1-e\cos E}{(1-e^2)^{3/2}}dE.$$

Подставляем в интеграл:

$$t - T = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \int_0^E \frac{1 - e\cos E}{(1 - e^2)^{3/2}} dE =$$

$$= \frac{(a(1 - e^2))^{3/2}}{\mu^{3/2}} \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \int_0^E (1 - e\cos E) dE = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - e\sin E).$$

Таким образом получим трансцендентное уравнение, именуемое уравнением Кеплера:

$$E - e\sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - T).$$

Если угол изменяется на 2π, то время движения называется периодом обращения $t - T = P$, подставим:

$$2\pi - e\sin(2\pi) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} P,$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2\pi}{P}.$$

После возведения в квадрат получаем 3-й закон Кеплера:

$$\frac{\mu}{a^3} = \frac{4\pi^2}{P^2}. \tag{20}$$

Обозначим $\frac{2\pi}{P} = n$ – среднее движение и введем еще один угол, называемый средней аномалией по формуле $M = n(t - T)$, а также среднюю аномалию на начальный момент времени t_0: $M_0 = n(t_0 - T)$. Найдем разность средних аномалий $M - M_0 = n(t - T) - n(t_0 - T) = n(t - t_0)$, где T – время прохождения через перицентр орбиты (смысл константы интегрирования выбран таким, чтобы пределы интегрирования начинались от 0, то есть от перицентра, как требует этого интеграл Лапласа). Итого получаем финальное уравнение задачи 2-х тел, называемое уравнением Кеплера:

$$E - e\sin E = M = M_0 + \frac{2\pi}{P}(t - t_0). \tag{21}$$

Обратим внимание еще раз, что уравнение трансцендентное и решается только численно. Чтобы его решить, можно воспользоваться классическим методом итераций, где за первую итерацию выбирается $E_0 = M$, а затем:

$$E_n = M + e\sin E_{n-1}.$$

Условие остановки выбирается так, чтобы разность двух итераций была меньше наперед заданной точности.

Задание 1. (Гл. IV, §1, №4 [1].) Хорда земной орбиты, проведенная через ее фокус перпендикулярно линии апсид, делит орбиту на две дуги. Сколько времени затрачивает Земля на движение по каждой из этих дуг, если эксцентриситет земной орбиты принять равным $\frac{1}{60}$.

Решение: Поскольку хорда проведена перпендикулярно линии апсид, то истинная аномалия равна 90° и 270°. Среднюю аномалию 2-й точки можно выразить через среднюю аномалию 1-й точки как $M_2 = M_1 + n(t_2 - t_1)$. Запишем основные формулы для поиска интервала времени:

$$t_2 - t_1 = \frac{M_2 - M_1}{n},$$

$$n = \frac{2\pi}{P},$$

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}.$$

Объединим формулы:

$$P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}},$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(M_2 - M_1).$$

Воспользуемся уравнением Кеплера для поиска средней аномалии:

$$M_2 - M_1 = E_2 - e\sin E_2 - E_1 + e\sin E_1 = (E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1).$$

Из симметрии задачи следует, что $E_2 = 2\pi - E_1$, что в свою очередь приводит к $\sin E_2 = \sin(2\pi - E_1) = -\sin E_1$. Подставим и найдем разность средних аномалий:

$$M_2 - M_1 = 2\pi - 2E_1 + 2e\sin E_1 = 2(\pi - E_1 + e\sin E_1).$$

Воспользуемся формулой (19) :

$$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - 1/60}{1 + 1/60}}\operatorname{tg}\frac{\pi/2}{2},$$

откуда получаем, что $E_1 = 1,554129$, разность средних аномалий $M_2 - M_1 = 3,208256$, тогда разность времен будет 186,5 суток, либо $t_1 - t_2 = P - (t_2 - t_1) = 178,7$ суток.

Задание 2. (Гл. IV, §2, №8 [1].) Найти истинную аномалию суточного спутника Земли, движущегося по орбите с эксцентриситетом $0,3$, через 8 часов звездного времени после прохождения перигея.

Решение: Поскольку известен промежуток времени после прохождения перигея, то мы можем найти среднюю аномалию в данном положении спутника:

$$M = \frac{2\pi}{P}(t - T) = 2\pi\frac{8}{24} = \frac{2\pi}{3}.$$

Запустив итерационный процесс по формуле $E_{n+1} = M + e\sin E_n$, $E_0 = M$, получаем, что на 7-й итерации решение будет $E \approx 2,31507$. Подставим в формулу (19) и получим, что истинная аномалия через 8 часов после прохождения перигея равна $144,33°$.

Самостоятельная работа 8.

Задание 1. Период P обращения спутника разделим на m равных промежутков и вычислим в конце каждого из этих промежутков расстояние от спутника до притягивающего центра. Найдем далее среднее арифметическое этих расстояний и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Докажите, что этот предел, представляющий «средневременное» расстояние от притягивающего центра, равен $a(1 + e^2/2)$.

Задание 2. Спутник Земли прошел через свой перигей в 4 часа 47 минут по московскому времени. Известно, что большая полуось в 1,2 раза больше радиуса Земли, а эксцентриситет равен 0,1. Найдите эксцентрическую аномалию и геоцентрическое расстояние в 5 часов 27 минут того же дня.

Ответ: $v = 133,79°$, $r = 8\ 183\ 462$ м.

9. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. ИСЗ 12 апреля в 23 часа на высоте 420 км, удаляясь от Земли, имеет скорость 8,1 км/ч. Найдите истинную аномалию и расстояние ИСЗ от центра Земли в 3 часа 13 апреля, если эксцентриситет его орбиты равен 0,15.

Решение: Найдем большую полуось, зная скорость и расстояние:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos v + e^2)},$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}.$$

Выразим из каждой формулы комбинацию $e\cos v$ и приравняем друг к другу:

$$\frac{p}{r} - 1 = \frac{V^2 p}{2\mu} - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}.$$

Из этого соотношения, опуская простые преобразования, получаем большую полуось:

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - V^2 r}.$$

Далее найдем значение эксцентрической аномалии, зная геоцентрическое расстояние и большую полуось:

$$r = a(1 - e\cos E),$$

$$\cos E = \frac{a - r}{ae}.$$

Поскольку спутник в начальный момент времени находится не в перицентре, то найдем начальное значение средней аномалии:

$$M_0 = E_0 - e\sin E_0,$$

$$M_0 = \arccos\frac{a - r_0}{ae} - e\sin\left(\arccos\frac{a - r_0}{ae}\right).$$

Преобразуем выражение под арккосинусом:

$$\frac{a - r_0}{ae} = \frac{1}{e} - \frac{r_0}{ae} = \frac{1}{e} - \frac{r_0}{e}\frac{2\mu - V_0^2 r_0}{\mu r_0} = \frac{V_0^2 r_0 - \mu}{\mu e}.$$

Таким образом,

$$M_0 = \arccos\frac{V_0^2 r_0 - \mu}{\mu e} - e\sin\left(\arccos\frac{V_0^2 r_0 - \mu}{\mu e}\right).$$

Для нахождения средней аномалии в другой момент времени нам нужно знать период обращения спутника, который найдем через 3-й закон Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

$$\frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{2\mu - V^2 r}{r}\right)^{3/2}.$$

Теперь можем записать окончательное выражение для средней аномалии на нужный момент времени:

$$M(t) = M_0 + \frac{2\pi}{P}(t - t_0),$$

$$M = M_0 + \frac{t - t_0}{\mu}\left(\frac{2\mu - V^2 r}{r}\right)^{3/2}.$$

Осуществив подстановку числовых значений, получаем $M \approx 13,9764 = E_0$, которую возьмем за начальное приближение итерационного процесса в уравнении Кеплера. Осуществив 3 итерации, получаем ответ $E_3 = 14,1264$. Убираем 2 полных круга (4π), получаем $E = 1,5601$, что находится в 1-й четверти. Воспользуемся формулой связи аномалий и найдем, что истинная аномалия в данный момент равна $v = 1,7107$. И отвечая на последний вопрос, найдем модуль радиуса-вектора в данный момент времени:

$$r = \frac{\mu(H_0 + R)}{2\mu - V_0^2(H_0 + R)}(1 - e\cos E) = 7\ 703\ 791 \text{ м},$$

где H_0 – начальная высота спутника над поверхностью Земли, R – радиус Земли.

Задание 2. ИСЗ имеет максимальную высоту 927 км и минимальную 340 км над поверхностью Земли. Найдите время перелета ИСЗ из точки с истинной аномалией 230° до точки с истинной аномалией 330°.

Решение: Из уравнения Кеплера найдем разность времен $t - T$:

$$t - T = \frac{P}{2\pi}(E - e\sin E).$$

Тогда разность времен, которую требуется найти, можно выразить как:

$$t_2 - t_1 = (t_2 - T) - (t_1 - T) = \frac{P}{2\pi}(E_2 - e\sin E_2) - \frac{P}{2\pi}(E_1 - e\sin E_1) =$$

$$= \frac{P}{2\pi}((E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)).$$

В эту формулу входит период обращения, которого нет в условии задачи, найдем его:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

$$\frac{P}{2\pi} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Большую полуось орбиты можно найти, зная минимальную и максимальную высоты:

$$a = \frac{q + Q}{2} = \frac{H_{min} + H_{max}}{2} + R.$$

Также нам нужно знать эксцентриситет орбиты, найдем его:

$$q = a(1 - e),$$

$$e = 1 - \frac{2q}{q+Q} = 1 - \frac{2H_{min} + 2R}{H_{min} + H_{max} + 2R} = \frac{H_{max} - H_{min}}{H_{min} + H_{max} + 2R}.$$

Осуществляем числовую подстановку и получаем $e = 0,04186$. Обратим внимание, что истинные аномалии заданы в 3-й и в 4-й четверти соответственно:

$$E_{1,2} = 2\left(\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v_{1,2}}{2}\right).$$

Подстановка чисел дает $E_1 = 4,0468$ и $E_2 = 5,7802$. Подставим эти величины в разность времен, которую требуется найти, получим искомый ответ, равный 26 минут 40 секунд.

Задание 3. Определите расстояние от центра Земли до точки, лежащей на одной прямой с центрами Земли и Луны, в которой сила притяжения массы Землей равна силе притяжения той же массы Луной. Известно, что расстояние от Земли до Луны $d = 384400$ км, а отношение массы Луны к массе Земли равно $1/81,3$.

Решение: Запишем закон всемирного тяготения и приравняем модули сил:

$$\frac{Gmm_e}{r^2} = \frac{Gmm_m}{(r-d)^2}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение:

$$\left(1 - \frac{m_m}{m_e}\right)r^2 - 2rd + d^2 = 0.$$

Решение которого есть:

$$r = \frac{d}{1 \pm \sqrt{\frac{m_m}{m_e}}}.$$

Подстановка дает два положительных ответа: 432 350 км и 364 024 км.

Список литературы

[1] Балк М.Б., Демин В.Г., Куницын А.Л. Сборник задач по небесной механике и космодинамике. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972. – 336 с.

[2] Балк М.Б. Элементы динамики комического полета. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1965. – 340 с.

[3] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1968. – 800 с.

[4] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1968. – 800 с.