КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. В. ЛАПИН, А. Д. РОМАНЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛ РИМАНА, РЯДЫ, ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

КАЗАНЬ
2020

Оглавление

§1 Определенный интеграл Римана

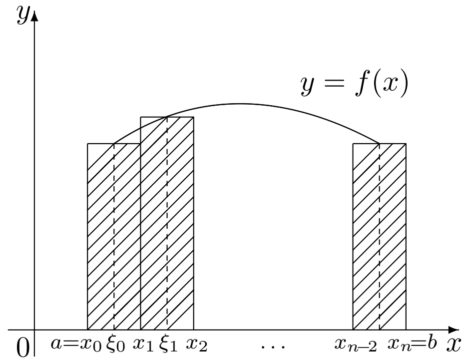
1.1 Определение интеграла Римана. Необходимое условие и критерий интегрируемости

Предварительные соображения, площадь криволинейной трапеции.

Пусть на $[a, b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$. Надо определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$, $x = b$, и вычислить эту площадь. Считается, что мы умеем вычислять площадь прямоугольника. Поставленную задачу разумно решать следующим образом. Разобьем $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ длины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ по произвольной точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

(Ясно, что S_n соответствует сумме площадей заштрихованных прямоугольников на рисунке).



Если существует конечный предел

$$S = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

для любого разбиения и набора точек ξ_i, то S назовем площадью криволинейной трапеции. Выделенные слова являются ключевыми в определении. Ниже мы установим, что при сформулированных условиях предел S существует для достаточно широкого класса функций $f(x)$ и что он не зависит от разбиения и набора точек ξ_i, так что определение корректно.

Определение 1.1. *(Определение интеграла Римана)*

- *Пусть $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$ с максимальным шагом разбиения $\tau = \tau(T) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – произвольные точки соответствующих отрезков разбиения. Интегральной суммой Римана функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ относительно разбиения T называется сумма*

$$\sigma_T(f) = \sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

- *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману, если для любой последовательности разбиений $T_k = \{a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} <$*

$\ldots < x_{n_k}^{(k)} = b\}$, $\tau(T_k) \to 0$, и любой последовательности векторов $\{\xi^k\}$, $\xi_i^{(k)} \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$, существует предел

$$I = \lim_{\tau(T_k)\to 0} \sigma(f, T_k, \xi^k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^{(k)}. \tag{1.1}$$

Число $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ называется интегралом Римана функции f по отрезку $[a, b]$.

Замечание 1.1. *Число I в определении 1.1 не зависит от выбора последовательностей разбиений $\{T_k\}$ и векторов $\{\xi^k\}$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть f интегрируема и при этом существуют две последовательности разбиений и векторов $(T_k^1, \xi^{1,k})$ и $(T_k^2, \xi^{2,k})$ такие, что

$$\lim_{\tau(T_k^1)\to 0} \sigma(f, T_k^1, \xi^{1,k}) = I_1, \quad \lim_{\tau(T_k^2)\to 0} \sigma(f, T_k^2, \xi^{2,k}) = I_2, \quad I_1 \neq I_2.$$

Образуем новые последовательности разбиений и векторов чередованием элементов указанных:

$$T_k = (T_1^1, T_1^2, T_2^1, T_2^2, \ldots, T_k^1, T_k^2, \ldots), \;\; \xi^k = (\xi^{1,1}, \xi^{2,1}, \xi^{1,2}, \xi^{2,2}, \ldots, \xi^{1,k}, \xi^{2,k}, \ldots).$$

Очевидно, что $\tau(T_k) \to 0$ и по определению интегрируемости $f(x)$ должен существовать предел

$$\lim_{\tau(T_k)\to 0} \sigma(f, T_k, \xi^k).$$

Но это не так, потому что согласно предположению у последовательности $\{\sigma(f, T_k, \xi^k)\}$ есть две подпоследовательности $\{\sigma(f, T_k^1, \xi^{1,k})\}$ и $\{\sigma(f, T_k^2, \xi^{2,k})\}$, сходящиеся к разным пределам. □

Определение 1.2. *(Эквивалентное определение интеграла Римана)*

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману, если существует число I ($I = \int\limits_a^b f(x)dx$) такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall T \; \forall \xi \; (\tau(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon). \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Определения 1.1 и 1.2 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть f интегрируема в смысле определения 1.2, т.е. выполнено (1.2). Возьмем произвольную последовательность разбиений T_k, $\tau(T_k) \to 0$, и последовательность векторов $\{\xi^k\}$, $\xi_i^{(k)} \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$, и докажем справедливость (1.1). Поскольку $\tau(T_k) \to 0$, то найдется N такое, что $\forall\ k > N : \tau(T_k) < \delta$. Но тогда в силу (1.2) справедливо неравенство

$$|\sigma(f, T_k, \xi^k) - I| < \varepsilon \text{ при } \forall\ k > N,$$

а это означает, что выполнено (1.1).

Доказательство того, что из интегрируемости f по определению 1.1 следует интегрируемость f по определению 1.2, проведем от противного. Допустим, что f интегрируема в смысле определения 1.1, но не удовлетворяет (1.2):

$$\forall I\ \exists \varepsilon > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists T : (\tau(T) < \delta,\ |\sigma(f, T, \xi) - I| > \varepsilon). \tag{1.3}$$

Выберем последовательность чисел $\delta_k \to 0$. Тогда из (1.3) следует существование последовательности разбиений T_k с максимальным шагом $\tau(T_k) \to 0$ такой, что $|\sigma(f, T_k, \xi^k) - I| > \varepsilon$ для любого числа I. Но это означает, что последовательность $\{\sigma(f, T_k, \xi^k)\}$ не имеет предела, что противоречит (1.1). □

Теорема 1.1. *(Необходимое условие интегрируемости)*

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Допустим, что f не ограничена. Тогда для произвольного разбиения T_k функция f не ограничена хотя бы на одном отрезке $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$. Пусть $N > 0$ – сколь угодно велико. Выберем $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ произвольным для $i \neq i_0$, а затем выберем ξ_{i_0} на отрезке отрезке $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ так, что

$$|f(\xi_{i_0})| > \frac{N}{\Delta x_{i_0}} + \left| \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \cdot \frac{1}{\Delta x_{i_0}}.$$

Тогда для соответствующей интегральной суммы Римана справедливо неравенство

$$|\sigma(f, T_k, \xi^k)| = |f(\xi_{i_0}) \Delta x_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i)(\Delta x_i)| \geq$$

$$\geq |f(\xi_{i_0})|\Delta x_{i_0} - |\sum_{i\neq i_0} f(\xi_i)\Delta x_i| > N.$$

Это означает, что последовательность $\{\sigma(f, T_k, \xi^k)\}$ не имеет конечного предела, что противоречит интегрируемости f. $\square$

Согласно теореме 1.1 имеет смысл далее рассматривать лишь ограниченный на отрезке $[a, b]$ функции. Отметим при этом, что ограниченности функции недостаточно для ее интегрируемости. Классическим примером ограниченной и не интегрируемой функции является функция Дирихле

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Легко видеть, что для любого разбиения $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ со сколь угодно малым $\tau(T)$ при $\xi_i \in \mathbb{Q}$ имеем

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a.$$

Если же ξ_i выбрать иррациональными, то для того же разбиения T, получим $\sigma(f, T, \xi) = 0$. Таким образом, для функции Дирихле не существует предела интегральных сумм, не зависящего от выбора точек ξ_i, т. е. эта функция не интегрируема.

В дальнейшем мы докажем интегрируемость всех непрерывных на $[a, b]$ функций и интегрируемость широкого класса разрывных функций.

Определение 1.3. *(Суммы Дарбу)*

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ограничена на* $[a, b]$, $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ *– разбиение отрезка* $[a, b]$,

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Суммы

$$\overline{S}(f, T) = \overline{S}_T = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i, \ \underline{S}(f, T) = \underline{S}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

называются соответственно верхней и нижней (интегральными) суммами Дарбу функции f *для данного разбиения* T *отрезка* $[a, b]$.

Свойства сумм Дарбу

1. $\underline{S}_T(f) \leqslant \sigma(f, T, \xi) \leqslant \overline{S}_T(f) \;\; \forall \xi.$

   Доказательство следует из неравенств $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ для всех i и любых $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

2. Справедливы равенства

$$\overline{S}_T(f) = \sup_{\xi} \sigma(f, T, \xi), \quad \underline{S}_T(f) = \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi). \qquad (1.4)$$

   Докажем, например, что $\overline{S}_T(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$. Согласно определению *sup* следует доказать, что

$$\forall \xi \; \sigma(f, T, \xi) \leqslant \overline{S}_T(f) \;\text{ и }\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \xi' : \; \sigma(f, T, \xi) > \overline{S}_T(f) - \varepsilon.$$

   Первое неравенство доказано в свойстве 1. Докажем второе неравенство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого i найдем

$$\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i] : \; f(\xi_i') > M_i - \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

   Умножая эти неравенства на (Δx_i) и суммируя по i, получим $\sigma(f, T, \xi) > \overline{S}_T(f) - \varepsilon$.

3. Если разбиение T' отрезка $[a, b]$ получено добавлением новых точек к точкам разбиения T этого отрезка (назовем T' продолжением разбиения T и будем использовать обозначение $T \prec T'$), то

$$\underline{S}_T(f) \leqslant \underline{S}_{T'}(f) \;\text{ и }\; \overline{S}_{T'}(f) \leqslant \overline{S}_T(f),$$

   т. е. нижняя сумма Дарбу возрастает, а верхняя убывает при увеличении числа точек разбиения отрезка $[a, b]$.

   Докажем, например, что $\underline{S}_T(f) \leqslant \underline{S}_{T'}(f)$ при $T \prec T'$. По определению продолжения разбиения каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения T есть объединение конечного числа $p_i \geq 1$ отрезков разбиения T':

$$[x_{i-1}, x_i] = \bigcup_{j=1}^{p_i} [y_{j-1}, y_j].$$

Ясно, что $\tilde{m}_j = \inf\limits_{x\in[y_{j-1},y_j]} f(x) \geq \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = m_i$ для всех таких отрезков. В результате

$$\underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \underline{S}_{T'}(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \tilde{m}_j (y_j - y_{j-1})$$

4. Для любых двух разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,b]$ справедливы неравенства
$$\underline{S}_{T_1}(f) \leqslant \overline{S}_{T_2}(f), \tag{1.5}$$
т. е. нижняя сумма Дарбу не превосходит верхнюю сумму Дарбу для любой пары разбиений.

   Для доказательства построим разбиение T, используя все точки разбиений T_1 и T_2. Тогда $T_1 \prec T$ и $T_2 \prec T$, поэтому в силу предыдущего свойства
$$\underline{S}_{T_1}(f) \leqslant \underline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_{T_2}(f).$$

5. Множество $\{\overline{S}_T(f)\}$ верхних сумм данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a,b]$ ограничено снизу. Множество $\{\underline{S}_T(f)\}$ нижних сумм ограничено сверху.

   Это утверждение следует из (1.5).

6. В силу свойства 5 существуют конечные числа $\overline{I} = \inf\limits_T\{\overline{S}_T\}$ и $\underline{I} = \sup\limits_T\{\underline{S}_T\}$, называемые верхним и нижним интегралами Дарбу, соответственно. Из определения следуют неравенств
$$\underline{S}_{T_1}(f) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_{T_2}(f) \quad \forall T_1, T_2. \tag{1.6}$$

Теорема 1.2. *(1-ый критерий интегрируемости) Для того, чтобы ограниченная на $[a,b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$ **для любого разбиения** T *отрезка* $[a,b]:\ \tau(T) < \delta$
$$\overline{S}_T - \underline{S}_T \leqslant \varepsilon. \tag{1.7}$$

Теорема 1.3. *(2-ой критерий интегрируемости) Для того, чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$\forall \varepsilon > 0$ **существовало разбиение** T *отрезка* $[a, b]$, *для которого*

$$\overline{S}_T - \underline{S}_T \leqslant \varepsilon.$$

Приведем доказательство только первой теоремы.

Доказательство. Пусть f интегрируема, $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$I - \varepsilon/3 < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon/3 \quad \forall T, \text{ у которого } \tau(T) < \delta.$$

Переходя к нижней грани по всем ξ в левом неравенстве и пользуясь равенством $\underline{S}_T(f) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$ (свойство 2), получим

$$I - \varepsilon/3 \leqslant \underline{S}_T(f).$$

Аналогично, переходя к верхней грани по всем ξ в правом неравенстве и пользуясь равенством $\overline{S}_T(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$ (свойство 2), получим

$$\overline{S}_T(f) \leqslant I + \varepsilon/3.$$

В результате

$$I - \varepsilon/3 \leqslant \underline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_T(f) \leqslant I + \varepsilon/3 \Rightarrow \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) \leqslant 2\varepsilon/3 < \varepsilon,$$

т.е. неравенство (1.7) справедливо.

Пусть теперь выполнено условие (1.7). В силу (1.6)

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$$

для любого разбиения T, у которого $\tau(T) < \delta$. Но числа $\overline{I}$ и $\underline{I}$ не зависят от T, поэтому неравенства $0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ означают $\overline{I} = \underline{I}$.

Положим $I = \overline{I} = \underline{I}$ и докажем, что это число и есть $\int\limits_a^b f(x)dx$. Из (1.6) и равенств $I = \overline{I} = \underline{I}$ следует

$$\underline{S}_T(f) \leqslant I \leqslant \overline{S}_T(f),$$

Используя эти неравенства, (1.7) и неравенства $\underline{S}_T(f) \leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant \overline{S}_T(f)$ (свойство 1) получим:

$$|\sigma(f,T,\xi) - I| \leqslant \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon \ \ \forall T: \ \tau(T) < \delta.$$

Это означает, что $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. □

1.2 Классы интегрируемых функций

Теорема 1.4. *Если функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a,b]$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва этой функции и имеющих общую сумму длин меньше ε, то $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Обозначим через $\omega_i = M_i - m_i$ колебание функции $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Для доказательства утверждения согласно теореме 1.3 достаточно для любого $\varepsilon > 0$ построить разбиение T отрезка $[a,b]$, для которого

$$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть Ω – множество точек разрыва функции $f(x)$ и $D_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{l} (\alpha_i, \beta_i)$ – его покрытие ($\Omega \subset D_0$) интервалами общей длины

$$\sum_{i=1}^{l} (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)},$$

где $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), \ m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Замкнутое множество $D_1 = [a,b] \setminus D_0$ состоит из конечного числа отрезков $[\alpha_i', \beta_i']$. Разобьем каждый отрезок $[\alpha_i', \beta_i']$ так, чтобы для колебания ω_i функции $f(x)$ на любом частичном отрезке разбиения было справедливо неравенство

$$\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Объединяя частичные отрезки разбиения всех $[\alpha_i', \beta_i'] \in D_1$ и все $(\alpha_i, \beta_i) \in D_0$, мы получим разбиение T всего отрезка $[a,b]$. Для этого разбиения слагаемые суммы

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_i{}' \omega_i \Delta x_i + \sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i,$$

где первая сумм содержит слагаемые, отвечающие частям разбиения T, образованным из интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \in D_0$, а вторая – остальные слагаемые. Из построений следуют оценки:

$$\sum_i{}' \omega_i \Delta x_i \leqslant (M-m) \sum_{i=1}^{l} (\beta_i - \alpha_i) < (M-m) \frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum{}'' \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате построено разбиение T, для которого $\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum\limits_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, что и требовалось. □

Следствие 1.1. *Ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на $[a, b]$. В частности, любая непрерывная и кусочно непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Действительно, если p – число точек разрыва функции $f(x)$, то достаточно покрыть каждую точку разрыва интервалом длины ε/p, где $\varepsilon > 0$, и мы получим, что все точки разрыва функции $f(x)$ покрываются конечным числом интервалов, суммарная длина которых меньше ε. □

Замечание 1.2. *Существуют интегрируемые функции, имеющие бесконечное число точек разрыва. Например, функция $f(x)$, определенная на $[0, 1]$*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], \ n = 1, 2, \ldots, \\ -1, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right], \ n = 1, 2, \ldots, \ x = 0 \end{cases}.$$

Указанная функция имеет разрывы 1-го рода во всех точках $x_n = \frac{1}{n}, \ n = 2, 3, \ldots$. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Покроем точку $x = 0$ интервалом $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$, внутри которого находится бесконечное число, а вне - лишь конечное *число p точек разрыва функции $f(x)$. Каждую из точек, находящуюся вне интервала $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$, покроем интервалом длины меньше $\frac{\varepsilon}{2p}$. Сумма длин интервалов, покрывающих все точки разрыва функции $f(x)$, будет меньше $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на* $[0, 1]$.

Теорема 1.5. *Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть для определенности f возрастает на $[a, b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим разбиение отрезка $[a, b]$ на равные части, длины которых меньше $\varepsilon/(f(b) - f(a))$. Тогда

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i).$$

Но для возрастающих функций $\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i - m_i) \leq f(b) - f(a)$, поэтому $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$. Следовательно, f интегрируема на $[a, b]$. $\square$

Теорема 1.4 не дает полного ответа на вопрос о классе функций, интегрируемых по Риману. Отвечает на этот вопрос приведенная ниже теорема Лебега.

Определение 1.4. *Множество E имеет лебегову меру нуль, если при любом $\varepsilon > 0$ существует покрывающая E счетная или конечная система интервалов, сумма длин которых меньше ε.*

Теорема 1.6. *(Теорема Лебега) Для того, чтобы функция f была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на $[a, b]$ и непрерывной всюду на $[a, b]$, за исключением множества точек лебеговой меры нуль.*

Заметим, что теорема 1.4 является частным случаем части достаточности теоремы Лебега. Отличие состоит в том, что в теореме Лебега допускается покрытие множества точек разрыва не только конечным набором интервалов, но и счетным.

1.3 Основные свойства интеграла Римана

1. (Линейность интеграла) Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, то

$$\exists \int\limits_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int\limits_a^b f(x)dx + c_2 \int\limits_a^b g(x)dx,\ c_1, c_2 = \text{const}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Пусть $\{T_k\}$ – последовательность разбиений отрезка $[a,b]$ такая, что $\tau(T_k) \to 0$, и $\{\xi^k\}$ – соответствующая последовательность векторов,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\tau(T_k)\to 0} \sigma(f, T_k, \xi^k), \quad \int\limits_a^b g(x)dx = \lim_{\tau(T_k)\to 0} \sigma(g, T_k, \xi^k).$$

Поскольку для интегральных сумм Римана справедливо равенство

$$\sigma(c_1 f + c_2 g, T_k, \xi^k) = c_1 \sigma(f, T_k, \xi^k) + c_2 \sigma(g, T_k, \xi^k).$$

то в пределе при $\delta(T) \to 0$ из него следует существование интеграла $\int\limits_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx$ и равенство (1.8). $\square$

2. Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, то существуют интегралы

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx \ , \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \ \text{ и } \ \int\limits_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx \text{ при условии } |g(x)| \geqslant d > 0.$$

Доказательство. Пусть T – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Введем обозначения:

$$M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ K(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Для произвольных $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$
\begin{gathered}
|f(\xi_i)| - |f(\eta_i)| \le |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \le M_i(f) - m_i(f), \\
f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\eta_i)g(\eta_i) = f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\xi_i)g(\eta_i) + f(\xi_i)g(\eta_i) - \\
-f(\eta_i)g(\eta_i) \le |f(\xi_i)||g(\xi_i) - g(\eta_i)| + |g(\eta_i)||f(\xi_i) - f(\eta_i)| \le \\
\le K(f)\,(M_i(g) - m_i(g)) + K(g)(M_i(f) - m_i(f)), \\
\frac{1}{g(\xi_i)} - \frac{1}{g(\eta_i)} = \frac{g(\eta_i) - g(\xi_i)}{g(\xi_i)g(\eta_i)} \le \frac{1}{d^2}(M_i(g) - m_i(g)).
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

Взяв sup левых частях неравенств (1.9) по $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, умножив полученные числа на Δx_i и просуммировав по i, получим следующие неравенства:

$$
\begin{gathered}
\bar{S}_T(|f|) - \underline{S}_T(|f|) \leqslant \bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f), \\
\bar{S}_T(fg) - \underline{S}_T(fg) \le K_f(\bar{S}_T(g) - \underline{S}_T(g)) + K_g(\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f)), \\
\bar{S}_T\left(\frac{1}{g}\right) - \underline{S}_T\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{1}{d^2}\big(\bar{S}_T(g) - \underline{S}_T(g)\big).
\end{gathered}
\tag{1.10}
$$

В силу интегрируемости функций f и g для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что правые части неравенств (1.10) можно сделать меньше $\varepsilon > 0$ для любого разбиения с $\delta(T) < \delta$. Из теоремы 1.2 следует интегрируемость функций $|f|$, fg и $\dfrac{1}{g}$. Очевидно, что тогда интегрируема и функция $\dfrac{f}{g} = \dfrac{1}{g}\,f$. $\square$

Замечание 1.3. *Из интегрируемости $|f|$ не следует интегрируемость f. Например, функция*

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ -1, & \text{если } x \in [a,b] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}
$$

не интегрируема на $[a,b]$ (см. пример с функцией Дирихле), в то время, как $|f(x)|$ – интегрируема на $[a,b]$.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ отличается от функции $f(x)$ лишь в конечном числе точек, то функция $g(x)$ также интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

   Доказательство. Определим функцию $\phi(x) = g(x) - f(x)$. Тогда она ограничена и отлична от нуля лишь в конечном числе точек, пусть m точек. Для любого разбиения T с $\tau(T) < \delta$ получим оценку для суммы Римана:
$$|\sigma(\phi, T, \xi)| \leqslant 2m\delta \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$
   Ясно, что при любом ξ существует $\lim\limits_{\delta(T)\to 0} \sigma(\phi, T, \xi) = 0$, т.е. существует $\int\limits_a^b \phi(x)dx = 0$. В силу первого свойства интегралов
$$\exists \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$
□

4. (Аддитивность по множеству интегрирования) Пусть $a < c < b$. Для интегрируемости $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. При этом
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \tag{1.11}$$

   Доказательство. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда существуют разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, соответственно, такие что
$$\bar{S}_{T_1}(f) - \underline{S}_{T_1}(f) < \varepsilon/2,\ \bar{S}_{T_2}(f) - \underline{S}_{T_2}(f) < \varepsilon/2.$$

Объединив разбиения T_1 и T_2, мы получим разбиение T отрезка $[a,b]$, для которого

$$\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) = \bar{S}_{T_1}(f) - \underline{S}_{T_1}(f) + \bar{S}_{T_2}(f) - \underline{S}_{T_2}(f) < \varepsilon.$$

Согласно теореме 1.3 функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Допустим теперь, что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Согласно теореме 1.2 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T с $[a,b]$ с $\tau(T) < \delta$ справедливо неравенство

$$\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon.$$

Возьмем разбиение, которое включает точку c. Оно порождает разбиения разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, у которых $\tau(T_1) < \delta$ и $\tau(T_2) < \delta$, поэтому

$$\bar{S}_{T_1}(f) - \underline{S}_{T_1}(f) < \varepsilon,\ \ \bar{S}_{T_2}(f) - \underline{S}_{T_2}(f) < \varepsilon.$$

В силу теоремы 1.3 функция f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$.

Пусть теперь последовательность разбиений T_k такова, что каждое разбиение содержит точку c, так что $T_k = T_{1k} + T_{2k}$. Тогда интегральная сумма функции $f(x)$ на $[a,b]$ будет равна сумме интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$:

$$\sigma(f, T_k, \xi^k) = \sigma(f, T_{1k}, \xi^{1k}) + \sigma(f, T_{2k}, \xi^{2k}).$$

Переходя к пределу при $\tau(T_k) \to 0$, получим равенство (1.11). □

5. (Сравнение интегралов) Если f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{1.12}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что для интегральных сумм Римана справедливо неравенство

$$\sigma(f, T_k, \xi^k) \leqslant \sigma(g, T_k, \xi^k),$$

из которого (1.12) следует в пределе при $\tau(T_k) \to 0$. □

6. Если f интегрируема на $[a,b]$, то $|f|$ – также интегрируемая функция и
$$|\int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,(b-a).$$

Доказательство. Интегрируемость $|f(x)|$ уже доказана. При любом $x \in [a,b]$ справедливы неравенства $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, поэтому
$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx \;\Leftrightarrow\; |\int\limits_a^b f(x)dx| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Из неравенства $|f(x)| \le \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\ \forall x \in [a,b]$ следует $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx \leqslant$ $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\,(b-a)$. □

7. Пусть выполнены следующие условия:

   - f интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$,
   - f непрерывна в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$ и $f(x_0) > 0$.

   Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

   Доказательство. f непрерывна в x_0 и $f(x_0) > 0$, поэтому существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $f(x) \ge \dfrac{f(x_0)}{2}$ при $x \in [c,d] = \bar{U}(x_0) \cap [a,b]$. Тогда
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx \ge \int\limits_c^d f(x)dx \ge$$
$$\ge \int\limits_c^d \frac{f(x_0)}{2}dx = \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0.$$

$\square$

8. (Теорема о среднем значении). Пусть f и φ интегрируемы на $[a,b]$ и $\varphi \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда существует постоянная $\lambda \in (m,M)$, где $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x))$, такая что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \lambda \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

Если, кроме того, $f(x)$ непрерывна, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $\lambda = f(\xi)$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

Доказательство. Из неравенства $\varphi(x) \geq 0$ следует $m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x),\ x \in [a,b]$, поэтому

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0$, то в качестве λ можно взять любое число из отрезка $[m,M]$. Если же $\int\limits_a^b \varphi(x)dx > 0$, то

$$\lambda = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)dx}.$$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме о промежуточных значениях Больцано-Коши существует точка $\xi \in [a,b]$, в которой функция $f(\xi) = \lambda$. $\square$

Замечание 1.4. *По определению полагаем:*

- $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, *если* $a > b$.
- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

1.4 Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1.7. *1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то на $[a, b]$ определена и непрерывна функция*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \ a \leqslant x \leqslant b.$$

2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ интегрируема и x – произвольная точка отрезка $[a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$. Тогда

$$\big|F(x + \Delta x) - F(x)\big| = \Big| \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt\Big| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)||\Delta x| \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, так что $F(x)$ непрерывна во всех точках $[a, b]$.

Пусть теперь $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$ и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Обозначим через $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$ приращение функции и оценим $\big|\dfrac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\big|$:

$$\big|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\big| = \left|\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \big(f(t) - f(x_0)\big)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \big|f(t) - f(x_0)\big|\, dt.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если теперь $|\Delta x| < \delta$, то

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| < \frac{1}{|\Delta x|} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\, dt = \varepsilon.$$

Это означает существование

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0).$$

□

Замечание 1.5. *Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то $F'(x_0) = f(x_0)$ – соответствующая односторонняя производная.*

Следствие 1.2.

1. *Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна на (a, b), то $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.*
2. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на (a, b). Это означает, что* **у любой непрерывной функции на** $[a, b]$ **существует первообразная** $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Замечание 1.6. *Из теоремы 1.7 следует формула дифференцирования по верхнему переменному пределу:*

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$$

для непрерывной функции $f(x)$. Производная по переменному нижнему пределу является ее следствием:

$$\frac{d}{dx} \int\limits_x^b f(t)dt = -\frac{d}{dx} \int\limits_b^x f(t)dt = -f(x).$$

Теорема 1.8. *(формула Ньютона-Лейбница) Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $\Phi(x)$ – произвольная ее первообразная, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \equiv \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Доказательство. Как доказано выше, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функций для $f(x)$, поэтому $\Phi(x) = F(x)+c$, $c = \mathrm{const}$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (F(b)+c) - (F(a)+c) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\square$

Теорема 1.9. *Если непрерывная на $[a,b]$ функция F имеет кусочно непрерывную производную на $[a,b]$, то*

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots < x_m$ – точки разрыва первого рода функции $F(x)$. Обозначим $x_0 = a$, $x_{m+1} = b$. На всех отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, поэтому

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F'(x)dx = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

В силу свойства аддитивности по множеству интегрирования интеграла Римана получим:

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = \sum_{i=1}^m (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

$\square$

1.5 Общие приемы интегрирования

1. (Формула интегрирования по частям) Пусть f и g – непрерывные функции, имеющие кусочно непрерывные производные на $[a, b]$. Тогда
$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx.$$

   Доказательство. Из свойств $f(x)$ и $g(x)$ следует, что $f(x)g'(x)$ и $f'(x)g(x)$ – кусочно непрерывные на $[a, b]$, поэтому интегрируемы, а функция $f(x)g(x)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную
$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$
   Используя это равенство и обобщенную формулу Ньютона-Лейбница (теорема 1.9), получим:
$$\int\limits_a^b (f(x)g(x))'dx = f(x)g(x)\big|_a^b = \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx + \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx.$$
   □

2. (Формула замены переменной) Пусть

   - $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,
   - $\varphi(t)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$,
   - $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(\beta) = b \ \ \forall t \in [\alpha, \beta]$.

   Тогда
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

   Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ такое, что $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на каждом интервале $[t_{i-1}, t_i]$. Тогда $F(\varphi(t))$ –

первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, в частности,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t),\ t \in (t_{i-1}, t_i).$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к интегралам на отрезках $[a, b]$ и $[t_{i-1}, t_i]$, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n}[F(\varphi(t_i)) -$$

$$-F(\varphi(t_{i-1}))] = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

□

1.6 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Пусть $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R},\ \alpha < a < \beta$ и $f^{(n)}$ – непрерывна на отрезке $[a, x] \subset (\alpha, \beta)$ (или $[x, a] \subset (\alpha, \beta)$). Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k + r_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!} + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \tag{1.13}$$

(Величина $r_n(x)$ называется остатком в интегральной форме).

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ формула (1.13) является следствием формулы Ньютона-Лейбница:

$$f(x) - f(a) = \int\limits_a^x f'(t)dt.$$

Пусть (1.13) имеет место для всех $k \le n-1$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt.$$

Проинтегрируем по частям интеграл в правой части:

$$\int_a^x f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2}dt = -\frac{1}{n-1} f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-1}\Big|_a^x + \frac{1}{n-1}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{n-1} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n-1}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Подставляя это выражение для интеграла в предыдущее равенство, получим (1.13) для $k = n$. □

Замечание 1.7. *Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа можно получить из формулы* (1.13). *Действительно, в силу теоремы о среднем справедливо равенство*

$$r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}dt =$$

$$-\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a)}{(n-1)!}\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_a^x = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

Полученное выражение и представляет собой остаточный член в форме Лагранжа.

§2 Несобственные интегралы Римана

2.1 Определение несобственного интеграла. Критерий Коши

В определении интеграла Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в предыдущем параграфе содержатся следующие два принципиальных ограничения:

1) промежуток интегрирования – это конечный отрезок $[a,b]$;

2) функция $f(x)$ ограничена.

В этом параграфе мы обобщим понятие интеграла на случаи как неограниченного промежутка интегрирования, так и неограниченной функции. Это обобщение называется несобственным интегралом, в отличие от рассмотренного ранее случая, когда интеграл называется собственным.

Определение 2.5. *Пусть*

1. *функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \leqslant +\infty$;*

2. *для всех $\eta < b$ существует (собственный) интеграл Римана $\int\limits_a^\eta f(x)\,dx$;*

3. *существует конечный предел*

$$I = \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f(x)dx. \tag{2.14}$$

Тогда I называется **несобственным интегралом от f с особенностью в точке** *b и обозначается так же, как и собственный интеграл: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

Замечание 2.8. *Обозначение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ используют для несобственного интеграла и в случае, когда выполнены только первые два условия в* *определении. При этом, если выполнено и третье условие (т.е. существует конечный предел* (2.15)*), то интеграл называют сходящимся. В противном случае интеграл расходящийся.*

Аналогично интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$, с особенностью в точке b, определяется интеграл с особенностью в точке a. Именно, пусть

1. функция $f(x)$ определена на промежутке $(a, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a$;
2. для всех $\eta > a$ существует (собственный) интеграл Римана $\int\limits_\eta^b f(x)\,dx$;
3. существует конечный предел

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to a+0} \int\limits_\eta^b f(x)dx. \tag{2.15}$$

Далее для определенности мы будем рассматривать $\int\limits_a^b f(x)dx$ с единственной особенностью в точке b, конечной или бесконечной. Все результаты и выводы могут быть перенесены на случай интеграла с единственной особенностью в точке a.

Пример 2.1. *1.* $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$ *сходится при* $\alpha < 1$ *и равен* $(1-\alpha)^{-1}$ *и расходится при* $\alpha \geq 1$.

2. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ *сходится при* $\alpha > 1$ *и равен* $(\alpha - 1)^{-1}$ *и расходится при* $\alpha \leq 1$.

Теорема 2.10. *(Критерий Коши).* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *с единственной особенностью в точке b сходится тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\eta = \eta(\varepsilon),\; a < \eta < b:\;\forall\;\eta_1, \eta_2 \in (\eta, b)\quad \left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon. \tag{2.16}$$

Доказательство. Определим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Существование $\int\limits_a^b f(t)dt$ эквивалентно существованию $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$. Но для существования этого предела необходимо и достаточно выполнения условия Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\eta = \eta(\varepsilon),\; a < \eta < b:\;\forall\;\eta_1, \eta_2 \in (\eta, b)\quad |F(\eta_2) - F(\eta_1)| < \varepsilon.$$

Остается заметить, что $F(\eta_2) - F(\eta_1) = \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(t)dt$. □

2.2 Свойства и формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов

Будем считать, что рассматриваемые далее функции определены на промежутке $[a, b)$ и интегрируемы в собственном смысле на $[a, \eta]$ при любом $\eta < b$.

1. Несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ при любом $c \in (a, b)$ сходятся или расходятся одновременно. В случае сходимости справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \tag{2.17}$$

Доказательство. Пусть $\eta : c < \eta < b$. В силу свойства аддитивности по множеству интегрирования собственного интеграла Римана справедливо равенство

$$\int_a^\eta f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\eta f(x)dx.$$

Ясно, что предел при $\eta \to b-0$ существует или нет одновременно у левой и правой частей этого равенства, т.е. несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Равенство (2.17) получается отсюда в пределе при $\eta \to b-0$. □

2. (Линейность интеграла) Если интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то

$$\exists \int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x) + c_2 \int_a^b g(x)dx,\ c_1, c_2 = \text{const}.$$

Доказательство получается предельным переходом при $\eta \to b-0$ из равенства для собственных интегралов Римана:

$$\int_a^\eta (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^\eta f(x) + c_2 \int_a^\eta g(x)dx.$$

3. (Формула Ньютона-Лейбница) Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$ и $F(x)$ – её первообразная, т.е. непрерывная на $[a,b)$ функция, у которой на (a,b) существует производная $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a) \text{ при } b < +\infty, \\ F(+\infty) - F(a) \text{ при } b = +\infty \end{cases} \tag{2.18}$$

(где $F(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x),\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$).

Равенство (2.18) надо понимать так: если существует одна из его частей, левая или правая, то существует и вторая, и они равны. Для доказательства достаточно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для собственного интеграла:

$$\int\limits_a^\eta f(x)dx=F(\eta)-F(a),\quad \eta<b,$$

и перейти к пределу при $\eta\to b-0$.

4. (Интегрирование по частям) Пусть f и g непрерывны и имеют кусочно непрерывные производные на промежутке $[a,b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\big|_a^b-\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{2.19}$$

Равенство (2.19) надо понимать так: если имеют смысл два из трех выражений, тогда имеет смысл и третье, и справедливо равенство.

Например, если оба несобственных интеграла $\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$ и $\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$ сходятся, то существует конечный предел $f(x)g(x)\big|_a^b=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)g(x)-f(a)g(a)$ и справедливо равенство (2.19).

Другой вариант – сходится один из этих несобственных интегралов и существует $f(x)g(x)\big|_a^b$. Тогда сходится и второй несобственный интеграл и справедливо равенство (2.19).

Как и ранее, утверждение обосновывается предельным переходом при $\eta\to b-0$ в соответствующем равенстве для собственных интегралов:

$$\int\limits_a^\eta f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\big|_a^\eta-\int\limits_a^\eta f'(x)g(x)dx.$$

5. (Замена переменной) Пусть выполнены следующие условия:

- f непрерывна на промежутке $[a, b)$,
- φ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную на $[\alpha, \beta)$,
- $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) \quad \forall t \in [\alpha, \beta)$.

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ и равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{2.20}$$

Если в дополнение к сформулированным условиям

- $\phi'(t) > 0$ для всех t,

то оба интеграла в этом равенстве сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой замены переменных для собственных интегралов:

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{\beta_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \text{ где } \eta = \varphi(\beta_1). \tag{2.21}$$

Поскольку $\beta_1 \to \beta - 0 \ \Rightarrow \eta = \phi(\beta_1) \to b - 0$, а предел $\lim\limits_{\eta \to b-0} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ существует, то существует и предел $\lim\limits_{\beta_1 \to \beta - 0} \int\limits_\alpha^{\beta_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Переходя к пределам в равенстве (2.21), получим (2.20).

Пусть теперь выполнено дополнительное условие, тогда у функции φ существует обратная однозначная функция φ^{-1}, которая удовлетворяет условиям, аналогичным тем, что наложены на функцию φ. В этом случае $\beta_1 \to \beta - 0 \;\Leftrightarrow \eta \to b - 0$, а в интеграле, стоящем в правой части равенства (2.21), можно сделать замену переменной $t = \varphi^{-1}(x)$.Переходя к пределам в равенстве (2.21), получим (2.20). □

2.3 Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 2.11. *(Критерий сходимости) Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b)$ и существует (собственный) интеграл $\int\limits_a^\eta f(x)dx$ для любого $\eta < b$. Тогда для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная M такая, что*

$$\int\limits_a^\eta f(x)dx \leqslant M \quad \forall \eta < b.$$

При этом $\int\limits_a^b f(x)dx = \sup\limits_{a\leqslant\eta<b} \int\limits_a^\eta f(x)dx \leqslant M.$

Доказательство. Функция $F(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$ возрастает на промежутке $[a,b)$, так как $F(\eta_1) - F(\eta_2) = \int\limits_{\eta_2}^{\eta_1} f(x)\,dx \geqslant 0$ при $\eta_1 > \eta_2$. По свойству возрастающих функций, если $\sup\limits_{a\leqslant\eta<b} F(\eta) < +\infty$, то существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to b-0} F(\eta) = \sup\limits_{a\leqslant\eta<b} F(\eta)$. Остается заметить, что это равносильно доказываемому утверждению.

□

Замечание 2.9. *Если несобственный интеграл от неотрицательной функции не сходится, то он равен* $+\infty$. *Это позволяет кратко писать* $\int\limits_a^b f(x)dx < +\infty$ *для сходящихся интегралов от неотрицательных функций и* $\int\limits_a^b f(x)dx = +\infty$, *если интеграл расходится.*

Свойства интегралов от неотрицательных функций

1. Пусть
$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \in [a, b).$$
Тогда из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$ и неравенство
$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx,$$
а из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx = G < +\infty$, тогда $\int\limits_a^\eta f(x)dx \leqslant \int\limits_a^\eta g(x)dx \leqslant G \ \forall \eta < b$ и по теореме 2.11 интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится и не превосходит G.

Пусть теперь $\int\limits_a^b f(x)dx = +\infty$. Если допустить, что $\int\limits_a^b g(x)dx < +\infty$, то из предыдущей части утверждения должно следовать $\int\limits_a^b f(x)dx < +\infty$, так что получено противоречие. □

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и неотрицательны на $[a, b)$. Предположим, что существует предел

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Тогда интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. По определению предела для $0 < \varepsilon < A$ найдется точка $c < b$ такая, что

$$(A - \varepsilon)g(x) \leqslant f(x) \leqslant (A + \varepsilon)g(x) \quad \forall x \in [c, b).$$

По предыдущему свойству интегралы $\int\limits_c^b f(x)dx$ и $\int\limits_c^b g(x)dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся. Но в силу первого свойства пункта 2.2 это равносильно сформулированному утверждению. □

2.4 Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы

Определение 2.6. *$\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.*

Лемма 2.2. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится, при этом*

$$\left| \int\limits_a^b f dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f| dx.$$

Доказательство. Из сходимости $\int\limits_a^b |f|dx$ следует условие Коши (2.16):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \eta(\varepsilon),\ 0 < \eta < b:\ \forall\ \eta_1, \eta_2 \in (\eta, b) \quad \left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

Но поскольку $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx$, то условие Коши выполнено и для $\int\limits_a^b f(x)dx$, поэтому он сходится.

Неравенство получается предельным переходом при $\eta \to b - 0$ из подобного неравенства для собственных интегралов. $\square$

Определение 2.7. *Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, но не сходится абсолютно, т.е. если $\int\limits_a^b |f(x)|dx = +\infty$, то этот интеграл называется условно сходящимся.*

Теорема 2.12. *(Признак Дирихле условной сходимости интеграла) Пусть выполнены следующие условия:*

1. *функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и имеет ограниченную первообразную при $x \geqslant a$;*
2. *функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, +\infty)$ и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.*

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$, $|F(x)| \leqslant M\ \forall x$. Для любого $a < \eta < +\infty$ применим формулу интегрирования по частям к собственным интегралам:

$$\int\limits_a^\eta fg\,dx = \int\limits_a^\eta g\,dF = gF\Big|_a^\eta - \int\limits_a^\eta Fg'\,dx. \tag{2.22}$$

Докажем, что правая часть этого равенства имеет конечный предел при $\eta \to +\infty$. Имеем:

$$\lim_{\eta\to+\infty} g(\eta)F(\eta) = 0, \text{ так как } |F(x)| \leqslant M\ \forall x,\ g(\eta) \to 0.$$

Далее используем неравенство $g'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant a$ и оценим

$$\int\limits_a^\eta |Fg'|\,dx \leqslant -M \int\limits_a^\eta g'\,dx = M(g(a) - g(\eta) \leqslant Mg(a) \quad \forall\eta.$$

Полученное неравенство означает, что $\int\limits_a^{+\infty} Fg'\,dx$ сходится абсолютно, значит, сходится. Таким образом, правая часть (2.22) имеет конечный предел при $\eta \to +\infty \Rightarrow$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. □

Теорема 2.13. *(Признак Абеля условной сходимости интеграла) Пусть выполнены следующие условия:*

1. *функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;*
2. *функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна на $[a, +\infty)$.*

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Монотонная и ограниченная функция $g(x)$ имеет конечный предел $G = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Пусть $g_1(x) = g(x) - G$, тогда g_1 удовлетворяет условию 2 признака Дирихле. Ясно, что из условия 1 признака Абеля для $f(x)$ следует выполнение условия 1 признака Дирихле. Как следствие перечисленных свойств, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx$ сходится. Но тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx + G\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

также сходится. □

Пример 2.2. *Интегралы* $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x^\alpha}dx$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos \beta x}{x^\alpha}dx$, $\beta \neq 0$, $\alpha > 0$, *имеют единственную особенность в* ∞. *Они сходятся по признаку Дирихле, так как*

- *функция* $f(x) = \sin \beta x$ ($f(x) = \cos \beta x$) *непрерывна и имеет ограниченную первообразную* $F(x) = -\frac{1}{\beta}\cos \beta x$ *(соответственно,* $F(x) = \frac{1}{\beta}\sin \beta x$*),*
- *функция* $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \to 0$ *при* $x \to +\infty$ *монотонно и имеет непрерывную производную.*

Пример 2.3. *Интегралы* $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x^\alpha}dx$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos \beta x}{x^\alpha}dx$, $\beta \neq 0$, *сходятся абсолютно при* $\alpha > 1$ *и условно при* $0 < \alpha \leqslant 1$.

Рассмотрим для простоты $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$. *При* $\alpha > 1$ *в силу неравенства* $|sinx| \leqslant 1$ *и теоремы сравнения из сходимости* $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *следует абсолютная сходимость* $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.

В силу предыдущего примера $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ *сходится. Докажем, что при* $0 < \alpha \leqslant 1$ *он не сходится абсолютно. Используем неравенство*

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Для любого $a < \eta < +\infty$

$$\int\limits_1^\eta \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^\eta \frac{1}{x^\alpha}dx - \frac{1}{2}\int\limits_1^\eta \frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx$$

Из предыдущего примера следует, что $\int\limits_1^\eta \frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx$ *имеет конечный предел при* $\eta \to +\infty$*, в то время как* $\int\limits_1^\eta \frac{1}{x^\alpha}dx \to +\infty$ *при* $\eta \to +\infty$*. Отсюда*

$$\int\limits_1^\eta \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx \to +\infty \quad \text{при } \eta \to +\infty.$$

§3 Числовые ряды

3.1 Определение сходимости, критерий Коши, основные свойства

Определение 3.1. *1. Пусть $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}$ – числовая последовательность. Выражение $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ называется числовым рядом.*

2. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ – n-ая частичная сумма ряда.

3. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$. Этот предел называется суммой ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Теорема 3.1. *(Критерий Коши) Для сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ необходимо и достаточно выполнения следующего условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon\ \forall n \geqslant n(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Доказательство следует из критерия сходимости к конечному пределу числовой последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда, так как

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| = \left| S_{n+p} - S_n \right|.$$

Следствие 3.1. *Необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$:*

$$a_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

следует из условия Коши при $p = 1$.

Пример 3.1. *1. Примером сходящегося ряда служит бесконечная геометрическая прогрессия*

$$1 = q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \textit{ при } \quad q < 1.$$

2. Пример расходящегося ряда – так называемый гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Он не удовлетворяет условию Коши (3.1)*. Действительно, при* $p = n$ *получим*

$$\left|\sum_{i=n+1}^{2n} a_i\right| > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Свойства рядов

1. Пусть m – любое натуральное число. Ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=m}^{\infty} a_i$ сходятся или расходятся одновременно.

   Доказательство. В силу равенства ($n > m$)

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i$$

   частичные суммы этих рядов различаются на константу $\sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i$, откуда следует утверждение. □

2. Добавление в числовой ряд или удаление из ряда конечного числа членов не влияет на его сходимость.

   Доказательство. Это следствие предыдущего свойства. □

3. Если ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \big(c_1 a_i + c_2 b_i\big)$, $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, и

   $$\sum_{i=1}^{\infty} \big(c_1 a_i + c_2 b_i\big) = c_1 \sum_{i=1}^{\infty} a_i + c_2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

Доказательство. Утверждение следует из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \big(c_1 a_i + c_2 b_i\big) = c_1 \sum_{i=1}^{n} a_i + c_2 \sum_{i=1}^{n} b_i$$

для частичных сумм рядов и теории пределов числовых последовательностей. □

4. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ получен из него группировкой членов **без перестановок**, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится и его сумма равна сумме исходного ряда.

   Доказательство. Достаточно заметить, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ является подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. □

3.2 Ряды с неотрицательными членами

Теорема 3.2. *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с неотрицательными членами* ($a_i \geqslant 0$ $\forall i$) *необходимо и достаточно выполнения следующего условия:*

$$\exists M = \text{const}: \; S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant M \;\; \forall n.$$

Доказательство. Числовая последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует результат. □

Замечание 3.1. 1. *Утверждение теоремы остается в силе, если ограничена сверху лишь какая-либо подпоследовательность* $\{S_{n_k}\}$ *частичных сумм ряда. Действительно, последовательность* $\{S_n\}$ *ряда возрастает и потому всегда имеет предел – конечный или* $+\infty$*. Но если допустить, что* $S_n \to +\infty$*, то и подпоследовательность* $\{S_{n_k}\}$ *должна была бы стремиться к* $+\infty$*.*

2. *Ясно, что расходимость ряда с неотрицательными членами означает* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$, *поэтому в случае сходящегося ряда можно использовать запись* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i < +\infty$.

Теорема 3.3. *(Теорема сравнения) Если* $0 \leqslant a_i \leqslant b_i \ \forall i$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, *а из расходимости* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *– расходимость* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Доказательство. Пусть $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i < +\infty$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant S < +\infty$ для любого n и из теоремы 3.2 следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$, то и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = +\infty$, так как иначе по первой части утверждения было бы справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i < +\infty$. □

Следствие 3.2. *Если* $a_i > 0, b_i > 0 \ \forall i$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$, *то ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Возьмем $0 < \varepsilon < c$ и найдем номер $n(\varepsilon)$ такой что

$$(c-\varepsilon)b_i \leqslant a_i \leqslant (c+\varepsilon)b_i, \quad n > n(\varepsilon).$$

По теореме сравнения ряды $\sum\limits_{i=n(\varepsilon)}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=n(\varepsilon)}^{\infty} b_i$ сходятся или расходятся одновременно. Но тогда это утверждение справедливо и для исходных рядов. □

Признаки (достаточные условия) сходимости

1. **(Интегральный признак)** Если $f(x) \geqslant 0$ и монотонно убывает на промежутке $[1,+\infty)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

   Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ убывает, то $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k) \quad \forall x \in [k, k+1]$, откуда $f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$, и после суммирования по $k = 1, 2, \ldots, n$

$$S_{n+1} - f(1) \leqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_n. \tag{3.2}$$

   Как известно (теорема 2.11), критерием сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ от неотрицательной функции является условие $\exists M : \int\limits_{1}^{\eta} f(x)dx \leqslant M \quad \forall \eta < +\infty$, равносильное для $f(x) \geqslant 0$ условию

$$\exists M : \int\limits_{1}^{n} f(x)dx \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   В то же время, критерием сходимости ряда с неотрицательными членами является условие (теорема 3.2)

$$\exists M : \; S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant M \;\; \forall n.$$

   В силу неравенств (3.2) выполнение одного из этих условий влечет и выполнение другого, откуда следует справедливость доказываемого утверждения. □

2. **(Признак Даламбера)** Пусть $a_n > 0$ при всех n.

   (a) Если существует номер m и число $q < 1$ такие, что $0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ при всех $n \geqslant m$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

   (b) Если существует номер m такой, что $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при всех $n \geqslant m$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.

Доказательство. (a) Из условия теоремы следуют неравенства

$$a_{m+1} \leqslant q a_m,\ a_{m+2} \leqslant q a_m \leqslant q^2 a_m, a_{m+3} \leqslant q^3 a_m, \ldots,$$

а ряд $a_m\,(1+q+q^2+\cdots)$ сходится. По теореме сравнения 3.3 сходится ряд $\sum\limits_{i=m}^{\infty} a_i$, а значит, и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

(b) Поскольку $0 < a_m \leqslant a_n$ при всех $n > m$, то $a_n \nrightarrow 0$, т.е. не выполнено необходимое условие сходимости. $\square$

Следствие 3.3. *(Предельный признак Даламбера)*
Пусть $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

(a) Если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

(b) Если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.

Замечание 3.2. *(Усиленный вариант предельного признака Даламбера)*

(a) Если $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

(b) Если $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.

3. **(Признак Коши)** Пусть $a_n \geqslant 0$ при всех n.

   (a) Если существует номер m и число $q < 1$ такие, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ при всех $n \geqslant m$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

   (b) Если существует номер m такой, что $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при всех $n \geqslant m$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.

Доказательство. (a) Утверждение следует из неравенств

$$a_n \leqslant q^n,\ n \geqslant m \Rightarrow \sum_{i=m}^{\infty} a_i \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} q^i < \infty$$

и теоремы сравнения 3.3.

(b) Поскольку $a_n \geqslant 1$ при всех $n \geqslant m$, то $a_n \nrightarrow 0$ и не выполнено необходимое условие сходимости. □

Следствие 3.4. *(Предельный признак Коши) Пусть $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.*

(a) Если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

(b) Если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.

Замечание 3.3. *(Усиленный вариант предельного признака Коши)*

(a) Если $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

(b) Если $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится.

3.3 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 3.2.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится абсолютно, если сходится ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится. Действительно, из условия Коши для абсолютно сходящегося ряда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) : \sum_{i=n+1}^{n+p} \big|a_i\big| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n(\varepsilon), \ \forall p \in \mathbb{N}$$

и неравенства $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| \leqslant \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} \big|a_i\big|$ следует условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) : \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n(\varepsilon), \ \forall p \in \mathbb{N}$$

для ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ называется условно сходящимся, если он сходится, но не абсолютно.

Простейшие свойства абсолютно сходящихся рядов

Применяя критерий Коши, легко доказать следующие свойства:

1. Если ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (c_1 a_i + c_2 b_i)$, $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, также сходится абсолютно.

2. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится абсолютно и $\{b_n\}$– ограниченная последовательность, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i a_i$ также сходится абсолютно.

Теорема 3.4. *Если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится абсолютно и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i$ *получен из него* **произвольной перестановкой** *членов, то он также сходится абсолютно, при этом его сумма равна сумме исходного ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Доказательство. Докажем вначале утверждение для ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ с неотрицательными членами. Обозначим через $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i$ ряд, полученный из исходного произвольной перестановкой членов, и пусть $\tilde{S}_n = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \cdots \tilde{a}_n$ – его частичная сумма. Каждый из $\tilde{a}_i$ имеет свой номер в исходном ряде, пусть $\tilde{a}_i = a_{k_i}$ и $N = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i$. Тогда

$$\tilde{S}_n \leqslant a_1 + a_2 + \cdots a_N = S_N \leqslant S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

В силу теоремы 3.2 ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i$ сходится и его сумма $\tilde{S}$ не превосходит суммы S исходного ряда: $\tilde{S} \leqslant S$. Меняя теперь ролями ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i$, получим противоположное неравенство $S \leqslant \tilde{S}$, откуда следует равенство.

Перейдем теперь к доказательству утверждения теоремы для произвольного ряда. Пусть $a_i = a_i^+ - a_i^-$, тогда $0 \leqslant a_i^+, a_i^- \leqslant |a_i|$ и из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ следует по теореме сравнения 3.3 сходимость рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^+$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^-$ с неотрицательными членами. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i$ получен из $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ перестановкой членов, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^+$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^-$ получены соответствующими перестановками из рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^+$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^-$. Для этих рядов в первой части доказательства установлены сходимость и равенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^+ = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^- = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+.$$

Отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i$ и равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^- = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

□

Теорема 3.5. *(Римана) Если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится условно, то для любого элемента расширенной прямой* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ *найдется такая перестановка членов исходного ряда, что полученный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i$ *будет иметь своей суммой* l*.*

Признаки сходимости знакопеременных рядов

1. (**Признак Лейбница** – сходимость знакочередующегося ряда)

   Пусть $a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant 0 \; \forall i$ и $a_i \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$ сходится и для его суммы справедливо неравенство $S \leqslant a_1$.

   Доказательство. Оценим частичные суммы с четным числом членов:

   $$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \leqslant S_{2n+2},$$
   $$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1.$$

   Справедливость приведенных оценок следует из неотрицательности всех разностей в скобках. Таким образом, последовательность $\{S_{2n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом a_1, поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leqslant a_1$.

   В свою очередь, частичные суммы с нечетным числом членов S_{2n+1} отличаются от S_{2n} на слагаемое $a_{2n+1} \to 0$, откуда следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leqslant a_1$. □

2. (**Признак Дирихле**)

   Пусть выполнены следующие условия:

   (a) $a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant 0\ \forall i$ и $a_i \to 0$ при $i \to \infty$;

   (b) $\exists\, M : \ \Big|\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\Big| \leqslant M\ \forall n.$

   Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ сходится.

3. (**Признак Абеля**)

   Пусть выполнены следующие условия:

   (a) $a_i \geqslant a_{i+1}\ \forall i$ и $\exists\, M : |a_i| \leqslant M$;

   (b) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится.

   Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ сходится.

§4 Функциональные последовательности и ряды

4.1 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Определение 4.3. *Пусть функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ определены на множестве $E \subset \mathbb{R}$.*

1. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве E к функции $f(x)$ ("поточечно"), если для каждого $x \in E$ существует предел числовой последовательности $\{f_n(x)\}$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Иначе говоря:*

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon, x) :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon, x).$$

2. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве E к функции $f(x)$* **равномерно**, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon) \; \forall x \in E. \tag{4.3}$$

Для краткости используют обозначение $f_n \rightrightarrows f$ для равномерно сходящейся к функции $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$.

Определение 4.4. *Пусть функции $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ определены на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ равномерно на E сходится к функции $S(x)$, если равномерно на E сходится к $S(x)$ последовательность частичных сумм ряда:*

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на} E.$$

Лемма 4.1. *Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \big|f_n(x) - f(x)\big| = 0. \tag{4.4}$$

Доказательство. Предельное соотношение (4.4) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) : \; \sup_{x\in E} \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon),$$

т.е. практически (4.3). В действительности переход к sup в (4.3) приводит к нестрогому неравенству $\sup\limits_{x\in E} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$, однако это не принципиально в доказательстве. □

Лемма 4.2. *(Критерий Коши для последовательностей) Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) : \; |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon) \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall x \in E. \tag{4.5}$$

Доказательство. Утверждение о том, что из (4.3) следует условие Коши (4.5) как всегда обосновывается с помощью неравенства треугольника:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon)$$

для всех $p \in \mathbb{N}$ и $x \in E$.

Пусть теперь выполнено условие Коши (4.5). Прежде всего, надо построить функцию $f(x)$, а затем доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к этой функции. Но при каждом фиксированном $x \in E$ условие (4.5) есть условие Коши для числовой последовательности $\{f_n(x)\}$, поэтому $\{f_n(x)\}$ сходится к конечному пределу. Предел обозначим через $f(x)$ (это построен поточечный предел). Теперь, чтобы доказать равномерную сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$, достаточно в (4.5) перейти к пределу при $p \to +\infty$. □

Следствие 4.5. *(Критерий Коши для рядов) Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *равномерно на* E *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon):\ |\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E. \tag{4.6}$$

4.2 Признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости

Лемма 4.3. *(Признак Вейерштрасса) Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *равномерно на* E *сходится, если выполнены следующие условия:*

1. $|u_i(x)| \leqslant a_i\ \forall x \in E\ \ \forall i$;
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i < +\infty$.

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться известным критерием Коши для числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ и оценкой $|u_i(x)| \leqslant a_i\ \forall x \in E\ \ \forall i$, чтобы доказать справедливость условия Коши (4.6):

$$\forall x \in E \quad |\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

□

Лемма 4.4. *(Признак Дирихле) Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)b_i(x)$ *равномерно на* E *сходится, если выполнены следующие условия:*

1. $a_i(x) \geqslant a_{i+1}(x)\ \forall x \in E\ \ \forall i$;
2. $a_i(x) \rightrightarrows 0$ *на множестве* E;
3. $\exists M = \mathrm{const}:\ \ |\sum\limits_{i=1}^{n} b_i| \leqslant M\ \forall x \in E\ \ \forall n.$

4.3 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 4.6. *Пусть функции* $f_n(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и равномерно на* $[a, b]$ *сходятся к* $f(x)$. *Тогда*

1. $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$;
2. $\varphi_n(x) = \int\limits_a^x f_n(t)dt$ *равномерно на* $[a, b]$ *сходятся к* $\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$

Доказательство. 1. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем номер $n(\varepsilon)$ такой, что

$$\sup_{x\in E}\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon/3 \ \text{ при } \ n \geqslant n(\varepsilon). \tag{4.7}$$

Зафиксируем некоторый номер $n \geqslant n(\varepsilon)$. Функция $f_n(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому равномерно непрерывна на нем (теорема Кантора). Это означает, что для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такой, что

$$|f_n(x + \Delta x) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \ \text{ при } \ |\Delta x| < \delta, \ \ \forall\, x, x + \Delta x \in [a, b]. \tag{4.8}$$

Но тогда из (4.7), (4.8) получим:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leqslant |f(x + \Delta x) - f_n(x + \Delta x)| + |f_n(x + \Delta x) - f_n(x)| +$$

$$+ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

для всех $x, x + \Delta x \in [a, b]$, $|\Delta x| < \delta$, что и означает равномерную непрерывность $f(x)$ на $[a, b]$.

2. При доказательстве второго утверждения мы пишем всюду max вместо sup, поскольку все рассматриваемые функции непрерывны. Имеем:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi_n(x)-\varphi(x)| = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\Big|\int\limits_a^x (f_n(t)-f(t))dt\Big| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}\int\limits_a^x |f_n(t)-f(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant |b-a|\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f_n(t)-f(t)| \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

т.е. $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$. □

Следствие 4.6. *Пусть функции $u_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ равномерно на $[a,b]$ сходится к функции $S(x)$. Тогда*

1. *$S(x)$ непрерывна на $[a,b]$;*
2. *ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_i(t)dt$ равномерно на $[a,b]$ сходится к функции $\int\limits_a^x S(t)dt$.*

Доказательство. 1. Поскольку $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$ – непрерывные функции и $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$, то $S(x)$ непрерывна по первому свойству теоремы.

2. В силу второго свойства теоремы $\int\limits_a^x S_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x S(t)dt$, при этом $\int\limits_a^x S_n(t)dt = \sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_a^x u_i(t)dt$, т.е. совпадает с частичной суммой ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_i(t)dt$. □

Теорема 4.7. *Пусть функции $u_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, ряд из производных $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится по крайней мере в одной точке $x_0\in[a,b]$. Тогда*

1. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$*;*

2. если $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$*, то* $S'(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$*, т.е.* $\big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)\big)' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$ *(возможно почленное дифференцирование ряда).*

Доказательство. 1. Сумма равномерно сходящегося ряда $\phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i'(x)$ является непрерывной функцией на $[a,b]$ и этот ряд можно почленно интегрировать, поэтому

$$\int\limits_{x_0}^{x} \phi(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_i'(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i(x) - u_i(x_0)).$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i(x) - u_i(x_0))$ равномерно сходится на $[a,b]$, а числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$ сходится. Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i(x) - u_i(x_0)) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$.

2. Дифференцируя равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} \phi(t)dt = S(x) - S(x_0),$$

получим $\phi(x) = S'(x)$. □

§5 Степенны́е ряды

5.1 Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда

Определение 5.5. *Функциональный ряд вида* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$*, где* $c_k \in \mathbb{R}$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *– заданные числа, называетмя степенным рядом,* c_k *– коэффициенты ряда.*

Заменой $x - a$ на x любой степенной ряд приводится к виду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Теорема 5.8. *(Теорема Абеля)*

1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *сходится при* $x = x_0 \neq 0$*, то он сходится абсолютно при любом* x *таком, что* $|x| < |x_0|$ *и равномерно и абсолютно на любом отрезке* $[-q, q]$, $q < |x_0|$.

2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *расходится при* $x = x_1 \neq 0$*, то он расходится при* $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ следует, что его общий член $c_k x_0^k$ стремится к нулю, поэтому, в частности, последовательность $\{c_k x_0^k\}$ сходится, а значит, и ограничена: $|c_k x_0^k| \leqslant C$. Отсюда следует неравенство

$$|c_k x^k| \leqslant C \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \quad \forall x : |x| < |x_0| \tag{5.9}$$

Поскольку $|x| < |x_0|$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$ сходится, а по теореме сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$.

При $x \in [-q, q]$, $q < |x_0|$, из оценки (5.9) и признака Вейерштрасса (лемма 4.3) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ на отрезке $[-q, q]$.

2. Пусть ряд расходится при $x = x_1 \neq 0$. Если допустить, что он сходится при каком-то x_0, $|x_0| > |x_1|$, то по первому утверждению он должен сходиться и при $x = x_1$. Получено противоречие, доказывающее утверждение. □

Теорема 5.9. *(Радиус сходимости ряда) Для любого степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *существует число* $R \in [0, +\infty]$ *такое, что*

1. *Если* $R \in (0, +\infty)$, *то ряд сходится на интервале* $|x| < R$ *и расходится при* $|x| > R$.
2. *Если* $R = 0$, *то ряд сходится только в точке* $x = 0$.
3. *Если* $R = +\infty$, *то ряд сходится при всех* $x \in \mathbb{R}$.

Число R *называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал* $(-R, R)$ *при* $R > 0$ *– интервалом сходимости ряда.*

Доказательство. Обозначим через D множество точек сходимости ряда.

Если D не ограничено, то $D = \mathbb{R}$. Действительно, для любого $x \in \mathbb{R}$ найдётся $x_0 \in D$: $|x| < |x_0|$ и по теореме Абеля (теорема 5.8) ряд сходится в точке x.

Пусть теперь D - ограниченное множество, состоящее не из одной точки $x = 0$. Обозначим $R = \sup\limits_{x \in D} |x|$, $K_R = (-R, R)$, $\overline{K}_R = [-R, R]$. Для доказательства первого утверждения теоремы следует доказать, что $K_R \subset D \subset \overline{K}_R$. Пусть $x \in K_R$. По определению sup существует $x_0 \in D$: $|x| < |x_0|$, и из теоремы Абеля следует сходимость ряда в точке x. Пусть теперь $x \notin \overline{K}_R$, т.е. $|x| > R$. Тогда $x \notin D$ по определению R и sup. □

Теорема 5.10. *(Формулы вычисления радиуса сходимости R)*

Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *вычисляется по формуле Коши-Адамара:*

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$

Радиус сходимости можно вычислять также по формулам

$R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ *или* $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$

если существуют соответствующие пределы.

5.2 Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Лемма 5.5. *Степенные ряды* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ *имеют один и тот же радиус сходимости.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из равенств

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|c_{n-1}|}{n}} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|(n+1)} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

и формулы Коши-Адамара.

Докажем для примера одно из приведенных равенств. Именно, пусть $R = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ – конечное число. Докажем, что $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|(n+1)} = R$. Будем пользоваться следующим свойством пределов: если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} a_n$, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Из этого свойства следует равенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|(n+1)} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|}.$$

В свою очередь,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|c_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} (\sqrt[n]{|c_n|})^{n/(n-1)} = R.$$

□

Теорема 5.11. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k,\ x_0 - \textit{фиксированная точка}\, \mathbb{R}, \tag{5.10}$$

имеет радиус сходимости $R>0$ и $f(x)$ – его сумма. Тогда

1. *Ряд* (5.10) *можно почленно интегрировать на интервале $(x_0 - R, x_0+R)$:*
$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_k(t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}\ \ \forall x \in (x_0-R, x_0+R).$$

2. *Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема при $x \in (x_0-R, x_0+R)$ и ряд* (5.10) *можно почленно дифференцировать:*
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_k(x-x_0)^k\Big)^{(n)} &= c_n n! + c_{n+1}\,(n+1)n\cdots 2\,(x-x_0) + \\ &+ c_{n+2}\,(n+2)(n+1)\cdots 3\,(x-x_0)^2 + \cdots = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k\, k(k-1)\cdots(k-(n-1))\,(x-x_0)^{k-n} \end{aligned} \tag{5.11}$$
для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Возьмем $0 < q < R$. На отрезке $[x_0-q, x_0+q]$ ряды $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k(x-x_0)^{k-1}$ равномерно сходятся в силу теоремы Абеля и предыдущей леммы (R – радиус сходимости обоих рядов). Можно применить теорию функциональных рядов, из которой следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ можно почленно интегрировать и дифференцировать на отрезке $[x_0-q, x_0+q]$. Но в силу произвольности $0<q<R$ то же можно делать и на интервале (x_0-R, x_0+R).

Заменив в рассуждениях ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ рядом $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k(x-x_0)^{k-1}$ с тем же радиусом сходимости, доказываем возможность его почленного дифференцирования на интервале (x_0-R, x_0+R) и существование второй производной $f''(x)$.

Дальнейшее доказательство по индукции. $\square$

5.3 Ряды Тейлора

Определение 5.6. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и бесконечно дифференцируема в точке x_0. Тогда степенной ряд*

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 (или по степеням $x - x_0$).

Замечание 5.4.

1. *Если бесконечно дифференцируемая при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ функция $f(x)$ есть сумма степенного ряда:*

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

   то $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$, т.е. степенной ряд является рядом Тейлора для суммы этого степенного ряда $f(x)$.

   Доказательство. Достаточно воспользоваться равенством (5.11) при $x = x_0$. □

2. *Если $f(x)$ бесконечно дифференцируемая при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, то не обязательно ее ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ сходится к $f(x)$ при $x \neq x_0$.*

   Примером является функция

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

   у которой все производные в точке 0 равны нулю, так что её ряд Тейлора по степеням x – тождественный ноль.

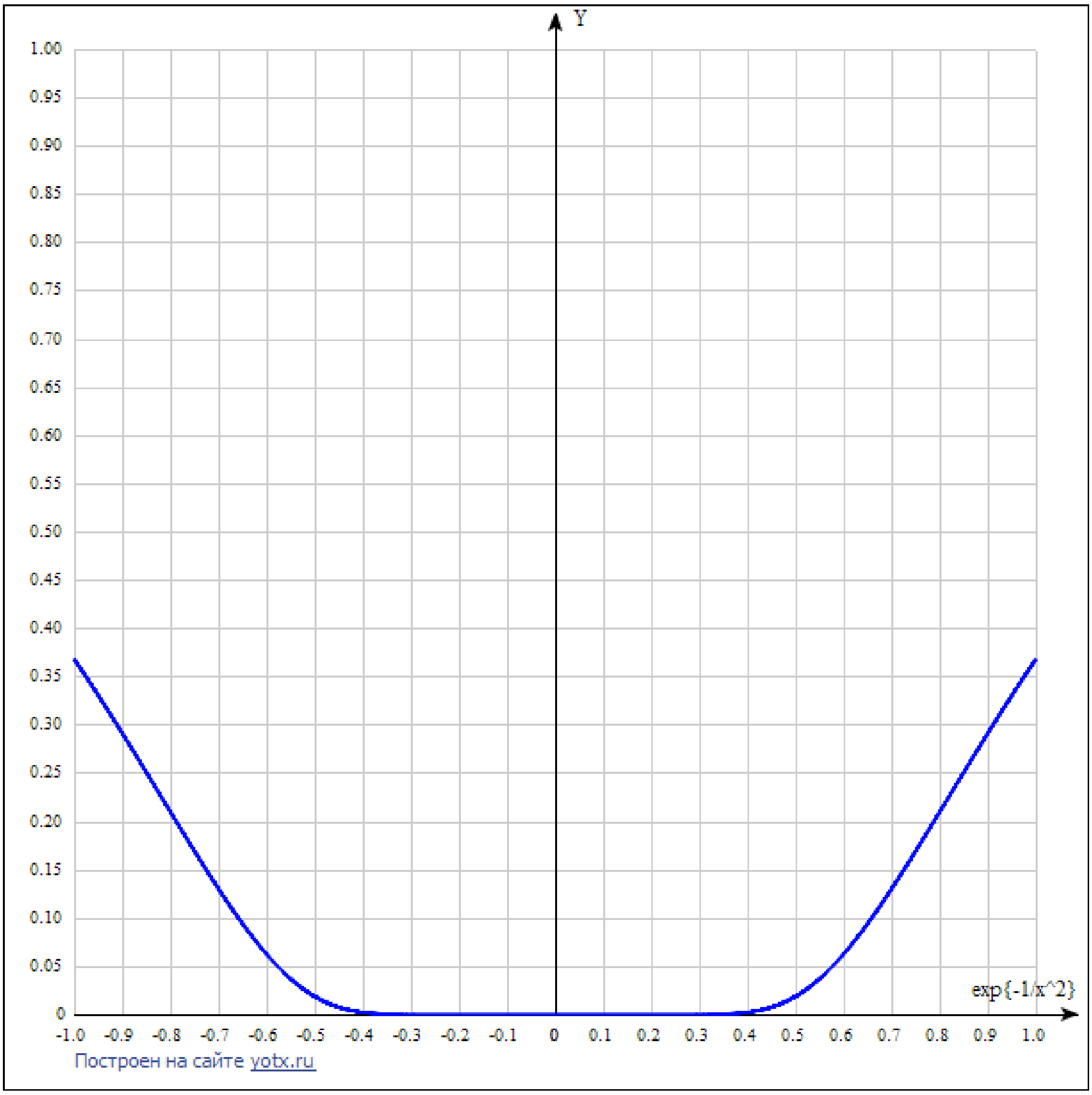


Рис. 1: График функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$ (доопределенной нулем при $x = 0$)

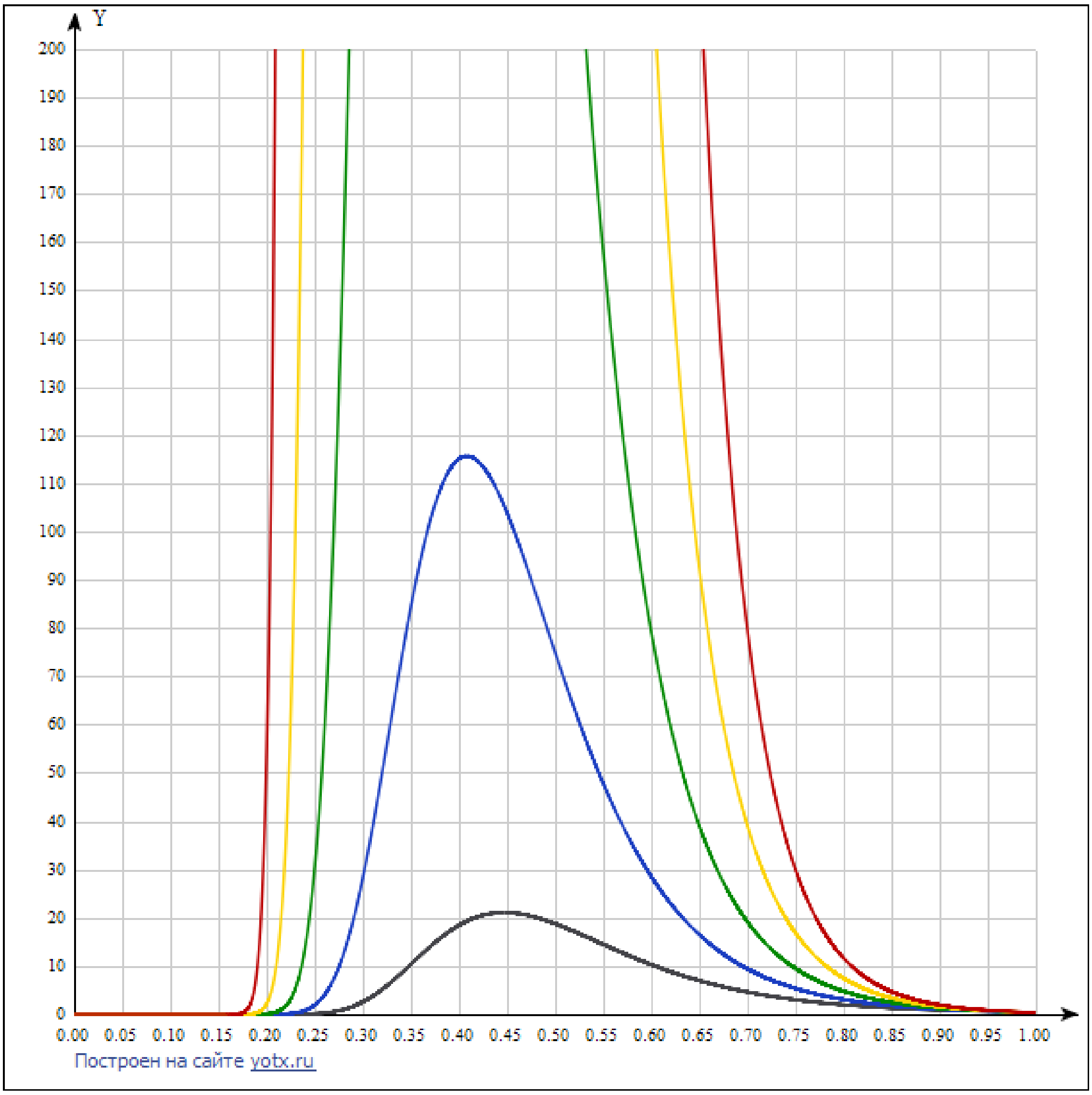


Рис. 2: Графики функций $e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-10}$ (черный), $e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-12}$ (синий),$e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-14}$ (зеленыё),$e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-16}$ (желтый),$e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-18}$ (красный),

Доказательство. Докажем сформулированное утверждение о том, что производные $f^{(n)}(0) = 0$ для всех n. Прежде всего, вычислим производные при $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \big(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\big)e^{-\frac{1}{x^2}}, \dots, f^{(n)}(x) = P_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где использовано обозначение $P_m(t)$ для алгебраического многочлена степени m.

Далее мы будем пользоваться известным пределом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^m}{e^{t^2}} = 0 \quad \forall m. \tag{5.12}$$

Используя (5.12), получаем

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

Теперь

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = 0.$$

Далее по индукции доказываем, что $f^{(n)}(0) = 0$ для всех n, используя равенство $f^{(n-1)}(0) = 0$ и (5.12). $\square$

Получим одно достаточное условие, при котором ряд Тейлора

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

построенный по функции $f(x)$, сходится к этой функции.

Лемма 5.6. *(достаточное условие сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$)*

Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ и существуют постоянные M и C такие, что

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant MC^k \text{ для всех } k = 0, 1, \dots \text{ и всех } x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \text{ при всех } x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Доказательство. Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

– частичная сумма, тогда $r_n(x) = f(x) - S_n(x)$ – это остаточный член формулы Тейлора, для которого известно выражение

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \ \ \xi \in (x_0, x).$$

В условиях леммы для любого $|x - x_0| < R$ справедлива оценка

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M(CR)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но известно, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \ \ \forall a,$$

откуда следует $r_n(x) \to 0$. □

Разложение в ряд Маклорена (ряд Тейлора по степеням x) некоторых функций

Далее при определении области сходимости рядов будем пользоваться леммой 5.6.

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$

   Поскольку для любого фиксированного числа $r > 0$ справедлива оценка $|f^{(k)}(x)| = e^x \leqslant e^r$, $\forall x \in (-r, r)$, $\forall k$, то применяя лемму 5.6 с параметрами $C = 1$, $M = e^r$, устанавливаем сходимость ряда к e^x при $x \in (-r, r)$. В силу произвольности r ряд Маклорена для функции e^x сходится к ней при всех $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$

   $|f^{(k)}(x)| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k$, поэтому ряд сходится к $\sin x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$

   $|f^{(k)}(x)| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k$, поэтому ряд сходится к $\cos x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad (\forall x \in (-1, 1]).$

   Пусть $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ - n-ая частичная сумма ряда. Используя формулу остатка в форме Лагранжа, получим:

   $$r_n(x) = f(x) - S_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(1+n)}, \quad \theta \in (0, 1).$$

   При $x \in [0, 1]$ справедлива оценка $r_n(x) < \frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому ряд сходится к функции $\ln(1+x)$ при $x \in [0, 1]$. По теореме Абеля ряд сходится при всех $x \in (-1, 1)$, однако из этой теоремы не следует, что сумма ряда равна $\ln(1+x)$ при $x \in (-1, 0)$. Для доказательства этого утверждения снова оценим остаток $r_n(x)$, представляя его теперь в форме Коши:

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0, 1).$$

При $x \in (-1, 0)$ справедливо неравенство $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, поэтому

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Итак, разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена справедливо при $x \in (-1, 1]$.

5. Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ разложение функции $(1+x)^\alpha$ по степеням x имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$$

где $C_\alpha^0 = 1$, $C_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ при $k \geqslant 1$.

Это равенство справедливо при $x \in (-1, 1)$ (без доказательства).

§6 Функции многих переменных

6.1 Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 6.1. $\mathbb{R}^n$ – *это линейное пространство n-мерных вещественных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со скалярным произведением и нормой, определенными равенствами:*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|x\| = (x, x)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{1/2}.$$

В дальнейшем часто используются неравенство треугольника для норм

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, (x, y) \leqslant \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

и неравенство Коши

$$(x, y) \leqslant \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

Для доказательства неравенства Коши рассмотрим квадратичную функцию от t:

$$\|x + t\,y\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x, y) + t^2\|y\|^2.$$

Так как она неотрицательна при всех t, то ее дискриминант неположителен, т.е. $(x, y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$, что и требовалось. Используя теперь неравенство Коши, получим:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,$$

откуда следует неравенство треугольника.

6.2 Последовательности в $\mathbb{R}^n$

Определение 6.2.

1. *Последовательность $\{x^m\} \equiv \{x^m\}_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$, $x^m = (x_1^m, x_2^m, \ldots x_n^m)$, ограничена, если существует постоянная C, такая что $\|x^m\| \leqslant C$ $\forall m$.*

2. *Последовательность $\{x^m\}$ сходится к $x \in \mathbb{R}^n$ (сходится по норме), если $\|x^m - x\| \to 0$ при $m \to \infty$.*

   В дальнейшем используем обозначение $x^m \to x$ для сходящейся к x последовательности $\{x^m\}$.

Поскольку $\|x^m - x\|$ – числовая последовательность, то $\|x^m - x\| \to 0$ при $m \to \infty$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m(\varepsilon): \; \|x^m - x\| < \varepsilon \;\text{ при } m \geqslant m(\varepsilon).$$

Лемма 6.1.

1. *Предел у сходящейся последовательности единственный.*

2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Сформулированные утверждения доказываются так же, как и для числовых последовательностей.

1. Допустим, что существуют два разных предела у последовательности:

$$x^m \to x, \; x^m \to y, \quad \alpha = \|x - y\| > 0.$$

Возьмем $0 < \varepsilon < \alpha/2$ и найдем номер $m(\varepsilon)$ такой, что $\|x^m - x\| < \varepsilon$, $\|x^m - y\| < \varepsilon$ при $m > m(\varepsilon)$. Тогда взяв $m > m(\varepsilon)$, получим $\|x - y\| \leqslant \|x - x^m\| + \|x^m - y\| < 2\varepsilon < \alpha = \|x - y\|$. Получено противоречие.

2. Возьмем $\varepsilon = 1$ и найдем номер m_1 такой, что $\|x^m - x\| < 1$ при $m > m_1$, откуда $\|x^m\| \leqslant \|x\| + \|x^m - x\| < \|x\| + 1$ при $m > m_1$. Тогда

$$\|x^m\| \leqslant M = \max\{\|x^1\|, \|x^2\|, \ldots, \|x^{m_1}\|, \|x\| + 1\}.$$

$\square$

Лемма 6.2. *Сходимость $\{x^m\}$ к x по норме равносильна по-координатной сходимости:*

$$\|x^m - x\| \to 0 \textit{ при } m \to \infty \;\Leftrightarrow\; |x_i^m - x_i| \to 0 \textit{ при } m \to \infty \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Справедливость утверждения следует из эквивалентности норм (максимум-нормы и евклидовой нормы в данном случае) в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \tag{6.2}$$

$\square$

Определение 6.3. *Последовательность $\{x^m\}$ фундаментальна (последовательность Коши), если выполнено следующее условие Коши:*

$$\begin{gathered}\|x^m - x^k\| \to 0 \text{ при } m, k \to \infty, \\ \left(\text{эквивалентно: } \forall \varepsilon > 0 \; \exists m(\varepsilon) : \; \|x^m - x^k\| < \varepsilon \text{ при } m, k > m(\varepsilon)\right).\end{gathered} \tag{6.3}$$

Лемма 6.3. *Для сходимости последовательности $\{x^m\}$ к некоторому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна, т.е. чтобы выполнялось условие Коши* (6.3).

Доказательство. Необходимость. Если $\|x^m - x\| \to 0$ при $m \to \infty$, то $\|x^m - x^k\| \leqslant \|x^m - x\| + \|x^k - x\| \to 0$ при $m, k \to \infty$.

Достаточность. Пусть теперь $\|x^m - x^k\| \to 0$ при $m, k \to \infty$. Тогда в силу левого неравенства в (6.2) числовые последовательности $\{x_i^m\}$ фундаментальны для всех $i = 1, 2, \dots, n$. В силу критерия Коши для числовых последовательностей все они имеют конечные пределы:

$$\forall i = 1, 2, \dots, m \;\; \exists x_i : \;\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists m_i(\varepsilon) : \; |x_i^m - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \text{ при } m > m_i(\varepsilon).$$

Используя теперь правое неравенство в (6.2), получим

$$\|x^m - x\| \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^m - x_i| < \varepsilon \text{ при } m > m(\varepsilon) = \max_i m_i(\varepsilon).$$

□

Определение 6.4. *Если $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность в $\mathbb{R}^n$ и $1 \leqslant m_1 < m_2 < \dots < m_k < \cdots$, то $\{x^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – подпоследовательность последовательности $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$.*

Теорема 6.1. *(теорема Больцано-Вейерштрасса)*

Из любой ограниченной последовательности $\{x^m\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. При доказательстве воспользуемся эквивалентностью норм (неравенство (6.2)), теоремой Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей и тем фактом, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности имеет тот же самый предел.

В силу (6.2) все последовательности $\{x_i^m\}, i = 1, 2, \dots, m$, ограничены. По теореме Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей из $\{x_1^m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{m_k}\}$. Теперь из последовательности $\{x_2^{m_k}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для сокращения записи оставим за этой подпоследовательностью обозначение $\{x_2^{m_k}\}$. Продолжим процесс выделения сходящихся подпоследовательностей для всех координат. В результате построим подпоследовательность индексов $1 \leqslant m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$, для которых сходятся все $\{x_i^{m_k}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Осталось воспользоваться правым неравенством в (6.2), чтобы получить сходимость $\{x^{m_k}\}$ в евклидовой норме $\|.\|$. □

6.3 Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$

Определение 6.5.

1. *$S_\varepsilon(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ – открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0.*

2. *x_0 – внутренняя точка множества $M \subset \mathbb{R}^n$, если $\exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x_0) \subset M$;*

3. *$\operatorname{int} M$ – множество внутренних точек у множества M.*

4. *Множество M открыто, если все его точки – внутренние, т.е. $\operatorname{int} M = M$.*

5. *Множество M замкнуто, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ открыто.*

6. *x_0 – предельная точка множества M, если $M \cap S_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Теорема 6.2. *(Эквивалентное определение замкнутости)*
Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Пусть M замкнуто, т.е. $\mathbb{R}^n \setminus M$ открыто. Допустим, что существует предельная точка x_0, не принадлежащая множеству M. Тогда она принадлежит открытому множеству $\mathbb{R}^n \setminus M$ вместе с некоторой окрестностью: $S_\varepsilon(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$. Но это противоречит определению предельной точки.

Предположим теперь, что M содержит все свои предельные точки и докажем, что $\mathbb{R}^n \setminus M$ открыто. Если это не так, то существует точка

$x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$, в любой окрестности которой есть точки не из $\mathbb{R}^n \setminus M$, т.е. из M. Но тогда x_0 по определению – это предельная точка множества M и она должна принадлежать M. Получено противоречие. $\square$

Свойства открытых и замкнутых множеств

1. Пустое множество $\emptyset$ и все пространство $\mathbb{R}^n$ являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

   Доказательство. Каждая точка пространства $\mathbb{R}^n$ – внутренняя, поэтому $\mathbb{R}^n$ открыто. Одновременно, каждая точка $\mathbb{R}^n$ – предельная и принадлежит $\mathbb{R}^n$, поэтому $\mathbb{R}^n$ замкнуто.

   Пустое множество $\emptyset$ является дополнением к $\mathbb{R}^n$, поэтому оно также открыто и замкнуто. $\square$

2. Объединение любого числа открытых множеств открыто. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

   Доказательство. Пусть $M = \bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha$, где индекс α принадлежит множеству любой мощности, а каждое множество M_α – открытое. Если $x \in M$, то $x \in M_\alpha$ по крайней мере для одного M_α, поэтому существует окрестность $S_\varepsilon(x) \subset M_\alpha$ и, как следствие, $S_\varepsilon(x) \subset M$. Это означает, что любая точка $x \in M$ является внутренней, так что M – открытое множество.

   Из отношения двойственности

   $$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\alpha} M_\alpha = \bigcap_{\alpha} (\mathbb{R}^n \setminus M_\alpha) \tag{6.4}$$

   следует замкнутость пересечения любого числа замкнутых множеств.

   $\square$

3. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство. Пусть $M = \bigcap_{i=1}^{p} M_i$, где каждое множество M_i – открытое. Если $x \in M$, то $x \in M_i$ для всех M_i, поэтому существуют окрестности $S_{\varepsilon_i}(x) \subset M_i$. Пусть $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \varepsilon_i$, тогда $S_\varepsilon(x) \subset M_i \ \forall i \Rightarrow S_\varepsilon(x) \subset M$. Это означает, что любая точка $x \in M$ является внутренней, так что M – открытое множество.

Из отношения двойственности (6.4) следует замкнутость объединения конечного числа замкнутых множеств. □

Определение 6.6. *M – компактное множество (компакт), если из любой последовательности $\{x^m\} \subset M$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$ и предел $x = \lim x^{m_k}$ принадлежит M.*

Теорема 6.3. *(Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$)*

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

*Доказательство. Необходимость.*Пусть M – компактное множество, докажем, что оно ограничено и замкнуто.

Допустим, что M не ограничено. Построим последовательность $\{x^m\} \in M$ по следующему правилу.

Возьмем произвольную точку $x^1 \in M$. Точку $x^2 \in M$ возьмем вне шара $S_1 = \{x : \|x - x^1\| < 1\}$, точку $x^3 \in M$ – вне шаров S_1 и $S_2 = \{x : \|x - x^2\| < 1\}$ и т.д. Этот процесс бесконечный. Действительно, если на некотором шаге N не удается найти $x \in M$, $x \notin \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} S_i$, то множество $M \in \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} S_i$, поэтому ограничено.

Итак, в предположении неограниченности M можно построить последовательность $\{x^m\} \in M$, такую что $\|x^m - x^k\| \geqslant 1$ для всех $m \neq k$. Но из нее нельзя извлечь никакую сходящуюся подпоследовательность, а это противоречит компактности M.

Допустим теперь, что M не замкнуто. Это значит, что у него есть предельная точка $a \notin M$. Но по определению предельной точки найдется последовательность $\{x^m\} \in M$,сходящаяся к a. Любая ее подпоследовательность сходится к a, не принадлежащей M, что противоречит компактности M.

Достаточность. Пусть M – ограничено и замкнуто. По теореме Больцано-Вейерштрасса 6.1 из любой последовательности $\{x^m\} \subset M$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$. Поскольку M замкнуто, то ее предел $x = \lim x^{m_k}$ принадлежит M. $\square$

6.4 Предел и непрерывность функции в точке

Любое открытое множество $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n$, содержащее точку a, будем называть окрестностью точки a. Если $U(a)$ окрестность точки a, то открытое множество $\check{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$ – это проколотая окрестность точки a. В частности $\check{S}_\delta(a)$ проколотая шаровая окрестность a.

Далее $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функция n переменных со значениями в $\mathbb{R}$.

Определение 6.7. *(***Два эквивалентных определения предела***)*
Пусть $f(x)$ задана в $\check{U}(a)$.

1. *(по Коши) Число $A \in \mathbb{R}$ – предел функции $f(x)$ в точке a ($A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$), если*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U(a) \cap \check{S}_\delta(a)\ (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

2. *(по Гейне) Число $A \in \mathbb{R}$ – предел функции $f(x)$ в точке a, если*
$$\forall \{x^m\} \in \check{U}(a) :\ x^m \to a\ (f(x^m) \to A).$$

Доказательство эквивалентности двух приведенных определения предела практически дословно совпадают с доказательством в случае числовых последовательностей, поэтому оно не приведено.

Определение 6.8. *(Предел по множеству)*
Пусть $f(x)$ задана на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ и a – предельная точка M.

Число $A \in \mathbb{R}$ – предел функции $f(x)$ в точке a по множеству M ($A = \lim\limits_{x \to a, x \in M} f(x)$), если
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in M \cap \check{S}_\delta(a)\ (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение 6.9. *(Предел по направлению)*

Пусть $\mathbf{l}, \|\mathbf{l}\| = 1,$ *– фиксированный вектор единичной длины, задающий направление, и функция* $f(x)$ *задана на интервале* $(a, a + t\mathbf{l}), 0 < t < \delta$.

Число $A \in \mathbb{R}$ *– предел функции* $f(x)$ *в точке* a *по направлению* $\mathbf{l}$*, если существует предел*

$$\lim_{t \to +0} f(a + t\mathbf{l}) = A.$$

Замечание 6.1. *Из существования предела* $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *следует существование предела функции* $f(x)$ *по любому направлению и его равенство числу* A*. С другой стороны, из существования и равенства пределов у* $f(x)$ *по всем направлениям в общем случае не следует существование предела (см. пример ниже).*

Пример 6.1. *Функция двух переменных*

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$$

имеет в точке $a = (0, 0)$ *предел по любому направлению, равный* 0*, но не имеет предела.*

Для доказательства первого утверждения достаточно взять единичный вектор $\mathbf{l}$ *в виде* $\mathbf{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ *и убедиться, что для любого* α *предел* $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ *при* $t \to 0$ *равен нулю.*

Для доказательства второго утверждения можно взять последовательность $\{(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})\}$*, сходящуюся к* $(0, 0)$*, для которой* $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}) = 1$.

Определение 6.10. *(***Непрерывность***)*

1. *Пусть* $f(x)$ *задана в* $U(a)$*. Она называется непрерывной в точке* a*, если* $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in U(a) \cap S_\delta(a) \; (|f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

2. *Пусть* $f(x)$ *задана на множестве* $M \subset \mathbb{R}^n$ *и* a *– предельная точка* M*. Она называется непрерывной в точке* a *по множеству* M*, если* $\exists \lim\limits_{x \to a, x \in M} f(x) = f(a)$*, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in M \cap S_\delta(a) \; (|f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда линейная комбинация $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ – также непрерывная в точке a функция.

2. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$. Тогда найдется окрестность $U(a)$, в которой $f(x) > 0$. Действительно, возьмем, например, $\varepsilon = f(a)/2$ и, пользуясь непрерывностью функции в точке a, найдем $\delta > 0$ такое, что при $x \in U_\delta(a) = \{\|x - a\| < \delta\}$ справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Тогда для $x \in U_\delta(a)$

$$f(x) > f(a) - \varepsilon = f(a)/2 > 0.$$

(Ясно, что если $f(a) < 0$, то $f(x) < 0$ в некоторой окрестности точки a).

3. Пусть функции $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ непрерывны в точке $x^* \in \mathbb{R}^m$, а функция $f(y) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывна в точке $y^* = (g_1(x^*), g_2(x^*), \ldots, g_n(x^*))$. Тогда сложная функция $\Phi(x) = f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))$ непрерывна в точке x^*.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f существует $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(y) - f(y^*)| < \varepsilon \text{ при } \|y - y^*\| < \eta.$$

Воспользовавшись непрерывностью g_i, по η найдем $\delta = \delta(\eta) = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|g_i(x) - g_i(x^*)| < \frac{\eta}{\sqrt{n}} \text{ при } \|x - x^*\| < \delta, \quad \forall i.$$

Тогда $\|g(x) - g(x^*)\| < \eta$, поэтому

$$|f(g(x)) - f(g(x^*))| < \varepsilon \text{ при } \|x - x^*\| < \delta.$$

$\square$

6.5 Свойства функций, непрерывных на множестве

Определение 6.11. *Пусть $f(x)$ задана на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$. $f(x)$ называется непрерывной на M, если она непрерывна в каждой точке $a \in M$ по множеству M, т.е.*

$$\forall a \in M \;\; \exists \lim_{x \to a, x \in M} f(x) = f(a).$$

Теорема 6.4. *(теоремы Вейерштрасса) Пусть M –компакт в $\mathbb{R}^n$ и функция $f(x)$ непрерывна на M. Тогда*

1. *$f(x)$ ограничена на M.*
2. *$f(x)$ достигает на M своих максимального $\max\limits_{x \in M} f(x)$ и минимального $\min\limits_{x \in M} f(x)$ значений:*

$$\exists \xi \in M: \; f(\xi) = \max_{x \in M} f(x), \;\; \exists \eta \in M: \; f(\eta) = \min_{x \in M} f(x).$$

Доказательство. 1. Допустим, что f не ограничена на M. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $x^k \in M$ такое, что $|f(x^k)| > k$. Последовательность $\{x^k\}$ ограничена, поэтому согласно теореме Больцано-Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_j}\} : x^{k_j} \to \xi$, причем $\xi \in M$ в силу замкнутости M. Так как f непрерывна на M, то $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x^{k_j}) = f(\xi)$. С другой стороны, $|f(x^{k_j})| > k_j$, т. е. последовательность $\{f(x^{k_j})\}$ не может иметь конечного предела. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2. Согласно первому утверждению непрерывная на M функция ограничена, поэтому имеет конечные верхнюю $\sup\limits_{x \in M} f(x) = \sup$ и нижнюю $\inf\limits_{x \in M} f(x) = \inf$ грани. В силу определения супремума для любых $k \in \mathbb{N}$ существует $x^k \in M$ такое, что

$$\sup - \frac{1}{k} < f(x^k) \leq \sup. \tag{6.5}$$

Из ограниченной последовательности $\{x^k\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность: $x^{k_j} \to \xi \in M$. Так как $f(x)$ непрерывна на M, то $\lim\limits_{j \to +\infty} f(x^{k_j}) = f(\xi)$. А из (6.5) следует $\sup - \dfrac{1}{k_j} < f(x^{k_j}) \leq \sup$, поэтому

$\lim\limits_{j\to\infty} f(x^{k_j}) = \sup$. Но $f(x^{k_j})$ может сходиться только к одному пределу, поэтому $\sup = f(\xi)$. Аналогично доказывается утверждения для минимума. $\square$

Определение 6.12. *Пусть $f(x)$ задана на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$. $f(x)$ называется равномерно непрерывной на M, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) :\ \forall x, y \in M,\ \|x - y\| < \delta(|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Теорема 6.5. *(теорема Кантора) Пусть M –компакт в $\mathbb{R}^n$ и функция $f(x)$ непрерывна на M. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на M,*

Доказательство. Предположим противное, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in M :\ (\|x - y\| < \delta, \text{ но } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Будем брать $\delta = 1/k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда существуют пары точек $x^k, y^k \in M$ такие, что

$$\|x^k - y^k\| < \frac{1}{k}, \text{ но } |f(x^k) - f(y^k)| \geq \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{6.6}$$

Последовательность $\{x^k\}$ – ограниченная, поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_j}\} : x^{k_j} \to x^*,\ x^* \in M$. Заметим, что $y^{k_j} \to x^*$, так как

$$\|y^{k_j} - x^*\| \leqslant \|y^{k_j} - x^{k_j}\| + \|x^{k_j} - x^*\| < \frac{1}{k_j} + \|x^{k_j} - x^*\| \to 0\ \ k_j \to \infty.$$

Функция f непрерывна в точке $x^* \in M$, поэтому $f(x^{k_j}) - f(y^{k_j}) \to f(x^*) - f(x^*) = 0$, что противоречит (6.6). $\square$

Определение 6.13.

1. *Пусть $\varphi_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывные при $t \in [\alpha, \beta]$ функции. Множество $L = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_i = \varphi_i(t), t \in [\alpha, \beta], i = 1, 2, \ldots, n\}$ называется непрерывной кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$ с концами $(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha))$ и $(\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$.*

2. *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой L, лежащей в $M : L \subset M$.*

Теорема 6.6. *(Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на линейно связном множестве M и принимает значения $A = f(a)$ и $B = f(b)$ в точках $a, b \in M$. Тогда $f(x)$ принимает в точках M все промежуточные значения между A и B (ниже для определенности считаем, что $A < B$):*

$$\forall C \in (A, B)\ \exists \xi \in M:\ f(\xi) = C.$$

Доказательство. Соединим точки a и b непрерывной кривой $L \subset M$. Функция $\Phi(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. По теореме Больцано-Коши для функций одного переменного $\Phi(t)$ принимает все значения между A и B, поэтому для $C \in (A, B)$ найдется точка $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$ такая, что $\Phi(\tau_0) = C$. Но тогда в точке $\xi = (\varphi_1(\tau_0), \varphi_2(\tau_0), \ldots, \varphi_n(\tau_0))$ на кривой L, лежащей в M, $f(\xi) = \Phi(\tau_0) = C$. □

6.6 Частные производные и дифференцируемость. Первый дифференциал

Определение 6.14. *Пусть функция $f(x)$ задана в окрестности $U(a)$ точки a.*

1. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\Delta x_1},$$

то он называется частной производной $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_1}$ по x_1 от функции $f(x)$ в точке a. Аналогично определяются частные производные $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ по x_i для любого i.

2. *Если справедливо равенство*

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(\|\Delta x\|) \text{ при } \Delta x \to 0 \quad (6.7)$$

с постоянными A_i, не зависящими от $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке a.

Связь между дифференцируемостью, непрерывностью и существованием всех частных производных

1. Из дифференцируемости $f(x)$ в точке a следует ее непрерывность в точке a. Это утверждение следует из (6.7).

2. Из дифференцируемости $f(x)$ в точке a следует существование всех производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ в точке a.

   Действительно, пусть выполнено (6.7). Тогда выбирая приращение $\Delta x = (\Delta x_1, 0, \dots, 0)$, получим

   $$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\Delta x_1} = A_1 + \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{o(\Delta x_1)}{\Delta x_1} = A_1$$

   и аналогично для всех остальных i: $\exists \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = A_i$.

   Пример 6.2. *Положим*

   $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}, \quad a = (0, 0).$$

   Легко видеть, что функция $f(x)$ тождественно равна нулю вдоль координатных осей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, поэтому существуют частные производные $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$. Но в точке $(0, 0)$ функция разрывна. Для доказательства достаточно взять последовательность точек $\{(1/m, 1/m)\}$, которая стремится к $(0, 0)$ и при этом $f(1/m, 1/m) = 1\ \forall m$.

   Следствие 6.1. *Приведенный пример показывает, что существование и равенство всех частных производных* $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ **не гарантирует даже непрерывности** *функции $f(x)$ в точке a.*

3. Из существования всех производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$, **непрерывных** в точке a, следует дифференцируемость $f(x)$ в точке a.

Доказательство. Для простоты рассмотрим двумерный случай. Пусть производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2$, определены в окрестности $U(a)$ точки a и непрерывны в точке a. Возьмем достаточно малое приращение Δx, такое что $a + \Delta x \in U(a)$. Используя формулу Лагранжа для функций одного переменного, получим:

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$= f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2) - f(a_1, a_2+\Delta x_2) + f(a_1, a_2+\Delta x_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$= \frac{\partial f(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2 =$$

$$= \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \epsilon(\Delta x),\ \theta_1, \theta_2 \in (0, 1),$$

где $\epsilon(\Delta x) = (s, \Delta x)$, $s = (s_1, s_2)$ и

$$s_1 = \frac{\partial f(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, s_2 = \frac{\partial f(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}.$$

В силу непрерывности производных в точке a имеем $s_i \to 0$ при $\|\Delta x\| \to 0$, поэтому $\|s\| \to 0$. Так как

$$|\epsilon(\Delta x)| \leqslant \|s\| \|\Delta x\|,$$

то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\epsilon(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0$. Это означает, что $\epsilon(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$, т.е. справедливо равенство (6.7), определяющее дифференцируемость функции f в точке a. $\square$

Суммируем доказанные выше результаты в следующей схеме:

$$\boxed{\text{Существуют все производные } \frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n, \textbf{ непрерывные} \text{ в точке } a}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x) \text{ дифференцируема в точке } a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x) \text{ непрерывна в точке } a}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Существуют все производные } \frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n \text{ в точке } a}$$

Из приведенной схемы, в частности, следует, что если функция f дифференцируема в точке a, то

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\Delta x_i + o(\|\Delta x\|) \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{6.8}$$

Главная линейная часть этого равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\Delta x_i$ называется первым дифференциалом (дифференциалом первого порядка) функции f в точке a и обозначается $df(a)$. Определение (6.8), примененное к функции $f(x) = x_i$ дает равенство $dx_i = \Delta x_i$, поэтому первый дифференциал можно записать в виде

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

Лемма 6.4. *(Дифференцируемость сложной функции)*

Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}^m$, а функция $f(y) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ дифференцируема в точке $b = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \ldots, \varphi_n(a))$.

Тогда сложная функция $\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ дифференцируема в точке a и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.9}$$

Доказательство. В силу дифференцируемости f в точке b получим:

$$f(b + \Delta y) - f(b) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\Delta y_j + \delta(\Delta y), \ \delta(\Delta y) = o(\|\Delta y\|) \text{ при } \Delta y \to 0. \tag{6.10}$$

Для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ из дифференцируемости φ_j в точке a следует:

$$\varphi_j(a+\Delta x)-\varphi_j(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a)\Delta x_i+\epsilon_j(\Delta x),\ \epsilon_j(\Delta x) = o(\|\Delta x\|) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Возьмем $\Delta y_j = \varphi_j(a+\Delta x)-\varphi_j(a)$ в равенстве (6.10). Тогда в силу предыдущего равенства

$$f(b+\Delta y)-f(b) = \Phi(a+\Delta x)-\Phi(a) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\big(\varphi_j(a+\Delta x)-\varphi_j(a)\big)+$$

$$+\,\delta(\Delta y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a)\Delta x_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\epsilon_j(\Delta x) + \delta(\Delta y). \quad (6.11)$$

Из (6.11) будет следовать дифференцируемость Φ в точке a и равенства (6.9), если доказать, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\epsilon_j(\Delta x) + \delta(\Delta y) = o(\|\Delta x\|) \text{ при } \Delta x \to 0. \quad (6.12)$$

Применив неравенство Коши (6.1), получим:

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\epsilon_j(\Delta x)\Big| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\Big)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j^2(\Delta x)\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\,\|\epsilon(\Delta x)\| = o(\|\Delta x\|) \text{ при } \Delta x \to 0. \quad (6.13)$$

Далее, из дифференцируемости $\varphi_j(x)$ следует:

$$\big|\Delta y_j\big| = \big|\varphi_j(a+\Delta x) - \varphi_j(a)\big| \leqslant c_j\|\Delta x\|,\ \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

при достаточно малых $\|\Delta x\|$, поэтому $\dfrac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} \leqslant c = \mathrm{const}$. Ясно, также, что $\|\Delta y\| \to 0$ при $\|\Delta x\| \to 0$. Поскольку $\delta(\Delta y) = o(\|\Delta y\|)$ при $\Delta y \to 0$, то

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \frac{\delta(\|\Delta y\|)}{\|\Delta x\|} = \lim_{\|\Delta y\|\to 0} \frac{\delta(\|\Delta y\|)}{\|\Delta y\|} \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|} = 0,$$

что означает

$$\delta(\|\Delta y\|) = o(\|\Delta x\|) \text{ при } \Delta x \to 0. \quad (6.14)$$

Из (6.13) и (6.14) следует (6.12). □

Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ дифференцируемы в точке $a \in \mathbb{R}^m$, а функция $f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ дифференцируема в точке $b = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \dots, \varphi_n(a))$. Тогда согласно равенствам (6.9) первый дифференциал сложной функции $\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ имеет вид

$$d\Phi(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a)dx_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a)dx_i.$$

Так как дифференциал функции $y_j = \varphi_j(x)$ в точке a определен равенством $dy_j(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a)dx_i$, то

$$df(\varphi_1(a), \varphi_2(a), \dots, \varphi_n(a)) = df(b) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)dy_j.$$

Это означает, что форма записи первого дифференциала одинакова как для независимых переменных y_j, так и для функций $y_j(x)$. Это свойство инвариантности формы первого дифференциала относительно замены переменных.

Производная по направлению. Градиент. Формула конечных приращений

Определение 6.15. *Пусть функция $f(x)$ задана в окрестности $U(a)$ точки a и $\mathbf{l}, \|\mathbf{l}\| = 1,$ – фиксированный вектор единичной длины, задающий направление.*

1. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(a + t\mathbf{l}) - f(a)}{t},$$

то он называется производной $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \mathbf{l}}$ по направлению $\mathbf{l}$ от функции $f(x)$ в точке a.

2. *Если функция $f(x)$ имеет все частные производные в точке a, то вектор*
$$\mathrm{grad} f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$
называется градиентом f в точке a.

Лемма 6.5. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, то у нее существуют производные $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \mathbf{l}}$ по любому направлению $\mathbf{l}$ и*

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \mathbf{l}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} l_i = (\mathrm{grad} f(a), \mathbf{l}).$$

Доказательство. Сложная функция $\phi(t) = f(a + t\mathbf{l})$ дифференцируема при $t = 0$, поэтому

$$\phi(t) - \phi(0) = \phi'(0) + o(t), \quad t \to 0.$$

Применив формулу дифференцирования сложной функции, получим:

$$\phi'(t) = \frac{df(a + t\mathbf{l})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a + t\mathbf{l})}{\partial x_i} \frac{d(a_i + tl_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a + t\mathbf{l})}{\partial x_i} l_i \quad \forall t.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует:

$$\phi(t) - \phi(0) = f(a + t\mathbf{l}) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} l_i t + o(t), \quad t \to 0.$$

В итоге
$$\frac{\partial f(a)}{\partial \mathbf{l}} = \lim_{t \to +0} \frac{f(a + t\mathbf{l}) - f(a)}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} l_i.$$

□

Определение 6.16. 1. *Множество M выпукло, если вместе с двумя любыми точками $x \in M$ и $y \in M$ оно содержит соединяющий их отрезок $x + \theta(y - x)$, $\theta \in [0, 1]$,*

2. *Открытое и линейно связное множество (см. определение 6.13) называется областью.*

Лемма 6.6. *(Формула конечных приращений) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в выпуклой области G. Тогда для любых двух точек $x, y \in G$ найдется точка $\xi = x + \theta(y - x)$, $\theta \in (0,1)$, на отрезке, соединяющем x и y, такая, что*

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)(y_i - x_i) \equiv (\mathrm{grad} f(\xi), y - x). \tag{6.15}$$

Доказательство. В силу выпуклости G отрезок $[x + t(y - x)], 0 \leqslant t \leqslant 1$, входит в G. Функция $\Phi(t) = f(x + t(y - x))$ дифференцируема на $[0,1]$ и $\Phi(0) = f(x)$, $\Phi(1) = f(y)$. По формуле конечных приращений для функций одного переменного существует $\theta \in (0,1)$: $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)$. Воспользовавшись формулой (6.11) дифференцирования сложной функции, получим:

$$f(y) - f(x) = \Phi'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta(y - x))(y_i - x_i).$$

$\square$

6.7 Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о смешанных производных

Определение 6.17. *Пусть в окрестности $U(a)$ определена производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $x \in U(a)$, для некоторого индекса i. Если у функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ существует производная $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ в точке a, то она называется второй производной (частной производной второго порядка) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.*

Аналогично определяются и производные более высоких порядков. Например, если в некоторой окрестности $U(a)$ определена производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и у нее существует производная $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$, то это третья производная вида $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$.

Отметим, что порядок следования индексов в записи производной имеет большое значение. Так, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ при $i \neq j$ – это разные функции. В частности, если в некоторой точке a существуют смешанные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ при $i \neq j$, то они могут не совпадать. Соответствующий пример приведен ниже.

Пример 6.3. *Рассмотрим функцию*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Ее первые производные при $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ *равны*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^2 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^3 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Производные в точке $(0,0)$ *вычислим, используя их определение:*

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{1}{x_1} \left(f(x_1, 0) - f(0,0)\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} = \lim_{x_2 \to 0} \frac{1}{x_2} \left(f0, x_2) - f(0,0)\right) = 0.$$

Теперь вторые смешанные производные в точке $(0,0)$ *равны*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{1}{x_2} \left(\frac{\partial f(0, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} \right) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{1}{x_1} \left(\frac{\partial f(x_1, 0)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} \right) = 1.$$

Достаточное условие равенства смешанных производных доказано в следующей лемме.

Лемма 6.7. *(Равенство смешанных производных) Пусть функция* $f(x)$ *имеет* **непрерывные в точке** a *смешанные производные* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j$. *Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим функцию от двух переменных и докажем, что если $f(x_1, x_2)$ имеет непрерывные в точке a смешанные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, то $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$w(\Delta x_1, \Delta x_2) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - \\ - f(a_1, a_2 + \Delta x_2) + f(a_1, a_2). \quad (6.16)$$

Пусть $g(x_1) = f(x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(x_1, a_2)$. Тогда функцию w можно представить в виде

$$w(\Delta x_1, \Delta x_2) = g(a_1 + \Delta x_1) - g(a_1).$$

Отметим, что из условий теоремы следует существование частных производных первого порядка от f в некоторой окрестности $U(a)$ точки a. В дальнейшем считаем, что Δx_1 и Δx_2 достаточно малы, поэтому все рассматриваемые точки принадлежат этой окрестности. Из существования $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ следует дифференцируемость функции одной переменной $g(x_1)$ на отрезке, соединяющем точки a_1 и $a_1 + \Delta x_1$. Применив формулу конечных приращений на этом отрезке, получим

$$w(\Delta x_1, \Delta x_2) = g(a_1 + \Delta x_1) - g(a_1) = g'(a_1 + \theta_1 \Delta x_1)\Delta x_1 =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2) \right) \Delta x_1, \ \theta_1 \in (0, 1).$$

Обозначим $\phi(x_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2)$. Из существования производной $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ следует дифференцируемость функции $\phi(x_2)$ на отрезке, соединяющем точки a_2 и $a_2 + \Delta x_2$. Применив формулу конечных приращений на этом отрезке, получим

$$w(\Delta x_1, \Delta x_2) = (\phi(a_2 + \Delta x_2) - \phi(a_2))\Delta x_1 = \phi'(a_2 + \theta_2 \Delta x_2)\Delta x_1 \Delta x_2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2)\Delta x_1 \Delta x_2.$$

Поменяем местами x_1 и x_2 в рассуждениях. Получим:

$$w(\Delta x_1, \Delta x_2) = \big(f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2 + \Delta x_2)\big) -$$

$$-\big(f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)\big) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \theta_3 \Delta x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_3 \Delta x_2)\right) \Delta x_2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_4 \Delta x_1, a_2 + \theta_3 \Delta x_2) \Delta x_1 \Delta x_2.$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_4 \Delta x_1, a_2 + \theta_3 \Delta x_2)$$

при некоторых $\theta_i \in (0,1)$. В пределе при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности смешанных производных в точке a получим равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a).$$

□

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в точке a. Тогда дифференциал $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$, рассматриваемый как функция от x, имеет непрерывные частные производные в точке a. Отсюда следует (см. 6.6), что он является дифференцируемой функцией, для которой можно определить дифференциал

$$d^2 f(a) = d(df)(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (df)}{\partial x_j}(a) dx_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j \qquad (6.17)$$

Отметим, что в силу непрерывности производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ в точке a порядок суммирования в двойной сумме в правой части (6.17) не существенен. Это позволяет использовать для двойных сумм следующее сокращенное обозначение:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} = \sum_{i,j=1}^{n}.$$

Определение 6.18.

1. *Функция $f(x)$ называется k* **раз дифференцируемой** *в точке a, если в некоторой окрестности $U(a)$ у нее существуют все частные производные порядка $k-1$ и они дифференцируемы в точке a.*

2. *Функция $f(x)$ называется k* **раз непрерывно дифференцируемой** *в точке a, если у нее существуют все частные производные порядка k, непрерывные в точке a.*

3. *Если функция $f(x)$ k раз дифференцируема в точке a, то у нее существует дифференциал порядка k (k-ый дифференциал) в точке a, который определяется по индукции: $d^k f(a) = d\big(d^{k-1} f\big)(a)$.*

Замечание 6.2. *Дифференциалы 2-ого и более высоких порядков, в отличие от дифференциалов первого порядка, не обладают свойством инвариантности формы (сравни с 6.6).*

Замечание 6.3. *Дифференциал k-ого порядка от функции n переменных можно вычислить, используя формулу*

$$d^k u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k u$$

6.8 Формула Тейлора

Теорема 6.7. *(Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа) Если функция $f(x)$ m раз непрерывно дифференцируема в окрестности $U(a)$ точки a, то для любой точки $a + dx \in U(a)$ справедливо равенство*

$$\begin{gathered} f(a+dx) = f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} d^k f(a) + r_m, \\ \text{где } \ r_m = \frac{1}{m!} d^m f(a + \theta dx),\ \theta \in (0,1). \end{gathered} \tag{6.18}$$

Доказательство. Определим функцию $\varphi(t) = f(a+tdx)$. Она имеет производные $\varphi^k(t)$ при $k \leqslant m$ на отрезке $t \in [0,1]$. Эти производные вычисляются с помощью формулы дифференцирования сложной функции:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tdx)dx_i = df(a + tdx);$$

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(df)}{\partial x_j}(a+tdx)dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+tdx)dx_i dx_j = d^2 f(a+tdx).$$

Продолжая по индукции, получим

$$\varphi^k(t) = d^k f(a + tdx), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

По формуле Тейлора для функции $\varphi(t)$ справедливо равенство

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\varphi^{m-1}(0) + \frac{1}{m!}\varphi^m(\theta), \ \ \theta \in (0,1).$$

Остается подставить в эту формулу полученные ранее выражения для производных от функции φ, чтобы получить (6.18). □

Следствие 6.2. *(Локальная формула Тейлора) Если выполнены условия теоремы 6.7, то*

$$f(a+dx) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(a) + o(\|dx\|^m) \text{ при } dx \to 0. \tag{6.19}$$

Доказательство. Из формулы (6.18) следует

$$f(a+dx) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(a) + \frac{1}{m!}\left(d^m f(a+\theta dx) - d^m f(a)\right),$$

поэтому следует доказать, что

$$s = d^m f(a+\theta dx) - d^m f(a) = o(\|dx\|^m) \text{ при } \ dx \to 0.$$

По определению дифференциала m-го порядка

$$s = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 1}^{n} \left(\frac{\partial^m f(a+\theta dx)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} - \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} \right) dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_m},$$

где сумма берется по всем производным m-го порядка. Ясно, что

$$|dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_m}| \leqslant \|dx\|^m$$

и для всех производных в силу их непрерывности

$$\left| \frac{\partial^m f(a+\theta dx)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} - \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} \right| \to 0 \text{ при } \ dx \to 0.$$

Поскольку

$$|s| \leqslant \mathrm{const} \max_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \left| \frac{\partial^m f(a+\theta dx)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} - \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} \right| \|dx\|^m,$$

то $s = o(\|dx\|^m)$ при $dx \to 0$.

$\square$

6.9 Локальные экстремумы. Необходимые условия

Определение 6.19.

Пусть функция $f(x)$ определена в области G и a – точка в этой области.

1. *Функция $f(x)$ достигает локального минимума в точке a, если существует окрестность $U(a) \subset G$, в которой $f(a) \leqslant f(x)\ \forall x \in U(a)$. Этот локальный минимум – строгий, если $f(a) < f(x)\ \forall x \in \check{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$.*

   Аналогично определяется локальный максимум. Именно, функция $f(x)$ достигает локального максимума в точке a, если существует окрестность $U(a) \subset G$, в которой $f(a) \geqslant f(x)\ \forall x \in U(a)$. Этот локальный минимум – строгий, если $f(a) > f(x)\ \forall x \in \check{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

2. *Локальный минимум и локальный максимум объединяются термином локальный экстремум.*

Лемма 6.8. 1. *Пусть функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке a и существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ для какого-либо i. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

2. *Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке a и дифференцируема в этой точке, то*

$$df(a) = 0. \tag{6.20}$$

Доказательство. Пусть для определенности точка a - точка локального минимума и $i = 1$. Определим функцию $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$. Она достигает минимума в точке a_1, поэтому $\varphi'(a_1) = 0$. Но это означает, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \varphi'(a_1) = 0$.

Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке a и дифференцируема в этой точке, то согласно первому пункту утверждения все частные производные в точке a равны нулю, а значит и $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} dx_i = 0$. □

Условие (6.20) является лишь необходимым условием локального экстремума для дифференцируемой функции (см. примеры ниже).

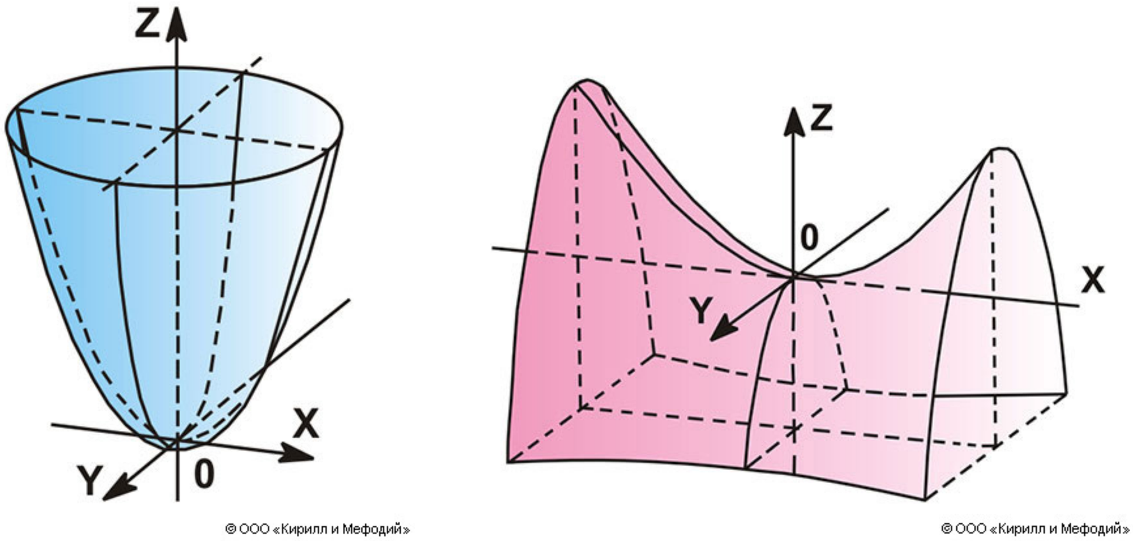


Рис. 3: Слева эллиптический параболоид. Справа гиперболический параболоид - пример седловой поверхности

Уравнение эллиптического параболоида $f(x, y) = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$, $p > 0, q > 0$. В точке $a = (0, 0)$ справедливо равенство $df(a) = 0$ и функция f имеет строгий минимум.

Уравнение гиперболического параболоида $f(x, y) = \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q}$, $p > 0, q > 0$. В точке $a = (0, 0)$ справедливо равенство $df(a) = 0$, но функция f не имеет локального экстремума, так как, например,

$$f(\delta, 0) = \frac{\delta^2}{p} > 0 = f(0, 0) \text{ а } f(0, \delta) = -\frac{\delta^2}{q} < 0 = f(0, 0).$$

Графики функций приведены на рисунке.

Далее мы докажем необходимые условия с характеристикой точки экстремума – локальный минимум или локальный максимум, но прежде приведем необходимые сведения из линейной алгебры.

Необходимые сведения из линейной алгебры

Определение 6.20. *Квадратичная форма* $\Phi(t) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_it_j = (At, t)$ *с симметричной матрицей коэффициентов* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij} = a_{ji}$, *называется*

1. **положительно определенной**, *если* $\Phi(t) > 0$ *для всех векторов* $t \neq 0$ *и* **положительно полуопределенной**, *если* $\Phi(t) \geqslant 0$ *для всех векторов* t,

2. **отрицательно определенной**, *если* $\Phi(t) < 0$ *для всех векторов* $t \neq 0$, *и* **отрицательно полуопределенной**, *если* $\Phi(t) \leqslant 0$ *для всех векторов* t,

3. **неопределенной**, *если существуют векторы* t *и* s *такие, что* $\Phi(t) > 0$ *и* $\Phi(s) < 0$.

Положительная определенность квадратичной формы $\Phi(t)$ эквивалентна положительной определенности матрицы A. В свою очередь, это означает, что все собственные числа этой симметричной матрицы положительны. Иначе говоря,

$$\Phi(t) = (At, t) \geqslant \alpha\|t\|^2, \ \forall t, \ \alpha > 0. \tag{6.21}$$

Соответственно, положительная полуопределенность квадратичной формы $\Phi(t)$ означает, что все собственные числа матрицы A неотрицательны: $\Phi(t) \geqslant 0 \, \forall t$.

Аналогично, отрицательная определенность квадратичной формы эквивалентна отрицательной определенности матрицы A:

$$\Phi(t) = (At, t) \leqslant -\beta\|t\|^2, \ \forall t \ \beta > 0, \tag{6.22}$$

а отрицательная полуопределенность означает, что $\Phi(t) \leqslant 0 \, \forall t$.

Квадратичная форма $\Phi(t)$ – неопределенная, если у ее матрицы A есть как положительные, так и отрицательные собственные числа.

Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $U(a)$ точки a. Тогда определен дифференциал второго порядка

$$d^2f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

и он является квадратичной формой относительно вектора $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$.

Теорема 6.8. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $U(a)$ точки a.*

1. *Если функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке a, то*

$$df(a) = 0, \quad d^2f(a) \geqslant 0$$

($d^2f(a) \geqslant 0$ – квадратичная форма $d^2f(a)$ положительно полуопределена).

2. *Если функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке a, то*

$$df(a) = 0, \quad d^2f(a) \leqslant 0$$

($d^2f(a) \leqslant 0$ – квадратичная форма $d^2f(a)$ отрицательно полуопределена).

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $dx \neq 0$ и определим функцию $\varphi(t) = f(a + tdx)$. При достаточно малых $|t|$ точка $a + tdx$ входит в $U(a)$, поэтому для таких t функция $\varphi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Кроме того, при $t = 0$ функция имеет локальный минимум. Для функции одного переменного известно, что тогда

$$\varphi'(0) = 0, \ \varphi''(0) \geqslant 0.$$

Но $\varphi'(0) = df(a)$, $\varphi''(0) = d^2f(a)$, откуда следует первое утверждение теоремы.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

6.10 Локальные экстремумы. Достаточные условия

Теорема 6.9. *(Достаточные условия локального экстремума) Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $U(a)$ точки a и $df(a) = 0$.*

1. *Если квадратичная форма $d^2f(a)$ положительно определена, то функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум в точке a.*

2. *Если квадратичная форма $d^2f(a)$ отрицательно определена, то функция $f(x)$ имеет строгий локальный максимум в точке a.*

3. *Если квадратичная форма $d^2f(a)$ – неопределенная, т.е. имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа, то функция $f(x)$ не имеет локального экстремума в точке a.*

Доказательство. Воспользуемся локальной формулой Тейлора (6.19) и равенством $df(a) = 0$:

$$f(a + dx) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a) + o(\|dx\|^2) \text{ при } dx \to 0.$$

1. Если квадратичная форма $d^2f(a)$ положительно определена, то согласно (6.21) существует положительное α: $d^2f(a) \geqslant \alpha\|dx\|^2$. Тогда

$$f(a + dx) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f(a) + o(\|dx\|^2) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|dx\|^2 + o(\|dx\|^2) > 0$$

при достаточно малых $\|dx\|$, т.е. a – точка строгого локального минимума функции $f(x)$.

2. Если квадратичная форма $d^2f(a)$ отрицательно определена, то согласно (6.22) существует положительное β: $d^2f(a) \leqslant -\beta\|dx\|^2$. Тогда

$$f(a + dx) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f(a) + o(\|dx\|^2) \leqslant -\frac{\beta}{2}\|dx\|^2 + o(\|dx\|^2) < 0$$

при достаточно малых $\|dx\|$, т.е. a – точка строгого локального максимума функции $f(x)$.

3. Если квадратичная форма $d^2f(a)$ – неопределенная, то не выполнено необходимое условие локального экстремума (см. теорему 6.8).

□

Замечание 6.4. *Если квадратичная форма $d^2 f(a)$ – полуопределенная, т.е. все ее собственные числа либо неотрицательные, либо не положительные, то исследование существования локального экстремума требует дополнительного анализа с привлечением дифференциалов порядка выше второго.*

Приведенные ниже результаты из теории квадратичных форм и симметричных матриц полезны при исследовании функций на локальные экстремумы.

Определение 6.21. *Главным минором матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется минор, в котором множество индексов строк совпадает с множеством индексов столбцов. Примером главного минора порядка $m < n$ является следующий определитель*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_m} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m i_1} & a_{i_m i_2} & \dots & a_{i_m i_m} \end{vmatrix}, \quad 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant n.$$

Если главный минор находится в левом верхнем углу матрицы, то он называется угловым главным минором, или просто угловым минором. Угловые миноры и определитель матрицы A:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Лемма 6.9. *(Критерий Сильвестра)*

Для того чтобы матрица A была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры были положительны:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Для того чтобы матрица A была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры нечетного порядка были отрицательны, а угловые миноры четного порядка – положительны:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0 \dots .$$

Замечание 6.5. *Для того чтобы матрица A была положительно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны.*

Для того чтобы матрица A была отрицательно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры нечетного порядка были отрицательны, а угловые миноры четного порядка – положительны