Д.Ю. Сулейманова

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ УЧАЩИХСЯ

Учебное пособие

RU SCIence
RUS-SCIENCE.RU
Москва
2024

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С89

Рецензенты:

А.В. Поташев, профессор кафедры ЕДСиТ Казанского Кооперативного института РУК, д-р мед. наук, проф.,

М.Ф. Гумеров, профессор кафедры цифровой экономики управления и бизнес технологий, Московский технический университет связи и информатики, д-р экон. наук

Сулейманова, Диана Юрьевна.

С89 Практикум по математике для иностранных учащихся : учебное пособие / Д.Ю. Сулейманова. — Москва : РУСАЙНС, 2024. — 258 с.

ISBN 978-5-466-08451-1

Учебное пособие предназначено для иностранных слушателей, которые обучаются на подготовительных факультетах университетов РФ. В пособии изложены основные разделы курса элементарной математики, что полностью соответствует рабочей программе по математике для подготовительных факультетов высших учебных заведений. Пособие содержит тексты, лексико-грамматический материал, вопросы и упражнения, а также графический материал, позволяющий слушателям-иностранцам освоить основы элементарной математики. В пособии представлены примеры, задачи, графики, которые помогут формировать собственные устные или письменные высказывания учащегося. Пособие может быть использовано при обучении слушателей подготовительных факультетов, имеющих начальную языковую подготовку.

Ключевые слова: *алгебраические выражения, уравнения и системы уравнений, неравенства, функции, тригонометрия, элементы теории вероятности, стереометрия.*

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-466-08451-1

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов, которые обучаются на подготовительных факультетах университетов РФ. В пособии изложены основные разделы курса элементарной математики, что полностью соответствует рабочей программе по математике для подготовительных факультетов высших учебных заведений. Пособие содержит тексты, лексико-грамматический материал, вопросы и упражнения, а также графический материал, позволяющий студентам-иностранцам освоить основы элементарной математики. В пособии представлены примеры, задачи, графики, которые помогут формировать собственные устные или письменные высказывания учащегося.

В пособии систематизированная подача курса элементарной математики для иностранных студентов. Студенты, приезжающие из разных стран мира, имеют различный уровень знаний по элементарной математике, поэтому главной задачей является возмещение пробелов в знаниях по элементарной математике и создание платформы необходимой математической терминологии на русском языке для последующего использования ее в научном стиле речи. Пособие состоит из 16 тем. Содержание пособия определяется целями, которые стоят перед студентами в связи с их коммуникативными потребностями в учебно−профессиональной сфере общения. В зависимости от уровня подготовки учащихся и конкретных задач обучения возможно изменение последовательности подачи учебного материала и выборочное его использование.

Программа изучения дисциплины реализуется через проведение лекций, практических занятий, выполнение самостоятельных и контрольных работ. Целью учебной дисциплины является формирование базовых математических знаний у иностранных студентов для решения задач в профессиональной деятельности, а также умений аналитически мыслить.

Основные задачи курса: формирование у студентов−иностранцев необходимого базового минимума теоретических знаний в области элементарной математики; развитие математического и логического мышления у студентов−иностранцев; выработка и активизация у студентов практических навыков применения теоретических знаний для решения профессиональных задач.

§1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1 Цифра и число

Таблица 1.

***Цифра* и *число*. Слова и словосочетания**

Русский	*Английский*	*Французский*
Цифра	digit, figure	chiffre
Знак	sign, mark	signe
Целое число	integer, whole number	nombre entier
Чётные/ Нечётные числа	Even/ uneven numbers	nombre pair/ impair
Считать/сосчитать	calculate, count	compter
Обозначать – что?	mean – what?	signifier

Текст 1.

Единицы			Десятки	Сотни	Тысячи
0 (ноль)	10 (десять),	20 (двадцать)	30 (тридцать)	100 (сто)	1000 (одна тысяча)
1 (один)	11 (одиннадцать),	21 (двадцать один)	40 (сорок)	200 (двести)	2000 (две тысячи)
2 (два)	12 (двенадцать)	22 (двадцать два)	50 (пятьдесят)	300 (триста)	4000 (четыре тысячи)
3 (три)	13 (тринадцать)	23 (двадцать три)	60 (шестьдесят)	400 (четыреста)	5000 (пять тысяч)
4 (четыре)	14 (четырнадцать)	24 (двадцать четыре)	70 (семьдесят)	500 (пятьсот)	11000 (одиннадцать тысяч)
5 (пять)	15 (пятнадцать)	25 (двадцать пять)	80 (восемьдесят)	600 (шестьсот)	20000 (двадцать тысяч)
6 (шесть)	16 (шестнадцать)	26 (двадцать шесть)	90 (девяносто)	700 (семьсот)	1000000 (миллион, один миллион)
7 (семь)	17 (семнадцать)	27 (двадцать семь)		800 (восемьсот)	

8 (восемь)	18 (восемнадцать)	28 (двадцать восемь)		900 (девятьсот)	
9 (девять)	19 (девятнадцать)	29 (двадцать девять)			

Текст 2.

Математика – это наука. *Арифметика* – это раздел математики. Она изучает числа.

Примеры	Название
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 …	– это *натуральные* числа
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	– это также *целые* числа
Число 0 (ноль)	– это целое число, но не натуральное число.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	– это цифры. *Цифры* – это математические знаки. Цифры обозначают числа.
Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	– это *однозначные* числа, потому что одна цифра (один знак) обозначает число.
Числа 10, 22, 35	– это *двузначные* числа, потому что две цифры (два знака) обозначают эти числа. Двузначные, трёхзначные, четырёхзначные, пятизначные – это *многозначные* числа
456, 873	*трёхзначные* числа
7834, 9065	*четырёхзначные*
63862	*пятизначные*
4, 6, 8, 10, 12, 24, 38, 102, 264 …	– это *чётные* числа
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 23, 35, 79, 101, 283 …	– это *нечётные* числа

Ответьте на вопросы:

1. Что такое математика?
2. Что изучает арифметика?
3. Какие цифры обозначают число 50?
4. Какая цифра обозначает число 0?
5. Сколько цифр вы знаете?
6. Почему 38 – это двузначное число?
7. Почему 2010 – это четырехзначное число?
8. Читайте числа: 28, 37, 45, 59, 67, 71, 88, 94, 110, 257, 485, 796, 945, 1037, 3650, 7009, 8430, 24789, 67901, 80049.

1.2 Математические знаки

Таблица 2.

Математические термины

Русский	*English*	*French*
Называться, называется	be called	être nommé s'appeler
Больше (чем)	more (than)	plus grand que supérieur à
Меньше	less, smaller	plus petit que, moins
Равно	equal	égal, inférieur
Получать(−ся), получить(−ся), получает(−ся), получит(−ся)	to receive to obtain	recevoir, obtenir
Открывать, открыть	open	ouvrir
Закрывать, закрыть	close	fermer

Таблица 3.

Математические знаки

Знак	*Читаем знак*	*Название*	*Выражения*
+	плюс (что?)	знак сложения	$a + b$ сумма чисел a и b
−	минус (что?)	знак вычитания	$a - b$ разность чисел a и b
x	умножить на (что?)	знак умножения	$a{\cdot}b$ произведение чисел a и b
÷	разделить на (что?)	знак деления	$a{:}b$ отношение чисел a к b
=	равно (чему?), будет (что?), получится (что?)	знак равенства	$2a = b$
≠	не равно (чему?)	знак неравенства	$a \neq b$
>	больше (чего?), больше чем (что?)	знак неравенства	$a > b$ a больше, чем b
≥	больше или равно (чему?)	знак неравенства	$a \geq b$ a больше или равно b
<	меньше (чего?), меньше чем (что?)	знак неравенства	$a < b$ a меньше, чем b
≤	меньше или равно (чему?)	знак неравенства	$a \leq b$ a меньше или равно b
(...)	(открыть (что?) круглую скобку	) закрыть (что?) круглую скобку	круглые скобки
[...]	[открыть (что?) квадратную скобку	] закрыть (что?) квадратную скобку	квадратные скобки

{…}	{ открыть (что?) фигурную скобку	} закрыть (что?) фигурную скобку	фигурные скобки

1.3 Арифметические действия с натуральными числами

Текст 3.

Действие	Запись	Компоненты	Знаки
Сложение	3 + 4 = 7. Три плюс четыре равно семи	3 и 4 − *слагаемые*, 7 − *сумма*	«+» − знак *плюс*, «=» − знак *равно*
Вычитание	9 − 5 = 4. Девять минус пять равно четырём	9 − *уменьшаемое*, 5 − *вычитаемое*, 4 − *разность*	«–» − знак *минус*
Умножение	4·2=8 или 4х2 = 8. Четыре умножить на два равно восьми	4 и 2 − *множители*, 8 − *произведение*	«·» или «х» − знак *умножить*
Деление	8:4 = 2 или 8÷4 = 2. Восемь разделить на четыре равно двум	8 − *делимое*, 4 − *делитель*, 2 − *частное*	

4..., «:» или «÷» − знак *разделить*.

Текст 4.

Порядок арифметических действий

1. Сначала выполняют действия умножения и деления, а затем сложения и вычитания. Пример: 25:5 + 2·7 − 3 = 5 + 14 − 3= 16.
2. Сначала выполняют действия в скобках, а затем за скобками.

Пример:

4·(3 + 5·2) = 4·(3 + 10) = 4·13= 52.

Читаем: ( ) − скобки. 4·(3 + 5·2) = 52. Четыре умножить, скобка открывается, три плюс пять умножить на два, скобка закрывается, равно пятидесяти двум.

Таблица 4.

Таблица умножения

x	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Примеры.

Вычислите:

1. $-96:(54-62)$.

Решение: $-96:(54-62)=-96:(-8)=12$.

2. $(84-120):36$.

Решение: $(84-120):36=(-36):36=-1$.

3. $81:(76-67)$.

Решение: $81:(76-67)=81:9=9$.

4. $(13-44)\cdot(27-47)$.

Решение: $(13-44)\cdot(27-47)=(-31)\cdot(-20)=620$.

5. $10-85:5$.

Решение: $10-85:5=10-17=-7$.

6. $37-29+159-86$.

Решение: $37-29+159-86=81$.

7. $-2\cdot(11-36)$.

Решение: $-2\cdot(11-36)=-2\cdot(-25)=50$.

8. $5\cdot(74-93)$.

Решение: $5\cdot(74-93)=5\cdot(-19)=-95$.

9. $(63-84):(14-21)$.

Решение: $(63-84):(14-21)=(-21):(-7)=3$.

10. $4\cdot(43-150)$.

Решение: $4\cdot(43-150)=4\cdot(-107)=-428$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить:

1. $(31-12)\cdot(32-62)$.
2. $4\cdot(43-150)$.
3. $-21+84:7$.
4. $-190+39-84+235$.
5. $(39-57):(27-18)$.

6. $-73 + 24 - 58 + 96$.
7. $(63 - 75)\cdot(110 - 115)$.
8. $-26 + 13\cdot6$.
9. $(53 - 27 - 14):(41 - 29)$.
10. $-96:(54 - 62)$.
11. $(34:2 - 5\cdot3)\cdot3 + (18:9 + 4\cdot3):(7\cdot3 + 28:7)\cdot4$.
12. $(15\cdot6 - 32:4):(5 + 14:2):2 + (10 + 42:7):4$.
13. $(81:9 + 56:8):[(135- 15)\cdot5 + 10\cdot12]:8$.

1.4 Законы сложения и умножения

Текст 5.

Законы сложения и умножения

1. *Переместительный (коммутативный) закон сложения*. Для любых натуральных чисел a и b верно равенство: $a + b= b + a$. От перестановки слагаемых значение суммы не изменяется.

2. *Сочетательный (ассоциативный) закон сложения*. Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство: $(a+b)+c= a+(b+c)$. Значение суммы не изменится, если какую–либо группу слагаемых заменить их суммой.

3. *Переместительный (коммутативный) закон умножения*. Для любых натуральных чисел a и b верно равенство: $a\cdot b= b\cdot a$. От перестановки множителей значение произведения не изменяется.

4. *Сочетательный (ассоциативный) закон умножения*. Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$. Значение произведения не изменится, если какую–либо группу множителей заменить их произведением.

5. *Распределительный (дистрибутивный) закон умножения*. Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство: $(a+ b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. Чтобы умножить сумму на число, достаточно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения. Аналогично можно написать: $(a - b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$.

1.5 Признаки делимости натуральных чисел

Текст 6.

Признаки делимости натуральных чисел

1. *Признак делимости на 2*. Число делится на 2 (число можно разделить на 2), если последняя цифра числа 0, 2, 4, 6, 8. Число, которое

делится на 2, называется чётным. Число, которое не делится на 2, называется нечётным.

Примеры:

a) числа 242, 408, 1480, 16 354, 27 590 на 2 делятся. Это чётные числа;

b) числа 87, 371, 5 247, 47 305, 986 343 на 2 не делятся. Это нечётные числа;

c) определите, какие из чисел делятся на 2, а какие нет: 37, 74, 265, 740, 7 549, 90 138.

2. *Признак делимости на 3.* Число делится на 3 (число можно разделить на 3), если сумма его цифр делится на 3.

Примеры:

a) числа 87, 273, 1 584, 37 506 на 3 делятся;

b) числа 53, 149, 8 491, 54 658 на 3 не делятся;

c) определите, какие из чисел делятся на 3, а какие нет: 85, 93, 486, 971, 4 584, 76 590.

3. *Признак делимости на 4.* Число делится на 4 (число можно разделить на 4), если его две последние цифры образуют число, которое делится на 4.

Примеры:

a) числа 144, 512, 2 752, 24 868, 207 600 на 4 делятся;

b) числа 478, 966, 8 743, 93 285, 202 706 на 4 не делятся;

c) определите, какие из чисел делятся на 4, а какие нет: 146, 896, 3 972, 65 016, 837 526.

4. *Признак делимости на 5.* Число делится на 5 (число можно разделить на 5), если его последняя цифра 0 или 5.

Примеры:

a) числа 55, 260, 3 865, 9 600, 48 565 на 5 делятся;

b) числа 68, 931, 6 453, 56 439, 733 354 на 5 не делятся;

c) определите, какие из чисел делятся на 5, а какие нет: 465, 874, 9 560, 56 405, 702 653.

5. *Признак делимости на 9.* Число делится на 9 (число можно разделить на 9), если сумма его цифр делится на 9.

Примеры:

a) числа 81, 252, 954, 7 641, 48 528 на 9 делятся;

b) числа 46, 381, 867, 2 048, 95 647 на 9 не делятся;

c) определите, какие из чисел делятся на 9, а какие нет: 72, 642, 945, 7 326, 83 459.

6. *Признак делимости на 10.* Число делится на 10 (число можно разделить на 10), если его последняя цифра 0.

Примеры:

a) числа 100, 580, 8 560, 465 900 на 10 делятся;

b) числа 64, 742, 6 945, 93 645 на 10 не делятся.

7. *Признак делимости на 25*. Число делится на 25 (число можно разделить на 25), если его две последние цифры 00, 25, 50, 75.

Примеры:

a) числа 200, 950, 6 725, 84 675 на 25 делятся;

b) числа 974, 8 456, 20 147, 946 324 на 25 не делятся.

1.6 Разложение натурального числа на простые множители

Текст 7.

Простым числом называют такое натуральное число, которое делится только на 1 и само на себя.

Пример. Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Составным числом называют такое натуральное число, которое делится не только само на себя и на 1, но и на другие натуральные числа.

Пример. Составные числа: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

ТЕОРЕМА 1 (*Основная теорема арифметики*): Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители.

Пример. $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.

Задания для самостоятельной работы

1. Записать все простые числа до 50.
2. Записать все составные числа до 50.
3. Разложить на простые множители числа: 342, 540, 630, 711, 2025.

1.7 Наибольший общий делитель

Текст 8.

Делителем числа a называют такое число b, на которое число a делится.

Примеры:

1) 9− делитель числа 126, то есть $126 \div 9 = 14$; 42− делитель числа 126, то есть $126 \div 42 = 3$.

2) Пусть даны два числа 60 и 72.

Делители 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Делители 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Общие делители чисел 60 и 72: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Наибольший (самый большой) делитель чисел 60 и 72 равен 12.

Записывают так: *НОД* (60; 72) = 12.

Наибольший общий делитель (*НОД*) двух или нескольких чисел − это наибольшее число, на которое эти числа делятся. *НОД* двух или нескольких чисел равен произведению общих простых множителей этих чисел.

<u>Пример.</u>

Найти *НОД* (70; 84).

Разложим 70 и 84 на простые множители: $70 = 2\cdot5\cdot7$; $84 = 2\cdot2\cdot3\cdot7$. Общие простые множители 70 и 84 − число 2 и 7.

Поэтому *НОД* (70; 84) = $7\cdot2 = 14$.

<u>*Задания для самостоятельной работы*</u>

Найти: *НОД* (48; 54); *НОД* (60; 84); *НОД* (126; 270); *НОД* (420; 548); *НОД* (30; 54; 102).

1.8 Наименьшее общее кратное

<u>Текст 9</u>.

Пусть даны два числа: 6 и 8. На 6 и 8 делятся числа: 24, 48, 72, 96,... Наименьшее (самое малое) число, которое одновременно делится на 6 и 8 − это 24. Число 24 называют наименьшим общим кратным чисел 6 и 8 и записывают *НОК* (6; 8) = 24.

Наименьшее общее кратное (*НОК*) двух или нескольких чисел − это наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел.

НОК двух или нескольких чисел равен произведению всех простых множителей этих чисел.

Если $6 = 2\cdot3$, а $8 = 2\cdot2\cdot2$, то *НОК* (6; 8) = $2\cdot2\cdot2\cdot3 = 24$.

<u>Пример.</u>

Найти *НОК* (18; 24).

Разложим 18 и 24 на простые множители: $18 = 2\cdot3\cdot3$; $24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3$.

Все простые множители 18 и 24 − это 2, 2, 2, 3, 3.

Поэтому *НОК* (18; 24) = $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 72$.

Проверка: 72:18 = 4; 72:24 = 3.

<u>*Задания для самостоятельной работы*</u>

1. Найти: *НОК* (15;25); *НОК* (28;35); *НОК* (48;72); *НОК* (12;20;28); *НОК* (30;40;50).

2. Какие числа называют натуральными?

3. Назовите порядок арифметических действий.

4. Сформулируйте законы сложения и умножения.

5. Назовите признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

6. Какие числа называют простыми, сложными?

7. Дайте определение наибольшего общего делителя и наименьшее кратного двух или нескольких чисел.

§2. ДРОБИ

2.1 Обыкновенная дробь, виды обыкновенных дробей

Текст 10.

Разделим 1 (единицу) на 5 равных частей и возьмём одну часть. Получим одну пятую часть единицы:

$\frac{1}{5}$ − одна пятая (часть 1), $\frac{1}{5}$ − *дробь*.

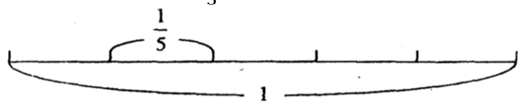


Рисунок 1. Одна пятая часть единицы

Разделим 1 (единицу) на 7 равных частей и возьмём две части. Получим две седьмых части единицы:

$\frac{2}{7}$ − две седьмых (части 1), $\frac{2}{7}$ − дробь.

ы

Обыкновенная дробь − это одна или несколько равных частей единицы.

Числитель обыкновенной дроби − это число над чертой.

Знаменатель обыкновенной дроби − это число под чертой.

В дроби $\frac{1}{5}$: число 1 − числитель, число 5 − знаменатель.

В дроби $\frac{2}{7}$: число 2 − числитель, число 7 − знаменатель.

Текст 11.

Виды обыкновенных дробей

Правильная дробь − это дробь, у которой числитель меньше знаменателя. Пример: $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{5}$.

Неправильная дробь − это дробь, у которой числитель или больше знаменателя, или равен ему. Пример: $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$.

Смешанная дробь − это дробь, которая состоит из натурального числа и правильной дроби. $1\frac{1}{2}$ − одна целая одна вторая, $3\frac{5}{7}$ − три целых пять седьмых. Пример. $1+\frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$.

2.2 Преобразование обыкновенных дробей

Текст 12.

1. Смешанную дробь можно привести к *неправильной* дроби. Пример: $1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

2. Из неправильной дроби можно выделить *целую часть* и привести её к смешанной дроби. Пример: $\frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2\ \frac{1}{2}$.

3. *Сокращение* дроби − это деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель. Пример: $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Привести неправильную дробь к смешанной дроби: $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{9}{5}$.
2. Сократить дробь: $\frac{13}{26}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{5}{125}$.

2.3 Действия с обыкновенными дробями

Текст 13.

Сложение и вычитание дробей

1. Знаменатели дробей *равны* между собой:

$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

При *сложении* дробей с *равными знаменателями* числитель первой дроби складывают с числителем второй дроби. Знаменатель оставляют тот же.

$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

При *вычитании* дробей с *равными знаменателями* из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби. Знаменатель оставляют тот же.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$.

2. Знаменатели дробей *не равны* между собой.

Для того чтобы сложить (вычесть) две дроби *с разными знаменателями*, нужно привести их к *общему знаменателю*, а затем выполнить действия по правилу сложения (вычитания) дробей с равным знаменателями.

Наименьший общий знаменатель двух дробей равен *НОК* (наименьшему общему кратному) знаменателей.

Текст 14.

Умножение правильных и неправильных дробей

1. Для того чтобы умножить две *правильные или неправильные* дроби, нужно:

а) числитель первой дроби умножить на числитель второй дроби и произведение записать в числителе;

б) знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби и произведение записать в знаменателе.

2. Умножение *смешанных* дробей. Для того чтобы умножить две смешанные дроби нужно:

а) привести *смешанные* дроби к *неправильным* дробям;

б) выполнить умножение неправильных дробей.

Деление правильных и неправильных дробей

1. Для того чтобы разделить *правильные или неправильные* дроби нужно:

а) числитель делителя записать в знаменателе, а знаменатель делителя − в числителе (*перевернуть дробь*);

б) умножить дроби.

2. Деление *смешанных* дробей. Для того чтобы разделить две смешанные дроби нужно:

а) привести *смешанные* дроби к *неправильным* дробям;

б) выполнить деление неправильных дробей.

Примеры.

1. $\frac{29}{30}-\frac{5}{18}\cdot\frac{6}{25}$.

Выполним умножение, затем вычитание:

$$\frac{29}{30}-\frac{5}{18}\cdot\frac{6}{25}=\frac{29}{30}-\frac{1}{15}=\frac{29-2}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}.$$

2. $\frac{18}{7}\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{15}{18}\right)$.

Вычислим: $\frac{18}{7}\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{15}{18}\right)=\frac{18}{7}\cdot\frac{23}{18}=\frac{23}{7}$.

3. $1-\frac{4}{7}:\frac{16}{21}$.

Вычислим: $1-\frac{4}{7}:\frac{16}{21}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

4. $\frac{7}{36}\cdot\left(-\frac{6}{50}\right)+\frac{29}{36}\cdot\left(-\frac{6}{50}\right)$.

Вычислим:

$$\frac{7}{36}\cdot\left(-\frac{6}{50}\right)+\frac{29}{36}\cdot\left(-\frac{6}{50}\right)=-\frac{6}{50}\cdot\left(\frac{7}{36}+\frac{29}{36}\right)=-\frac{6}{50}\cdot 1=-\frac{3}{25}.$$

5. $1-\frac{4}{5}\cdot 2\frac{2}{9}$.

Вычислим: $1-\frac{4}{5}\cdot 2\frac{2}{9}=1-\frac{4\cdot 20}{5\cdot 9}=-\frac{7}{9}$.

6. $1\frac{2}{11}+\frac{2}{5}-\frac{37}{55}$.

Вычислим: $1\frac{2}{11}+\frac{2}{5}-\frac{37}{55}=\frac{65}{55}+\frac{22}{55}-\frac{37}{55}=\frac{10}{11}$.

7. $2\frac{1}{16}:\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$.

Вычислим: $2\frac{1}{16}:\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{33\cdot 4}{16\cdot 3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{4}+\frac{1}{4}=3$.

8. $\left(\frac{8}{7}-\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)\cdot\frac{12}{46}$.

Вычислим: $\left(\frac{8}{7}-\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)\cdot\frac{12}{46}=\frac{48-3+1}{42}\cdot\frac{12}{46}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$.

9. $\frac{5}{6}+\frac{7}{12}:\frac{7}{2}$.

Вычислим: $\frac{5}{6}+\frac{7}{12}:\frac{7}{2}=\frac{5}{6}+\frac{7\cdot 2}{12\cdot 7}=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$.

10. $\frac{2}{7}+\frac{3}{8}:\frac{7}{32}$.

Вычислим: $\frac{2}{7}+\frac{3}{8}:\frac{7}{32}=\frac{2}{7}+\frac{12}{7}=\frac{14}{7}=\frac{2}{1}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислите:

1. $\frac{2}{7}+\frac{3}{8}:\frac{7}{32}$.
2. $2\frac{5}{8}:\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$.
3. $1\frac{1}{4}+\frac{2}{7}-\frac{23}{28}$.

4. $\frac{5}{9} : \left(\frac{7}{9} + \frac{11}{18}\right)$.

5. $\frac{5}{8} - \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{12}$.

6. $\frac{7}{9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{15}$.

7. $1 - \frac{4}{7} : \frac{16}{21}$.

8. $\frac{4}{15} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$.

9. $1 - \frac{3}{7} : \frac{9}{14}$.

10. $\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36}\right) \cdot \frac{72}{34}$.

2.3 Десятичные дроби

Текст 15.

Определение и действия с десятичными дробями

Десятичная дробь − это обыкновенная дробь, у которой знаменатель равен 10, 100, 1 000 и т.д.

Пример:

$0{,}3 = \frac{3}{10}$ − ноль целых три десятых;

$1{,}13 = 1\frac{13}{100}$ − одна целая тринадцать сотых;

$2{,}139 = 2\frac{139}{1000}$ − две целых сто тридцать девять тысячных;

$7{,}0009 = 7\frac{9}{10000}$ − семь целых девять десятитысячных.

8,7; 13,8; 15,1; 20,6; 18,12; 25,48; 31,83; 39,01; 42,12.

Текст 16.

Сложение и вычитание десятичных дробей

При сложении (вычитании) *десятичных дробей* числа записывают так, чтобы *одинаковые разряды* были записаны один под другим, а запятая − под запятой, и складывают (вычитают) как натуральные числа.

Пример. 1,25 + 2,75 = 4.

Задания для самостоятельной работы.

Выполнить сложение и вычитание чисел:

1. 3,43 + 5,78.
2. 3,897 + 8,105.
3. 6,17 − 4,4.
4. 17,134 − 9,278.

Текст 17.

Умножение десятичных дробей

Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, нужно выполнить умножение, *не обращая внимания на запятые*. В полученном произведении *отделить справа* от запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях в сумме.

Пример. $1{,}25 \cdot 3{,}44 = 4{,}3$.

Задания для самостоятельной работы

Выполнить умножение чисел:

1. $0{,}7 \cdot 0{,}3$.
2. $0{,}12 \cdot 0{,}67$.
3. $0{,}2 \cdot 0{,}09$.
4. $12{,}6 \cdot 4{,}6$.
5. $0{,}08 \cdot 1{,}5$.
6. $87{,}3 \cdot 0{,}21$.

Текст 18.

Деление десятичных дробей

1. Разделим 8,42 на 2. Сначала делим на 2 целую часть числа. Получим 4. Делим на 2 по правилу деления натуральных чисел десятые, далее сотые, то есть 8,42:2 = 4,21.

2. Разделим 2,315 на 5. В целой части частного получим ноль (так как 2 на 5 не делится). Далее делим число на 5 по правилам деления натуральных чисел, то есть 2,315:5 = 0,463.

3. Разделим 4,27 на 1,6. Умножим делимое и делитель на 10. Получим 42,7:16 = 2,65.

Для того чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько цифр после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число.

Задания для самостоятельной работы

Выполнить деление чисел:

1. 21,7:7.
2. 24,5:1,4.
3. 25,2:9.
4. 2,385:1,8.
5. 1,84:4.
6. 8,15:1,25.

Текст 19.

Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обыкновенной в десятичную. Периодические дроби

Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, необходимо в числителе дроби записать число, которое стоит после запятой, а в знаменателе − единицу с нулями, причём нулей должно быть столько, сколько имеется цифр справа от запятой.

Пример.

$1{,}03 = 1\frac{3}{100} = \frac{103}{100}$.

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, необходимо разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на натуральное число.

Примеры.

1. 1,54:1,4− 0,5.

Вычислим: 1,54:1,4− 0,5 = 1,1− 0,5 = 0,6.

2. $6{,}1 \cdot 8{,}3 - 0{,}83$.

Для упрощения вычислений вынесем общий множитель за скобки: $6{,}1 \cdot 8{,}3 - 0{,}83 = 8{,}3 \cdot (6{,}1 - 0{,}1) = 8{,}3 \cdot 6 = 49{,}8$.

3. 3,9+ 2,04:1,7.

Вычислим: 3,9+ 2,04:1,7 = 3,9+ 1,2 =5,1.

4. 8,28− 5,34:3.

Вычислим: 8,28− 5,34:3 = 8,28− 1,78= 6,5.

5. $\frac{5{,}6 \cdot 0{,}3}{0{,}8}$.

Сократим: $\frac{5{,}6 \cdot 0{,}3}{0{,}8} = \frac{5{,}6}{0{,}8} \cdot 0{,}3 = 7 \cdot 0{,}3 = 2{,}1$.

6. −4,5+ 6,24:1,6.

Вычислим: −4,5 + 6,24:1,6 = − 4,5+ 3,9 = − 0,6.

7. 5,4·5,5+ 3,7.

Вычислим: 5,4·5,5 + 3,7 = 29,7+ 3,7= 33,4.

8. −4,9 + 4,81:1,3.

Вычислим: $-4{,}9+4{,}81:1{,}3=-4{,}9+3{,}7=-1{,}2$.

9. $\frac{15}{5\cdot 4}$.

Имеем: $\frac{15}{5\cdot 4}=\frac{3}{4}=0{,}75$.

10. $-6{,}2+7{,}42:1{,}4$.

Вычислим: $-6{,}2+7{,}42:1{,}4=-6{,}2+5{,}3=-0{,}9$.

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

Обратить десятичную дробь в обыкновенную:

1. 0,3;
2. 0,004;
3. 0,11;
4. 3,83;
5. 0,103;
6. 7,0013.

Найдите значение выражения:

1. $4{,}6\cdot 3{,}4-0{,}34$.
2. $4{,}51-5{,}82:2$.
3. $\frac{2{,}8\cdot 0{,}3}{0{,}7}$.
4. $\frac{9}{4{,}5\cdot 2{,}5}$.
5. $8{,}26-7{,}52:2$.
6. $1{,}54:1{,}4-0{,}5$.
7. $8{,}4\cdot 3{,}5+1{,}9$.
8. $6{,}8\cdot 3{,}5+2{,}5$.
9. $8{,}28-5{,}34:3$.
10. $2{,}08:1{,}3-0{,}8$.

<u>Текст 20</u>.

При делении числителя на знаменатель может получиться *бесконечная десятичная* дробь.

<u>Пример.</u>

$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots;\ \frac{2}{7}=0{,}28571\ldots;\ \frac{8}{11}=0{,}7272\ldots$

Дробь называется *периодической*, если в бесконечной десятичной дроби, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются.

<u>Примеры:</u>

1) 0,555...= 0,(5);

2) 0,4242...= 0,(42);

3) 4,0313131...= 4,0(31);

4) 5,123123...= 5,(123).

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную дробь, нужно из числа, которое стоит до второго периода, вычесть число, которое стоит до первого периода и записать эту разность в числителе. В знаменателе нужно написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, а после девяток написать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Примеры.

1. $\left(\frac{3}{4}+2\frac{3}{8}\right)\cdot 25,8$.

Выполним преобразования:

$$\left(\frac{3}{4}+2\frac{3}{8}\right)\cdot 25,8=\left(\frac{6}{8}+\frac{19}{8}\right)\cdot 25\frac{4}{5}=\frac{25\cdot 129}{8\cdot 5}=\frac{645}{8}=80\frac{5}{8}=80,625.$$

2. $\frac{8}{3}:\frac{6}{5}-\frac{13}{18}$.

Найдем значение выражения:

$$\frac{8}{3}:\frac{6}{5}-\frac{13}{18}=\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{6}-\frac{13}{18}=\frac{40}{18}-\frac{13}{18}=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}=1,5.$$

3. $1,56:1,3-0,4$.

Имеем: $1,56:1,3-0,4=156:130-0,4=1,2-0,4=0,8.$

4. $40\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{8}+\frac{9}{20}\right)$.

Найдем значение выражения:

$$40\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{8}+\frac{9}{20}\right)=32-35+18=15.$$

5. $0,21:\frac{3}{8}+\frac{11}{25}$.

Найдём значение выражения:

$$0,21:\frac{3}{8}+\frac{11}{25}=\frac{21\cdot 8}{100\cdot 3}+\frac{11}{25}=\frac{14+11}{25}=\frac{25}{25}=1.$$

6. $\left(\frac{11}{10}-\frac{4}{11}\right):\frac{15}{44}$.

Приведём дроби в скобках к общему знаменателю:

$\left(\frac{11}{10}-\frac{4}{11}\right):\frac{15}{44}=\frac{11\cdot 11-4\cdot 10}{10\cdot 11}\cdot\frac{44}{15}=\frac{(121-40)\cdot 44}{10\cdot 11\cdot 15}=\frac{81\cdot 4}{10\cdot 15}=2,16.$

7. $\frac{14}{15}:\frac{7}{3}-0,5.$

Выполним действия:

$\frac{14}{15}:\frac{7}{3}-0,5=\frac{14}{15}\cdot\frac{3}{7}-0,5=\frac{2}{5}-0,5=0,4-0,5=-0,1.$

8. $\frac{24}{7}:\frac{12}{21}-1,7$.

Выполним преобразования:

$\frac{24}{7}:\frac{12}{21}-1,7=\frac{24}{7}\cdot\frac{21}{12}-1,7=6-1,7=4,3$

9. $\frac{0,207\cdot 2,08}{2,07\cdot 0,208}$.

Умножим числитель и знаменатель на 100 000:

$\frac{0,207\cdot 2,08}{2,07\cdot 0,208}=\frac{207\cdot 208}{207\cdot 208}=1$.

10. $\frac{18}{4}\cdot\frac{14}{3}:\frac{4}{5}.$

$\frac{18}{4}\cdot\frac{14}{3}:\frac{4}{5}=\frac{18}{4}\cdot\frac{14}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{6}{2}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3}{1}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 7\cdot 5}{1\cdot 1\cdot 4}=\frac{105}{4}=26,25$

Задания для самостоятельной работы

Найдите значение выражения:

1. $0,21:\frac{3}{8}+\frac{11}{25}.$
2. $\left(5\frac{1}{5}-2,8\right):\frac{1}{10}.$
3. $\frac{17}{2}\cdot\frac{2}{7}-\frac{13}{14}.$
4. $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+2.$
5. $\frac{7}{25}:0,49-3\frac{4}{7}.$
6. $2:0,04+34.$
7. $1\frac{1}{3}+3+\left(-1\frac{7}{12}\right).$

8. $4\frac{4}{9} : \frac{4}{9}$.

9. $\frac{29}{7} : \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{4}\right)$.

10. $\frac{7}{25} - 3{,}5 - \frac{3}{20}$.

11. Обратить бесконечную десятичную дробь в обыкновенную дробь: 0,444...; 0,91666...; 0,2727...; 0,02777...; 0,3888...; 0,208333...; 0,8333...

2.4 Отношение. Пропорция

Текст 21.

Отношение числа *a* к числу *b* − это *частное* чисел a и b, то есть $\frac{a}{b}$ или *a:b*. Отношение $\frac{a}{b}$ означает, во сколько раз число *a* больше числа *b* или какую часть числа *b* составляет число *a*. Число *a* − это *предыдущий* член, *b* − *последующий* член отношения.

Примеры: $\frac{8}{2}$ − отношение 8 к 2; $\frac{3}{5}$ − отношение 3 к 5; $\frac{1}{11}$ − отношение 1 к 11.

Пропорция − это равенство двух отношений, то есть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a и d− это крайние члены пропорции, b и c − это средние члены пропорции.

Примеры: $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$; $\frac{6}{3} = \frac{3}{1{,}5}$.

Текст 22.

Свойства пропорции

Произведение *крайних* членов пропорции равно произведению *средних* членов пропорции, то есть если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Числа *a, b, c, d* составляют пропорцию, если $a \cdot d = b \cdot c$.

В пропорции можно *менять местами* крайние и средние члены или те и другие одновременно.

Чтобы найти неизвестный средний (крайний) член пропорции, нужно произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции.

Примеры:

1. К задуманному числу прибавили седьмую часть этого же числа, и получилось 336. Найдите задуманное число.

Пусть неизвестное число равно x. Составим уравнение, исходя из условия: $\frac{8}{7}x = 336 \Leftrightarrow x = 294.$

2. Задумали число, которое на 18 больше, чем третья часть этого задуманного числа. Найдите задуманное число.

Пусть неизвестное число равно x. Составим уравнение, исходя из условия: $x = \frac{1}{3}x + 18 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 18 \Leftrightarrow x = 27.$

3. Число увеличили в три раза, и получилось 99. Найдите исходное число.

Вычислим: $3x = 99;\ x = 33.$

4. Если задуманное число умножить на три, то результат окажется на 365 больше половины задуманного числа. Найдите задуманное число.

Пусть неизвестное число равно x. Составим уравнение, исходя из условия: $3x - 365 = \frac{1}{2}x, \qquad \frac{5}{2}x = 365, \qquad x = 146.$

5. Если задуманное число умножить на два, то результат будет на 30 больше половины этого задуманного числа. Найдите задуманное число.

Пусть неизвестное число равно x. Составим уравнение, исходя из условия: $2x = \frac{1}{2}x + 30 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 30 \Leftrightarrow x = 20.$

6. Задумали число, которое на 20 больше, чем пятая часть этого задуманного числа. Найдите задуманное число.

Пусть неизвестное число равно x. Составим уравнение, исходя из условия: $x = \frac{1}{5}x + 20 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = 20 \Leftrightarrow x = 25.$

7. Число увеличили в четыре раза, и получилось 100. Найдите исходное число.

Вычислим: $4x = 100;\ x = 25.$

8. Велосипедист за два часа доехал от пункта А до пункта Б. За первый час он проехал семь десятых пути, а за второй час − оставшиеся 12 км. Сколько километров проехал велосипедист за первый час?

Пусть x − длина всего пути. В первый час велосипедист проехал $\frac{7}{10} \cdot x.$ Составим уравнение: $\frac{7}{10} \cdot x + 12 = x \Leftrightarrow x = 40.$ Таким образом, в первый час велосипедист проехал 28 км.

9. За первый час велосипедист проехал три седьмых всего пути, а за второй − оставшиеся 28 км. Сколько всего километров велосипедист проехал за два часа?

Пусть весь путь занял x часов. Составим уравнение, исходя из условия: $\frac{3}{7}x + 28 = x \Leftrightarrow \frac{4}{7}x = 28 \Leftrightarrow x = 49.$

10. Собрали 15 кг. вишни и разложили в два ящика. В первый ящик поместилось две пятых всего количества собранной вишни. Сколько килограммов вишни во втором ящике?

Во втором ящике находится: $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6.$ Таким образом, во втором ящике находится 15 − 6 = 9 кг.

Задания для самостоятельной работы

1. Доярка перелила 12 л молока из ведра в два бидона. В первом бидоне оказалось $\frac{2}{3}$ всего молока. Сколько литров молока во втором бидоне?

2. Если задуманное число умножить на два, то результат окажется на 456 больше половины задуманного числа. Найдите задуманное число.

3. В первый день турист прошёл три пятых всего пути, а во второй − оставшиеся 18 км. Сколько всего километров турист прошёл за два дня?

4. В книге 320 страниц. Петя прочитал $\frac{1}{5}$ книги. Сколько ему страниц осталось прочитать?

5. Число увеличили в три раза, и получилось 99. Найдите исходное число.

6. Число уменьшили на четверть, и получилось 120. Найдите исходное число.

7. В олимпиаде по литературе принимало участие 48 школьников. Треть участников олимпиады − мальчики. Сколько девочек принимали участие в олимпиаде по литературе?

8. Если задуманное число умножить на три, то результат окажется на 365 больше половины задуманного числа. Найдите задуманное число.

9. Задуманное число на 140 больше, чем пятая часть самого задуманного числа. Найдите задуманное число.

10. Число увеличили на 77, и оно составило $\frac{10}{3}$ от исходного числа. Найдите исходное число.

2.5 Процент числа

Текст 23.

Процент числа − это сотая часть числа. Процент обозначается значком %. Например, 5%, 25%, 49%. Если число принять за 1, то 1% составляет 0,01 этого числа. 25% составляют 0,25 числа. Чтобы число процентов выразить в виде дроби, нужно число процентов разделить на 100. Например, 135% = 1,35; 2,7% = 0,027.

Нахождение процентов от числа.

Чтобы найти a% от числа b, нужно число b умножить на a и разделить на 100. Например, 20% от 70 составляют 14.

Примеры:

1. Задумали три числа. Первое число составляет 42% суммы всех трёх чисел, второе − 30% этой суммы. Найдите сумму всех трёх чисел, если разность между наибольшим и наименьшим числами равна 77. Запишите решение и ответ.

Решение.

Наименьшее число составляет 100% − 42% − 30% = 28% от общей суммы. Значит, разность между наибольшим и наименьшим числами составляет 42% − 28% = 14% от общей суммы, а сумма всех чисел равна 77:0,14 = 550.

2. Петя в компьютерном магазине купил товары на сумму 1200 рублей. На покупку клавиатуры было израсходовано 40% этой суммы, а на покупку мыши − 25% всей суммы. Сколько рублей стоили остальные товары, купленные Петей?

Решение.

На покупку остальных товаров было израсходовано 100%− 40%− 25% = 35% всей суммы, что составляет $1200 \cdot 0{,}35 = 420$ рублей.

3. В январе весы стоили 3200 рублей. В феврале они подешевели на 5%, а в марте – ещё на 15%. Сколько рублей стали стоить весы в апреле?

Решение.

В феврале весы стоили $3200 \cdot 0{,}95 = 3040$ рублей, а в марте они стали стоить $3040 \cdot 0{,}85 = 2584$ рубля.

4. Сумма трех чисел равна 125. Первое число составляет 54% этой суммы. Второе число в три раза меньше первого. Найдите разность между наибольшим и наименьшим числами. Запишите решение и ответ.

Решение.

Наименьшее число составляет 100% − 54% − 18% = 28% от общей суммы. Значит, разность между наибольшим и наименьшим числами составляет 54% − 18% = 36% от общей суммы то есть: $125 \cdot 0{,}36 = 45$.

5. Сумма трёх чисел равна 135. Первое число составляет 15% этой суммы. Второе число в три раза больше первого. Найдите третье число.

Решение.

Первое число равно $0{,}15 \cdot 135 = 20{,}25$.

Второе число равно $3 \cdot 20{,}25 = 60{,}75$.

Третье число равно $135 - (20{,}25 + 60{,}75) = 54$.

6. Цена на товар сначала понизилась на 25%, после чего понизилась еще на 20%. Найдите разность между первоначальной и конечной ценой, если после всех превращений товар стал стоить 12000 руб.

Решение.

Найдем цену до второго понижения: $12000 : 0{,}8 = 15000$ руб. Вычислим, сколько стоил товар изначально: $15000 : 0{,}75 = 20000$ руб. Найдем разность между первоначальной и конечной ценой: $20000 - 12000 = 8000$ руб.

Решение.

7. На конец воскресенья в магазине было 220 шкафов. В понедельник было продано 40 шкафов. Определите, сколько стало шкафов в магазине, если во вторник их количество пополнилось в размере 40% от оставшихся после продажи в понедельник 40 шкафов.

Решение.

После того, как в понедельник продали 40 шкафов, в магазине их осталось $220 - 40 = 180$ штук. Во вторник их количество увеличилось на 40%, то есть шкафов в магазине стало $180 \cdot 1{,}4 = 252$.

8. Петя потратил в компьютерном магазине 800 рублей. На покупку клавиатуры он израсходовал 35% этой суммы, а на покупку мыши – 20% этой суммы. Сколько рублей стоили остальные товары, купленные Петей? Запишите решение и ответ.

Решение.

На покупку остальных товаров было израсходовано 100%−35%−20%=45% всей суммы, что составляет $800 \cdot 0{,}45=360$ рублей.

9. Первое число составляет 75% третьего числа, а второе − 40% третьего числа. Найдите первое число, если известно, что оно больше второго на 28.

Решение.

Разница между первым и вторым числами составляет 75%− 40%= 35% третьего числа. Следовательно, третье число равно $28:0{,}35 = 80$. Тогда первое число равно $80 \cdot 0{,}75 = 60$.

10. Коля дал в долг своему другу некоторую сумму денег в марте. Начиная с апреля, друг выплачиваете ему 20% от оставшейся суммы долга каждый месяц. Определите, сколько одолжил другу Коля, если в мае он получил 5400 руб.

Решение.

Выясним, сколько осталось выплатить друг Коли в мае: $5400:0{,}2= 27000$ руб. Найдем теперь, сколько всего должен был выплатить Коле друг: $27000:0{,}8 = 33750$ руб.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. В январе весы стоили 3200 рублей. В феврале они подешевели на 5%, а в марте − ещё на 15%. Сколько рублей стали стоить весы в апреле?

2. Петр собрался в путешествие на велосипеде. В первый день он проехал 20% от всего пути, а во второй − на 15% меньше, чем в первый день. Определите, сколько осталось проехать Петру, если длина его маршрута составляет 720 км.

3. Егор взял у приятеля взаймы 20000 руб. в декабре. Каждый месяц, начиная с января, он выплачивает 20% от оставшейся суммы долга. Сколько денег он заплатит приятелю в феврале?

4. Федя прошел в первый день своего пути 20% от запланированного маршрута, во второй день он прошел 24% от оставшегося маршрута. Определите, сколько всего запланировал пройти Федя если во второй день он прошел 24 км?

5. Тарас взял в долг у приятеля в сентябре. Каждый месяц, начиная с октября, он выплачивает 25% от оставшейся суммы. Определите, какую сумму взял в долг у своего приятеля Тарас, если он заплатил в ноябре 3000 руб.

6. Первого апреля цену на набор елочных игрушек снизили на 20%. Первого мая цену на этот набор ещё раз снизили на 20%. После

этого набор стал стоить 160 руб. Сколько стоил набор 31 марта? Запишите решение и ответ.

7. Сумма трех чисел равна 125. Первое число составляет 54% этой суммы. Второе число в три раза меньше первого. Найдите разность между наибольшим и наименьшим числами. Запишите решение и ответ.

8. В январе фен стоил 4400 рублей. В феврале он подешевел на 15%, а в марте − ещё на 5%. Сколько рублей стал стоить фен в апреле?

9. Петя в компьютерном магазине купил товары на сумму 1200 рублей. На покупку клавиатуры было израсходовано 45% этой суммы, а 40% всей суммы − на покупку мыши. Сколько рублей стоили остальные товары, купленные Петей?

10. Цены на крабов сначала понизились на 20%, а затем повысились на 25%. Сколько изначально стоили крабы, если после повышения цен они стоили 150 руб.? Запишите решение и ответ.

11. Найти: 40% от 80; 12,5% от 48; 35% от 60; 17% от 92; 25% от 64; 7% от 52.

Текст 24.

Задачи на проценты, сплавы и смеси

1. Смешав 60% и 30% растворы кислоты и добавив 5 кг. чистой воды, получили 20% раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг. воды добавили 5 кг. 90% раствора той же кислоты, то получили бы 70% раствор кислоты. Сколько килограммов 60% раствора использовали для получения смеси?

Решение.

Пусть x кг. и y кг. − массы первого и второго растворов, взятые при смешивании. Тогда $x+y+5$ кг. – масса полученного раствора, содержащего $0,6x+0,3y$ кг. кислоты. Концентрация кислоты в полученном растворе 20%, откуда $0,6x+0,3y=0,2(x+y+5)$.

Решим систему двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} 0,6x+0,3y=0,2(x+y+5), \\ 0,6x+0,3y+0,9\cdot 5=0,7(x+y+5); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,4x+0,1y=1, \\ 0,1x+0,4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

Замечание. Решение можно сделать несколько проще, если заметить, что из полученных уравнений следует: $4,5=0,5(x+y+5)$, откуда $x+y=4$. Первое уравнение принимает вид $0,3x+1,2=1,8$, откуда $x=2$.

2. Имеется два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 60%, а во втором − 45% меди. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 55% меди?

Решение.

Пусть первый сплав взят в количестве x кг., тогда он будет содержать $0{,}6x$ кг. меди, а второй сплав взят в количестве y кг., тогда он будет содержать $0{,}45y$ кг. меди. Соединив два этих сплава, получим сплав меди массой $x + y$, по условию задачи он должен содержать $0{,}55(x + y)$ меди. Следовательно, можно составить уравнение: $0,6x+0,45y=0,55(x+y)$. Выразим x через y: $x=2y$.

Следовательно, отношение, в котором нужно взять сплавы: $\frac{x}{y}=\frac{2}{1}$.

3. При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получили раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

Решение.

Пусть первый раствор взят в количестве x грамм, тогда он содержит $0{,}2x$ грамм чистой кислоты, а второй раствор взят в количестве y грамм, тогда он содержит $0{,}5y$ грамм чистой кислоты. При смешивании двух этих растворов получится раствор массой $x + y$ грамм, по условию задачи, он содержит $0{,}3(x + y)$ чистой кислоты. Следовательно, можно составить уравнение: $0,2x+0,5y=0,3(x+y)$.

Выразим x через y: $x=2y$. Следовательно, отношение, в котором были взяты растворы: $\frac{x}{y}=\frac{2}{1}$.

4. На пост главы администрации города претендовало три кандидата: Журавлёв, Зайцев, Иванов. Во время выборов за Иванова было отдано в 2 раза больше голосов, чем за Журавлёва, а за Зайцева − в 3 раза больше, чем за Журавлёва и Иванова вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя?

Решение.

Заметим, что победителем на выборах окажется Зайцев. Пусть количество голосов, отданных за Зайцева равно x. Тогда за Журавлёва и Иванова вместе отдали $\frac{x}{3}$. Процент голосов, отданных за Зайцева $x:\left(x+\frac{x}{3}\right)\cdot 100=75\%$.

5. Первый сплав содержит 5% меди, второй − 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Решение.

Пусть масса первого сплава x кг. Тогда масса второго сплава (x+4) кг, а третьего − (2x+ 4) кг. В первом сплаве содержится 0,05x кг. меди, а во втором − 0,13(x + 4) кг. Поскольку в третьем сплаве содержится 0,1(2x+ 4) кг. меди, составим и решим уравнение:

$$0,05x+0,13(x+4)=0,1(2x+4) \Leftrightarrow 0,02x=0,12 \Leftrightarrow x=6.$$

Значит, масса третьего сплава равна 16 кг.

6. Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные − 28%. Сколько сухих фруктов получится из 288 кг. свежих фруктов?

Решение.

Свежие фрукты содержат 20% питательного вещества, а высушенные − 72%. В 288 кг. свежих фруктов содержится 0,2·288= 57,6 кг. питательного вещества. Такое количество питательного вещества будет содержаться в $\frac{57,6}{0,72}=80$ кг. высушенных фруктов.

7. Смешали некоторое количество 10% раствора некоторого вещества с таким же количеством 12% раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Пусть взяли x г. 10−процентного раствора, тогда взяли и x г. 12% раствора. Концентрация раствора − масса вещества, разделённая на массу всего раствора. В первом растворе содержится $0,1x$ г., а во втором – $0,12x$ г. Концентрация получившегося раствора равна $\frac{0,1x+0,12x}{x+x}=0,11,$ то есть 11%.

8. Свежие фрукты содержат 86% воды, а высушенные − 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг. высушенных фруктов?

Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 14%, а высушенных − 77%. Значит, для приготовления 72 кг. высушенных фруктов требуется $\frac{77}{14}\cdot 72=396$ кг. свежих.

9. Имеются два сосуда, содержащие 10 кг. и 16 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится рас-

твор, содержащий 55% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 61% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Пусть концентрация первого раствора − x, концентрация второго раствора − y. Составим систему уравнений согласно условию задачи и решим ее:

$$\begin{cases} 10x+16y=(10+16)\cdot 0,55 \\ x+y=2\cdot 0,61. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+16\cdot(1,22-x)=14,3 \\ y=1,22-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,87 \\ y=0,35. \end{cases}$$

Таким образом, в первом растворе содержится $10\cdot 0,87=8,7$ килограмма кислоты.

10. Имеются два сосуда, содержащие 4 кг. и 16 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 57% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Пусть концентрация первого раствора − х, концентрация второго раствора − у. Составим систему уравнений согласно условию задачи:

$$\begin{cases} 4x+16y=(4+16)\cdot 0,57 \\ x+y=2\cdot 0,6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+16\cdot(1,2-x)=11,4 \\ y=1,2-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,65 \\ y=0,55. \end{cases}$$

Таким образом, в первом растворе содержится $4\cdot 0,65=2,6$ килограмма кислоты.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Имеются два сосуда, содержащие 40 кг. и 30 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 73% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 72% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

2. Имеются два сосуда, содержащие 40 кг. и 20 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 33% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 47% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

3. Имеются два сосуда, содержащие 12 кг. и 8 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 65% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

4. Имеются два сосуда, содержащие 24 кг. и 26 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 39% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 40% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

5. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг. и 20 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 81% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 83% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

6. Имеются два сосуда, содержащие 22 кг. и 18 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 32% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 30% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

7. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг. и 42 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 40% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

8. Имеются два сосуда, содержащие 48 кг. и 42 кг. раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 42% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 40% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

9. Смешали некоторое количество 21% раствора некоторого вещества с таким же количеством 95% раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

10. В марте комбинат произвёл 50 тонн сливочного масла, а в апреле – на 30% больше. Сколько тонн сливочного масла комбинат произвёл в апреле?

Ответьте на вопросы:

1. Что такое числитель и знаменатель дроби?
2. Какая дробь называется правильной, неправильной, смешанной?
3. Сформулируйте правило сложения и вычитания обыкновенных дробей с равными и разными знаменателями.
4. Сформулируйте правило умножения и деления обыкновенных дробей.

5. Какая дробь называется десятичной?

5. Что называется отношением, пропорцией?

6. Сформулируйте свойства пропорции.

7. Что называется процентом числа? Какие основные задачи на проценты вы знаете?

§3. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

3.1 Целые числа

Текст 25.

Результат сложения и умножения натуральных чисел всегда является *натуральным числом*. Вычитание не всегда выполнимо, если оставаться в области натуральных чисел. Например, число, которое получено в результате вычитания $(4 - 7)$ не является натуральным.

Для образования разности любых двух натуральных чисел необходимо расширить совокупность чисел, вводя ноль и целые отрицательные числа $-1, -2, -3 \ldots -n, \ldots$

Натуральные числа называют также *целыми положительными* числами. Если хотят подчеркнуть, что данное число положительно, то перед ним ставится знак «+», но, как правило, пишут не +4, а просто 4 и т. д., перед отрицательными числами знак «−» ставится обязательно. *Число ноль не относится ни к отрицательным, ни к положительным числам.*

Числа n и $-n$ называют *противоположными.* Например, противоположными являются числа 3 и −3. Вся совокупность целых чисел $-n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n$, состоит из целых положительных (натуральных) чисел, целых отрицательных чисел и нуля.

Теперь, во множестве всех целых чисел, действие вычитания (так же, как и сложения) всегда выполнимо. При этом действие вычитания может быть сведено к сложению с числом, противоположным вычитаемому: $a - b = a + (-b); a - (-b) = a + b$.

Примеры: $18 - 21 = -3$; $71 - 71 = 0$; $43 - (-12) = 43 + 12 = 55$.

Для умножения или деления целых чисел вводится правило знаков: если a и b − положительные, то $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -a\cdot b$ или $(-a):b = a:(-b) = -(a:b)$. В частности, $(-1) - a = -a$ или $a:(-1) = -a$.

Таким образом, произведение или частное двух чисел одного знака есть положительное число, двух чисел противоположного знака − отрицательное число. Число, противоположное данному, равно произведению данного числа на минус единицу. Произведение любого числа на ноль равно нулю.

Примеры: $(-3)\cdot 7 = -21$; $(-4)\cdot(-8) = 32$; $72:(-9) = -8$; $(-54):(-6) = 9$.

Текст 26.

1. Приведите пример натурального числа, большего 12, которое делится на 12 и не делится на 8. В ответ запишите двузначное число.

Решение.

Прежде всего, необходимо отобрать числа, кратные 12, то есть: 24, 36, 48, 60 и т. д. Заметим, что число 36 делится на 12, но не делится на 8.

Другими возможными ответами являются числа 60 или 84.

2. Напишите число, в котором 9 сотен 0 десятков 3 единицы.

Решение.

Запишем число в виде: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

Получаем: $9 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 3 = 900 + 0 + 3 = 903$.

3. Приведите пример натурального двузначного чётного числа, меньшего 50, которое делится на 7 и 21.

Решение.

Прежде всего необходимо привести пример двузначных чисел меньше 50, кратных 7, то есть: 14, 21, 28, 35, 42, 49. Чётными из них являются 14, 28, 42, причем только 42 кратно еще и 21, значит, 42 − искомое число.

4. Приведите пример натурального трёхзначного числа, меньшего 201, которое делится на 20 и 30.

Решение.

Запишем сначала все трёхзначные числа меньше 201, кратные 20, то есть: 100, 120, 140, 160, 180, 200. Из них кратны 30 числа 120, 180.

5. Приведите пример натурального двузначного числа, кратного 11, сумма цифр которого кратна 3, но не кратна 9.

Решение.

Запишем для начала все натуральные двузначные числа, кратные 11, то есть: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Из них сумма цифр кратна только у 33: $3+3=6$, 66: $6+6=12$, 99: $9+9=18$. Из них сумма цифр кратна 9 только у 99, значит, ответом будут числа 33 или 66.

6. Назовите наименьшее натуральное трёхзначное число, кратное 15 и 9.

Решение.

Запишем для начала первые несколько трехзначных натуральных чисел, кратных 15, то есть: 105, 120, 135, 150 и т. д. Заметим, что число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9, значит, числа 105, 120 не делятся на 9, а вот 135 уже делится, значит, наименьшее трехзначное натуральное число кратное 9, это 135.

7. Напишите число, в котором 7 тысяч 8 единиц 0 сотен 0 десятков.

Решение.

Запишем число в виде: $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$.

Получаем: $7 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8 = 7000 + 0 + 0 + 8 = 7008$.

8. Сколько тысяч в миллионе?

Решение.

Запишем 1 миллион: 1000000. Запишем 1 тысячу: 1000.

Поделим 1 миллион на 1 тысячу: 1000000:1000 = 1000.

9. Сколько уникальных цифр использовано для записи числа 640046?

Решение.

В записи числа 640046 использовано три цифры, это: 0, 4 и 6.

10. Напишите число, большее 387627 на 3254.

Решение.

За числом 387627 через 3254 числа следует: $387627 + 3254 = 390881$.

Задания для самостоятельной работы

1. Напишите наибольшее число, предшествующее числу 301, кратное 5, но не кратное 10.
2. Напишите пример натурального трехзначного числа, меньшего 200, которое кратно 12 и 18.
3. Назовите наименьшее число, идущее после 1200, которое было бы кратно 9.
4. Среди трехзначных чисел меньше 200 найдите такие, которые кратны 21 и одновременно не кратны 63. Запишите эти числа в порядке возрастания.
5. Напишите число, которое на 1756 больше числа 8999.
6. Найдите все двузначные числа меньше 50, которые кратны 12 и одновременно кратны 16.
7. Запишите цифрами число 11,5 млн.
8. Найдите все двузначные числа, которые кратны 15 и одновременно не кратны 25. Сложите эти числа, затем умножьте полученную сумму на 7. В ответ запишите найденное произведение.
9. Среди чисел меньших 140 найдите четные числа, которые кратны 17 и одновременно не кратны 4.
10. Найдите и запишите двузначное число, которое кратно 7 и одновременно 13.
11. Вычислить:

a) $(-3)\cdot(-5) - 17\cdot(-4)$;

b) $4\cdot(-12) - (-63):(-7)$;

c) $(25 - 28)\cdot(31 - 42) - (17 - 22)\cdot(47 - 55)$;

d) $24:(-6) - (-28):(-4)$;

e) $(38-53):(29-24)-(72-68)\cdot(53-64)$;
f) $(48-55)\cdot(25-17)-(15-96):(32-41)$;
g) $[(46-91):(-9)-56:(84-92)]\cdot(-4)-(-13-11)\cdot 2$.

3.2 Рациональные числа

Текст 27.

Рациональное число − это число, которое можно записать в виде отношения $\frac{a}{b}$, где числитель a − целое, а знаменатель b − натуральное число. Если a делится на b нацело, то рациональное число − целое; в противном случае рациональное число называется дробным.

Оно считается положительным, если a − положительное, и отрицательным, если a − отрицательное.

К рациональным числам относятся:

− все целые числа;

− обыкновенные дроби, как положительные, так и отрицательные;

− конечные и бесконечные периодические десятичные дроби.

Пример рациональных чисел: 0; 2; −4; −8;

На множестве рациональных чисел выполнимы все арифметические действия (кроме деления на ноль). Сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел также являются рациональными числами. Правила действий над рациональными числами такие же, как и для целых чисел. Для сложения и умножения справедливы те же основные законы, что и для натуральных чисел.

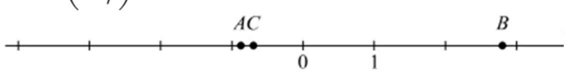
Примеры:

1. Отметьте и подпишите на координатной прямой точки: $A(-0{,}86), B(2{,}81), C\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Решение.

Точку B можно подписать сразу, с A и C нужно разобраться отдельно.

$$A(-0{,}86) < C\left(-\frac{5}{7}\right).$$

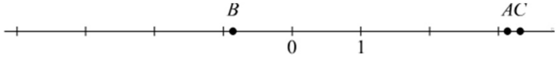


2. Отметьте и подпишите на координатной прямой точки: $A\left(3\frac{2}{15}\right), B(-0{,}86), C(3{,}33)$.

Решение.

Точку B можно подписать сразу, с A и C нужно разобраться отдельно.

$A\left(3\frac{2}{15}\right) < C(3,33)$

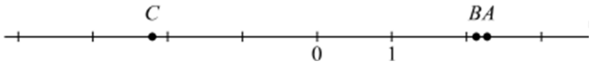


3. Отметьте и подпишите на координатной прямой точки: $A\left(2\frac{4}{15}\right), B(2,12), C(-2,18).$

Решение.

Точку C можно подписать сразу, с B и A нужно разобраться отдельно.

$A\left(2\frac{4}{15}\right) < B(2,12)$



Задания для самостоятельной работы

Отметьте и подпишите на координатной прямой точки:

1. $A\left(1\frac{3}{4}\right)$, $B\left(1\frac{4}{5}\right)$ и $C(-0,3).$
2. $A\left(2\frac{2}{3}\right)$, $B(-1,6)$ и $C(2,8).$
3. $A(1,36), B\left(-2\frac{11}{12}\right), C(-2,73).$
4. $A(1,85), B\left(1\frac{8}{11}\right), C\left(-2\frac{5}{7}\right)$
5. $A(2,35)$, $B\left(\frac{5}{14}\right)$ и $C\left(\frac{8}{21}\right).$
6. $A(-3,15), B(2,77), C\left(2\frac{9}{14}\right)$
7. $A(1,6)$, $B\left(1\frac{7}{12}\right)$ и $C(-1,7).$

3.3 Числовая ось (координатная прямая)

Текст 28.

Числовая ось (координатная прямая) − это прямая линия, которая имеет начало отсчёта (точка 0), направление и единицу масштаба или масштабный отрезок. За *положительное* направление принято направление вправо от точки 0. Противоположное направление − *отрицательное*.

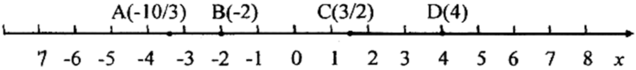


Рисунок 3. Числовая ось (координатная прямая)

Рациональные числа изображают с помощью точек числовой оси. Целые числа изображают точками, которые получают откладыванием масштабного отрезка нужное число раз вправо от начала *0* в случае положительного целого числа и влево − в случае отрицательного числа.

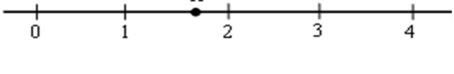
Ноль изображается начальной точкой *0*. Дробные (рациональные) числа также изображают точками оси. Целых чисел имеется бесконечное множество, но на числовой оси целые числа изображаются точками, которые расположены «редко». Целочисленные точки оси отстоят от соседних точек на единицу масштаба. Рациональные точки расположены на оси «густо». На любом, сколь угодно малом участке оси имеется бесконечно много точек, которые изображают рациональные числа.

Ответьте на вопросы:

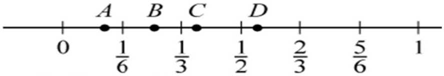
1. Какие числа называют целыми, противоположными?
2. Сформулируйте правило умножения чисел с разными и одинаковыми знаками.
3. Какие числа называются рациональными?
4. Что такое числовая ось (координатная прямая)?
5. Как на числовой оси изображаются положительные и отрицательные числа?

Задания для самостоятельной работы

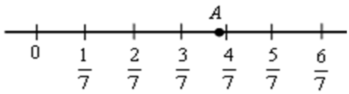
1. Какое из чисел $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$ отмечено на координатной прямой точкой A?



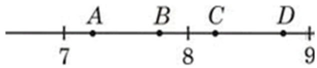
2. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\frac{3}{8}$. Какая это точка?



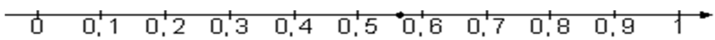
3. Одно из чисел $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{12}$ отмечено на координатной прямой точкой A. Укажите это число.



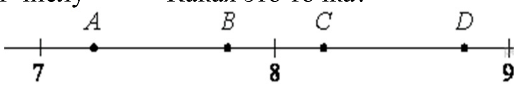
4. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$. Какая это точка?



5. Какому из следующих чисел $\frac{10}{23}$; $\frac{12}{23}$; $\frac{13}{23}$; $\frac{14}{23}$ соответствует точка, отмеченная на координатной прямой?

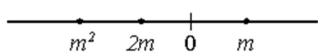


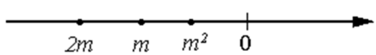
6. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{53}$. Какая это точка?

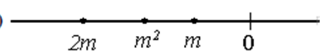


7. Известно, что число m отрицательное. На каком из рисунков точки с координатами $0,\ m,\ 2m, m^2$ расположены на координатной прямой в правильном порядке?

1) 

3) 

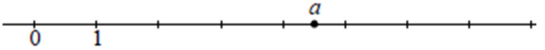
2) 

4) 

8. На координатной прямой отмечена точка A.

Известно, что она соответствует одному из четырех указанных чисел: $\frac{181}{16}$; $\sqrt{37}$; 0,6; 4. Какому из чисел соответствует точка A?

9. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

1) $a - 8 > 0$; 2) $7 - a < 0$; 3) $a - 3 > 0$; 4) $2 - a > 0$.

§4. ВОЗВЕДЕНИЕ ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ

4.1 Степени с натуральным показателем

Текст 29.

Степенью числа a с показателем n называется произведение множителей, каждый из которых равен a: a^n − «a» в степени «n», где a − это основание степени; n − показатель степени.

a^2 − «а во второй степени», «а в квадрате», «а квадрат»;

a^3 − «а в третьей степени», «а в кубе», «а куб»;

a^4 − «а в четвёртой степени», «а в степени четыре».

Примеры: $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $4^2 = 16$; $4^3 = 64$; $5^2 = 25$; $2^4=16$; $6^2=36$.

Чётная степень отрицательного числа есть число положительное.

Примеры: $(-1{,}2)^2 = 1{,}44$; $(-0{,}5)^2 = 0{,}25$; $(-0{,}3)^2 = 0{,}09$; $(-3)^4 = 81$; $(-1{,}4)^2 = 1{,}96$; $(-2)^6 = 64$.

Нечётная степень отрицательного числа есть число отрицательное.

Примеры: $(-2)^3 = -8$; $(-3)^3 = -27$; $(-2)^5= -32$; $(-2)^5=-32$.

Любая степень положительного числа есть число положительное.

При возведении нуля в любую натуральную степень получим 0, то есть: $0^n = 0$. При возведении единицы в любую степень получим 1, то есть: $1^n = 1$.

Задания для самостоятельной работы

1. Написать квадраты натуральных чисел от 1 до 20.
2. Написать куб и четвертую степень натуральных чисел 1 и - 5.

4.2 Свойства степеней

Текст 30.

1. При *умножении* степеней с *одинаковыми* основаниями показатели складываются, а основание остаётся прежним: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ и наоборот: $a^{(m+n)} = a^m \cdot a^n$.

Примеры: $2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7 = 128$; $3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$.

2. При *делении* степеней с *одинаковыми* основаниями показатели вычитаются, а основание остаётся прежним: $a^m : a^n = a^{(m-n)}$.

Примеры: $2^4 : 2^3 = 2^{4-3} = 2^1 = 2$; $3^3 : 3^2 = 3^{3-2} = 3^1 = 3$.

3. При *возведении* степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остаётся прежним: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Примеры: $(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$; $(5^2)^2 = 5^{2\cdot 2} = 5^4 = 625$.

4. Степень *произведения* равна произведению степеней множителей: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Примеры: $18^2 = (9\cdot 2)^2 = 9^2\cdot 2^2 = 81\cdot 4 = 324$; $2^4\cdot 5^4 = (2\cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$.

5. Степень *частного* равна частному степеней делимого и делителя: $a^n : b^n = (a:b)^n$.

Примеры: $4{,}5^2 = (9:2)^2 = 9^2:2^2 = 81:4 = 20{,}25$; $2^4:5^4 = (2:5)^4 = 0{,}4^4 = 0{,}0256$.

Ответьте на вопросы:

1. Что называется степенью числа a с показателем n?
2. Назовите свойства степеней.
3. Чему равна степень числа $a \neq 0$ с нулевым показателем?
4. Чему равна степень числа $a \neq 0$ с отрицательным показателем?

Примеры.

Найдите значение выражения:

1. $0{,}6 \cdot (-10)^3 + 50.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$0{,}6 \cdot (-10)^3 + 50 = 0{,}6 \cdot (-1000) + 50 = -600 + 50 = -550.$$

2. $80 + 0{,}9 \cdot (-10)^3.$

Решение.

Последовательно получаем: $80 + 0{,}9 \cdot (-10)^3 = 80 - 900 = -820.$

3. Запишите в ответе номера тех выражений, значение которых равно 0.

1) $(-1)^4 + (-1)^5$ 2) $(-1)^5 - (-1)^4$ 3) $(-1)^4 - (-1)^5$ 4) $(-1)^5 + (-1)^4$

Решение.

Найдём значения выражений:

1) $(-1)^4 + (-1)^5 = 1 - 1 = 0$

2) $(-1)^5 - (-1)^4 = -1 - 1 = -2,$

3) $(-1)^4 - (-1)^5 = 1 - (-1) = 2,$

4) $(-1)^5 + (-1)^4 = -1 + 1 = 0.$

Таким образом, верные выражения указаны под номерами 1 и 4.

4. Запишите в ответе номера тех выражений, значение которых равно −5.

1) $-4 \cdot 1{,}25 + 10$ 2) $-4 \cdot (-1{,}25) - 10$ 3) $4 \cdot (-1{,}25) - 10$ 4) $4 \cdot 1{,}25 - 10$

Решение.
Найдём значения выражений:
1) $-4\cdot 1,25+10=-5+10=5$
2) $-4\cdot(-1,25)-10=5-10=-5,$
3) $4\cdot(-1,25)-10=-5-10=-15,$
4) $4\cdot 1,25-10=5-10=-5.$
Таким образом, искомые выражения указаны под номерами 2, 4.
5. Запишите десятичную дробь, равную сумме
$3\cdot 10^{-1}+1\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-4}$.
Решение.
Найдём сумму:
$3\cdot 10^{-1}+1\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-4}=3\cdot 0,1+1\cdot 0,01+5\cdot 0,0001=0,3+0,01+0,0005=0,3105$
Найдите значение выражений:
6. $\frac{3^8\cdot 3^5}{3^9}$.
Решение.
Найдем значение выражения: $\frac{3^8\cdot 3^5}{3^9}=3^{8+5-9}=3^4=81.$
7. $80+0,4\cdot(-10)^3.$
Решение.
Последовательно получаем: $80+0,4\cdot(-10)^3=80-400=-320.$
8. $0,9\cdot(-10)^2-120.$
Решение.
Последовательно получаем: $0,9\cdot(-10)^2-120=90-120=-30.$
9. $-0,2\cdot(-10)^2+55.$
Решение.
Последовательно получаем: $-0,2\cdot(-10)^2+55=-20+55=35.$
10. $0,8\cdot(-10)^2-95.$
Решение.
Последовательно получаем: $0,8\cdot(-10)^2-95=80-95=-15.$

Задания для самостоятельной работы
Найдите значение выражения:
1. $0,7\cdot(-10)^3-20.$
2. $-0,7\cdot(-10)^2+90.$
3. $-90+0,7\cdot(-10)^3.$

4. $45+0,6\cdot(-10)^2.$

5. $-80+0,3\cdot(-10)^3.$

6. $0,6\cdot(-10)^3+50.$

7. $80+0,9\cdot(-10)^3.$

8. $5\cdot10^{-1}+6\cdot10^{-2}+4\cdot10^{-4}.$

9. $30\cdot(-0,1)^3+7\cdot(-0,1)^2-3,9.$

10. $-0,6\cdot(-9)^4+1,9\cdot(-9)^2-4.$

§ 5 ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

5.1 Корень числа

Текст 32.

Пусть $n > 1$ − натуральное число. *Корнем n−ой степени* из числа a называют число b, степень n которого равна числу а: $\sqrt[n]{a} = b$ (корень энной степени из а), если $b^n = a$.

Действие нахождения корня из числа a называют *извлечением* корня n−ой степени из числа a. Число a называют *подкоренным* числом, n − показателем корня, знак $\sqrt[n]{\ }$ − радикалом.

$\sqrt[2]{a}$ − корень *квадратный* из a, квадратный корень из a.

$\sqrt[3]{a}$ − корень *кубический* из a, кубический корень из a.

$\sqrt[4]{a}$ − корень четвёртой степени из a.

Примеры: $\sqrt{4}$ =2; $\sqrt{9}$=3; $\sqrt{16}$ =4; $\sqrt{0,25}$ = 0,5; $\sqrt{0,36}$ = 0,6;$\sqrt[3]{8}$ = 2; $\sqrt[4]{16} =$ 2.

Корень *чётной* степени из отрицательного числа *не существует*.

Пример: $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-9}$ − не существуют.

Корень *нечётной* степени из отрицательного числа есть отрицательное число.

Пример: $\sqrt[3]{-8} = -$ 2; − 3 = $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[5]{-32}$ = − 5.

5.2 Иррациональные и действительные числа

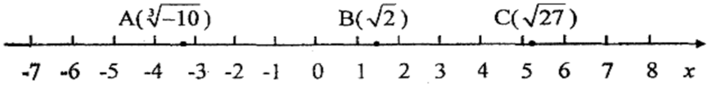
Текст 33.

Если корень числа нельзя выразить рациональным числом (то есть числом, которое можно записать в виде отношения $\frac{a}{b}$), то такое число называют *иррациональным*.

Иррациональными называют такие числа, которые нельзя записать в виде отношения $\frac{a}{b}$. Иррациональные числа − это бесконечные десятичные непериодические дроби.

Примеры: $\sqrt{2}$ ≈1,414213...; $\sqrt{13}$ ≈ 3,60555...; $\sqrt{7}$ ≈ 2,154434...

Действительные числа − это множество всех рациональных и иррациональных чисел. Действительные числа изображают с помощью точек числовой оси.



5.3 Свойства и преобразование корней

<u>Текст 34</u>.

1. Корень из *произведения* чисел равен произведению корней этих чисел и, наоборот, произведение корней этих чисел равно корню из произведения этих чисел: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

2. Корень из *частного* двух чисел равен частному корней этих чисел и, наоборот, частное корней чисел равно корню из частного этих чисел: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3. Для *возведения* корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, сохраняя показатель корня и, наоборот, для извлечения корня из степени числа нужно возвести корень числа в степень: $(\sqrt[n]{a})^{\mathrm{m}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

4. Если показатели корня и подкоренного выражения имеют общий делитель, то на него их можно сократить, не меняя величины корня. То есть, если $m = k{\cdot}p$, а $n = k{\cdot}q$, то: $(\sqrt[n]{a})^{\mathrm{m}} = (\sqrt[kp]{a})^{\mathrm{kq}} = (\sqrt[p]{a})^{\mathrm{q}}$.

5. Для *извлечения* корня из корня нужно перемножить показатели корней, сохранив подкоренное выражение: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[nm]{a})$.

6. Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то множитель можно вынести из–под корня:

$\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m\sqrt{a}$.

7. Множитель, который стоит перед корнем, можно внести под корень: $a^m\sqrt{a} = \sqrt[n]{a^{nm}}$.

8. Если корень из числа стоит в знаменателе дроби (иррациональность в знаменателе), то дробь можно преобразовать так, чтобы иррациональности в знаменателе не было (избавиться от иррациональности в знаменателе).

$N = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$ – множество натуральных чисел.

$Z = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$ – множество целых чисел.

$Q = \left\{\frac{m}{n}\right\}$, где $m \in Z; n \in N$ – множество рациональных чисел.

R–множество действительных чисел (рациональных и иррациональных), $\in$ – знак принадлежности.

Например: $7 \epsilon N$; $-8 \epsilon N$; $\frac{7}{8} \epsilon Q$.

Рациональное число (ratio − «отношение», частное).

Всякое рациональное число можно представить в виде десятичной дроби: $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{23}{20}=1{,}15$; $-\frac{1}{40}=-0{,}025$; $\frac{8}{37}=0{,}216216216$.

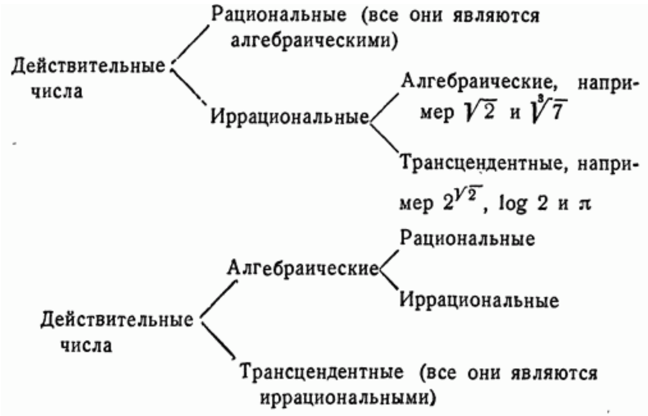


Схема 1. Структура действительных чисел

Примеры. Найдите значение выражения:

1. $\frac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\frac{0{,}3:0{,}01}{70}+\frac{2}{7}=1.$

a) $5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}=1\frac{4}{45}-\frac{1}{6}=1\frac{8-15}{90}=\frac{98-15}{90}=\frac{83}{90}$;

b) $\frac{83}{90}:5\frac{8}{15}=\frac{83}{90}:\frac{83}{15}=\frac{83\cdot 15}{90\cdot 83}=\frac{1}{6}$;

c) $4\frac{2}{3}+0{,}75=4\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=4\frac{8+9}{12}=4\frac{17}{12}=\frac{65}{12}$;

d) $\frac{65}{12}\cdot 3\frac{9}{13}=\frac{65}{12}\cdot\frac{48}{13}=20$;

e) $\frac{\mathbf{\frac{1}{6}}}{\mathbf{20}}\cdot 34\frac{2}{7}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{240}{7}=\mathbf{\frac{2}{7}}$;

f) $\frac{0{,}3:0{,}01}{70}=\frac{30}{70}=\mathbf{\frac{3}{7}}$;

g) $\mathbf{\frac{2}{7}}+\mathbf{\frac{3}{7}}+\frac{2}{7}=1$.

<u>*Ответьте на вопросы:*</u>

1. Может ли сумма двух рациональных чисел быть иррациональным числом?

2. Сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом?

3. Что называется обыкновенной дробью?

4. Какая дробь называется правильной (неправильной)?

5. Что называется смешанным числом?

6. Как перевести смешанное число в обыкновенную дробь?

7. Какая дробь называется десятичной?

8. Что называется периодической дробью?

9. Что называется иррациональным числом?

10. Что называется множеством действительных чисел?

11. Каков порядок действий при вычислениях?

Задания для самостоятельной работы:

1. Выберите среди данных чисел натуральные, целые, рациональные, иррациональные:

a) $4; -0{,}7; \cos 60^0; -5; \sqrt{\frac{1}{4}}; 0; \frac{5}{7}; \sqrt{11}; 4{,}3; \sin 45^0.$

b) $0{,}2; 5; \sqrt{31}; \frac{5}{7}; -62; \sqrt{0{,}3}; -1{,}3; 0; \sin 60^0; \cos 45^0$

2. Найдите значение выражения:

a) $$\frac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\frac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}.$$

b) $$\frac{0{,}5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0{,}125}{\frac{1}{3}+0{,}4+\frac{14}{15}}+\frac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\frac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}.$$

Примеры.

Найдите значение выражения:

1. $\sqrt{65^2-56^2}.$

Выполним преобразования:

$$\sqrt{65^2-56^2}=\sqrt{(65+56)(65-56)}=\sqrt{121\cdot 9}=11\cdot 3=33.$$

2. $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14}.$

Выполним преобразования: $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14}=\frac{4\cdot 7}{14}=2.$

3. $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7}).$

Выполним преобразования: $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7})=13-7=6.$

4. $\dfrac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}.$

Выполним преобразования:

$$\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}=\sqrt{\frac{2,8\cdot 4,2}{0,24}}=\sqrt{\frac{28\cdot 42}{24}}=\sqrt{49}=7.$$

5. $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}.$

Выполним преобразования:

$$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}=\left(\sqrt{\frac{27}{7}}-\sqrt{\frac{12}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}=\frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=2.$$

6. $\dfrac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}.$

Выполним преобразования: $\dfrac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}=\dfrac{7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}}=7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}=1.$

7. $\dfrac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}.$

Выполним преобразования: $\dfrac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[5]{\dfrac{10\cdot 16}{5}}=\sqrt[5]{32}=2.$

8. $\dfrac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}.$

Выполним преобразования:

$$\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}=\frac{13+2\sqrt{91}+7}{10+\sqrt{91}}=\frac{20+2\sqrt{91}}{10+\sqrt{91}}=\frac{2(10+\sqrt{91})}{10+\sqrt{91}}=2.$$

9. $5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}.$

Выполним преобразования: $5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=5\cdot 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=5\cdot 3=15.$

10. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[6]{49}.$

Выполним преобразования:

$$\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[6]{49}=49^{\frac{1}{3}}\cdot 49^{\frac{1}{6}}=49^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=49^{\frac{1}{2}}=(7^2)^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{1}{2}\cdot 2}=7.$$

Задания для самостоятельной работы

Найдите значение выражения:

1. $\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}.$

2. $(\sqrt{63}-\sqrt{28})\cdot\sqrt{7}$.
3. $(\sqrt{54}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$.
4. $\dfrac{(8\sqrt{3})^2}{8}$.
5. $(\sqrt{75}-\sqrt{48})\cdot\sqrt{12}$.

Ответьте на вопросы:

1. Что называют корнем *n*–ой степени из числа а?
2. Какие числа называют иррациональными?
3. Что такое действительные числа?
4. Назовите свойства корней.
5. Какие существуют преобразования корней?

§6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

6.1 Основные понятия. Виды алгебраических выражений

Текст 36.

Числовое выражение − это математическое выражение, которое состоит из чисел с использованием действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пример: $1{,}5\cdot(3{,}2 - 3\ )^2:(1{,}3 + 3^5\ )^3$.

Алгебраическое выражение − это математическое выражение, которое состоит из чисел и букв (переменных величин) с использованием действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Тождество − это равенство двух алгебраических выражений при любых значениях переменных.

Примеры:

a) $a + b = b + a$;

b) $a\cdot(b + c) = ab + ac$;

c) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Одночлен − это алгебраическое выражение, в котором могут быть только два действия − умножение и возведение в степень.

Пример: $2axy + 5y^3z^2 - x^2yz^3$.

Многочлен (полином) − это сумма одночленов.

Примеры:

$(3a^2b + 2ab^3)$ − двучлен;

$(2x^3y + 3xy^2 - xy)$ − трёхчлен;

$(1 + x + x^2 + x^3)$ − многочлен, полином.

Алгебраическая дробь − это дробь, которая состоит из переменных величин.

Иррациональное алгебраическое выражение − это выражение, в котором есть действие извлечения корня из переменных величин.

Текст 37.

Область допустимых значений (ОДЗ) алгебраических выражений

Если вместо букв подставлять числа, алгебраическое выражение будет принимать определенные числовые значения. Выражение $\frac{a}{b}$ имеет смысл при любых значениях a и при всех значениях $b \neq 0$.

Область допустимых значений алгебраического выражения − это множество числовых значений букв, при которых алгебраическое выражение имеет смысл.

6.2 Действия с алгебраическими выражениями

Текст 38.

Приведение подобных членов

Подобные члены − это одночлены, которые отличаются только числовыми множителями.

Пример: $3x^2 + 3x - 2x^2 + 5x$.

Здесь $3x^2$ и $(-2x^2)$ − подобные члены, $3x$ и $5x$ − подобные члены.

Сумму подобных членов можно заменить одним членом.

Приведение подобных членов − это сложение подобных членов.

Примеры:

$3x^2 + 3x - 2x^2 + 5x = x^2 + 8x$;

$4x^3y^2 - 2x^2y - x^3y^2 + 3x^2y = 3x^3y^2 + x^2y$.

Задания для самостоятельной работы

Привести подобные члены в многочленах:

1. $- a^4 + 2a^3 - 4a^4 + 2a^2 - 3a^2$;
2. $2a^2 - ax^3 - a^4 - a^2x^3 + ax^5 + 2a^4$;
3. $2x^4 + 3x^2 + 7 - 2x^6 - 3x^6 + 4x^2$;
4. $12ax^2 - x^3 - 6ax^2 + 3a^2x - 5ax^2 + 2x^3$.

Текст 39.

Сумма и разность многочленов

Для того чтобы сложить или вычесть *многочлены*, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Примеры:

$$(5x^2 - 4x + 3) + (3x^2 - x + 2) = 5x^2 - 4x + 3 + 3x^2 - x + 2 = 8x^2 - 5x + 5;$$
$$(5x^2 - 4x + 3) - (3x^2 - x + 2) = 5x^2 - 4x + 3 - 3x^2 + x - 2 = 2x^2 - 3x + 1.$$

Задания для самостоятельной работы

Сложить / вычесть многочлены:

1. $(12a + 16x) + (6a - 7x)$.
2. $(4x^2y + 8xy^2) - (3x^2y - 5xy^2)$.
3. $(13x - 11y + 10a) + (-15x + 10y - 15a)$.
4. $(4a^2 - 2ax - y^2) - (-5a^2 + 3y^2 - 2ax)$.

Текст 40.

Умножение многочленов

Чтобы умножить *одночлен на многочлен*, нужно одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример. $2x \cdot (x^3 + 3x^2 - 4x + 5) = 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x$.

Чтобы умножить *многочлен на многочлен*, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.

Примеры:

$(x + y) \cdot (x - 2y) = x^2 - 2xy + yx - 2y^2 = x^2 - xy - 2y^2$;

$(x + 3y - z) \cdot (2x - y + 2z) = 2x^2 - xy + 2xz + 6yx - 3y^2 + 6yz - 2zx + zy - 2=$
$= 2x^2 - 3y^2 - 2z^2 + 5xy + 7yz$.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить умножение многочленов:

a) $(x + 4) \cdot (x + 1)$;
b) $(a + x) \cdot (2a + 3x)$;
c) $(3a - x) \cdot (2a + 5x - 3)$;
d) $(4x + y + 2) \cdot (x - 3y)$;
e) $(3a - 2b + c) \cdot (a + 3b - 2c)$;
f) $(3x - 5y + 2z) \cdot (2x + 3y - 4z)$.

2. Выполнить действия с многочленами:

a) $a \cdot (a + x) - x \cdot (a - x)$;
b) $(a - 4) \cdot (a - 2) - (a - 1) \cdot (a - 3)$;
c) $(a^2 + 4a) \cdot (a - 1) - (a^2 - 1) \cdot (a + 2)$;
d) $(2x + 3y - z) \cdot (x - y + 2z) - (3x - y - 2z) \cdot (x + 5y + z)$;
e) $(5a - 2b + 3c) \cdot (a + b - 2c) - (2a + b - 3c) \cdot (a - 3b + 2c)$.

Текст 41.

Разложение многочлена на множители

Разложение многочлена на множители − это преобразование многочлена в *произведение* многочленов.

Примеры:

a) $3a + 3b = 3(a + b)$,
общий множитель одночленов $3a$ и $3b$ число 3 вынесли за скобки;
b) $7ax + 7ay = 7a \cdot (x + y)$;
c) $y \cdot (x - z) - z \cdot (x - z) = (x - z) \cdot (y - z)$;
d) $x^2 - 2x - xy + 2y = x \cdot (x - 2) - y \cdot (x - 2) = (x - 2) \cdot (x - y)$.

Задания для самостоятельной работы

Разложить многочлены на множители:

1. $-15ax - 20ay$;
2. $(a + x)^3 - a\cdot (a + x)^2$;
3. $3a^2x + 6ax^3$;
4. $10ay - 5cy + 2ax - cx$;
5. $a^3 - 2a^2 - a$;
6. $ax + 2a - 3x - 6$;
7. $x\cdot (a - c) + y\cdot (a - c)$;
8. $ax^2 - cx^2 - cx + ax - a + c$;
9. $2a\cdot (3b + c) - 3c\cdot (3b + c)$;
10. $5ax^2 - 10ax - yx + 2y - x + 2$;
11. $3\cdot (x + y) + (x + y)^2$;
12. $ax^2 + cx^2 - cx - ax + a + c$.

Текст 42.

Формулы сокращённого умножения

Формулами сокращённого умножения называют формулы:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *квадрат суммы*

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *квадрат разности*

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *куб суммы*

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ *куб разности*

$a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$ *разность квадратов*

$a^3 - b^3 = (a - b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$ *разность кубов*

$a^3 + b^3 = (a + b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$ *сумма кубов*

Формулы сокращённого умножения используют при *возведении* двучленов в квадрат и куб, а также при *разложении* многочленов на множители.

Примеры:

1. $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot(3x)\cdot(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$;
2. $(4a - 5b)^2 = (4a)^2 - 2\cdot(4a)\cdot(5b) + (5b)^2 = 16a^2 - 40ab + 25b^2$;
3. $(2a+ 3b)^3= (2a)^3+ 3\cdot(2a)^2\cdot(3b)+ 3\cdot(2a)\cdot(3b)^2+ (3b)^3= 8a^3+ 36a^2b+ 54ab^2 + +27b^3$;
4. $(x+2y)^3= x^3-3x^2\cdot(2y)+ 3x\cdot(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^2$;
5. $16x^2 - 25y^4 = (4x)^2 - (5y^2)^2 = (4x - 5y^2)\cdot(4x + 5y^2)$;
6. $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)\cdot(4x^2 + 6xy + 9y^2)$;
7. $64a^6 + 125b^3 = (4a^2)^3 + (5b)^3 = (4a^2 + 5b)\cdot(16a^4 - 20a^2b + 25b)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Возвести в квадрат и куб двучлены:

a) $(4a + 3b)^2$;
b) $(5b^3 - 4b^4)^2$;
c) $(2x - 7y)^3$;
d) $(3y^2 + 5z^3)^2$.

2. Разложить многочлены на множители:

a) $4x^2 - y^2$;
b) $(2a + 3b)^2 - (a - 2b)^2$;
c) $16a^2 - 9b^2$;
d) $27 - a^3$;
e) $x^4 - 16y^8$;
f) $64 + y^3$;
g) $(x + 3)^2 - 16$;
h) $27 + x^3y^3$;
i) $25 - (a + 3)^2$;
j) $8x^3 - 27y^9$;
k) $(y - 3)^2 - (2y + 1)^2$.

6.3 Действия с алгебраическими дробями

Текст 43.

Сокращение алгебраических дробей

Сокращение алгебраических дробей − это *деление* числителя и знаменателя на их *общий делитель*.

Сложение и вычитание алгебраических дробей

Если знаменатели дробей *одинаковые*, то действуем по правилу сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Если знаменатели дробей *разные*, то их сначала приводят к общему знаменателю. Числитель и знаменатель первой дроби умножают на знаменатель второй дроби, а числитель и знаменатель второй дроби умножают на знаменатель первой дроби.

Умножение и деление алгебраических дробей

Произведение двух дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель − произведению знаменателей.

При делении дроби на дробь числитель и знаменатель делителей меняются местами и выполняется умножение:

Примеры.

Найдите значение выражения:

1. $\dfrac{a+8}{a^2} : \dfrac{a+8}{a^2-a}$ при $a = -0,8.$

Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{a+8}{a^2}:\frac{a+8}{a^2-a}=\frac{a+8}{a^2}\cdot\frac{a(a-1)}{a+8}=\frac{a-1}{a}.$

Подставим значение $a=-0,8:$ $\frac{-0,8-1}{-0,8}=\frac{-1,8}{-0,8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}=2,25.$

2. $\frac{a(b-3a)^2}{3a^2-ab}-3a$ при $a=2,18,\ b=-5,6.$

Решение.

Раскроем скобки и приведём к общему знаменателю:

$\frac{a(b-3a)^2}{3a^2-ab}-3a=\frac{(b-3a)^2}{3a-b}-3a=-b+3a-3a=-b.$

Тем самым, искомое значение не зависит от a. Значение выражения при $b=-5,6$ равно $5,6$

3. $\frac{a^{-11}\cdot a^4}{a^{-3}}$ при $a=-\frac{1}{2}.$

Решение.

Упростим выражение: $\frac{a^{-11}\cdot a^4}{a^{-3}}=\frac{a^{-7}}{a^{-3}}=a^{-4}$

При $a=-\frac{1}{2}$, значение полученного выражения равно 16.

4. $\frac{a^2+4a}{a^2+8a+16}$ при $a=-2.$

Решение.

Упростим выражение: $\frac{a^2+4a}{a^2+8a+16}=\frac{a(a+4)}{(a+4)^2}=\frac{a}{a+4}.$

При $a=-2$, значение полученного выражения равно $-2:2=-1$.

5. $\frac{(m-7)^2-2(14-11m)-5}{m+4}$, если $m=-2,62.$

Решение.

Упростим выражение:

$\frac{(m-7)^2-2(14-11m)-5}{m+4}=\frac{m^2-14m+49-28+22m-5}{m+4}=\frac{m^2+8m+16}{m+4}=m+4.$

Найдём значение полученного выражения при $m=-2,62$:

$-2,62+4=1,38.$

6. $\left(a+\frac{1}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{a+1}$ при $a=-5.$

Решение.

Упростим выражение:

$$\left(a+\frac{1}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{a+1}=\frac{a^2+2a+1}{a}\cdot\frac{1}{a+1}=\frac{(a+1)^2}{a(a+1)}=\frac{a+1}{a}.$$

Подставим в полученное выражение значение $a=-5$:

$\frac{-5+1}{-5}=0,8.$

7. $\frac{x^2}{x^2-3xy}:\frac{x}{x^2-9y^2}$ при $x=5+3\sqrt{6}$, $y=2-\sqrt{6}.$

Решение.

Упростим выражение:

$$\frac{x^2}{x^2-3xy}:\frac{x}{x^2-9y^2}=\frac{x^2}{x(x-3y)}\cdot\frac{(x-3y)(x+3y)}{x}=x+3y.$$

Найдём значение выражения при $x=5+3\sqrt{6}$, $y=2-\sqrt{6}$:

$5+3\sqrt{6}+3(2-\sqrt{6})=5+3\sqrt{6}+6-3\sqrt{6}=11.$

8. $\frac{6c-c^2}{1-c}:\frac{c^2}{1-c}.$ при $c=1,2.$

Решение.

Упростим выражение: $\frac{6c-c^2}{1-c}:\frac{c^2}{1-c}=\frac{c(6-c)}{1-c}\cdot\frac{1-c}{c^2}=\frac{6-c}{c}.$

Найдём значение выражения при $c=1,2$:

$\frac{6-1,2}{1,2}=\frac{4,8}{1,2}=4.$

9. $\frac{c^2-ac}{a^2}:\frac{c-a}{a}$ при $a=5,\ c=26.$

Решение.

Упростим выражение: $\frac{c^2-ac}{a^2}:\frac{c-a}{a}=\frac{c(c-a)}{a^2}\cdot\frac{a}{c-a}=\frac{c}{a}.$

При $c=26$, значение полученного выражения равно 26:5 = 5,2.

10. $\frac{x^2}{x^2+6xy}:\frac{x}{x^2-36y^2}$ при $x=4-6\sqrt{6}, y=8-\sqrt{6}.$

Решение.

Упростим выражение:

$$\frac{x^2}{x^2+6xy}:\frac{x}{x^2-36y^2}=\frac{x^2}{x(x+6y)}\cdot\frac{(x-6y)(x+6y)}{x}=x-6y.$$

Найдём значение выражения при $x=4-6\sqrt{6}, y=8-\sqrt{6}$:

$4-6\sqrt{6}-6(8-\sqrt{6})=4-6\sqrt{6}-48+6\sqrt{6}=-44.$

Задания для самостоятельной работы

Найдите значение выражения:

a) $\frac{x^2}{x^2+6xy}:\frac{x}{x^2-36y^2}$ при $x=4-6\sqrt{6}, y=8-\sqrt{6}$.

b) $\frac{b}{a^2+ab}:\frac{b^2}{a^2-b^2}$ при $a=\sqrt{5}-1,\ b=\sqrt{5}+1$.

c) $\frac{x^2}{y-1}:\frac{x^3}{2y-2}$ при $x=0,5;\ y=-3$.

d) $\frac{64b^2+128b+64}{b}:\left(\frac{4}{b}+4\right)$ при $b=-\frac{15}{16}$.

e) $\frac{c^2-ac}{a^2}:\frac{c-a}{a}$ при $a=5,\ c=26$.

f) $\frac{xy+y^2}{8x}\cdot\frac{4x}{x+y}$ при $x=\sqrt{3}, y=-5,2$.

g) $\frac{xy+y^2}{15x}\cdot\frac{3x}{x+y}$ при $x=18,\ y=7,5$.

h) $\frac{(m-7)^2-2(14-11m)-5}{m+4}$, если $m=-2,62$.

i) $7b+\frac{2a-7b^2}{b}$, при $a=9$; $b=12$.

j) $\frac{(m-5)^2-7(1-4m)+63}{m+9}$, если $m=-3,64$.

6.4 Действия с иррациональными алгебраическими выражениями

Текст 45.

При преобразовании иррациональных алгебраических выражений используются все правила действий с корнями, а также правила действий с рациональными алгебраическими выражениями.

При преобразовании иррациональных алгебраических выражений используются *формулы сокращённого умножения*.

Примеры.

Найдите значение выражения:

1. $(6\sqrt{17}-1)(6\sqrt{17}+1)$.

Выполним преобразования: $(6\sqrt{17}-1)(6\sqrt{17}+1)=612-1=611$.

2. $\dfrac{3\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.

Используя свойства корня, запишем:

$\dfrac{3\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = 3 \cdot \sqrt{\dfrac{48}{3}} = 3 \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12.$

3. $\dfrac{(6\sqrt{2})^2}{3}$. Выполним преобразования: $\dfrac{(6\sqrt{2})^2}{3} = \dfrac{36 \cdot 2}{3} = 24$.

Задания для самостоятельной работы

Найдите значение выражения:

a) $\dfrac{(6\sqrt{5})^2}{24}$.

b) $(\sqrt{75} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{12}$.

c) $(\sqrt{13} - \sqrt{7})(\sqrt{13} + \sqrt{7})$.

d) $\dfrac{4}{3}\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}$.

e) $(\sqrt{18} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$.

f) $\dfrac{8\sqrt{243}}{\sqrt{3}}$.

g) $(5\sqrt{14} + 5)(5\sqrt{14} - 5)$.

h) $\dfrac{7\sqrt{175}}{\sqrt{7}}$.

i) $\sqrt{65^2 - 56^2}$.

j) $\left(\sqrt{17} - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17} + 2\sqrt{3}\right)$.

Ответьте на вопросы:

1. Что такое числовое выражение, алгебраическое выражение?
2. Назовите виды алгебраических выражений.
3. Что называют областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраических выражений?
4. Что такое подобные члены? Какое действие называют приведениям подобных членов?
5. Какое действие называют разложением многочлена на множители?
6. Назовите формулы сокращённого умножения.
7. Какое действие называют сокращением алгебраических дробей?

§7. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

7.1 Основные понятия

Текст 46.

Дано равенство $f(x)=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ − *алгебраические выражения*, содержащие неизвестную величину x. Требуется найти все значения x, которые удовлетворяют равенству (то есть значения x, подстановка которых равенство обращает его в верное числовое равенство). Равенство выступает в этом случае уравнением с одной неизвестной x. Множество значений x, при которых определены обе части уравнения, называют *областью допустимых значений (ОДЗ)* уравнения. Каждое значение x, удовлетворяющее уравнению, называется *решением* и *корнем* уравнения.

Уравнение может и не иметь корней, тогда говорят, что множество его решений *пусто*. Решить уравнение − это значит найти все корни уравнения или доказать, что их нет.

Примеры:

Уравнение $2x + 1 = 5x - 2$ имеет один корень.

Уравнение $x^2 - x + 2 = 3x - 1$ имеет два корня $x = 1$ *и* $x = 3$.

Уравнение $x^2 = -1$ не имеет корней, множество решений пусто Ø.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют *равносильными (эквивалентными)*, если все корни одного уравнения одновременно являются корнями другого уравнения.

Если уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ равносильны, это записывают с помощью знака ≡ «равносильно»: $f_1(x)=g_1(x)\equiv f_2(x)=g_2(x)$. Если два уравнения не имеют корней (множества их решений пусты), то также можно считать равносильными; все уравнения, которые не имеют решений, равносильны между собой.

В процессе решения уравнений часто выполняют действия, в результате которых данное уравнение заменяется другим (обычно более простым), ему равносильным. Такой переход от одного уравнения другому может выполняться на основе нижеследующих утверждений.

1. Если к обеим частям уравнения прибавить (вычесть) выражение, имеющее смысл во всей *ОДЗ* данного уравнения, то получите уравнение, равносильное данному.

Пример: К обеим частям уравнения $2x + 1= 5x - 2$ прибавим выражение $(-5x - 1)$. В результате получим уравнение, эквивалентное данному уравнению:

$2x + 1= 5x - 2 \equiv -3x = -3.$

В частности, из этого утверждения вытекает правило о переносе членов уравнения из одной части в другую (с надлежащей переменой знака). Так, уравнение всегда можно записать в равносильной форме: $f(x) - g(x) = 0$.

Пример: $x^2 - x + 2 = 3x - 1 \equiv x^2 - 4x + 3 = 0$.

2. Если обе части уравнения умножить (разделить) на выражение, не равное нулю и имеющее смысл во всей *ОДЗ* данного уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример. Обе части уравнения $-3x = -3$ разделим на (−3). В результате получим уравнение, эквивалентное данному уравнению:

$-3x = -3 \equiv x = 1$.

7.2 Разновидности уравнений

Текст 47.

Уравнения первой степени (линейные уравнения)

Уравнением первой степени (*линейным* уравнением) называют уравнение вида $ax + b = cx + d$, где x − неизвестное, a, b, c, d − некоторые числа, причём $a \neq c$.

Для решения такого уравнения неизвестные слагаемые переносим в левую часть уравнения, а числа − в правую часть уравнения:

$ax + b = cx + d \equiv (a - c)\cdot x = d - b$.

После этого левую и правую части уравнения делим на $(a - c) \neq 0$. В результате получим решение уравнения.

Примеры:

a) $7x - 2 = 2x + 3 \equiv 5x = 5 \equiv x = 1$;

b) $2x + 3 = 6x + 5 \equiv -4x = 2 \equiv x = -0{,}5$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

a) $2x + 5 = 0;$

b) $5x + 3 = 4 - x;$

c) $3x - 1 = 2x + 2;$

d) $8 - 7x = 3x - 5;$

e) $4x + 3 = 3x + 4$.

Текст 48.

Уравнения второй степени (квадратные уравнения)

Уравнением второй степени (*квадратным* уравнением) называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x − неизвестная, a, b, c − некоторые числа, причём, $a \neq 0$. В квадратном уравнении число a называют *первым коэффициентом*, число b − *вторым коэффициентом*, c − *свободным членом*.

Корни квадратного уравнения определяют по формуле:

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\quad D = b^2 - 4ac.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения.

Если $D > 0$, то уравнение имеет *два* действительных корня.

Если $D = 0$, то уравнение имеет *один* действительный корень.

Если $D < 0$, то уравнение *не имеет* действительных корней.

Примеры.

Решить уравнения:

1. $x^2 - 4x + 3 = 0.$

Вычислим дискриминант: $D = (-4)^2 - 4\cdot 3 = 4 > 0$, уравнение имеет два действительных корня: $x_1 = 3;\ x_2 = 1.$

2. $x^2 - 6x + 9 = 0.$

Вычислим дискриминант: $D = (-6)^2 - 4\cdot 9 = 0$, уравнение имеет один действительный корень: $x_1 = 3.$

3. $3x^2 - 5x + 4 = 0.$

Вычислим дискриминант: $D = (-5)^2 - 4\cdot 3\cdot 4 = -23 < 0,$ уравнение не имеет действительных корней.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0;$
b) $3x^2 + 5x + 5 = x^2 - 7x - 7;$
c) $x^2 + 2x - 8 = 0;$
d) $x^2 + 6x + 7 = x^2 - 3x + 2;$
e) $x^2 + 7x = -10;$
f) $x^2 + 5x - 10 = 3 - 5x - 2x^2;$
g) $3x^2 - 8x + 1 = x - x^2 - 1.$

Текст 49.

Частные случаи квадратных уравнений

1. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется *приведенным* квадратным уравнением. Данное уравнение можно получить из уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если разделить его на a.

2. Уравнения вида $ax^2 + bx = 0,\ (c=0)$ и $ax^2 + c = 0,\ (b=0)$ называют *неполными* квадратными уравнениями.

Примеры.

Решить уравнения:

1. $3x^2 + 5x = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $3x^2 + 5x = 0 \equiv x\cdot(3x + 5) = 0$, следовательно $x_1 = 0, x_2 =3$.

2. $4x^2 - 25 = 0 \equiv 4x^2 = 25$, извлекая корень из левой и правой частей уравнения, получим: $2x = \pm 5$, следовательно, $x_1 = 2,5, x_2 = -2,5$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

a) $2x^2 - 3x = x^2 - x$;

b) $4x^2 - 9 = 0$;

c) $x^2 - 5x = 2x^2 - 4x$;

d) $2x^2 + 9 = 0$;

e) $x^2 - 4 = 0$.

Текст 50.

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:

$x_1 + x_2 = -p;\ x_1\cdot x_2 = q$.

Наоборот, если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p; x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 – корни уравнения

$x^2 + px + q = 0$.

Пример.

Составить квадратное уравнение по его корням $x_1 = 3, x_2 = -5$.

Определим p и q: $p = -(3 - 5) = 2$, $q = 3\cdot(-5) = -15$.

Получим уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Задания для самостоятельной работы

Составить квадратные уравнения по их корням:

a) $x_1 = 2, x_2 = -4$;

b) $x_1 = 5, x_2 = -0,4$;

c) $x_1 = -6, x_2 = -7$;

d) $x_1 = 3, x_2 = 21$.

Текст 51.

Квадратный трёхчлен

Алгебраическое выражение $ax^2 + bx + c$ называют *квадратным трёхчленом*. Если корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны x_1 и x_2, то квадратный трёхчлен можно разложить на множители по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны между собой, то есть $x_1 = x_2$, то квадратный трёхчлен можно разложить на множители по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Примеры.

1. Разложить на множители квадратный трёхчлен $7x^2 - 3x - 4$.

Корни уравнения $7x^2 - 3x - 4 = 0$ равны $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-3}{7}$.

Следовательно, $7x^2 - 3x - 4 = 7(x - 1)(x + \frac{3}{7})$.

Действие разложения квадратного трёхчлена на множители используют при решении уравнений.

Решите уравнения:

2. $(x-6)(4x-6)=0.$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$(x-6)(4x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=1,5. \end{array}\right.$$

3. $(-5x-3)(2x-1)=0.$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$(-5x-3)(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-0,6, \\ x=0,5. \end{array}\right.$$

4. $2x^2 - x - 1 = x^2 - 5x - (-1 - x^2)$.

Найдем корень уравнения:

$$2x^2-x-1=x^2-5x-(-1-x^2) \Leftrightarrow 2x^2-x-1=x^2-5x+1+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-x-1=2x^2-5x+1 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=0,5$$

5. $(-5x+3)(-x+6)=0.$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$(-5x+3)(-x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5x+3=0, \\ -x+6=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,6, \\ x=6. \end{array}\right.$$

6. $2-3(2x+2)=5-4x$.

Последовательно получаем:

$2-3(2x+2)=5-4x \Leftrightarrow 2-6x-6=5-4x \Leftrightarrow x=-4,5.$

7. $(x-2)^2+(x-3)^2=2x^2.$

Последовательно получаем:

$x^2-4x+4+x^2-6x+9=2x^2 \Leftrightarrow -10x=-13 \Leftrightarrow x=1,3.$

8. $x^2+7x=18.$

Преобразуем уравнение: $x^2+7x-18=0.$

Произведение корней такого уравнения равно −18, а сумма −7. Таким образом корнями уравнения являются числа −9 и 2.

9. $x-\dfrac{x}{12}=\dfrac{55}{12}.$

Домножим правую и левую часть уравнений на 12:

$x-\dfrac{x}{12}=\dfrac{55}{12} \Leftrightarrow 12x-x=55 \Leftrightarrow 11x=55 \Leftrightarrow x=5.$

10. $(x-2)(-2x-3)=0.$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$(x-2)(-2x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1,5. \end{array}\right.$$

11. $(-5x-3)(2x-5)=0.$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$(-5x-3)(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{5}, \\ x=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите корень уравнения:

a) $-2(-5-3x)-5x=-2$.

b) $4-2x=-4x+5.$

c) $x^2-15x+56=0.$

d) $x^2-9=(x+3)^2$.

e) $x^2-16=0.$

f) $x^2-2x=0.$

g) $x^2 + 11x = -28.$

h) $x^2 + 8 = 6x.$

i) $(x-8)^2 = (x-2)^2.$

j) $(x-5)^2 - x^2 = 0.$

2. Разложите многочлены на квадратные трёхчлены:

a) $x^2 + 2x - 8 = 0;$

b) $3x^2 - 2x - 5 = 0;$

c) $x^2 + 7x + 10 = 0;$

d) $x^2 - 7x - 15 = 0.$

Текст 52.

Уравнения, которые приводятся к квадратным уравнениям

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным уравнением*. С помощью *замены переменной* по формуле $x^2 = y$ оно приводится к квадратному уравнению $ay^2 + by + c = 0$.

Пример.

Решить уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Выполним замену переменной $x^2 = y$ и получим уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$. Корни данного уравнения равны $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Следовательно, $x_2 = 1$, $x_2 = 4$. Корни данных уравнений являются корнями исходного уравнения $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$.

Метод замены переменной применяется и в более сложных случаях.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$

b) $(x^2 + 4x)^2 - (x^2 + 4x) - 20 = 0;$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$

Текст 53.

Иррациональные уравнения.

Иррациональными называются уравнения, которые содержат неизвестную величину под знаком корня. Например: $\sqrt[5]{x}$, $4x - 3\sqrt{x}$. Во многих случаях, применяя возведение в степень обеих частей уравнения, можно свести иррациональное уравнение к алгебраическому уравнению, которое является следствием исходного уравнения.

Однако при возведении уравнения в степень могут полниться посторонние корни. Поэтому после решения алгебраического уравнения, к которому привели данное иррациональное уравнение, следует сделать *проверку* − *подставить* найденные корни в исходное уравнение и сохранить лишь те, которые ему удовлетворяют, а остальные − посторонние − отбросить.

Примеры.

Найдите корень уравнения:

1. $\sqrt{15-2x}=3$.

Возведем в квадрат:

$\sqrt{15-2x}=3 \Leftrightarrow 15-2x=9 \Leftrightarrow -2x=-6 \Leftrightarrow x=3.$

2. $\sqrt{3x-8}=5$.

Возведем в квадрат:

$\sqrt{3x-8}=5 \Leftrightarrow 3x-8=25 \Leftrightarrow 3x=33 \Leftrightarrow x=11$.

3. $\sqrt{13+2x}=5.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$13+2x=25 \Leftrightarrow 2x=12 \Leftrightarrow x=6.$

4. $\sqrt{10-x}-3=0.$

Возведем в квадрат:

$\sqrt{10-x}-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{10-x}=3 \Leftrightarrow 10-x=9 \Leftrightarrow x=1.$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{5}$.

Найдем корень уравнения: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x}=5 \Leftrightarrow x=25$.

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнение:

1. $\sqrt[3]{x-7}=4$.
2. $\sqrt{\dfrac{7}{4x-57}}=\dfrac{1}{3}.$
3. $\sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}=5.$
4. $\sqrt{x-2}=6.$
5. $\sqrt{15-2x}=3.$
6. $\sqrt[3]{x+2}=-2.$
7. $\sqrt{-4-5x}=4.$
8. $\sqrt{-72-17x}=-x.$
9. $\sqrt{-72+17x}=x.$

10. $\sqrt{\frac{2}{15-x}}=\frac{1}{10}.$

7.3 Системы уравнений

Текст 54.

Пусть даны равенства:

$$\begin{cases} f_1\ (x,y)\ =\ 0; \\ f_2\ (x,y)\ \ =\ 0. \end{cases} \qquad (1)$$

где $f_1(x,\ y)$, $f_2(x,\ y)$ − алгебраические выражения, содержащие известные величины x и y. Требуется найти все значения x и y, которые одновременно удовлетворяют равенствам.

Равенства называют системой двух уравнений с двумя неизвестными x и y. Значения x и y, удовлетворяющие уравнениям, называются решением системы уравнений. Решить систему уравнений − это значит *найти все решения системы или доказать, что их нет*.

Если система уравнений содержит n уравнений и n неизвестных, ее называют «*системой n уравнений с n неизвестными*» (число неизвестных может и не равняться числу уравнений).

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Система называется *определённой*, если она имеет конечное число решений, и *неопределённой*, если она имеет бесконечное число решений.

Две системы называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1; \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

называется *системой двух линейных уравнений* (уравнений первого порядка) с двумя неизвестными.

Пусть дана система двух линейных уравнений, с двумя неизвестными x и y, коэффициенты не равны нулю:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1; \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

a) Если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

b) Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений.

c) Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений.

Примеры.

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 4x-2y=2, \\ 2x+y=5. \end{cases}$

Разделим обе части первого уравнения на 2 и решим систему методом подстановки:

$$\begin{cases} 4x-2y=2, \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1, \\ 2x+2x-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1, \\ 4x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=1,5. \end{cases}$$

Систему можно было бы решить методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 4x-2y=2, \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=12, \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1,5, \\ 3+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1,5, \\ y=2. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 3x-y=-1, \\ -x+2y=7. \end{cases}$

Решим систему методом подстановки:

$$\begin{cases} 3x-y=-1, \\ -x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1, \\ -x+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1, \\ -x+2+6x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1, \\ 5x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=4. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ 4x-y=7. \end{cases}$

Решим систему методом подстановки:

$$\begin{cases} 3x+2y=8, \\ 4x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=8, \\ y=4x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+8x-14=8, \\ y=4x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x=22, \\ y=4x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений способом сложения:

$$\begin{cases} 4x-7y=30, \\ 4x-5y=90. \end{cases}$$

Умножим почленно второе уравнение системы на (-1), получим:

$$\begin{cases} 4x-7y=30, \\ -4x+5y=-90. \end{cases}$$

Теперь почленно сложим, левые и правые части уравнений системы:

$-2y=-60, \Rightarrow\ y=30.$

Подставим в первое уравнение системы вместо y число 30, найдем значение x:

$4x-7\cdot 30=30,$

$4x=30+210,$

$4x=240, \Rightarrow\ x=60.$

Ответ:$(60; 30)$.

5. Решить систему уравнений способом подстановки:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения x через y:

$2x = 1 - 3y$; $x = \frac{1-3y}{2}$.

Подставим в первое уравнение вместо x выражение $\frac{1-3y}{2}$:

$$3 \cdot \frac{1-3y}{2} + 4y = 0,$$

$$\frac{3-9y}{2} + 4y = 0,$$

$$3 - 9y + 8y = 0,$$

$$-y = -3, \Rightarrow y = 3.$$

Подставим вместо y число 3 в уравнение $x = \frac{1-3y}{2}$:

$x = \frac{1-3\cdot 3}{2}, \Rightarrow x = -4.$

Ответ:$(-4; 3)$.

6. Решить систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - y = -9. \end{cases}$$

Построим в координатной плоскости графики уравнений системы.

(1): $y = \frac{5-2x}{3}$, (2): $y = 3x + 9$.

Графиком первого уравнения является прямая AB, а графиком второго уравнения прямая CD. Точка $K(-2; 3)$ – точка пересечения прямых, следовательно, система имеет единственное решение $x = -2, y = 3$.

Ответ: $(-2; 3)$

7. При каких значениях параметра a система:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7; \\ ax - 6y = 14. \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений;

б) имеет единственное решение?

Решение.

а) Бесконечное множество решений: $\frac{2}{a} = \frac{-3}{-6} = \frac{7}{14}$;=> $a = 4$.

б) Единственное решение: $\frac{2}{a} \neq \frac{-3}{-6}$, $a \neq 4$.

8. При каких значениях параметра a система не имеет решений:

$$\begin{cases} 2x + y = 7; \\ \end{cases}$$

$y - ax = 3.$

Решение.

Не имеет решений: $\frac{2}{1} = \frac{1}{-a} \neq \frac{7}{3}, => a = -\frac{1}{2}.$

9. Решить систему уравнений методом Крамера:

$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 4 \ |\cdot 6; \\ \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{6} = 5 \ \ |\cdot 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 3 \cdot (x+y) + 2 \cdot (x-y) = 24; \\ 3 \cdot (x+y) + x - y = 30; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 3y + 2x - 2y = 24; \\ 3x + 3y + x - y = 30. \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + y = 24; \\ 4x + 2y = 30. \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6,\ \Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 24 & 1 \\ 30 & 2 \end{vmatrix} = 48 - 30 = 18;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 24 \\ 4 & 30 \end{vmatrix} = 150 - 96 = 54.$

Формулы Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; x = \frac{18}{6} = 3, y = \frac{54}{6} = 9.$

Ответ: $x = 3, y = 9.$

Задания для самостоятельной работы:

1. Решить системы 2‒х линейных уравнений, любыми 2 способами: сложением, подстановкой, графически, методом Крамера:

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 0; \\ 3x + 4y = 29. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 25 - x = -4y; \\ 3x - 2y = 30. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12x - 7y = 2; \\ 4x - 5y = 6. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 0; \\ -8x + 15y = 7. \end{cases}$

2. Укажите какое‒либо значение k, при котором система

$\begin{cases} 2x + y = 7; \\ 2y - kx = 3 \end{cases}$ имеет единственное решение?

3. При каком значении c система уравнений

$\begin{cases} 3x - y = 10; \\ 9x - 3y = \text{c} \end{cases}$

имеет бесконечно много решений?

4. Решить систему 2‒х уравнений по формулам Крамера:

$a)$ $\begin{cases} 4x - 3y = 1; \\ \end{cases}$

$$\frac{2x+1}{6}=\frac{9-5y}{8}.$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{9}-\frac{x-y}{3}=2; \\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+2y}{3}=-20. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} 5x-y=7, \\ 3x+2y=-1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+2y=12. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x+y=10, \\ x+3y=-3. \end{cases}$

<u>Ответьте на вопросы:</u>

1. Что называют уравнением с одной неизвестной?
2. Что называют областью допустимых значений уравнения?
3. Что называется решением или корнем уравнения?
4. Что означает решить уравнение?
5. Какие уравнения называют равносильными (эквивалентными)?
6. Какое уравнение называется уравнением первой степени (линейным уравнением)?
7. Какое уравнение называется квадратным?
8. По какой формуле определяются корни квадратного уравнения?
9. В каких случаях квадратное уравнение имеет два корня, один корень, не имеет корней?
10. Назовите частные случаи квадратных уравнений.
11. Сформулируйте теорему Виета.
12. Какое алгебраическое выражение называют квадратным трёхчленом?
13. Какое уравнение называется биквадратным?
14. Какое уравнение называется иррациональным?
15. Что называют системой двух уравнений с двумя неизвестными?
16. Что называется решением системы уравнений?
17. Что означает решить систему уравнений?
18. Какая система уравнений называется совместной, несовместной?

19. Какая система уравнений называется определённой, неопределённой?

20. Какие способы решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными вам известны?

21. В чем заключается способ подстановки?

22. В чем состоит способ алгебраического сложения?

23. В чем заключается графический способ?

24. Что называется определителем второго порядка?

25. Формулы Крамера.

26. Когда система не имеет решений, имеет множество решений, единственное решение?

§8. НЕРАВЕНСТВА

8.1 Основные определения и свойства неравенств

Текст 55.

При сравнении двух действительных чисел a и b возможны три случая:

a) $a = b$ *(a равно b);*

b) $a > b$ *(a больше b);*

c) $a < b$ *(a меньше b).*

Например, $8 > 5$, $7 < 9$. Запись $a \geq b$ «*a больше или равно b*» ($b \leq a$ «*b меньше или равно a*») означает, что или $a > b$ ($b < a$) или $a = b$.

Неравенством называют запись, в котором два числа или два выражения, содержащие переменные, соединяются знаком >, <, ≤ или ≥. Неравенства, которые соединяются знаками > или <, называются *строгими* неравенствами. Неравенства, которые соединяются знаками ≤ или ≥, называются *нестрогими* неравенствами.

Два неравенства вида $a > b$ и $c > d$ называются неравенствами одинакового смысла, а неравенства вида $a > b$ и $c < d$ − неравенствами противоположного смысла.

Например, неравенства $7 > 3$ и $11 > 8$ − это неравенства одинакового смысла, а неравенства $9 > 5$ и $6 < 12$ − неравенства противоположного смысла. Вместо двух неравенств $a < b$ и $b < c$ используют запись $a < b < c$. Такое неравенство называют *двойным* неравенством. Из определения неравенства сразу следует, что:

a) любое положительное число больше нуля;

b) любое отрицательное число меньше нуля;

c) любое положительное число больше любого отрицательного число;

d) из двух отрицательных чисел больше то, абсолютная величина которого меньше.

Все эти утверждения имеют простой геометрический смысл. Большее из чисел изображается точкой на числовой оси, которая лежит правее точки, изображающей меньшее число (независимо от знака чисел).

Для чисел, показанных на числовой оси, справедливы неравенства: $-4{,}4 < -0{,}1 < 1{,}7 < 4{,}5$.

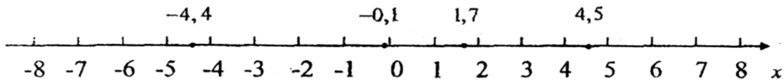


Рисунок 4. Числовая ось

Текст 56.

Свойства неравенств:

1. *Несимметричность* (необратимость): если $a > b$, то $b < a$, и наоборот. Например, так как $5 > 3$, то $3 < 5$.

2. *Транзитивность*: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Например, так как $9 > 6$ и $6 > 3$, то $9 > 3$.

3. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, смысл неравенства не изменится, то есть если $a > b$, то

$a + c > b + c$. Например, так как $7 > 5$, то $7 + 2 > 5 + 2 \equiv 9 > 7$.

4. Смысл неравенства не изменится, если из одной части неравенства перенести в другую какое-либо слагаемое, изменив его знак на противоположный, то есть, если $a + b > c$, то $a - c > b$. Например, так как $5 + 4 > 7$, то $5 - 7 > -4$.

5. При умножении членов неравенства на одно и то же положительное число смысл неравенства не изменяется. Например, если $a > b$, то $7a > 7b$.

6. При умножении членов неравенства на одно и то же отрицательное число смысл неравенства изменяется на противоположный. Например, если $a > b$, то $(-1)\cdot a < (-1)\cdot b$, то есть

$-a < -b$.

7. Пусть члены неравенства положительны. Тогда при возведении его членов в одну и ту же положительную степень смысл неравенства не изменяется: если $a > b$, то $a^m > b^m$.

Например, так как $5 > 3$, то $5^3 > 3^3$.

8. От неравенства $a > b$ можно перейти к неравенству между обратными числами $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. Если члены неравенства оба положительны или оба отрицательны, то между их обратными величинами имеется неравенство противоположного смысла: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Например, так как $10 > 5$, то $\frac{1}{10} < \frac{1}{5}$.

8.2 Действия с неравенствами, доказательство неравенств

Текст 57.

Действия с неравенствами

1) При почленном сложении неравенств одного и того же смысла образуется неравенство того же смысла, что и данные, то есть, если

$a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Например, так как $8 > 7$ и $5 > 4$, то $8 + 5 > 7 + 4 \equiv 13 > 11$.

2) Если из одного неравенства почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, то образуется неравенство того же смысла, что и первое, то есть, если $a > b$ и $c < d$, то $a-c > b-d$.

Например, так как $9 > 5$ и $3 < 7$, то $9 - 3 > 5 - 7 \equiv 6 > -2$.

3) Если почленно перемножить два неравенства одинакового смысла с положительными членами, то образуется неравенство того же смысла, то есть, если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $a \cdot c > b \cdot d$. Например, так как $5 > 3$ и $6 > 4$, то $5 \cdot 6 > 3 \cdot 4 \equiv 30 > 12$.

Доказательство неравенств

Неравенства между двумя алгебраическими выражениями при подстановке чисел вместо букв могут переходить либо в верные, либо и неверные числовые равенства.

Например, неравенство $a^2 + b^2 > a + b$ переходит в верное числовое равенство, если $a = 3, b = 4$ $(25 > 7)$ и в неверное числовое равенство, если $a = 0{,}5,\ b = 0{,}3$ $(0{,}34 < 0{,}8)$.

Имеются, однако, такие неравенства, которые являются справедливыми для всех числовых значений, входящих в них буквенных параметров. Например, $a^2 + b^2 > 0$.

Иногда приходится проводить доказательство неравенств; при этом «доказать неравенство» − значит установить, что оно справедливо для любых допустимых значений параметров.

Пример: Средним арифметическим двух положительных чисел a и b называют число $\frac{(a+b)}{2}$, а их средним геометрическим называют число $\sqrt{ab}$. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического, то есть $\sqrt{ab}$.

8.3 Разновидности неравенств

<u>Текст 58</u>.

Линейные неравенства и системы неравенств

Линейным неравенством называют неравенства вида $ax + b > 0$ (или $ax + b \geq 0,\ ax + b < 0,\ ax + b \leq 0$).

Если a > 0, то

неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x > \frac{-b}{a}$,

если а < 0, то

неравенство $ax+ b > 0$ равносильно неравенству $x < \frac{-b}{a}$.

Решение неравенства: $x \in (-\infty; \frac{-b}{a})$.

Примеры.

1. Решить неравенства:

а) $2x - 5 > 0$

$2x - 5 > 0 \equiv 2x > 5 \equiv x > 2{,}5$; $x \in (2{,}5;\infty)$.

b) $3x + 2 \leq 5x - 1$

$3x + 2 < 5x-1 \equiv -2x < -3 \equiv x > 1{,}5$; $x \in [1{,}5;\infty)$.

2. Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее системе неравенств:

а) $\begin{cases} 6x+18 \leq 0, \\ x+8 \geq 2. \end{cases}$

Решим систему: $\begin{cases} 6x+18 \leq 0, \\ x+8 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x \leq -3.$

Искомое наибольшее решение равно -3.

b) $\begin{cases} 5x+15 \leq 0, \\ x+5 \geq 1. \end{cases}$

Решим систему: $\begin{cases} 5x+15 \leq 0, \\ x+5 \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq -4. \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -3.$

Значит, наибольшее значение x, удовлетворяющее данной системе неравенств, равно -3.

Задания для самостоятельной работы

Решите неравенство:

а) $20-3(x-5) < 19-7x$.

b) $4x+5 \geq 6x-2$.

c) $x-1 < 3x+2$.

d) $22-x > 5-4(x-2)$.

e) $9x-4(2x+1) > -8$.

f) $6x-7 < 8x-9$.

g) $4x-4 \geq 9x+6$.

2. При каких значениях a выражение $5a + 9$ принимает отрицательные значения?

3. При каких значениях x значение выражения $9x+7$ меньше значения выражения $8x-3$?

4. При каких значениях x значение выражения $6x-2$ больше значения выражения $7x+8$?

5. Найдите множество решений неравенства $2+x \leq 5x-8$?

6. Найдите множество решений неравенства $4-7(x+3) \leq -9$?

7. Укажите решение неравенства $(x+2)(x-7)>0$.

Текст 59.

В случае, если задана система линейных неравенств с одним неизвестным x, то её решение проводится так: решают каждое неравенство в отдельности, а затем находят те значения x, которые входят во множества решений каждого из неравенств.

Если интервалы не пересекаются, система неравенств решений не имеет.

Примеры.

Решите систему неравенств:

1. $\begin{cases} 5x+13 \leq 0, \\ x+5 \geq 1. \end{cases}$

Решим систему:

$$\begin{cases} 5x+13 \leq 0, \\ x+5 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq -13, \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2,6, \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -2,6.$$

2. $\begin{cases} x^2 \leq 4, \\ x+3 \geq 0. \end{cases}$

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 \leq 4, \\ x+3 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 2, \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

3. Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее системе неравенств $\begin{cases} 2x+12 \geq 0, \\ x+5 \leq 2. \end{cases}$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x+12 \geq 0, \\ x+5 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6, \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x \leq -3.$$

Искомое наибольшее решение равно -3.

Задания для самостоятельной работы

Решить систему неравенств:

a) $\begin{cases} x > 3, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} -35 + 5x > 0, \\ 6 - 3x > -18? \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3 \geq -2, \\ x + 1{,}1 \geq 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ x - 0{,}3 \geq 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} -35 + 5x < 0, \\ 6 - 3x > -18 \end{cases}$

Текст 60.

Квадратные неравенства

Квадратным неравенством называется неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Для решения квадратного неравенства нужно квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ разложить на множители

$$ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)(x - x_2)$$

и определить знак квадратного трёхчлена в каждом из интервалов: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ и $(x_1; \infty)$.

Если квадратный трёхчлен не имеет корней (дискриминант трёхчлена отрицательный), то неравенство или не имеет решений, или решением являются все действительные числа.

Примеры.

Решить неравенства:

a) $2x^2 + 5x - 7 < 0$;

b) $-x^2 + 3x - 7 > 0$;

c) $x^2 - 2x + 1 < 0$.

Решение:

a) $2x^2 + 5x - 7 < 0 \equiv (x + 3{,}5)(x - 1) < 0$.

В интервале $(-\infty; -3{,}5)$ и $(1; \infty)$ квадратный трёхчлен больше нуля, а в интервале $(-3{,}5; 1)$ − меньше нуля.

Следовательно, решением неравенства является $x \in (-3{,}5; 1)$.

b) $-x^2 + 3x - 7 > 0$.

Вычислим дискриминант: $D = (3)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-7) = -19 < 0$.

Следовательно, знак трёхчлена является постоянным при любых значениях x. Подставив в квадратный трёхчлен *x = 0*, получим $-7 < 0$, то есть неравенство решений не имеет: $x = \varnothing$.

c) $x^2 - 2x + 1 \le 0 \equiv (x-1)^2 \le 0$.

Выражение $(x-1)^2 \ge 0$ при любых значениях *x.* Так как неравенство нестрогое, оно имеет решение $x = 1$.

<u>*Задания для самостоятельной работы*</u>

Решить неравенства:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$;
b) $4x^2 - 20x + 25 < 0$;
c) $x^2 - 5x + 4 \le 0$;
d) $x^2 - 8x + 17 > 0$;
e) $x^2 - 4x - 21 \ge 0$;
f) $2x^2 + 3x + 2 \le 0$;
g) $x^2 - 14x + 49 > 0$.

<u>Текст 60</u>.

Дробно-рациональные неравенства

Дробно-рациональными называются неравенства вида $\frac{ax+b}{cx+d} \ge 0$.

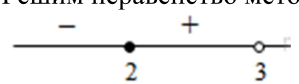
Такие неравенства решают с помощью *разложения* входящих в них многочленов *на множители*, после чего оказывается достаточным установить знак левой части неравенства в каждом из интервалов, на которые числовая ось разбивается действительными корнями числителя и знаменателя.

<u>Примеры.</u>

Решите неравенство:

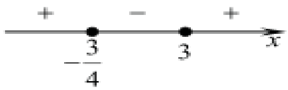
1. $\frac{x-2}{3-x} \ge 0$

Решим неравенство методом интервалов: $\frac{x-2}{3-x} \ge 0.$



Получаем $x \in [2;\ 3)$.

2. $\frac{x^2}{3} \ge \frac{3x+3}{4}.$



Умножим обе части неравенства на 12 и перенесем правую часть неравенства в левую, получим: $4x^2-9x-9\geq 0$. Левая часть обращается в 0 при $x=3$ или $x=-0,75$. Расставим найденные корни на координатной прямой и определим знаки неравенства на полученных промежутках. Находим: $x\geq 3$ или $x\leq -0,75$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]\cup[3;+\infty)$.

3. $\frac{x^2}{3}<\frac{3x+3}{4}$.

Перенесём две части неравенства в одну часть и избавимся от знаменателя: $4x^2-9x-9<0$, приравняем левую часть к нулю и найдём корни. Отсюда $x=3$ и $x=-0,75$. Расставив корни на координатной прямой, определим знаки неравенства, получаем: $-0,75<x<3$.

Ответ: (−0,75; 3).

4. $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$.

a) Определим знак разности $\sqrt{3}-1,5$. Так как $1,5=\sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3}>\sqrt{2,25}$, то $\sqrt{3}-1,5>0$.

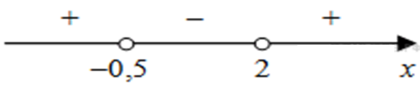
b) Получаем неравенство $3-2x>0$. Отсюда $x<1,5$.

Ответ: $(-\infty;1,5)$. Другая возможная форма ответа: $x<1,5$.

5. $(x-3)(2x+3)<-7$.

Раскроем скобки, приведём подобные слагаемые, разложим на множители:

$$(x-3)(2x+3)<-7\Leftrightarrow 2x^2-3x-2<0\Leftrightarrow 2(x+0,5)(x-2)<0.$$



Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак. Таким образом, получаем ответ:

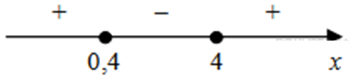
$$-0,5<x<2.$$

Ответ: $(-0,5;\ 2)$.

6. Решите неравенство $\frac{11x-4}{5}\geq\frac{x^2}{2}$.

Умножим на 10, приведём подобные слагаемые и разложим на множители:

$$\frac{11x-4}{5} \ge \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 5x^2 - 22x + 8 \le 0 \Leftrightarrow 5(x-0,4)(x-4) \le 0.$$



Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак. Таким образом, получаем ответ:

$0,4 \le x \le 4.$

Ответ: $[0,4;\, 4]$.

<u>*Задания для самостоятельной работы*</u>

Решить неравенства:

a) $(3x-2)(x+4) > -11.$

b) $\dfrac{x^2}{2} > \dfrac{11x-4}{5}.$

c) $(x-1)(3x-5) < 1.$

d) $x^2(-x^2-64) \le 64(-x^2-64).$

e) $\dfrac{-14}{x^2+2x-15} \le 0.$

f) $\dfrac{-10}{(x-3)^2-5} \ge 0.$

g) $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7).$

h) $(4x-6)^2 \ge (6x-4)^2.$

i) $2x^2 - 3x > 0.$

j) $(x-3)^2 < \sqrt{5}\,(x-3).$

k) $(5x-9)^2 \ge (9x-5)^2.$

<u>Текст 61</u>.

Иррациональные неравенства

Если переменная в неравенстве входит под знаком корня, такое неравенство называется *иррациональным*. При решении иррациональных неравенств используют те же приёмы, что и при решении рациональных неравенств, а также при решении иррациональных уравнений.

<u>Примеры.</u>

Решить неравенства:

1. $\sqrt{x-1} > 2$. *ОДЗ* неравенства задается условием $x \ge 1$. Так как обе части неравенства неотрицательны, неравенство можно возвести в квадрат: $x - 1 > 4$, откуда получим решение $x > 5$.

2. $\sqrt{x+5} > 7 - x$. *ОДЗ* неравенства задаётся условием $x \geq -5$. Далее рассматриваем два возможных случая:

a) правая часть неравенства отрицательна,

b) правая часть неравенства неотрицательна.

Если $7 - x < 0 \equiv x > 7$, то неравенство заведомо удовлетворяется: левая часть не меньше нуля. Остается рассмотреть случай $x \leq 7$. В этом случае обе части неравенства неотрицательны, и неравенство можно возвести в квадрат:

$$x + 5 > 49 - 14x + x^2.$$

Это приводит к квадратному неравенству $x^2 - 15x + 44 < 0$, которое удовлетворяется при $4 < x < 7$. Но по предположению $x \leq 7$, поэтому получим $4 < x \leq 7$. Итак, неравенство удовлетворяется при $x>7$ и при $4 < x \leq 7$, то есть вообще при $x > 4$.

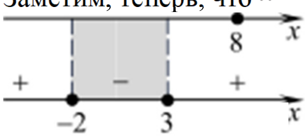
3. $(x^2 - x - 6) \cdot \sqrt{8-x} \leq 0.$

Неравенство имеет смысл при $x \leq 8.$

а) Пусть $x < 8.$ Тогда $\sqrt{8-x} > 0,$ и неравенство равносильно неравенству $x^2 - x - 6 \leq 0.$ Решим систему:

$$\begin{cases} x < 8, \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8, \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.$$

Заметим, теперь, что $x = 8,$ также является решением.



Ответ: $[-2;\ 3] \cup \{8\}.$

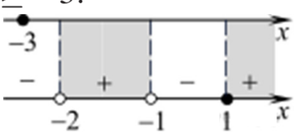
4. $\dfrac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \dfrac{3\sqrt{x+3}}{x+2}.$

Последовательно получаем:

$$\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} - \frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \frac{3x+3-2x-4}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3} \cdot (x-1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0.$$

И решим это неравенство методом интервалов, учитывая, что $x \geq -3.$



Ответ: $\{-3\}\cup(-2;-1)\cup[1;+\infty)$.

5. $\left(\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{x-4}{3-x}\right)\sqrt{6x-x^2}\le 0.$

Если $6x-x^2=0$, то $x=0$ или $x=6$. При этих значениях выражение

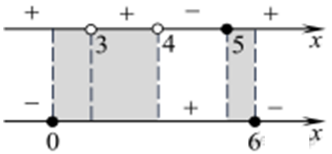
$\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{x-4}{3-x}$ имеет смысл, поэтому $x=0$ и $x=6$ являются решениями неравенства.

Если $6x-x^2>0$, то $0<x<6$, при этом $\sqrt{6x-x^2}>0$. Тогда

$$\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{x-4}{3-x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-4)(x-3)}+\frac{x-4}{3-x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-(x-4)^2}{(x-4)(x-3)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)(x-3)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ 3<x<4, \\ x\ge 5 \end{array}\right.$$



Пересекая полученное решение с множеством $(0;\ 6)$, и учитывая, что точки *0* и *6* также являются решениями неравенства, получим множество решений исходного неравенства: $[0;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup[5;\ 6]$.

Ответ: $[0;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup[5;\ 6]$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенства:

1. $\left(2x-3-\dfrac{5}{x}\right)\left(\dfrac{14}{x+1}+2+(\sqrt{-1-2x})^2\right)\ge 0.$

2. $\left(1+\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{x-3}{x-2}\right)\sqrt{6x-x^2-5}\ge 0.$

8.3 Уравнения и неравенства, которые содержат модуль

Текст 62.

Модулем действительного числа a называют само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль a обозначается $|a|$. Если в уравнении неизвестная величина находится под знаком модуля, то модуль нужно раскрыть и решить уравнения для каждого из случаев.

Примеры.

Решить уравнения:

1. $|x| = 5$. Итак, нужно решить два уравнения $x = 5$ (при $x \geq 0$) и $-x= 5$ (при $x < 0$). Корни уравнений равны: $x_1 = 5, x_2 = -5$.

2. $|x - 3| = 7$. Итак, нужно решить два уравнения: $x - 3 = 7$, (при $x \geq 3$) и $-(x - 3) = 7$, (при $x < 3$).

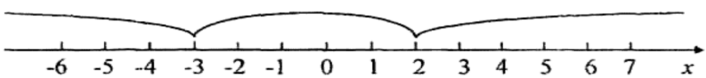
Корни уравнений равны: $x_1 = 10, x_2 = -4$.

3. $|x + 3| + |x - 2| = 5 + x$.

Данное уравнение решим методом интервалов. Для этого:

− определим, при каких значениях x обращаются в ноль выражения, которые стоят под знаком модуля: $x_1 = -3, x_2 = 2$;

− полученные значения x откладываем на числовой прямой, которая разбивается на интервалы: $(-\infty; -3), (-3; 2), (2; \infty)$.



− решаем уравнение в каждом интервале, раскрывая модули.

Первый интервал $(-\infty; -3)$: $-(x+3)-(x- 2)= x+5 \equiv -3x= 6 \equiv x =-2$, но $-2 \epsilon (-\infty; -3)$, поэтому в данном интервале решений нет, $x \epsilon \varnothing$.

Второй интервал $(-3; 2)$: $(x + 3) - (x - 2) = x + 5 \equiv x = 0$. Так как $0 \epsilon (-3; 2)$, то $x = 0$ является корнем данного уравнения.

Третий интервал $(2; \infty)$: $(x + 3) + (x - 2) = x + 5 \equiv x = 4$. Так как $4 \epsilon (2; \infty)$, то $x = 4$ является корнем данного уравнения. Итак, $S = \{0, 4\}$.

Текст 63.

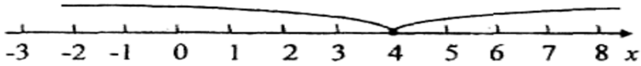
Неравенства, которые содержат модуль

Если в неравенстве неизвестная величина находится под знаком модуля, то такое неравенство лучше всего решать *методом интервалов*.

Пример:

Решить неравенство: $|x - 4| \leq 5$. Определим, при каких значениях x обращается в ноль выражение под знаком модуля: $x = 4$. Значение $x=4$

откладываем на числовой прямой, которая разбивается на интервалы *(−∞; 4)* и *(4; ∞)*. Решим неравенство в каждом интервале.



Первый интервал *(−∞; 4)*: $-(x - 4) \le 5 \equiv -x + 4 \le 5 \equiv x \ge -1$. Решение неравенства в данном интервале: $-1 \le x \le 4$.
Второй интервал *(4; ∞)*: $x - 4 \le 5 \equiv x \le 9$. Решение неравенства в данном интервале: $4 \le x \le 9$.
Решение неравенства: $x \in [-1, 4] \cup [4, 9]$, или $x \in [-1, 9]$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения и неравенства:

a) $|x - 5| = 3$;
b) $|x - 3| \le |2 - x| \le 1$;
c) $||2x - 3| - x| = 1$;
d) $x - 1 \le |2 - x| \le x \le 3$;
e) $|2 - 3x| = |1 - 2x|$;
f) $|x - 4| \le |2x + 1| \le 2x + 3$;
g) $|x + 3| \ge 2x - 1 \ge 8$;
h) $x - 1 \ge |3x + 1| \ge 2x + 8$.

Ответьте на вопросы:

1. Что называется неравенством?
2. Какое неравенство называется строгим, нестрогим?
3. Какие неравенства называются неравенствами одинакового смысла, а какие − неравенствами противоположного смысла?
4. Назовите свойства неравенств.
5. Какие действия можно выполнять с неравенствами?
6. Что означает «доказать неравенство»?
7. Какое неравенство называется линейным, квадратным, дробно-рациональным, иррациональным?
8. Что называется модулем числа?

§9. ФУНКЦИИ

9.1 Основные понятия про функции, график функции

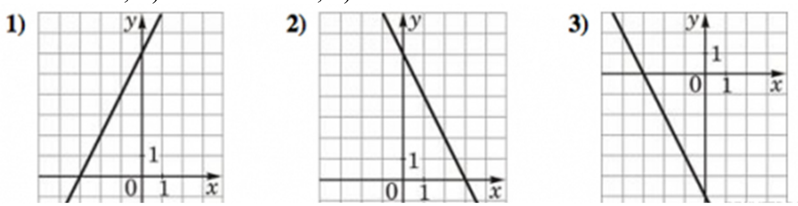
Текст 64.

Зависимость переменной y от переменной x называется *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y, которое определяется по заданному закону. Функцию записывают *y=f(x) (игрек равен эф от икс)*. Переменная x называется независимой переменной (аргументом), а область её изменения X − областью определения функции $y - D(f)$. Множество значений, которые принимает у при изменении x, называется множеством значений функции, $E(f)$.

Примеры.

1. $y = ax + b$ − линейная функция.

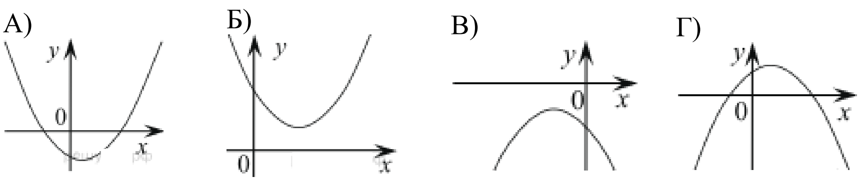
Определить, какие функции соответствуют графикам:
a) $y = 2x + 6$; b) $y = -2x - 6$; c) $y = -2x + 6$



2. $y = ax^2 + bx + c$ − квадратичная функция.

На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующее ему значения коэффициента a и дискриминанта D.

Графики



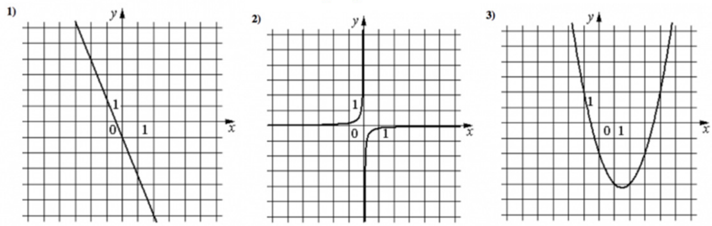
Знаки чисел

1) $a > 0, D > 0$; 2) $a > 0, D < 0$; 3) $a < 0, D > 0$; 4) $a < 0, D < 0$.

3. Сопоставьте графики функциям:

1) $y = -\dfrac{5}{2}x - 1$; 2) $y = -\dfrac{1}{6x}$; 3) $y = x^2 - 3x - 2$.

Графики



Текст 65.

Декартова прямоугольная система координат это две взаимно *перпендикулярные* числовые оси, которые имеют общее *начало* координат. Числовая ось значений переменной x называется *осью абсцисс*, а числовая ось значений переменной y называется *осью ординат*. *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, а ординаты − значения функции $y = f(x)$ (рис. 5).

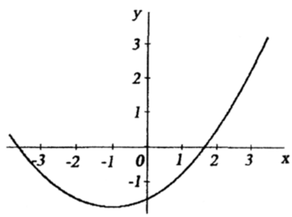


Рисунок 5. Пример функции

9.2 Свойства функций

Текст 66.

Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$. То есть для любых x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке x, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, то есть для любых x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1$ выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция $y = f(x)$ только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется *монотонной* на данном промежутке.

Монотонность функции можно определить по её графику. Например, функция $y = f(x)$, график которой изображён на рис.6, монотонно возрастает на промежутке $(-3; 3)$.

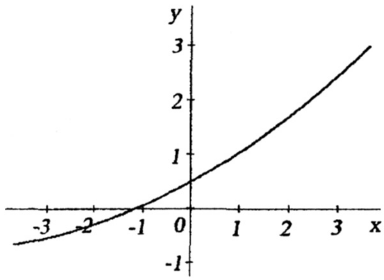


Рисунок 6. Пример монотонно-возрастающей функции

Текст 67.

Чётные и нечётные функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если она имеет свойства:

a) область определения этой функции симметрична относительно начала отсчёта O;

b) для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

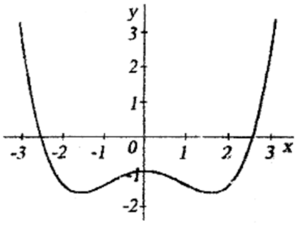
Например, чётными являются функции $y = x^2$, $y = 2x^4 - 3x^2$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 7, слева).

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если она имеет свойства:

a) область определения этой функции симметрична относительно начала отсчета O;

b) для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.

Например, нечётными являются функции $y = x^3$, $y = 3x^5 - 2x^3 + x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 7, справа).



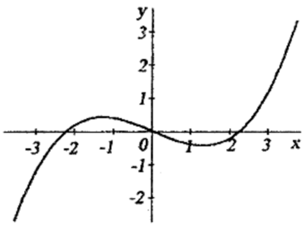


Рисунок 7. Чётная и нечётная функции

Не всякая функция является чётной или нечётной. Например, ни чётными, ни нечётными не являются функции $y = 2x-1$, $y = x^2 + 2x-1$.

Задания для самостоятельной работы

Определить, какие из функций являются чётными, какие нечётными, а какие ни чётными, ни нечётными (*общего вида*).

a) $y = 3x^3 - 7x;$

b) $y = 2x^6 - 3x^3 + x^5;$

c) $y = x^4 - 5x^2 + 1.$

9.3 Разновидности функций

Текст 68.

Линейная функция

Линейной функцией называют функцию вида $y = ax + b$, где a и b − некоторые числа.

Область определения линейной функции − это множество всех действительных чисел, так как выражение $ax + b$ имеет смысл при любых значениях x. В частном случае, когда $b = 0$, зависимость $y = ax$ называют прямо пропорциональной зависимостью. Графиком линейной функции $y = ax + b$ является *прямая* линия. Для построения графика линейной функции достаточно *двух* точек.

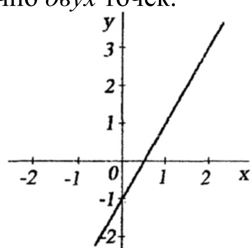


Рисунок 8. График линейной функции

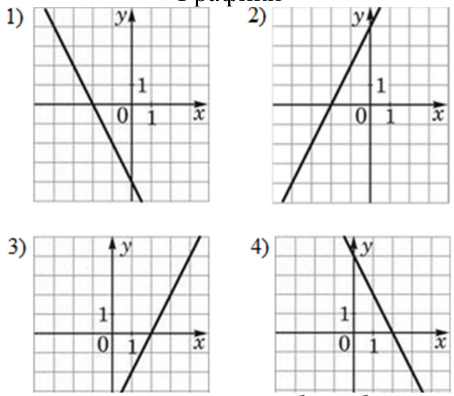
Пример.

Установите соответствие между функциями и их графиками:

Функции

a) $y = -2x + 4$ b) $y = 2x - 4$ c) $y = 2x + 4$

Графики



Если прямая задана уравнением $y = kx + b$, то при $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ – убывает. Значению b соответствует значение функции в точке $x = 0$.

Уравнение $y = -2x + 4$ задаёт убывающую функцию, пересекающую ось ординат в точке 4.

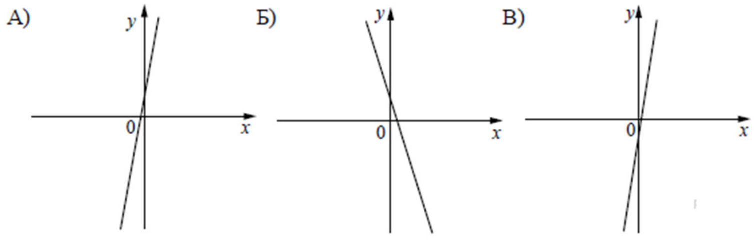
Уравнение $y = 2x - 4$ задаёт возрастающую функцию, пересекающую ось ординат в точке −4.

Уравнение $y = 2x + 4$ задаёт возрастающую функцию, пересекающую ось ординат в точке 4.

Задания для самостоятельной работы:

1. На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

Графики



Коэффициенты

1) $k < 0, b > 0$ 2) $k > 0, b > 0$ 3) $k < 0, b < 0$ 4) $k > 0, b < 0$

2. Построить графики функций:

a) y = x;
b) y = x + 2;
c) y = 2;
d) x = −1;
e) y = − 2x + 3.

3. График функции $y = ax + 17$ проходит через точку A (5; 2). Найдите a.

4. График функции $y = ax + 18$ проходит через точку A (3; −3). Найдите a.

Текст 69.

Квадратичная функция

Квадратичной функцией называют функцию вида $y = ax^2+bx + c$, где a, b и c − некоторые числа ($a \neq 0$). Область определения квадратичной функции − это множество всех действительных чисел, так как выражение $ax^2 + bx + c$ имеет смысл при любых значениях x. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является *парабола*. Если $a > 0$, то *ветви* параболы направлены *вверх*. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены *вниз*. На рис.9. (слева) изображён график функции $y = x^2$. Вершина такой параболы находится в начале координат.

В общем случае абсцисса вершины параболы определяется по формуле $x_в = \frac{-b}{2a}$.

Например, абсцисса графика функции $y = x^2 - 2x - 3$ равна $x_0 = 1$, ордината вершины параболы равна $y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$. Ветви данной параболы направлены вверх. Для построения графика функции найдём некоторые точки, через которые проходит данная парабола, в частности, точки пересечения с осями координат. Точки пересечения параболы с осью *Ox* определяются из уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$. Они равны $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Точку пересечения параболы с осью *Oy* определим, подставив в функцию значение $x = 0$: $y_1 = -3$. Желательно также найти ещё несколько точек, через которые проходит парабола. График функции
$y = x^2 - 2x - 3$ изображён на рис. 9 (справа).

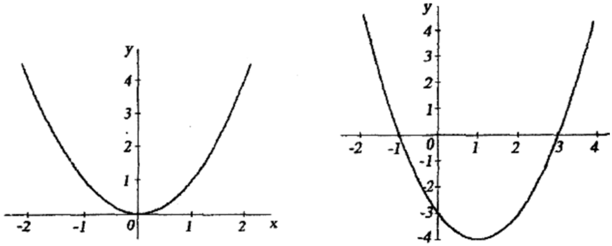
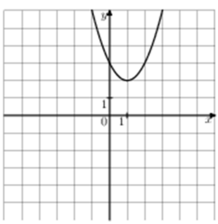
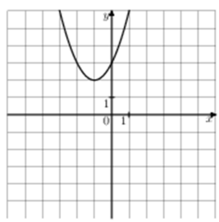


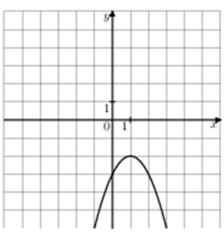
Рисунок 9. Параболы

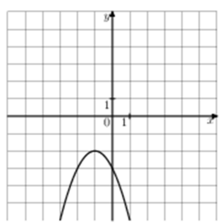
<u>Примеры.</u>

1. На одном из рисунков изображен график функции $y = x^2 - 2x + 3$ Укажите номер этого рисунка.

1) 

2) 

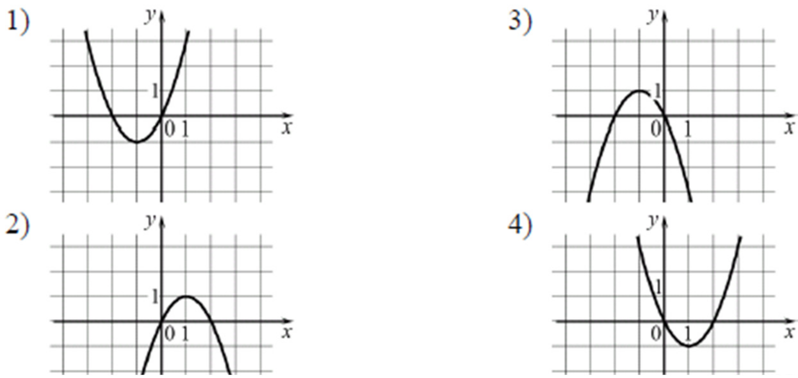
3) 

4) 

Коэффициент $a > 0$, поэтому ветви параболы направлены вверх. Абсцисса вершины параболы равна: $-\frac{b}{2a} = 1.$ Правильный вариант ответа указан под номером 1.

2. Установите соответствие между функциями и их графиками. Функции: a) $y = x^2 - 2x$; b) $y = x^2 + 2x$; c) $y = -x^2 - 2x$.

Графики



Напомним, что если парабола задана уравнением $y = ax^2 + bx + c$ то: при $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз; абсцисса вершины параболы вычисляется по формуле $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$; парабола пересекает ось Oy в точке c.

Уравнение $y = x^2 - 2x$ задает параболу, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины равна 1, она пересекает ось ординат в точке 0. Ее график изображен на рисунке 4).

Уравнение $y = x^2 + 2x$ задает параболу, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины равна -1, она пересекает ось ординат в точке 0. Ее график изображен на рисунке 1).

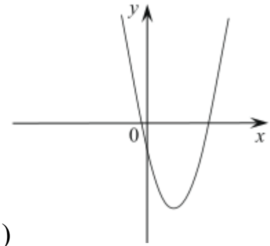
Уравнение $y = -x^2 - 2x$ задает параболу, ветви которой направлены вниз, абсцисса вершины равна -1, она пересекает ось ординат в точке 0. Ее график изображен на рисунке 3).

3. На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

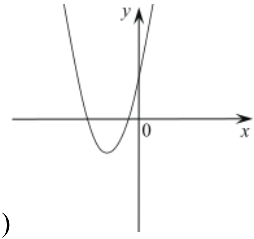
Коэффициенты

А) $a > 0, c < 0$ Б) $a < 0, c > 0$ В) $a > 0, c > 0$

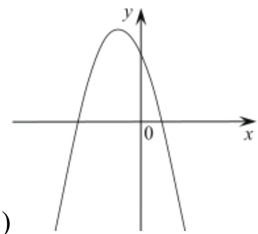
Графики



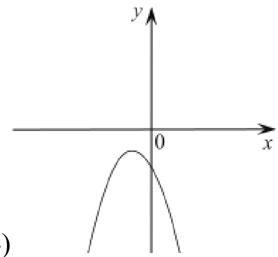
1)



2)



3)



4)

Если парабола задана уравнением $y = ax^2 + bx + c$, то: при $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз. Значение c соответствует значению функции в точке $x = 0$. Следовательно, если график пересекает ось ординат выше оси абсцисс, то значение c положительно, если ниже оси абсцисс − отрицательно.

Таким образом, функциям соответствуют следующие графики: А − 1, Б − 3, В − 2.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Построить графики функций:

a) $y = x^2 - 2x$;

b) $y = -x^2 + 2$;

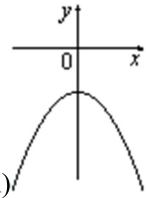
c) $y = x^2 - 4$;

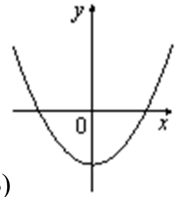
d) $y = -x^2 + 4x - 3$;

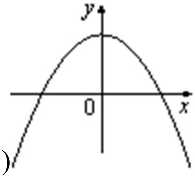
e) $y = x^2 + 3x - 4$.

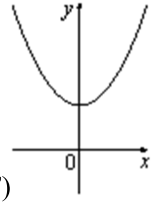
2. На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов a и c.

Графики

А) 

Б) 

В) 

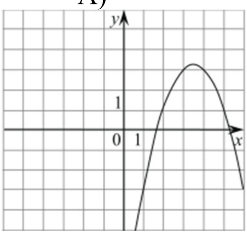
Г) 

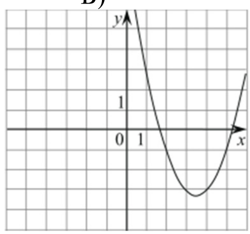
Знаки коэффициентов

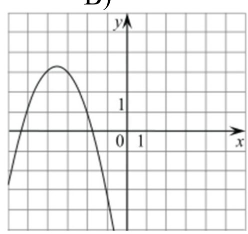
1) $a > 0, c < 0$; 2) $a < 0, c > 0$; 3) $a > 0, c > 0$; 4) $a < 0, c < 0$.

3. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

1) $y = -2x^2 + 6x - 6$; 2) $y = -2x^2 - 6x - 6$; 3) $y = 2x^2 + 6x + 6$; 4) $y = 2x^2 - 6x + 6$.

А)


Б)


В)


Текст 70.

Функция $y = \frac{a}{x}$

Функцию $y = \frac{a}{x}$ называют *функцией обратной пропорциональности* (обратная пропорциональная зависимость). *Область определения* функции $y = \frac{a}{x}$ это множество чисел, отличных от нуля, то есть *D(f) = (−∞ ;0) U (0; −∞)*. Данная функция является нечётной.

Графиком функции $y = \frac{a}{x}$ является кривая, которая состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется *гиперболой*. Гипербола не имеет точек пересечения с осями координат, а лишь сколько угодно близко ним *приближается*.

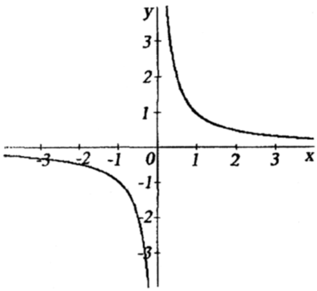


Рисунок 10. График гиперболы

Прямые, к которым сколько угодно близко приближается график функции при удалении на бесконечность, называются *асимптотами* графика функции. Асимптоты гиперболы − это числовые оси *Ox* и *Oy*. Они имеют уравнения $y = 0$ и $x = 0$.

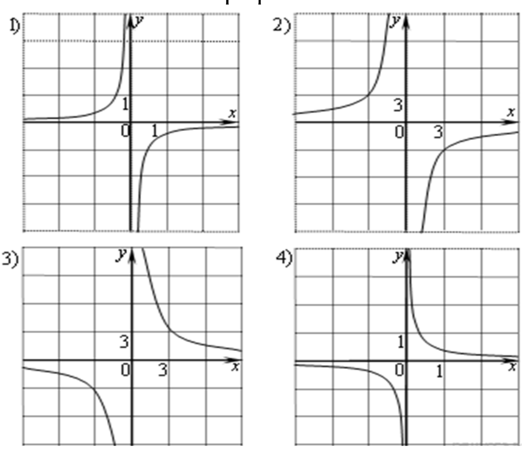
Примеры:

1. Установите соответствие между функциями и их графиками:

Функции

А) $y = \frac{1}{9x}$ Б) $y = \frac{9}{x}$ В) $y = -\frac{9}{x}$

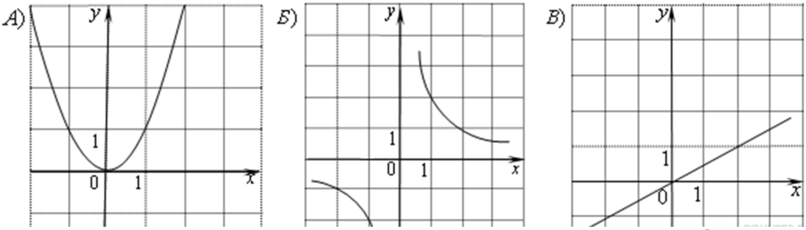
Графики



Все представленные здесь функции — гиперболы. Общая формула для уравнения гиперболы: $y = \frac{a}{x}$, если $a > 0$, то ветви гиперболы располагаются в первой и третьей четвертях, в противном случае − во второй и четвёртой четвертях.

Для того, чтобы отличить гиперболы лежащие в одинаковых четвертях нужно подставить какое–нибудь значение x в формулу и проверить, какому графику будет соответствовать полученное значение.

2. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают:



1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{x}{2}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \frac{2}{x}$.

Определим вид графика каждой из функций.

1) $y = x^2$ – уравнение параболы, ветви которой направленны вверх.

2) $y = \frac{x}{2}$ – уравнение прямой.

3) $y = \sqrt{x}$ – уравнение верхней ветви параболы, направленной вправо.

4) $y = \frac{2}{x}$ – уравнение гиперболы.

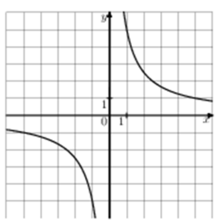
<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Построить графики функции:

a) $y = \frac{2}{x}$;

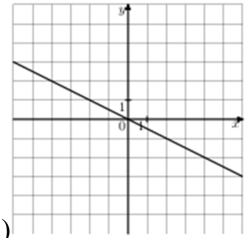
b) $y = \frac{-4}{x}$.

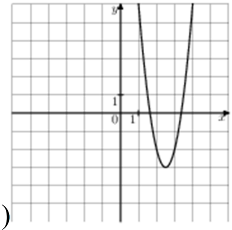
2. График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?

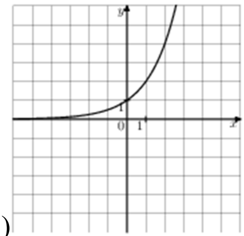


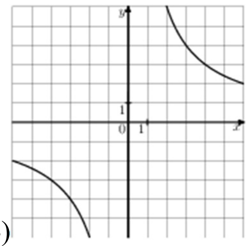
1) $y = -\frac{5}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{5x}$ 3) $y = \frac{5}{x}$ 4) $y = \frac{1}{5x}$

3. На одном из рисунков изображен график функции $y = \dfrac{12}{x}$. Укажите номер этого рисунка.

1) 

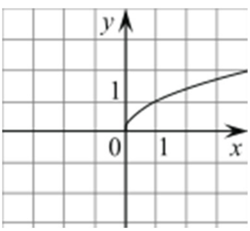
2) 

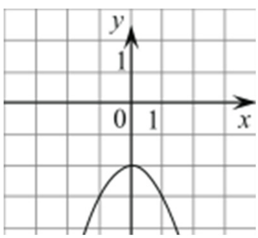
3) 

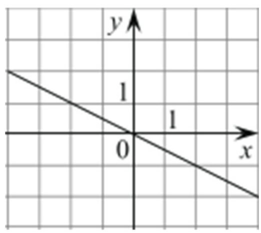
4) 

4. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики

А) 

Б) 

В) 

Формулы

1) $y = -\dfrac{1}{2}x$ 2) $y = -\dfrac{1}{x}$ 3) $y = -x^2 - 2$ 4) $y = \sqrt{x}$

Текст 71.

Дробно-линейная функция

Дробно-линейной функцией называют функцию вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ где a, b, c и d − некоторые числа ($c \neq 0,\ ad \neq bc$). Область определения функций это все значения x, кроме $x = \frac{-d}{c}$.

Для построения графика дробно-линейной функции нужно найти *асимптоты* графика функции. Уравнения асимптот имеют вид: $y = \frac{a}{c}$ и $x = \frac{-d}{c}$.

График дробно-линейной функции представляет собой *гиперболу*, симметричную относительно точки пересечения асимптот O_1. Точка O_1 имеет координаты $(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c})$.

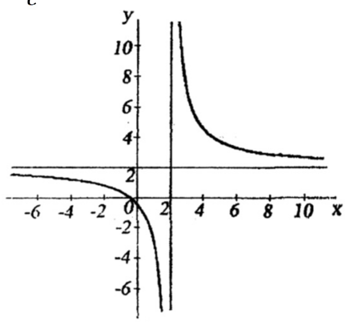


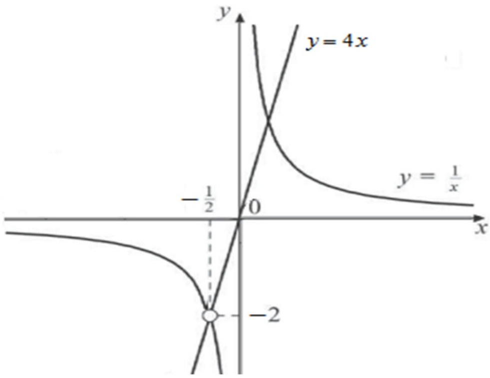
Рисунок 11. Асимптоты гиперболы

Примеры:

1. Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

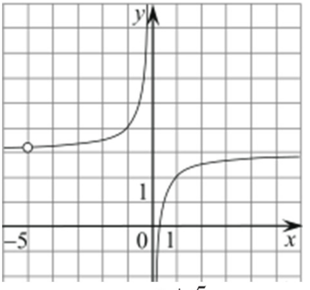
При $x \neq -0,5$ имеем: $y = \frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}$.

Поэтому график заданной функции представляет собой гиперболу, с выколотой точкой (−0,5; −2). Прямая $y = kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдёт через выколотую точку. Тогда $k = \frac{-2}{-0,5} = 4,$ и уравнение прямой примет вид: $y = 4x.$



Ответ: 4.

2. Постройте график функции $y = 3 - \dfrac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.



Преобразуем выражение: $3 - \dfrac{x+5}{x^2+5x} = 3 - \dfrac{x+5}{x(x+5)} = 3 - \dfrac{1}{x}$, при условии, что $x \neq -5$.

График данной функции получается из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ сдвигом на $(0;\ 3)$ и отражением через ось Ox.

Прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m = 3$ и $m = \dfrac{16}{5}$.

Ответ: $3;\ \dfrac{16}{5}$.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Постройте график функции:

1. $y = \dfrac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком одну общую точку.

2. $y = \dfrac{x-2}{2x-x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

3. $y = \dfrac{1-2x}{2x^2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. $y = \dfrac{2x+3}{3x+2}$;

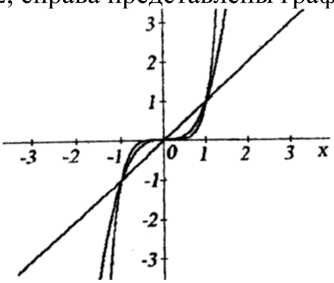
5. $y = \dfrac{4x-8}{x+5}$.

Текст 72.

Степенная функция

Степенной функцией называют функцию вида $y = x^a$. Рассмотрим разновидности степенной функции в зависимости от значения числа a.

1) $a = n$ − натуральное число. К этой разновидности относятся функции $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ и так далее. Область определения таких функций − все действительные числа. Если n − чётное число, то функция чётная, если n − нечётное число, то функция нечётная. На рис.12, слева представлены графики функций $y = x$ $(a = 1)$, $y = x^3$ $(a=3)$ и $y = x^5$ $(a= 5)$. На рис.12, справа представлены графики функций $y=x^2$ и $y = x^4$.



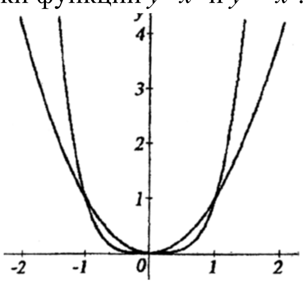


Рисунок 12. Графики нечётных (слева) и чётных (справа) функций

2) $a = -n$ − целые отрицательные числа. К этой разновидности относятся функции $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ и т. д. Область определения таких функций − все действительные числа, кроме $x = 0$. Если n − чётное число, то функция чётная, если n − нечётное число, то функция нечётная. На рис.13 представлены графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^2}$.

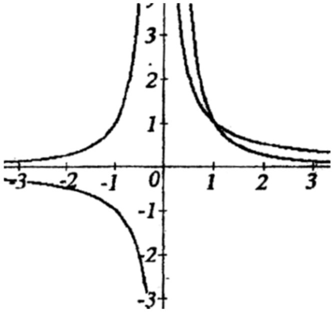


Рисунок 13. Гиперболы

3) $a = \frac{t}{n}$ − дробные числа (как положительные, так и отрицательные). К этой разновидности относятся, например, функции *y*= $\sqrt{x}$ *,* $\sqrt{y}$ *= x ,* $\sqrt[3]{y}$ *= x , y* $= \frac{1}{x}$ и другие.

Область определения первых двух функций *D(f) = [0;∞)*, функции $\sqrt[3]{y}$*= x⇒ D(f) =(−∞; ∞),* функции у = $\frac{1}{x}$ *⇒D(f)=(−∞; 0)U(0; ∞).*

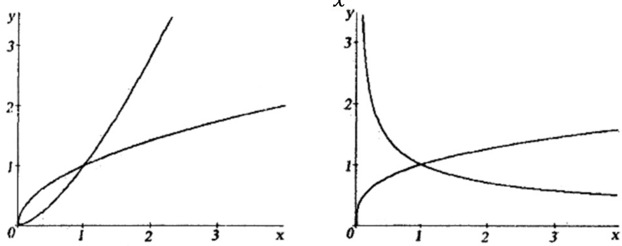
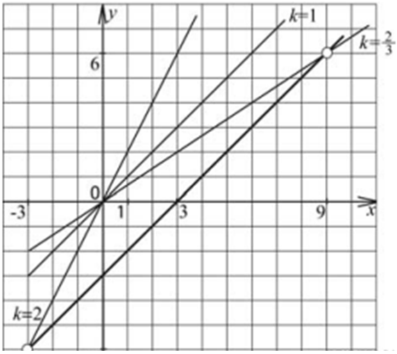


Рисунок 14. График иррациональной функции

Примеры.

1. Постройте график функции $y = \frac{(x-9)(x^2-9)}{x^2-6x-27}$ и определите, при каких значениях k построенный график не будет иметь общих точек с прямой $y = kx$.

Преобразуем функцию: $y = \frac{(x-9)(x-3)(x+3)}{(x-9)(x+3)} = x-3$ при $x \neq -3$ и $x \neq 9$. График − прямая $y = x-3$ без двух точек $(-3;\ -6)$ и $(9;\ 6)$. Прямая $y = kx$ не будет иметь с построенной прямой общих точек, если она будет ей параллельна, т. е. при $k = 1$, и если она будет проходить через выколотые точки. Через первую из этих точек прямая $y = kx$ проходит, если $k = 2$, а через вторую — если $k = \frac{2}{3}$.



Ответ: $\frac{2}{3};\ 1;\ 2.$

2. Прямая $y = 2x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.

Прямая касается окружности, если система уравнений

$$\begin{cases} y = 2x + b, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

имеет только одно решение. Подставляя выражение для y из первого уравнения во второе, получим:

$$x^2 + (2x+b)^2 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 + 4bx + b^2 - 5 = 0.$$

Данное квадратное уравнение должно иметь единственное решение, поэтому дискриминант должен быт равен нулю:

$$16b^2 - 20(b^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow 4b^2 = 100 \Leftrightarrow b^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -5, \\ b = 5. \end{array}\right.$$

Найдём координаты точки касания. При $b = 5$ второе уравнение системы принимает вид:

$$5x^2 + 20x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Точка касания имеет отрицательную абсциссу, поэтому корень $b = 5$ не подходит по условию задачи.

При $b = -5$ второе уравнение системы принимает вид:

$$5x^2 - 20x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Подставляя x и b в первое уравнение системы, получаем $y = 2 \cdot 2 - 5 = -1$. Координаты точки касания (2; −1).

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2+(2a+4)x+8a+1\le 0$ не имеет решений.

2. Найдите наименьшее значение выражения и значения x и y, при которых оно достигается $|6x+5y+7|+|2x+3y+1|$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $(5x-4y+3)^2+(3x-y-1)^2$ и значения x и y, при которых оно достигается.

4. Первая прямая проходит через точки $(0;\ 4{,}5)$ и $(3;\ 6)$. Вторая прямая проходит через точки $(1;\ 2)$ и $(-4;\ 7)$. Найдите координаты общей точки этих двух прямых.

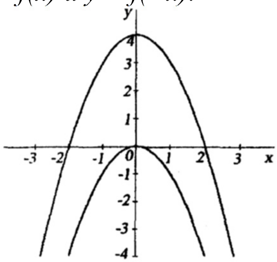
5. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{x^3-y}{x^2+1}-\dfrac{x^2y-x}{x^2+1}$, если x и y связаны соотношением $y=x^2+x-4$.

6. При каких значениях m вершины парабол $y=-x^2+4mx-m$ и $y=x^2+2mx-2$ расположены по одну сторону от оси x?

9.4 Геометрические преобразования графиков функций

Текст 73.

Во многих случаях графики функций могут быть построены путем некоторых преобразований уже известных графиков других функций более простого вида. Так, если известен график функции *y=f(x)*, то можно построить графики функций вида *y =f(x)+a, y = f(x+b), y = cf(x), y = f(kx), y = −f(x) и y = f(−x).*



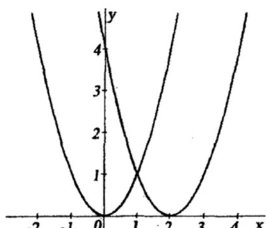


Рисунок 15. Преобразование графиков

График функции $y = f(x) + a$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на а единиц вверх при $a > 0$ и на $|a|$ единиц вниз при $a < 0$. Например, на рис.15 (слева) показаны графики функции $y = -x^2$ и $y = -x^2 + 4$. График функции $y = -x^2 + 4$ получен параллельным переносом графика функции $y = -x^2$ на четыре единицы вверх.

График функции $y = f(x + b)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на b единиц влево при $b > 0$ и на $|b|$ единиц вправо при $b < 0$. Например, на рис.15 (справа) показаны трафики функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$. График функции $y = (x - 2)^2$ получен параллельным переносом графика функции $y = x^2$ на 2 единицы вправо.

График функции $y = cf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в c раз при $c > 1$ и сжатием вдоль оси Oy в $1/c$ раз при $c < 1$. Например, на рис.16 (слева) показаны графики функций $y = x^2$ и $y = 3x^2$. График функции $y = 3x^2$ получен растяжением графика функции $y = x^2$ вдоль оси Oy в 3 раза.

График функции $y = f(kx)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ к оси Oy в k раз при $k > 1$ и растяжением от оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз при $k < 1$. Например, на рис.16 (справа) показаны графики функций $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{(2x)^2}$. График функции $y = \frac{1}{(2x)^2}$ получен сжатием графика функции $y = \frac{1}{x^2}$ к оси Oy в 2 раза.

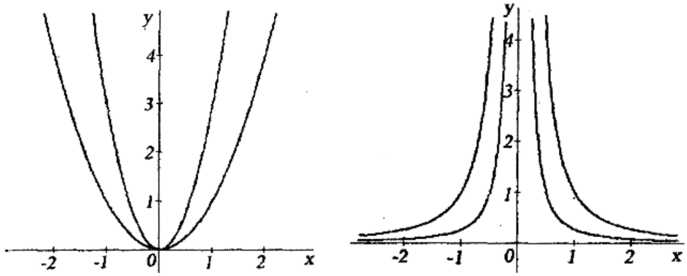
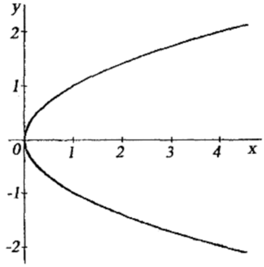


Рисунок 16. Преобразование графиков

График функции $y=-f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y=f(x)$ относительно оси Ox. Например, на рис.17 показаны графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$. График функции $y = -\sqrt{x}$ получен симметричным отображением графика функции $y=\sqrt{x}$ относительно оси Ox.



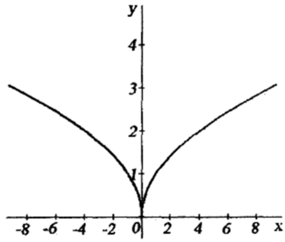
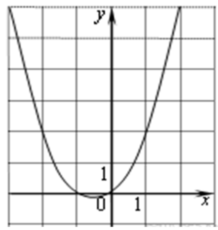


Рисунок 17. Симметричное отображение графика функции

Примеры:

1. График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = x^2 - x$; 2) $y = -x^2 - x$; 3) $y = x^2 + x$; 4) $y = -x^2 + x$.

Решение.

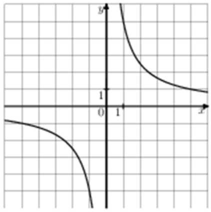
Ветви изображённой на рисунке параболы направленны вверх, а абсцисса вершины отрицательна. Следовательно, данному графику могут соответствовать функции $y = x^2 - x$ или $y = x^2 + x$. Выделим полный квадрат в обоих выражениях:

$$y = x^2 - x = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4};$$

$$y = x^2 + x = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Графику соответствует вариант под номером 3.

2. График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y=-\dfrac{5}{x}$ 2) $y=-\dfrac{1}{5x}$ 3) $y=\dfrac{5}{x}$ 4) $y=\dfrac{1}{5x}$.

Решение.

Изображённая на рисунке гипербола расположена в первой и третьей четвертях, следовательно, данному графику могут соответствовать функции $y=\dfrac{5}{x}$ или $y=\dfrac{1}{5x}$. При $x=1$ ордината функции на графике равна 5, следовательно, это график функции $y=\dfrac{5}{x}$.

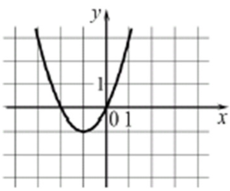
Ответ: 3.

3. Установите соответствие между функциями и их графиками.

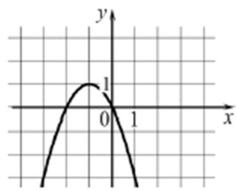
Функции: а) $y=x^2-2x$; b) $y=x^2+2x$; c) $y=-x^2-2x$.

Графики

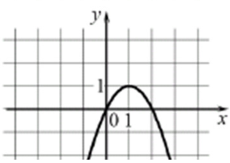
1)



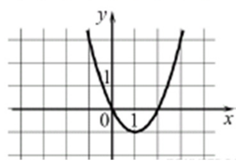
3)



2)



4)



Напомним, что если парабола задана уравнением $y=ax^2+bx+c$, то: при $a>0$, то ветви параболы направлены вверх, а при $a<0$ — вниз; абсцисса вершины параболы вычисляется по формуле $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}$; парабола пересекает ось *Oy* в точке *c*.

Уравнение $y=x^2-2x$ задает параболу, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины равна 1, она пересекает ось ординат в точке 0. Ее график изображен на рисунке 4).

Уравнение $y = x^2 + 2x$ задает параболу, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины равна −1, она пересекает ось ординат в точке 0. Ее график изображен на рисунке 1).

Уравнение $y = -x^2 - 2x$ задает параболу, ветви которой направлены вниз, абсцисса вершины равна − 1, она пересекает ось ординат в точке 0. Ее график изображен на рисунке 3).

Задания для самостоятельной работы:

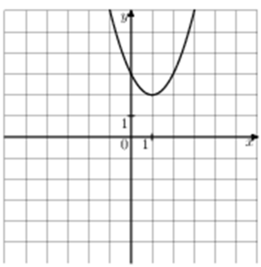
1. Используя геометрические преобразования, построить графики функций:

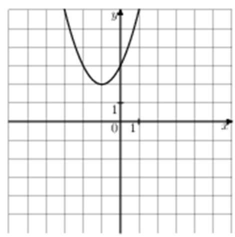
a) $y = (x - 2)^2 - 1$;

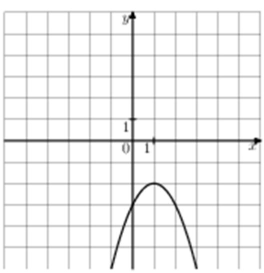
b) $y = (x + 1)^2$;

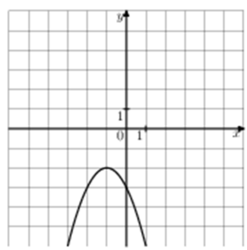
c) $y = (-x)^{3/2}$.

2. На одном из рисунков изображен график функции $y = x^2 - 2x + 3$. Укажите номер этого рисунка.

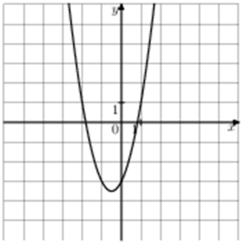
1) 

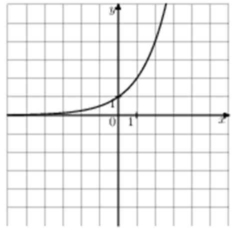
2) 

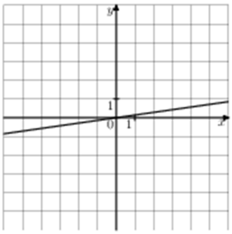
3) 

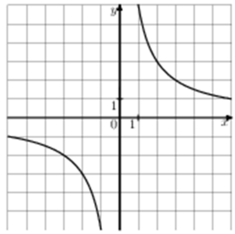
4) 

3. На одном из рисунков изображена парабола. Укажите номер этого рисунка.

1) 

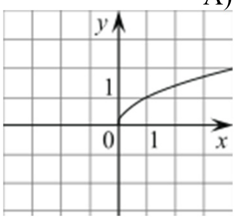
2) 

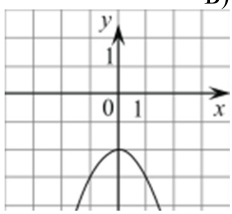
3) 

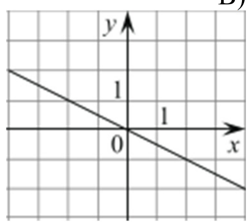
4) 

4. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики

А) 

Б) 

В) 

Формулы

1) $y = -\frac{1}{2}x$ 2) $y = -\frac{1}{x}$ 3) $y = -x^2 - 2$ 4) $y = \sqrt{x}$

Ответьте на вопросы:

1. Дайте определение функции. Что такое аргумент функции?

2. Что называется областью определения функции?

3. Что называется областью изменения функции?

4. Дайте определение декартовой прямоугольной системы координат. Как называют оси координат Ох и Оу?

5. Что называется графиком функции?

6. Какая функция называется возрастающей, убывающей?

7. Что такое монотонная функция?

8. Дайте определение чётной и нечетной функции.

9. Какие особенности графиков чётных и нечётных функций?

10. Какую функцию называют линейной, квадратичной, дробно-линейной, степенной, функцией обратной пропорциональности?

11. Как называют графики квадратичной функции, функции обратной пропорциональности?

12. Назовите разновидности степенной функции. Какой вид имеют графики этих функций?

13. Назовите преобразования графиков функций, с помощью которых можно построить графики более сложных функций.

§10. ГЕОМЕТРИЯ

10.1 Основные геометрические фигуры

Текст 74.

Основные геометрические фигуры − это *точка* и *прямая*. Точки обозначают прописными буквами: *A, B, C, D*, ... Прямые обозначают строчными латинскими буквами: *a, b, c, d, ...*

О расположении точки *A* и прямой а, которые показаны на рис.18 говорят, что: 1) точка *A лежит* на прямой *a*; 2) точка *A принадлежит* прямой *a*; 3) прямая *a проходит* через точку *A*.

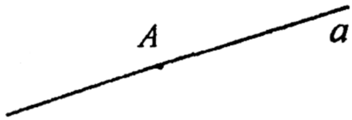


Рисунок 18. Точка *A* принадлежит прямой *a*

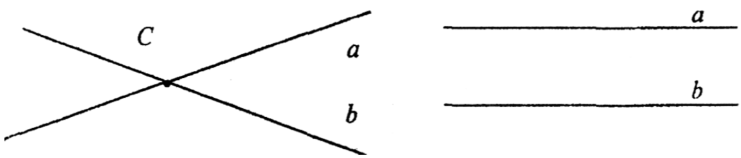


Рисунок 19. Расположение прямых *a* и *b*

О расположении точки *C* и прямых *a* и *b*, которые показаны на рис.19, слева, говорят, что: 1) прямые *a* и *b пересекаются* в точке *C*; 2) точка *C* − это *точка пересечения* прямых *a* и *b*. Прямые *a* и *b*, которые показаны на рис.19, справа − *параллельные* прямые. Прямые называются параллельными, если они не пересекаются. Параллельные прямые обозначают $a \parallel b$ (прямая *a* параллельна прямой *b*).

Текст 75.

Основные свойства точек и прямых

1. Через любые две точки можно провести только одну прямую.
2. Две прямые или не пересекаются (параллельные прямые), или пересекаются в одной точке.

Если на прямой лежат точки *A* и *B*, то часть прямой между точками *A* и *B* называется *отрезком* прямой (рис.20). Отрезок обозначают *AB*. Точки *A* и *B* называются *концами* отрезка.

Длина отрезка − это *расстояние* между концами отрезка. Длина измеряется в миллиметрах, сантиметрах, метрах и т. д.

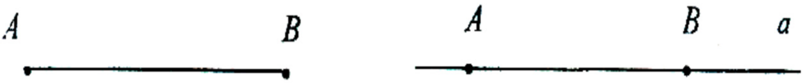


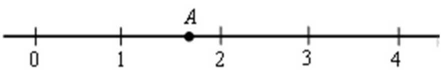
Рисунок 20. Расположение точек и прямых

Пусть на прямой *a* лежит точка *A* (рис.20). *Полупрямая* или *луч* − это часть прямой, которая лежит по одну сторону от данной точки *A*.

Точка *A* называется *начальной* точкой луча. Луч образуют *AB*, где *B* − любая другая точка луча. *Полупрямая*, которая лежит по другую сторону от данной точки *A*, называется *дополнительной* полупрямой к полупрямой *AB*.

Примеры:

1. Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой A?



1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{11}$.

Решение.

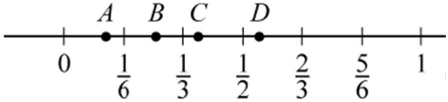
Возведём в квадрат числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$:

$\sqrt{2}^2 = 2, \quad \sqrt{3}^2 = 3, \quad \sqrt{7}^2 = 7, \quad \sqrt{11}^2 = 11,$

Число A^2 лежит между числами $1^2 = 1$ и $2^2 = 4$ и ближе к числу 2^2. Поэтому точкой A отмечено число $\sqrt{3}$.

Правильный ответ указан под номером 2.

2. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\frac{3}{8}$. Какая это точка?



Решение.

Приведём все дроби к одному знаменателю. Получим:

$0 < A < \frac{4}{24} < B < \frac{8}{24} < C < \frac{12}{24} < D < \frac{16}{24}.$

Поскольку $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, точка C соответствует числу $\frac{3}{8}$.

Правильный ответ указан под номером 3.

10.2 Угол

Текст 76.

Угол − это фигура, которая состоит из двух лучей с общей начальной точкой (рис.21, слева). Точка *C*, общая начальная точка, называется *вершиной* угла.

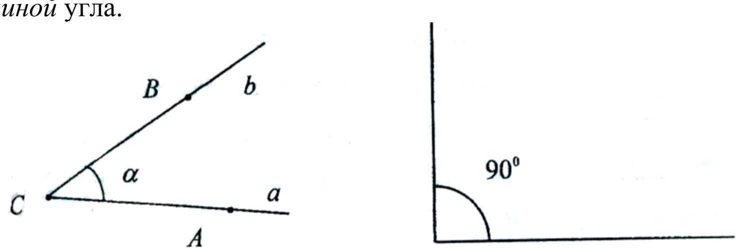


Рисунок 21. Угол. Прямой угол

Лучи *CA (a)* и *CB (b)* называются *сторонами* угла. Угол обозначают $\angle(a,b)$, $\angle ACB$, $\angle C$ или a. Углы измеряются в *градусах*.

Прямой угол − это угол, равный 90° (рис.21, справа). Если величина угла меньше 90°, то есть $0^\circ < a < 90^\circ$, то такой угол называется *острым* (рис.22, слева). Если величина угла больше 90°, то есть $90^\circ < b < 180^\circ$, такой угол называется *тупым* (рис.22, справа). *Развернутый* угол − это угол, равный 180° (рис.23, слева), *полный* угол − это угол, равный 360° (рис.23, справа).

Рисунок 22. Острый и тупой углы

Рисунок 23. Развернутый и полный углы

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. На рис.24, слева, углы *CAD* и *BAC* смежные. У них сторона *AC общая*, а стороны AB и AD являются *дополнительными* полупрямыми прямой DB. Смежные углы в сумме дают 180°, то есть $\angle CAD + \angle BAC = 180°$.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого. На рис.24, справа, углы α и β являются вертикальными. Стороны угла β являются дополнительными полупрямыми угла α. Вертикальные углы равны между собой, то есть $\alpha = \beta$.

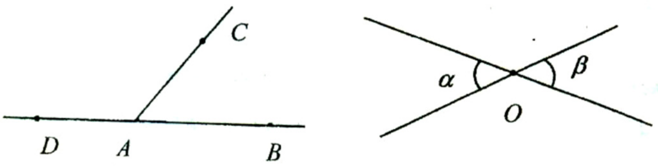


Рисунок 24. Смежные и вертикальные углы

Текст 77.

Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом. Перпендикулярность прямых обозначается знаком ⊥. Запись $\alpha \perp b$ читается: «прямая α перпендикулярна прямой b».

Перпендикуляром к данной прямой называют отрезок прямой, перпендикулярной к данной прямой, причем один конец отрезка лежит на прямой. Этот конец отрезка называется *основанием* перпендикуляра.

Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между сторонами и делит угол *пополам*. На рис.25 показан угол $\angle(ab)$. Луч C исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам: $\angle(ac) = \angle(bc)$. Луч C является биссектрисой угла (ab).

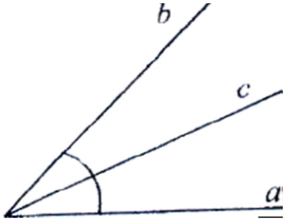


Рисунок 25. Биссектриса угла

10.3 Треугольники

Текст 78.

На рис.26 изображен *треугольник ABC*. Треугольник обозначают знаком Δ. Точки *A, B* и *C* называют *вершинами* треугольника. Отрезки

AB, AC и *BC* − *сторонами* треугольника. Сумма длин сторон треугольника называется *периметром* треугольника: $P = a + b + c$. Сумма углов треугольника равна 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

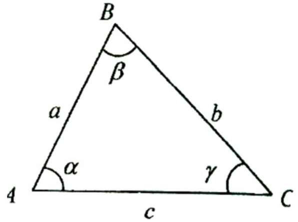


Рисунок 26. Треугольник

В треугольнике рассматривают такие отрезки: медиана, высота и биссектриса. *Медианой* треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. На рис.27 отрезок *AM* − медиана. Он делит сторону *BC* пополам. У треугольника имеется три медианы. Все медианы треугольника пересекаются в одной точке.

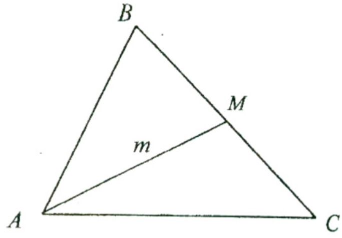


Рисунок 27. Медиана треугольника

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону. На рис.28, слева, отрезок *BD* − высота. Отрезок *BD* перпендикулярен стороне *AC*: $BD \perp AC$. У треугольника имеется три высоты. Все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

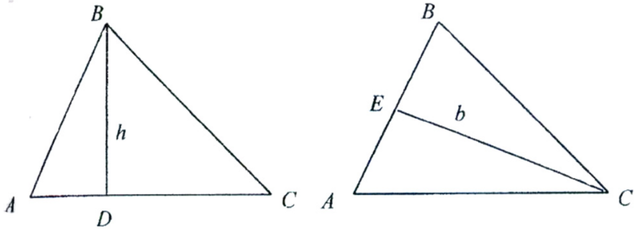


Рисунок 28. Высота и биссектриса треугольника

Биссектрисой угла треугольника называется отрезок, которой выходит из вершины на противоположную сторону и делит угол треугольника пополам. На рис.28, справа, отрезок CE − биссектриса угла ACB. Биссектриса CE делит угол ACB пополам. У треугольника − три биссектрисы. Все они пересекаются в одной точке.

Площадь треугольника S равна половине произведения длин высоты и стороны, на которую она опущена. Если длина высоты BD равна h, а длина стороны AC равна а, то $S = \frac{1}{2}ah$.

Текст 79.

Виды треугольников

Равнобедренный треугольник − это треугольник, у которого две стороны равны.

Равнобедренный треугольник ABC показан на рис. 29. Стороны AB и BC называются *боковыми* сторонами, сторона AC − *основанием*. Боковые стороны равны между собой, $AB = BC$. Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой, $\angle BAC = \angle BCA$. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

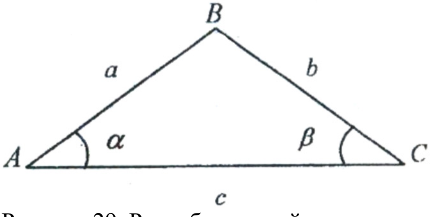


Рисунок 29. Равнобедренный треугольник

Равносторонний треугольник − это треугольник, у которого все стороны равны. Все углы равностороннего треугольника равны 60°. Равносторонний треугольник ABC показан на рис. 30. В равностороннем треугольнике высоты, медианы и биссектрисы углов совпадают.

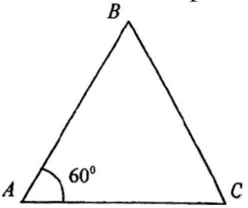


Рисунок 30. Равносторонний треугольник

Прямоугольный треугольник − это треугольник, у которого один из углов прямой.

Прямоугольный треугольник ABC показан на рис. 31. Сторона, которая находится напротив прямого угла, называется *гипотенузой*. Стороны, прилежащие к прямому углу, называются *катетами*.

Площадь прямоугольного треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}ab$.

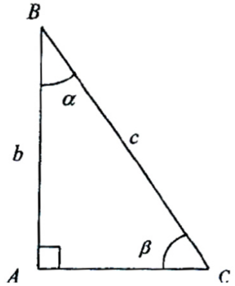


Рисунок 31. Прямоугольный треугольник

<u>Текст 80</u>.

Синусом острого угла называют отношение длин противолежащего катета и гипотенузы, $\sin\alpha = a/c$.

Косинусом острого угла называют отношение длин прилежащего катета и гипотенузы, $\cos\alpha = b/c$.

Тангенсом острого угла называют отношение длин противолежащего катета к прилежащему, $tg\,\alpha = a/b$.

Котангенсом острого угла называют отношение длин прилежащего катета к противолежащему, $ctg\,\alpha = b/a$. Можно также записать, что $tg\,\alpha = \sin a/\cos a$ и $ctg\,\alpha = \cos a/\sin a$.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, $c^2 = a^2 + b^2$.

Из теоремы Пифагора следует, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ называются тригонометрическими функциями.

Тригонометрические функции при значении углов 30°, 45° и 60° равны: $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $tg 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $tg 45° = 1$; $tg 60° = 3$; $ctg 30° = \sqrt{3}$; $ctg 45° = 1$; $ctg 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Таблица 5.

Значения тригонометрических функций

Угол в градусах	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Угол в радианах	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	-1	**0**
$\cos\alpha$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	**0**	-1	**0**	**1**
$tg\alpha$	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	**не сущ.**	**0**	**не сущ.**	**0**
$ctg\alpha$	**не сущ.**	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	**не сущ.**	**0**	**не сущ.**

10.4 Четырёхугольники

Текст 81.

На рис.32 изображён *четырехугольник ABCD*. Точки *A, B, C* и *D* называются *вершинами* четырехугольника. Отрезки *AB, BC, CD* и *AD* − *стороны* четырехугольника.

Углы α, β, γ и δ − *углы* четырёхугольника. Отрезки *BD* и *AC* называются *диагоналями* четырёхугольника. Сумма длин сторон четырёхугольника называется *периметром* четырёхугольника $P=a+b+c+d$.

Сумма углов четырёхугольника равна 360°: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$.

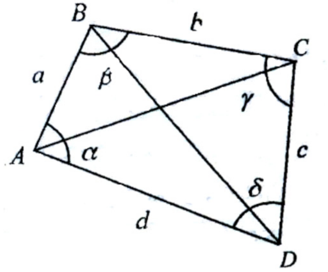


Рисунок 32. Четырёхугольник

Текст 82.

Виды четырёхугольников

Параллелограмм − это четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны между собой. На рис. 33 показан параллелограмм *ABCD*. Здесь $AB||CD$, $AD||BC$. Отрезок *h* называется *высотой* параллелограмма.

Свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны параллелограмма равны между собой, $AD = BC$, $AB = CD$;

2) диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, $AO = OC$, $BO = OD$.

Площадь параллелограмма равна произведению длин его стороны и высоты, опущенной на эту сторону, $S = ah$.

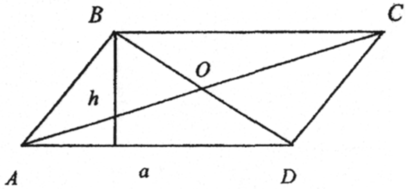


Рисунок 33. Параллелограмм

Текст 83.

Прямоугольник − это параллелограмм, у которого все углы прямые. На рис.34 показан прямоугольник *ABCD*.

Свойство прямоугольника: диагонали прямоугольника равны между собой, $AC = BD$. Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон, $S = ab$.

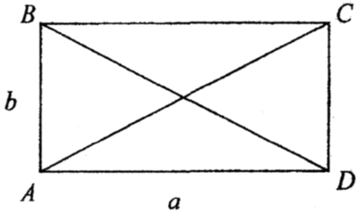


Рисунок 34. Прямоугольник

Текст 84.

Ромб − это параллелограмм, у которого все стороны равны между собой. На рис.35 показан ромб *ABCD*.

Свойство ромба: диагонали ромба взаимно перпендикулярны, $AC \perp BD$. Площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей, $S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2$.

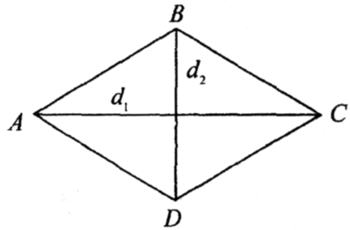


Рисунок 35. Ромб

Текст 85.

Квадрат − это прямоугольник, у которого все стороны равны между собой, или ромб, у которого все углы прямые. На рис.36 показан квадрат *ABCD*. *Диагонали квадрата равны и перпендикулярны* между собой, $AC = BD$, $AC \perp BD$.

Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны, $S = a^2$.

Рисунок 36. Квадрат

Текст 86.

Трапеция − это четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны между собой. На рис.37 показана трапеция *ABCD*. Параллельные стороны *AD* и *BC* называются *основаниями* трапеции, две другие, *AB* и *CD* − *боковые* стороны.

Средняя линия трапеции − это отрезок, который соединяет середины боковых сторон. Длина средней линии равна среднему арифметическому длин оснований трапеции, $m=\frac{(a+b)}{2}$. Высота трапеции h − это *перпендикуляр*, проведенный от одного основания к другому. Площадь трапеции равна произведению длин её средней линии и высоты, $S = mh = \frac{(a+b)}{2}h$.

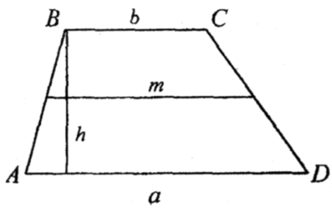


Рисунок 37. Трапеция

10.5 Окружность, круг

Текст 87.

Окружность – это линия, все точки которой равноудалены от одной точки, которая называется центром окружности. *Круг* – это часть плоскости, ограниченная окружностью. На рис.38 показана окружность.

Центр окружности находится в точке *O*. *Радиусом* окружности (круга) называется отрезок прямой, который соединяет центр окружности с любой точкой на окружности. На рис. 38 радиус окружности – это отрезок *OB*. *Диаметром* окружности называется отрезок прямой, который соединяет две точки окружности и проходит через центр окружности. На рис.38 диаметр окружности – это отрезок *AC*.

Хордой называется отрезок прямой, который соединяет две любые точки на окружности. На рис.38 отрезок *EF* – хорда. *Дугой* называют часть окружности, например, на рис.38 дугами являются части окружности *AE, EF* и т. д.

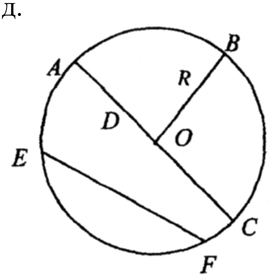


Рисунок 38. Окружность, круг

Текст 88.

Прямая называется *касательной* к окружности, если она имеет с окружностью одну общую точку. На рис.39 прямая *a* имеет с окружностью одну общую точку *A*. Прямая *a – касательная*. Общая точка окружности и касательной называется *точкой касания*. Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной, $OA \perp a$.

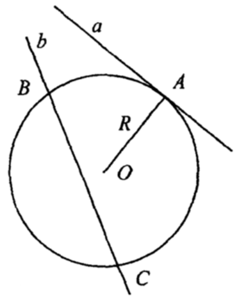


Рисунок 39. Касательная и секущая

Прямая называется *секущей*, если она имеет с окружностью две общие точки. На рис.39 прямая b пересекает окружность и имеет с окружностью две общие точки B и C. Прямая b − секущая.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность. На рис.40 вершина угла ABC лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность в точках A и C, угол ABC вписан в окружность. Угол, вершина которого лежит в центре окружности, а сторонами являются радиусы, называется *центральным* углом. На рис.40 вершина угла AOC лежит в точке O, а его сторонами являются радиусы OA и OC, угол AOC − центральный угол. Если концы вписанного угла α и центрального угла β совпадают, то центральный угол в два раза больше вписанного, $\beta = 2\alpha$.

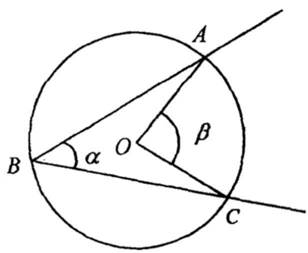
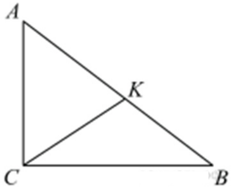


Рисунок 40. Центральный и вписанный углы

Длину окружности L вычисляют по формуле: $L= 2\pi R= \pi D$, *площадь круга* вычисляют по формуле: $S = \pi R^2$.

Примеры:

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.



Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине:

$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$

Ответ: 5.

7. В треугольнике ABC углы A и C равны 20° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.

Найдем $\angle ABC$:

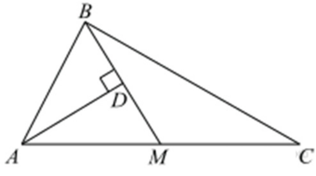
$$\angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ.$$

Так как BD − биссектриса, то $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 50^\circ.$

Треугольник HBC − прямоугольный. Так как $\angle C = 60^\circ$, то $\angle HBC = 30^\circ$. Таким образом, искомый угол DBH равен $50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$.

Ответ: 20°.

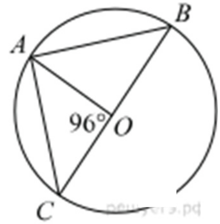
3. Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит её пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 4.



Так как высота AD, проведенная к медиане BM делит ее пополам, то треугольник ABM является равнобедренным, поэтому $AB = AM = 4$ Так как BM - медиана, то $AM = MC$, таким образом, $AC = 2AM = 8$.

Ответ: 8.

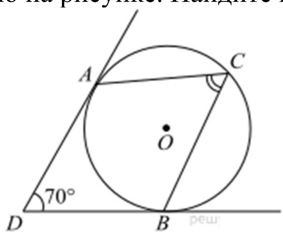
4. Найдите градусную меру $\angle ACB$, если известно, что BC является диаметром окружности, а градусная мера центрального $\angle AOC$ равна 96°.



Так как $\angle AOC$ и $\angle AOB$ — смежные, $\angle AOB = 84°$. Центральный угол равен дуге на которую он опирается, поэтому градусная мера дуги AB равна 84°. Угол ACB — вписанный и равен половине дуги, на которую опирается, поэтому $\angle ACB = 42°$.

Ответ: 42.

5. В угол величиной 70° вписана окружность, которая касается его сторон в точках A и B. На одной из дуг этой окружности выбрали точку C так, как показано на рисунке. Найдите величину угла ACB.



Угол ACB − вписанный, он равен половине дуги AB. Угол AOB − центральный, опирающийся на ту же дугу. Проведём радиусы OA и OB в точки касания. Сумма углов четырёхугольника $AOBD$ равна 360°. Поэтому

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(\angle AOB) = \frac{1}{2}(360° - 90° - 90° - 70°) = 55°.$$

Ответ: 55.

6. Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30° и 90°.

Пусть в треугольнике ABC отрезок BM служит медианой, при этом $\angle ABM = 90°$, $\angle CBM = 30°$. Возьмем на продолжении отрезка BM точку D так, что $BM = MD$. Тогда треугольники ABM и CDM равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle BDC = 90°$. Поэтому треугольник BDC – прямоугольный с углом CBD, равным 30°. Следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$

Ответ: 1:2.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. В прямоугольном треугольнике катеты равны 3 и 4, найти гипотенузу, sin α, cos α, tg α, ctg α.

2. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 13, а один из катетов 5. Найти периметр и площадь треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике cos α= 0,6, а прилежащий катет равен 12. Найти sin α, периметр и площадь треугольника.

4. В прямоугольном треугольнике tg α=$\frac{4}{3}$, гипотенуза равна 100. Найти периметр и площадь треугольника.

5. Высота равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найти периметр и площадь треугольника.

6. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13, а биссектриса угла, противолежащего основанию 12. Найти периметр и площадь треугольника.

7. В равнобедренном треугольнике основание равно 16, а боковая сторона 10. Найти периметр и площадь треугольника.

8. Диагональ квадрата равна $6\sqrt{2}$. Найти периметр и площадь квадрата.

9. Разность сторон прямоугольника равна 4, диагональ 20. Найти периметр и площадь прямоугольника.

10. Периметр прямоугольника равен 112, а разность сторон 8. Найти площадь и диагональ прямоугольника.

11. Острый угол параллелограмма равен 60°, а стороны 10 и 16. Найти площадь параллелограмма.

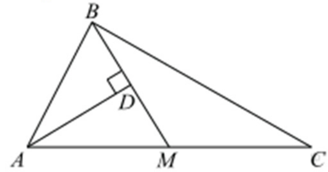
12. Сторона ромба равна 10, а острый угол 60°. Найти диагонали и площадь ромба.

13. Расстояния от точки на окружности до концов диаметра равны 16 и 12. Найти радиус, длину окружности и площадь круга.

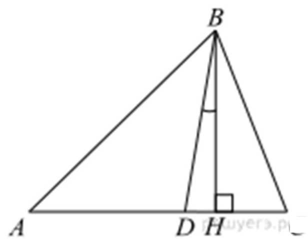
8. Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.

9. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите длину медианы, проведённой к стороне BC, если угол BAC равен 47°, угол BMC равен 133°, $BC = 4\sqrt{3}.$

10. В треугольнике ABC углы A и C равны 40° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.



11. Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит угол BAC пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 3.



12. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 18 и 30. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

13. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 10$, $DC = 25$, $AC = 56$.

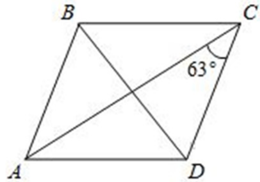
14. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 13$, $AC = 65$, $NC = 28$.

15. AC и BD − диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 79°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.

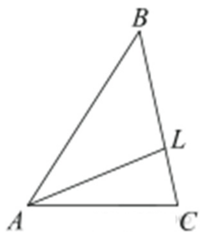
16. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 5$, $AC = 20$.

17. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и $\angle ACD = 21^\circ$. Найдите меньший угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

18. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в 2 раза больше стороны AB и $\angle ACD = 63°$. Найдите угол между диагоналями параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



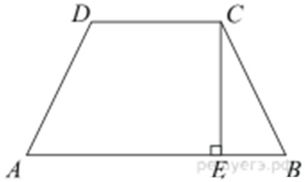
19. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 78°, угол ABC равен 52°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



20. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен 56 см, а периметр треугольника ABM равен 42 см.

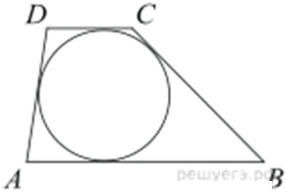
21. Отрезки AB и CD − диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

22. Большее основание равнобедренной трапеции равно 34. Боковая сторона равна 14. Синус острого угла равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите меньшее основание.



23. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен 60°. Найдите ее периметр.

24. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



25. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB провели высоту CD и биссектрису CL. Найдите угол DCL, если угол CAB равен 25°. Запишите решение и ответ.

26. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $\angle ACB = 75$°С. На стороне BC взяли точки X и Y так, что точка X лежит между точками B и Y, $AX = BX$ и $\angle BAX = \angle YAX$. Найдите длину отрезка AY, если $AX = 4\sqrt{3}$.

27. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $\angle ACB = 75$°С. На стороне BC взяли точки X и Y так, что точка X лежит между точками B и Y, $AX = BX$ и $\angle BAX = \angle YAX$. Найдите длину отрезка AY, если $AX = 2\sqrt{2}$.

28. К окружности с диаметром AB в точке A проведена касательная. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружность в точке C и касательную в точке K. Через точку D проведена хорда CD параллельно AB так, что получилась трапеция $ACDB$. Через точку D проведена касательная, пересекающая прямую AK в точке E. Найдите радиус окружности, если прямые DE и BC параллельны, $\angle EDC = 30^\circ$ и $KB = 14\sqrt{3}$.

Ответьте на вопросы:

1. Назовите основные расположения точек и прямых.
2. Какие прямые называются параллельными?
3. Назовите основные свойства точек и прямых.

4. Что называется полупрямой (лучом)?

5. Что такое угол? Назовите разновидности углов.

6. Что называется биссектрисой угла?

7. Какие прямые называются перпендикулярными? Что такое перпендикуляр?

8. Какую фигуру называют треугольником?

9. Назовите разновидности треугольников.

10. Как называют стороны равнобедренного, прямоугольного треугольника?

11. Какие отрезки рассматриваются в треугольнике?

12. Сформулируйте теорему Пифагора.

13. По какой формуле вычисляется площадь треугольника?

14. Что называют синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом угла?

15. Какую фигуру называют четырёхугольником?

16. Назовите разновидности четырёхугольников.

17. По каким формулам вычисляются площади четырёхугольников?

18. Что такое окружность, круг?

19. Что называют радиусом, диаметром окружности?

20. Что такое хорда, дуга, касательная к окружности?

21. Какой угол в окружности называют вписанным, центральным?

22. По какой формуле вычисляется длина окружности, площадь круга?

§11. ТРИГОНОМЕТРИЯ

11.1 Радианное измерение углов

Текст 89.

Угол в 1 *радиан* − это центральный угол, который опирается на дугу, длина которой равна радиусу окружности. На рис.41 центральный угол α равен 1 радиану. Если начальный радиус совершает *полный оборот*, то получится угол 360°, или 2π радиан. Для того чтобы определить, сколько радиан содержится в 1 градусе, нужно равенство $360° = 2\pi$ разделить на 360. В результате получим, что $1° = \frac{\pi}{180}$ *рад*.

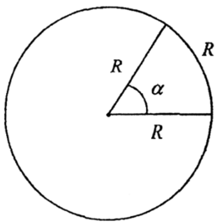


Рисунок 41. Радиан

Если угол содержит $A°$, то *радианная мера* равна $\alpha = \frac{A\pi}{180}$.

Для того чтобы определить, сколько градусов содержится в 1 радиане, нужно равенство $360° = 2\pi$ разделить на 2π. В результате получим, что 1*рад* $=57{,}3° = \frac{180°}{\pi}$.

Если угол содержит B рад, то градусная мера равна $B\,\frac{180°}{\pi}$.

Задания для самостоятельной работы:

Записать значения углов в радианах: 15°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°.

11.2 Тригонометрические функции произвольного угла

Текст 90.

Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице, $R = 1$ (рис.42). На окружности отметим точку $P_0(1;$

0). При повороте начального радиуса около центра *O* на угол α точка P_0 перейдёт в точку *P(x; y)*.

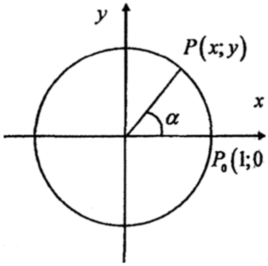


Рисунок 42. Единичная окружность

Синусом угла α называется отношение ординаты точки *P* к радиусу: $sin\ \alpha = \frac{y}{R}$. *Косинусом* угла α называется отношение абсциссы точки *P* к радиусу: $cos\ \alpha = \frac{x}{R}$. *Тангенсом* угла α называется отношение ординаты точки *P* к её абсциссе: $tg\ \alpha = \frac{y}{x}$. *Котангенсом* угла α называется отношение абсциссы точки *P* к её ординате: $ctg\ \alpha = \frac{x}{y}$.

Знак sin α определяется знаком ординаты, а *знак cos α* знаком абсциссы *x* точки *P* единичной окружности. Например, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то углу α соответствует точка окружности *P*, координаты которой $x > 0$ и $y > 0$ (рис.43, справа). Следовательно, на числовом промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ $sin\ \alpha > 0$ и $cos\ \alpha > 0$. Если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то углу α соответствует точка окружности *P*, координаты которой $x < 0$ и $y > 0$ (рис.43, слева). Следовательно, на числовом промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ $sin\ \alpha > 0$ и $cos\ \alpha < 0$. Если $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, то углу α соответствует точка окружности *P*, координаты которой $x < 0$ и $y < 0$ (рис.44, слева). Следовательно, на числовом промежутке $(\pi; \frac{3\pi}{2})$ $sin\ \alpha < 0$ и $cos\ \alpha < 0$.

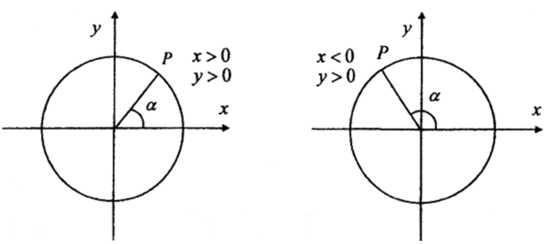


Рисунок 43. I, II четверти

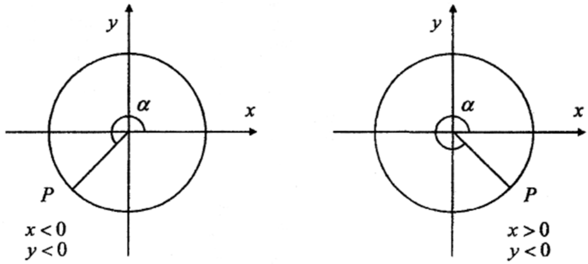


Рисунок 44. III, IV четверти

Если $\frac{3\pi}{2}$<α< 2π, то углу α соответствует точка окружности *P*, координаты которой $x > 0$ и $y< 0$ (рис.44, справа). Следовательно, на числовом промежутке ($\frac{3\pi}{2}$; 2π) $sin\ \alpha < 0$ и $cos\ \alpha > 0$. Схематически знаки sinα изображены на рис. 45, слева, а $cos\ \alpha$ − на рис. 45, справа.

Знаки значений функций $tg\ \alpha$ и $ctg\ \alpha$ определяются знаками ординаты и абсциссы точки *P*. Так как в I и III четвертях знаки ординаты и абсциссы одинаковые (в первой четверти $x >0, y >0,$ а в третьей $x< 0, y< 0$), то в этих четвертях $tg\ \alpha > 0$ и $ctg\ \alpha > 0$. Так как во II и IV четвертях знаки ординаты и абсциссы разные (во второй четверти $x<0,\ y >0$, а в четвёртой $x>0, y<0$), то в этих четвертях $tg\ \alpha< 0$ и $ctg\ \alpha< 0$. Знаки значений $tg\ \alpha$ и $ctg\ \alpha$ можно также определить по знакам $sin\ \alpha$ и $cos\ \alpha$, так как $tg\ \alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, а $ctg\ \alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$. Схематически знаки $tg\ \alpha$ и $ctg\ \alpha$ изображены на рис.46.

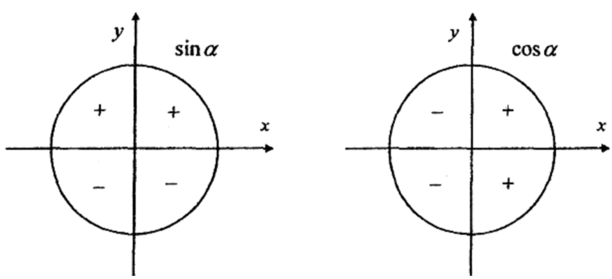


Рисунок 45. Знаки функций $sin\ \alpha$ и $cos\ \alpha$

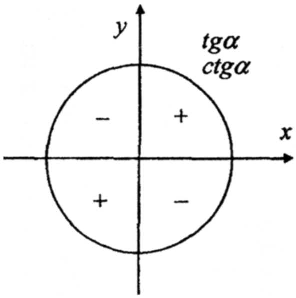


Рисунок 46. Знаки функций *tg α* и *ctg α*

11.3 Формулы приведения

Текст 91.

Формулами приведения называют формулы, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$; $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$; $\pi\pm\alpha$; $2\pi\pm\alpha$ выражаются через значения *sin α, cos α, tg α, ctg α.*

Правила перехода:

1. При переходе от функций *углов* $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$; $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ к функциям угла *α*, название функции изменяется: *sin→cos, cos→sin, tg→ctg, ctg→tg.*
2. При переходе от функций *углов π ± α и 2π±α* к функциям угла *α*, название функции не изменяется.

3. Считая угол *α* острым *(0<α < π/2)*, перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет функция углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$; $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$; $\pi\pm\alpha$; $2\pi\pm\alpha$.

Примеры:

1. Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$.

Выполним преобразования:

$$-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ) = -4\sqrt{3}\cos(750^\circ) = -4\sqrt{3}\cos(720^\circ+30^\circ) = -4\sqrt{3}\cos 30^\circ = -6$$

2. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-300^\circ)$.

Выполним преобразования:

$$2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-300^\circ) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-360^\circ+60^\circ) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 6.$$

3. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.

Выполним преобразования:

$$-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ) = -18\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 18.$$

4. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}17^\circ \cdot \operatorname{tg}107^\circ$.

Выполним преобразования:

$$5\operatorname{tg}17^\circ \cdot \operatorname{tg}107^\circ = 5\operatorname{tg}17^\circ \cdot \operatorname{tg}(90+17)^\circ = 5\operatorname{tg}17^\circ \cdot (-\operatorname{ctg}17^\circ) = -5.$$

5. Найдите значение выражения $7\operatorname{tg}13^\circ \cdot \operatorname{tg}77^\circ$.

Сходственные функции дополнительных углов равны. Поэтому

$$7\operatorname{tg}13^\circ \cdot \operatorname{tg}77^\circ = 7\operatorname{ctg}77^\circ \cdot \operatorname{tg}77^\circ = 7.$$

6. Найдите значение выражения: $12\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ$.

Выполним преобразования:

$$12\sin 150^\circ \cdot \cos 120^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

7. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{7}{25}$.

Найдите $\cos A$.

Имеем:

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{625-49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}.$$

8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите $\sin B$.

Тригонометрические функции дополнительных углов являются сходственными. Поэтому

$$\sin B = \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25} = 0,96.$$

9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 0,1$. Найдите $\cos B$.

Решение. $\cos B = \sin A = 0,1$.

10. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

По определению тангенса имеем:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A} = \frac{\sqrt{1-\frac{16}{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = 0,25.$$

11. В треугольнике ABC угол C равен 90° $\operatorname{tg} A = 2$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

Тригонометрические функции дополнительных углов являются сходственными. Поэтому $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A = \dfrac{1}{\operatorname{tg} A} = 0,5.$

Задания для самостоятельной работы

1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.

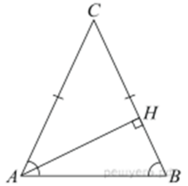
2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\mathrm{tg} A = 0,5$, $BC = 4$. Найдите AC.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 8$, $BC = 4$. Найдите $\sin A$.

4. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB.

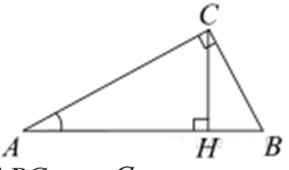
5. В треугольнике ABC $AC = BC = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB.

6. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH высота, $AB = 5$, $\sin BAC = \frac{7}{25}$. Найдите BH.

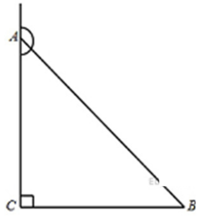


7. В треугольнике $ABC, AC = BC, AB = 5, \cos \angle BAC = \frac{7}{25}$. Найдите высоту AH.

8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, высота CH равна 4, $BC = 8$. Найдите $\cos A$.

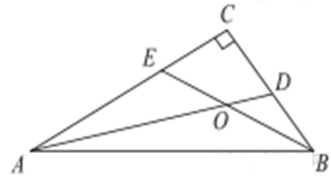


9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0,1$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

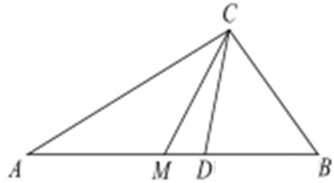


10. Один острый угол прямоугольного треугольника в 4 раза больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

11. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



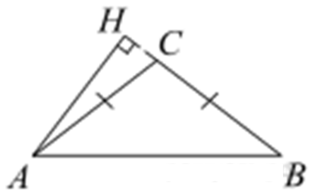
12. Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



13. В треугольнике ACB угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.

14. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, угол A равен 30°, $AB = 4$. Найдите BH.

15. В треугольнике *ABC* *AC* = *BC*, *AB* = 10, высота *AH* равна 3. Найдите синус угла *BAC*.



11.4 Периодичность тригонометрических функций

Текст 92.

Из формул приведения следует, что прибавление к значению угла величин, равных $2\pi k$ для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а также πk для $tg\,\alpha$ и $ctg\,\alpha$ (где k – целое число) не изменяет значений тригонометрических функций, то есть $sin\,(\alpha + 2\pi k) = sin\,\alpha$, $cos\,(\alpha + 2\pi k) = cos\alpha$, $tg\,(\alpha + \pi k) = tg\alpha$, $ctg\,(\alpha+\pi k) = ctg\alpha$.

В этом случае говорят, что функции $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tg\,\alpha$ и $ctg\,\alpha$ − *периодические* функции, а величины $2\pi k$ и πk − *периоды* этих функций.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической функцией*, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$. Число T называется *периодом функции* y = f(x). Если T − период функции, то число Tk также является периодом этой функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период T, который называют основным периодом функции.

Основной период функций $sin\,\alpha$ и $cos\,\alpha$ равен 2π. Для функций $tg\alpha$ и $ctg\,\alpha$ основной период равен π. Периодичность тригонометрических функций используют при вычислениях.

Примеры:

$sin750° = sin(720° + 30°) = sin(2 \cdot 360° + 30°) = sin30° = 1/2;$

$tg585° = tg(540° + 45°) = tg(3 \cdot 180° + 45°) = tg45° = 1.$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α, если: $\alpha = 450°$; $\alpha = 960°$; $\alpha = 750°$; $\alpha = 1260°$; $\alpha = 810°$.

11.5 Формулы тригонометрии

Текст 93.

Основные тригонометрические тождества

1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
2. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$
3. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$
6. $\frac{1}{sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$

Основные тригонометрические тождества используют при *упрощении* тригонометрических выражений.

Пример.

1. Упростить выражение: $sin^4\alpha + sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha + cos^2\alpha$.

$sin^4\alpha + sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha + cos^2\alpha = sin^2\alpha \cdot (sin^2\alpha + cos^2\alpha) + cos^2\alpha = sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

2. Упростите $(sin\,\alpha + cos\,\alpha)^2 + (sin\,\alpha - cos\,\alpha)^2 =$
$= sin^2\alpha + 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha + cos^2\alpha + sin^2\alpha - 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha + cos^2\alpha =$
$= 2sin^2\alpha + 2cos^2\alpha = 2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) = 2 \cdot 1 = 2.$

3. Найти неизвестные из тригонометрических функций: $sin\,\alpha, cos\alpha, tg\,\alpha, ctg\,\alpha$, если $sin\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Из формулы: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, выразим $cos\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $cos\alpha < 0$, => $cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha}$,

$cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}.$

По формуле (2): $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$; $tg\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$,

Т.к. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $tg\alpha = \sqrt{3}$, $ctg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Дано $tg\alpha = \frac{1}{2}$. Какое значение имеют остальные тригонометрические функции этого угла. В ответе дроби не сокращайте.

Из формулы: $\frac{1}{cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$, выразим $cos\alpha$, учитывая, что

$\alpha \in$ III четверти=> $cos\alpha < 0$, => $\frac{1}{cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$, <=> $\frac{1}{cos^2\alpha} = \frac{5}{4}$, решим пропорцию $cos^2\alpha = \frac{4}{5}$, => $cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

По формуле (1): $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, выразим $sin\,\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ III четверти=> $sin\,\alpha < 0$, =>

$sin\,\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Т.к. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, то $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, $ctg\alpha = 2$

Ответ: $cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $sin\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $ctg\alpha = 2$.

4. Доказать тождество: $sin^4\alpha - cos^4\alpha = sin^2\alpha - cos^2\alpha$.

Используя формулу для разности квадратов двух чисел, получаем: $sin^4\alpha - cos^4\alpha = (sin^2\alpha + cos^2\alpha)(sin^2\alpha - cos^2\alpha)$.

Но $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Поэтому:
$sin^4\alpha - cos^4\alpha = sin^2\alpha - cos^2\alpha$, что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельной работы

1. Упростите выражение:

a) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

b) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

2. Найти неизвестные из тригонометрических функций: $sin\,\alpha\,, cos\alpha, tg\,\alpha\,, ctg\,\alpha$:

a) Если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}, 0 < \alpha < 90°$;

b) Если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}, 0 < \alpha < 90°$.

3. Дан тангенс (котангенс) угла. Какое значение имеют остальные тригонометрические функции этого угла? В ответе дроби не сокращайте.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{21}, a \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$;

b) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{6}{8}, a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

4. Докажите, что равенство, является тождеством:

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

b) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Текст 94.

Формулы сложения

1. *Формулы приведения*. Заучивать эти формулы нет необходимости. Достаточно помнить следующее:

a) если в формуле содержатся углы $180° = \pi$ и $360° = 2\pi$, то наименование функции не изменяется;

b) если же в формуле содержатся углы $90° = \frac{\pi}{2}$ и $270° = \frac{3\pi}{2}$, то наименование функции меняется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.);

c) чтобы определить знак в правой части формулы (+ или −), достаточно, считая угол φ острым, определить знак выражения, стоящего в левой части формулы.

2. *Теоремы сложения*:

$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$;
$cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$;
$sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$;

$sin(\alpha - \beta) = sin\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$;

$tg(\alpha\ +\ \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$;

$tg(\alpha -\ \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$.

<u>Примеры.</u>

1. Вычислите:

$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45° =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2. Вычислите:

a) $\cos 17° \cdot \cos 43° - \sin 17° \cdot \sin 43° = \cos(17° + 43°) =$
$\cos 60° = \frac{1}{2}$;

b) sin137° cos47° − sin47° cos 37° = sin(137° − 47°) = sin90° = l.

3. Найти cos ($\alpha + \frac{\pi}{6}$), если cos α = 0,6 и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение:

Из формулы:

$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$, получим

$cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = cos\,\alpha \cdot cos\frac{\pi}{6} - sin\,\alpha \cdot sin\frac{\pi}{6}$;

подставим вместо $cos\alpha = 0{,}6$,

$cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}6 \cdot cos\frac{\pi}{6} - sin\,\alpha \cdot sin\frac{\pi}{6}$; $(*)$

Зная, $cos\alpha = 0{,}6$, по основному тригонометрическому тождеству найдем $sin\,\alpha$, учитывая, что $\alpha \in$ IV четверти => $sin\alpha < 0$, =>

$sin\,\alpha = -\sqrt{1 - cos^2\alpha}$,

$sin\,\alpha = -\sqrt{1 - (0{,}6)^2} = -\sqrt{1 - 0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$,

Подставим в формулу $(*)$:

$$cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}6 \cdot cos\frac{\pi}{6} - (-0{,}8) \cdot sin\frac{\pi}{6} = 0{,}6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$

Ответ: $cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$.

5. Упростить:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) -$$
$$- \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha +$$
$$+ \sin\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить:

a) $\sin(-75°)$;

b) $\sin 19° \cdot \cos 26° + \cos 19° \cdot \sin 26°$;

c) $\sin\frac{3\pi}{5} \cdot \sin\frac{7\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} \cdot \cos\frac{7\pi}{5}$;

d) $\cos 810°$.

2. Решить задачу:

a) Найти $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}8$, и $0° < \alpha < 90°$;

b) Найти $\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = -0{,}6$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $180° < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

3. Упростить:

a) $\cos(2\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

b) $\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(2\pi+\alpha)}$.

Текст 91.

Формулы двойного угла

1. Формулы *двойного угла*:

$sin2\alpha = 2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$ $\qquad$ $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$cos\,2\alpha = 1 - 2\,sin^2\alpha$ $\qquad$ $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$

$tg2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}$ $\qquad$ $ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\,\alpha}$

2. Формулы половинного угла:

$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2} \quad <=> \quad 1 - cos\,\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$

$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\,\alpha}{2} \quad <=> \quad 1 + cos\,\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$

$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = \frac{1-cos\alpha}{sin\,\alpha}$

$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha} \qquad ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}$

3. Формулы понижения степени (если заменить $\frac{\alpha}{2}$ на t)

$sin^2t = \frac{1-cos\,2t}{2}$ $\qquad$ $cos^2t = \frac{1+cos\,2t}{2}$

$tg^2\alpha = \frac{1-cos\,2\,\alpha}{1+sin\,2\,\alpha}$

Примеры.

1. Вычислить без таблиц и калькулятора sin75°sin15°.

sin75°sin15° = sin(90°−15°) sin15° = cos15° sin15° = ½ sin 30° =$\frac{1}{4}$.

2. Дано: $sin\,\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$.

Найти: $sin\,2\alpha, cos\,2\alpha, tg2\alpha$.

Зная sinα, по основному тригонометрическому тождеству, найдем $cos\,\alpha$: $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$, $cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, т.к. $\alpha \in$ I четверти, то $cos\,\alpha = 0{,}8$.

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $tg\,\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

По формулам двойного угла:

$sin\,2\alpha = 2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$; $sin\,2\alpha = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$.

$cos\,2\alpha = 1 - 2\,sin^2\alpha$; $cos\,2\alpha = 1 - 2 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}28$.

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}$; $tg2\alpha = \frac{2\cdot 0{,}75}{1-(0{,}75)^2} = \frac{1{,}5}{0{,}4375} \approx 3{,}43$ или

$tg\,2\alpha = \frac{sin\,2\alpha}{cos\,2\alpha}$; $tg\,2\alpha = \frac{0{,}96}{0{,}28} = 3{,}43$.

Ответ: $sin\,2\alpha = 0{,}96$, $cos\,2\alpha = 0{,}28$, $tg\,2\alpha \approx 3{,}43$.

3. Дано: $sin\,\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$.

Найти: $sin\frac{\alpha}{2}, cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$.

Зная sinα, по основному тригонометрическому тождеству, найдем $cos\,\alpha$: $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$; $cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$,

т.к. $\alpha \in$ I четверти, то $cos\,\alpha = 0{,}8$.

По формулам половинного угла:

$$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2} <=> sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}; sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}1};$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}; cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}9};$$

$$tg^2\frac{a}{2} = \frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha} <=> tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}};$$

$$tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \sqrt{\frac{0{,}2}{1{,}8}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3};$$

Ответ: $sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}1}$; $cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}9}$; $tg\frac{a}{2} = \frac{1}{3}$.

4. Упростите выражение

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (cos^2\alpha - sin^2\alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sin 2 \cdot 2\alpha}{2} = \frac{\sin 4\alpha}{2}.$$

5. Найдите $tg\frac{5\pi}{8}$.

Используя формулу $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{sin\,\alpha}$

$$tg\frac{5\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{4}}=\frac{1-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$$
$$=-\sqrt{2}-1$$

6. Вычислить без помощи таблиц и калькулятора:
cos10°cos20°−sin55°sin65°=0,5(cos30°+cos10°)−0,5(cos10°−cos120°) = = 0,5cos30° + 0,5cos120° = $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}$.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Вычислите $sin\,2\alpha, cos\,2\alpha, tg2\alpha,$ если

a) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

b) $\sin\alpha=-0{,}1, \alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

2. Вычислите $sin\frac{\alpha}{2}, cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}$, если

a) $\cos\alpha=-\frac{1}{3}, \alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

b) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}, \alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Упростить:

a) $\sin 2\alpha+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$;

b) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

Вычислите, применяя формулы двойного и половинного углов:

a) $\sin\frac{\pi}{8}$;

b) $2\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}$.

Вычислить без таблиц и калькулятора:

1. *2 cos20°cos60° − cos20°*
2. *sin10°cos50° + sin65°cos25°*
3. *sin17°sin43° + cos88°cos62°*
4. *sin4°sin86° − cos2°sin6° + 0,5sin4°*
5. *cos5°cos55°cos65°*

<u>Текст 95</u>.

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

1. Формулы *преобразования* произведения тригонометрических функций в *сумму*:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$
$$cos\,\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

2. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в *произведение*:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$cos\,\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$cos\,\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$
$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

<u>Примеры</u>.

1. Преобразовать произведение в сумму

$$\sin 43^\circ\cdot\cos 19^\circ=\frac{\sin(43^\circ-19^\circ)+\sin(43^\circ+19^\circ)}{2}=\frac{1}{2}(\sin 24^\circ+\sin 62^\circ)$$

2. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение: $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=$

$$2\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=2\sin 30^\circ\cos 45^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$.

Выполним преобразования:

$$-4\sqrt{3}\cos(-750^\circ)=-4\sqrt{3}\cos(750^\circ)=-4\sqrt{3}\cos(720^\circ+30^\circ)=-4\sqrt{3}\cos 30^\circ=-6$$

4. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-300^\circ)$.

Выполним преобразования:

$$2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-300^\circ)=2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-360^\circ+60^\circ)=2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60^\circ=6.$$

5. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.

Выполним преобразования:

$$-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)=-18\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=18.$$

6. Найдите значение выражения $5\,\mathrm{tg}\,17^\circ\cdot\mathrm{tg}\,107^\circ$.

Выполним преобразования:

$$5\,\mathrm{tg}\,17^\circ\cdot\mathrm{tg}\,107^\circ=5\,\mathrm{tg}\,17^\circ\cdot\mathrm{tg}(90+17)^\circ=5\,\mathrm{tg}\,17^\circ\cdot(-\mathrm{ctg}\,17^\circ)=-5.$$

7. Найдите значение выражения $7\operatorname{tg}13^\circ\cdot\operatorname{tg}77^\circ$.
Сходственные функции дополнительных углов равны. Поэтому
$7\operatorname{tg}13^\circ\cdot\operatorname{tg}77^\circ=7\operatorname{ctg}77^\circ\cdot\operatorname{tg}77^\circ=7$.

8. Найдите значение выражения: $12\sin150^\circ\cdot\cos120^\circ$.
Выполним преобразования:
$12\sin150^\circ\cdot\cos120^\circ=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$.

Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислите $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha - \frac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
2. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{4}{5}, \alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.
3. Вычислите $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}1, \alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$
4. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}, \alpha\in(\frac{\pi}{2};\pi)$.
5. Упростить: $sin\,2\alpha+(cos\,\alpha-sin\,\alpha)^2$.
6. Упростить: $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.
7. Вычислите, применяя формулы двойного и половинного углов: $\sin\frac{\pi}{8}$; $2\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}$.

Вычислите без таблиц и калькулятора:
1. *sin70°sin50°sin10°;*
2. *sin78° − sin18° + cos278° + cos212° + cos132°;*
3. *(sin61° − sin59°) − (sin93° − sin87°) − sin179°;*
4. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;
5. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;
6. Найдите $3\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;
7. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;
8. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}6$ и $\pi<\alpha<2\pi$.
9. Найдите $\cos x$, если $\sin x=-0{,}8$ и $180^\circ<x<270^\circ$.
10. Вычислите без таблиц и калькулятора: *cos 75°, tg 67°30', sin105°.*

11. Вычислить $sin\ 4\alpha + cos\ 4\alpha - ctg\ 2\alpha$, если $tg\ 2\alpha = 4$.
12. Вычислить $sin\ 4\alpha$ и $cos\ 4\alpha$, если $tg\ 2\alpha=3$.

11.6 Тригонометрические функции

Текст 96.

Свойства и график функции $y = sin\ x$

1) Область определения − множество всех действительных чисел.
2) Множество значений − отрезок $[-1; 1]$.
3) Функция нечётная, то есть $sin(-x) = -sin\ x$.
4) Функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$.
5) $sin\ x = 0$ при $x = \pi k,\ k \epsilon Z$.
6) $sin\ x = 1$, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \epsilon Z$.
7) $sin\ x = -1$, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \epsilon Z$.

График функции $y = sin\ x$ показан на рис.43.

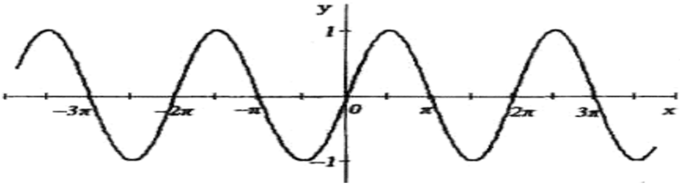


Рисунок 43. График функции $y = sin\ x$

Свойства и график функции $y = cos\ x$

1) Область определения − множество всех действительных чисел.
2) Множество значений − отрезок $[-1; 1]$.
3) Функция чётная, то есть $cos(-x) = cos\ x$.
4) Функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$.
5) $cos\ x = 0$ при $x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \epsilon Z$.
6) $cos\ x = 1$, при $x = 2\pi k,\ k \epsilon Z$.
7) $cos\ x = -1$, при $x = \pi + 2\pi k,\ k \epsilon Z$.

График функции $y = cos\ x$ показан на рис.44.

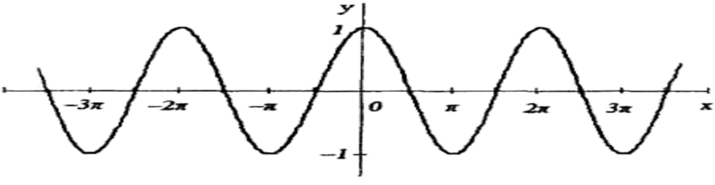


Рисунок 44. График функции $y = cos\ x$

Текст 97.

Свойства и график функции $y = tg\, x$

1) Область определения − множество всех действительных чисел, кроме значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

2) Множество значений − вся числовая прямая.

3) Функция нечётная, то есть $tg(-x) = -tg\, x$.

4) Функция периодическая с основным периодом $T = \pi$.

5) $tg\, x = 0$ при $x = \pi k,\ k \in Z$.

График функции $y = tg\, x$ показан на рис. 45.

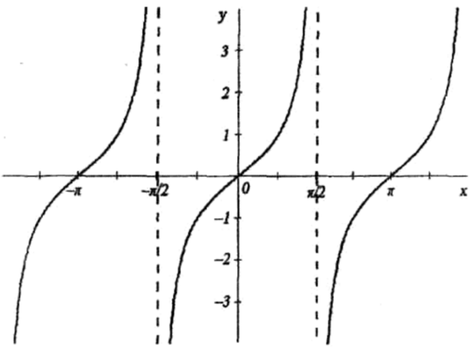


Рисунок 45. График функции $y = tg\, x$

Свойства и график функции $y = ctg\, x$

1) Область определения − множество всех действительных чисел, кроме значений $x = \pi k,\ k \in Z$.

2) Множество значений − вся числовая прямая.

3) Функция нечётная, то есть $ctg(-x) = -ctg\, x$.

4) Функция периодическая с основным периодом $T = \pi$.

5) $ctg\, x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

График функции $y = ctg\, x$ показан на рис. 46.

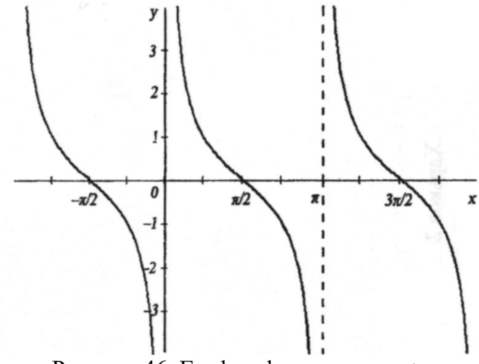


Рисунок 46. График функции $y = ctgx$

11.7 Обратные тригонометрические функции

Текст 98.

Арксинус (y = arcsin x)

Арксинусом числа x называют такое число y из промежутка $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, синус которого равен x, то есть, если $y = arcsin\ x$, то $sin\ y = x$. Функция $y = arcsin\ x$ является обратной по отношению к функции $y = sin\ x$.

Свойства функции y = arcsin x

1) Область определения − отрезок $[-1;\ 1]$.

2) Множество значений − отрезок $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$.

3) Функция нечётная, то есть $arcsin\ (-x) = -arcsin\ x$.

4) Функция $y = arcsin\ x$ непериодическая.

График функции $y = arcsin\ x$ показан на рис. 47.

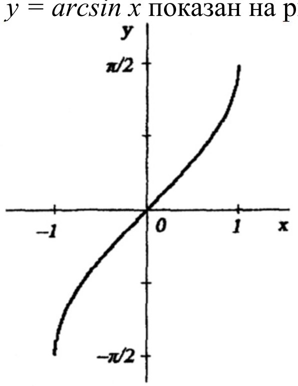


Рисунок 47. График функции $y = arcsin\ x$

Арккосинус ($y = arccos\ x$)

Арккосинусом числа x называют такое число y из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен x, то есть, если $y = arccos\ x$, то $cos\ y = x$. Функция $y = arccos\ x$ является обратной по отношению к функции $y=cosx$.

Свойства функции $y = arccos\ x$

1) Область определения − отрезок [−1; 1].

2) Множество значений − отрезок [0; π].

3) Функция ни чётная, ни нечётная, для неё выполняется тождество $arccos(-x) = \pi - arccos\ x$.

4) Функция $y = arccos\ x$ непериодическая.

График функции $y = arccos\ x$ показан на рис. 48.

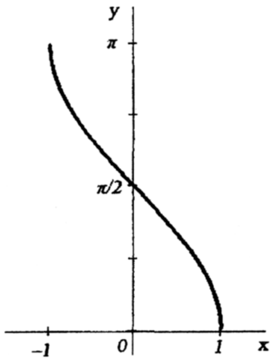


Рисунок 48. График функции $y = arccos\ x$

Текст 99.

Арктангенс ($y = arctg\ x$)

Арктангенсом числа x называют такое число y, из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, тангенс которого равен x, то есть, если $y = arctg\ x$, то $tg\ y = x$. Функция $y = arctg\ x$ является обратной по отношению к функции $y = tgx$.

Свойства функции $y = arctg\ x$

1) Область определения − вся числовая ось.

2) Множество значений − отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

3) Функция $y = arctg\ x$ нечетная, то есть $arctg(-x) = -arctg\ x$.

4) Функция $y = arctg\ x$ непериодическая.

График функции $y = arctg\ x$ показан на рис. 49.

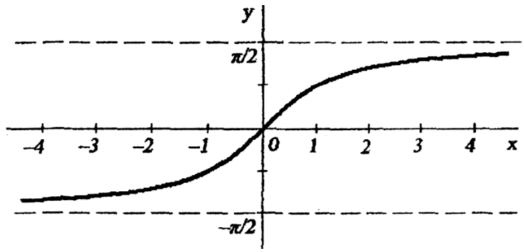


Рисунок 49. График функции $y = arctg\,x$

Арккотангенс ($y = arcctg\,x$)

Арккотангенсом числа x называют такое число y, из промежутка $[0; \pi]$, котангенс которого равен x, то есть, если $y = arcctg\,x$, то $ctg\,y = x$. Функция $y = arcct\,gx$ является обратной по отношению к функции $y{=}ctgx$.

Свойства функции $y = arcctg\,x$

1) Область определения − вся числовая ось.

2) Множество значений − отрезок $[0; \pi]$.

3) Функция $y{=}arcctg\,x$ ни чётная, ни нечётная, для неё выполняется тождество $arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x$.

4) Функция $y = arcctg\,x$ непериодическая.

График функции $y = arcctg\,x$ показан на рис. 50.

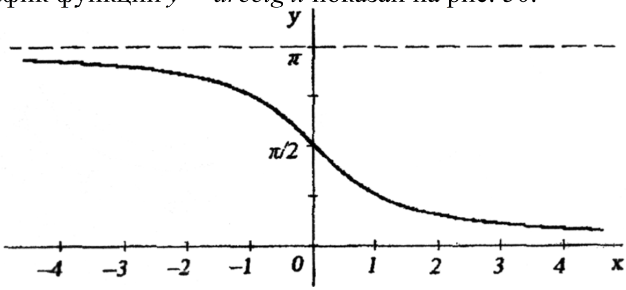


Рисунок 50. График функции $y = arcctg\,x$

Основные тождества с обратными тригонометрическими функциями

При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества:

1) $arccos\,x + arcsin\,x = \frac{\pi}{2}$.

2) $sin\,(arcsin\,x) = x$, если $x \in [-1; 1]$.

3) $cos\,(arccos\,x) = x$, если $x \in [-1; 1]$.

4) $arcsin\,(sin\,x) = x$, если $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

5) $\arccos(\cos x) = x$, если $x \in [0; \pi]$.
6) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, если $x \in [-1;\ 1]$.
7) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, если $x \in [-1;\ 1]$.
8) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.
9) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ для любого действительного x.
10) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ для любого действительного x.
11) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
12) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, если $x \in [0; \pi]$.
13) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, при $x \neq 0$.

11.8 Тригонометрические уравнения

Текст 100.
Уравнение $\sin x = a$
Формула для корней уравнения $\sin x = \alpha$, где $-1 \leq \alpha \leq 1$ имеет вид:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$$

Частные случаи:
1) $\sin x = 0,\ x = \pi k,\ k \in Z$.
2) $\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.
3) $\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $\cos x = \alpha$
Формула для корней уравнения $\cos x = \alpha$, где $-1 \leq \alpha \leq 1$ имеет вид:

$$x = \pm\arccos \alpha + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Частные случаи:
1) $\cos x = 1,\ x = 2\pi k,\ k \in Z$.
2) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.
3) $\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = \alpha$
Формула для корней уравнения $\operatorname{tg} x = \alpha$ имеет вид:

$$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi k,\ k \in Z.$$

Частные случаи:
1) $\operatorname{tg} x = 0,\ x = \pi k,\ k \in Z$.
2) $\operatorname{tg} x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.
3) $\operatorname{tg} x = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение ctg x = α

Формула для корней уравнения *ctg x = α* имеет вид:

$$x = \operatorname{arcctg} \alpha + \pi k,\ k \in Z.$$

Частные случаи:

1) $ctgx = 0$, $x=\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $ctgx = 1$, $x=\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

3) $ctgx = -1$, $x=-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

<u>Примеры:</u>

1. Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}.$ В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow x-7 = \pm 1 + 6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8+6n; \\ x = 6+6n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Значениям $n \geq 0$ соответствуют положительные корни.

Если $n = -1$, то $x = 2$ и $x = 0.$

Если $n = -2$, то $x = 8 - 12 = -4$ и $x = 6 - 12 = -6.$

Значениям $n \leq -3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число $-4.$

2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1.$ В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Решим уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

Значению $k = 0$ соответствует $x = -1.$ Положительным значениям параметра соответствуют положительные значения корней, отрицательным значениям параметра соответствуют меньшие значения корней. Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -1.

3. Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3} = 0,5.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решим уравнение:

$$\sin\frac{\pi x}{3}=0{,}5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\\ \frac{\pi x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}+6k;\\ x=\frac{5}{2}+6k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Значениям $k\le -1$ соответствуют отрицательные корни.

Если $k=0$, то $x=0{,}5$ и $x=2{,}5$.

Если $k=1$, то $x=6{,}5$ и $x=8{,}5$.

Значениям $k\ge 2$ соответствуют большие положительные корни.

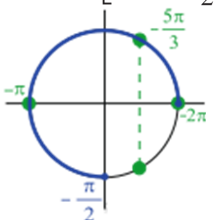
Наименьшим положительным решением является 0,5.

4. а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow \sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



б) Отберем корни на промежутке $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности. Получаем $x=-2\pi,\ x=-\frac{5\pi}{3}$ и $x=-\pi$.

Ответ: а) $\left\{\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, б) $-2\pi;\ -\frac{5\pi}{3},\ -\pi.$

5. а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{3}\sin x=0.$

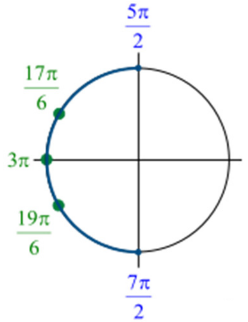
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

а) Запишем уравнение в виде

$$2\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x\cdot\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\dfrac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \dfrac{19\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{17\pi}{6}; 3\pi; \dfrac{19\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2}$.

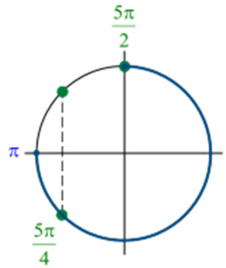
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

а) Используем формулу синуса двойного угла, выносим за скобки:

$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x+\sqrt{2})=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sin x-1)(2\cos x+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1, \\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, \\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



б) Изображая корни на единичной окружности, находим, что отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k, -\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \frac{3\pi}{4}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

7. а) Решите уравнение $\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=\sin x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

а) Перенесём все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:

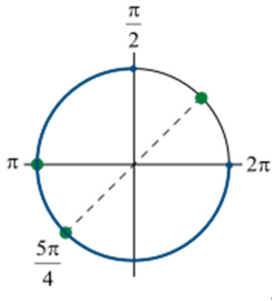
$\cos^2 x-\sin x\cos x+\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)-\sin x(\cos x+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos x-\sin x)=0.$

1 случай. Если $\cos x=-1$, то $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

2 случай. Если $\cos x\neq -1$, то $\cos x-\sin x=0.$

При $\cos x=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $\cos x$.

Получаем $1-\operatorname{tg}x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x=1$. Тогда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$



б) Отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\pi+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) π и $\dfrac{5\pi}{4}$.

8. Дано уравнение $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x.$

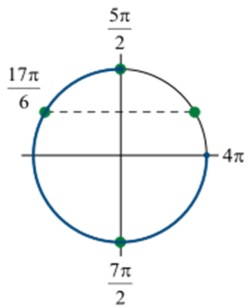
а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Используем формулу приведения и синуса двойного угла:

$\sin 2x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2},\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.$$



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$. Находим: $\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{17\pi}{6},\dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{17\pi}{6};\dfrac{7\pi}{2}$.

Примечание.

Уравнение может быть так же решено при помощи следующей теоремы: $\cos x=\cos y \Leftrightarrow x=\pm y+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

<u>Ответьте на вопросы:</u>

1. Дайте определение угла в 1 радиан.

2. По каким формулам выполняют переход от градусной меры к радианной и от радианной к градусной?

3. Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла.

4. В каких числовых промежутках синус положительный, а в каких отрицательный?

5. В каких числовых промежутках косинус положительный, а в каких отрицательный?

6. В каких числовых промежутках тангенс положительный, а в каких отрицательный?

7. В каких числовых промежутках котангенс положительный, а в каких отрицательный?

8. Какие формулы называют формулами приведения?

9. Сформулируйте правила перехода от функций углов $\pi/2 \pm\alpha$ и $3\pi/2 \pm\alpha$ к функциям угла α.

10. Назовите основные тригонометрические тождества.

11. Назовите формулы сложения тригонометрических функций.

12. Назовите формулы двойного угла, половинного угла.

13. Назовите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

14. Назовите формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций.

15. Дайте определение периодической функции.

16. Какой период называют основным периодом функции?

17. Чему равен основной период синуса, косинуса, тангенса, котангенса?

18. Назовите свойства функций $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

19. Какой вид имеют графики функций $y = sin\ x$, $y = cos\ x$, $y = tgx$, $y = ctg\ x$?

20. Дайте определение функций $y = arcsin\ x$, $y = arccos\ x$, $y= arctgx$, $y = arcctg\ x$.

21. Назовите свойства функций $y = arcsin\ x$, $y = arccos\ x$, $y =arctgx$, $y = arcctg\ x$.

22. Какой вид имеют графики функций $y = arcsin\ x$, $y = arccos\ x$, $y= arctg\ x$, $y = arcctg\ x$?

23. Назовите основные тождества с обратными тригонометрическими функциями.

24. Назовите формулы для корней уравнений: $sin\ x = \alpha$, $cos\ x = \alpha$, $tg\ x =\alpha$, $ctg\ x = \alpha$.

Задания для самостоятельной работы

1. а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sqrt{3}\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

2. а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos(2\pi-x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

3. а) Решите уравнение $4\sin^3 x=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$.

4. а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}, 6\pi\right]$.

5. а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

6. а) Решите уравнение $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right)$.

7. а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

8. а) Решите уравнение $\cos^2(\pi-x)-\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

9. а) Решите уравнение $2\cos^3 x-\cos^2 x+2\cos x-1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

10. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

11. а) Решите уравнение: $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

12. а) Решите уравнение $2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x.$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

13. а) Решите уравнение $2x\cos x - 8\cos x + x - 4 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

14. а) Решите уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1.$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

§12. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

12.1 Свойства и график показательной функции

Текст 101.

Функция, заданная формулой вида $y = a^x$, где a − некоторое положительное число, не равное единице, называется *показательной*.

Функция $y = a^x$ при $a > 1$ обладает следующими *свойствами*:

1) область определения − множество всех действительных чисел;
2) множество значений − множество всех положительных чисел;
3) функция возрастает;
4) при $x = 0$ значение функции равно единице;
5) если $x > 0$, то $a^x > 1$, если $x < 0$, то $a^x < 1$.

На рис. 51, слева показан график функции $y = 2^x$.

Функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ обладает следующими *свойствами*:

1) область определения − множество всех действительных чисел;
2) множество значений − множество всех положительных чисел;
3) функция убывает;
4) при $x = 0$ значение функции равно единице;
5) если $x > 0$, то $a^x < 1$, если $x < 0$, то $a^x > 1$.

На рис. 51, справа показан график функции $y = (\frac{1}{2})^x$.

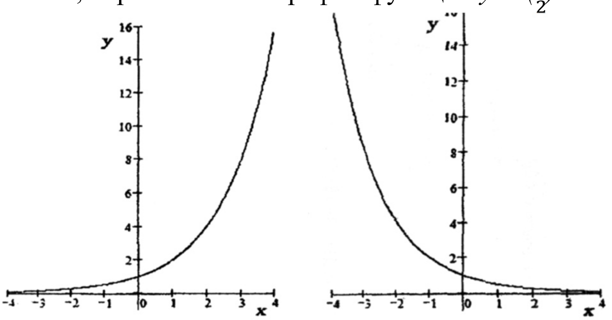


Рисунок 51. График показательной функции $y = 2^x$ и $y = (\frac{1}{2})^x$.

12.2 Показательные уравнения

Текст 102.

Уравнение, которое содержит переменную в показателе степени, называется *показательным*. При решении показательных уравнений часто используют такое свойство степеней: если степени с одним и тем же основанием равны между собой, то показатели степени равны, то есть, если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $f(x) = g(x)$.

<u>Примеры:</u>

1. Найдите корень уравнения $2^{4-2x} = 64.$

Перейдем к одному основанию степени:

$2^{4-2x} = 64 \Leftrightarrow 2^{4-2x} = 2^6 \Leftrightarrow 4 - 2x = 6 \Leftrightarrow x = -1.$

2. Найдите корень уравнения $5^{x-7} = \frac{1}{125}.$

Перейдем к одному основанию степени:

$5^{x-7} = \frac{1}{125} \Leftrightarrow 5^{x-7} = 5^{-3} \Leftrightarrow x - 7 = -3 \Leftrightarrow x = 4.$

3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}.$

Перейдем к одному основанию степени:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Leftrightarrow x - 8 = 2 \Leftrightarrow x = 10.$

4. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4.$

Перейдем к одному основанию степени:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 6 - 2x = -2 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow x = 4.$

5. Найдите корень уравнения $16^{x-9} = \frac{1}{2}.$

Перейдем к одному основанию степени:

$16^{x-9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{4(x-9)} = 2^{-1} \Leftrightarrow 4x - 36 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{35}{4} \Leftrightarrow x = 8{,}75.$

6. а) Решите уравнение $4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$.

а) Преобразуем уравнение:

$4 \cdot 4^{x^2-2x} + 4^{x^2-2x} = 20 \Leftrightarrow 4^{x^2-2x} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0.$

Откуда $x = 1 \pm \sqrt{2}.$

б) Оценим $\sqrt{2}$ сверху целыми числами: $1 < \sqrt{2} < 2.$ Тогда $2 < 1 + \sqrt{2} < 3$ и $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0.$

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x = 1 - \sqrt{2}$.

Ответ: а) $x = 1 \pm \sqrt{2}$; б) $x = 1 - \sqrt{2}$.

6. а) Решите уравнение

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [−1; 2].

а) Преобразуем уравнение:

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 12 \cdot 4^{x^2-3x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1} + 5\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow 7\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 1, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = -\frac{12}{7}. \end{array}\right.$$

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 3x + 1 = 0$, откуда $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

б) Оценим $\sqrt{5}$ целыми числами: $2 < \sqrt{5} < 3$. Тогда

$\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$ и $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$.

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

Найдите корень уравнения:

1. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$.
2. $9^{-5+x} = 729$.
3. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512$.

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8}=2^x.$

5. $8^{9-x}=64^x.$

6. $2^{3+x}=0,4\cdot 5^{3+x}.$

7. $7^{18,5x+0,7}=\frac{1}{343}.$

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x}=32.$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{6-2x}=36.$

10. $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2}=5^{x+5}.$

11. $16^{x-9}=0,5.$

12. $6^{12,5x+2}=\frac{1}{216}.$

13. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1,\frac{7}{3}\right).$

14. а) Решите уравнение: $4^x-2^{x+3}+15=0.$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $[2;\sqrt{10}].$

12.3 Показательные неравенства

Текст 103.

Неравенство, которое содержит переменную в показателе степени, называется *показательным*. Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ (где $a > 0,\ a \neq 1$) основано на следующих утверждениях:

а) если $a > 1$, то неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны;

b) если $a < 1$, то неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$ равносильны.

Пример.

Решить неравенства:

1. $0,5^{2x-1} < 0,25$

Данное неравенство эквивалентно неравенству $0{,}5^{2x-1} < (0{,}5)^2$. Так как основание меньше единицы, то последнее неравенство эквивалентно неравенству $2x - 1 > 2$, решением которого является интервал $(3/2; -\infty)$.

2. $4^x - 6 \cdot 2^x - 1 + 8 < 0$

Положим $2^x = y$, тогда $4^x = (2^x)^2 = y^2$ и данное неравенство примет вид $y^2 - 6y + 8 < 0$.

Решая это неравенство, получим $2<y<4$. Возвращаясь к переменной x, получаем $2 < 2x < 4$.

Решением последнего неравенства является интервал $(1; 2)$.

3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства	Решения
a) $2^x \geq 2$	1) $x \geq 1$
b) $0{,}5^x \geq 2$	2) $x \leq 1$
c) $0{,}5^x \leq 2$	3) $x \leq -1$
d) $2^x \leq 2$	4) $x \geq -1$

Решение.

a) $2^x \geq 2 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^1 \Leftrightarrow x \geq 1$, следовательно, вариант 1).

b) $0{,}5^x \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}^{x} \geq 2 \Leftrightarrow 2^{-x} \geq 2^1 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$, вариант 3).

c) $0{,}5^x \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}^{x} \leq 2 \Leftrightarrow 2^{-x} \leq 2^1 \Leftrightarrow -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$, вариант 4).

d) $2^x \leq 2 \Leftrightarrow 2^x \leq 2^1 \Leftrightarrow x \leq 1$, следовательно, вариант 2).

4. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства

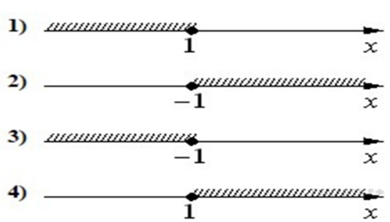
a) $2^x \geq 2$

b) $0{,}5^x \geq 2$

c) $0{,}5^x \leq 2$

d) $2^x \leq 2$

Решения



Решение.

a) $2^x \geq 2 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^1 \Leftrightarrow x \geq 1$, следовательно, вариант 4)

b) $0,5^x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}^{x} \geq 2 \Leftrightarrow 2^{-x} \geq 2^1 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$, вариант 3).

c) $0,5^x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}^{x} \leq 2^1 \Leftrightarrow 2^{-x} \leq 2^1 \Leftrightarrow -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$, вариант 2).

d) $2^x \leq 2 \Leftrightarrow 2^x \leq 2^1 \Leftrightarrow x \leq 1$, следовательно, вариант 1).

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Решить неравенства:

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства	Решения
a) $0,5^x \geq 4$	1) $[-2;+\infty)$
b) $2^x \geq 4$	2) $[2;+\infty)$
c) $0,5^x \leq 4$	3) $(-\infty;2]$
d) $2^x \leq 4$	4) $(-\infty;-2]$

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства

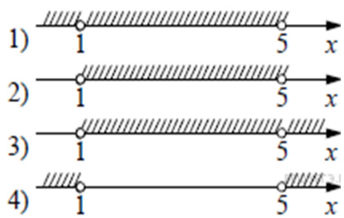
a) $(x-1)^2(x-5)<0$

b) $(x-1)(x-5)<0$

c) $\frac{x-1}{x-5}>0$

d) $\frac{(x-5)^2}{x-1}>0$

Решения



3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства	Решения
a) $(x-3)(x-6)<0$	1) $(3;6)$
	2) $(-\infty;3)\cup(6;+\infty)$

b) $\dfrac{(x-6)^2}{x-3} > 0$

c) $\dfrac{x-3}{x-6} > 0$

d) $(x-3)^2(x-6) < 0$

3) $(3;6) \cup (6;+\infty)$

4) $(-\infty;3) \cup (3;6)$

4. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

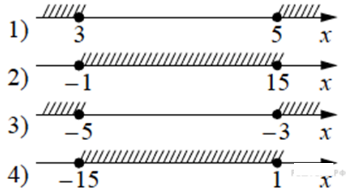
А) $x^2+8x+15 \geq 0$

Б) $x^2-8x+15 \geq 0$

В) $x^2-14x-15 \leq 0$

Г) $x^2+14x-15 \leq 0$

РЕШЕНИЯ



5. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $x^2+8x+15 \geq 0$

Б) $x^2-8x+15 \geq 0$

В) $x^2-14x-15 \leq 0$

Г) $x^2+14x-15 \leq 0$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty;3] \cup [5;+\infty)$

2) $[-1;15]$

3) $(-\infty;-5] \cup [-3;+\infty)$

4) $[-15;1]$

6. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства

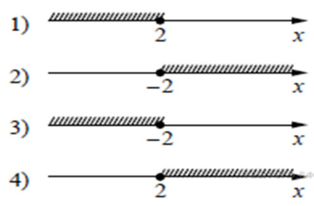
a) $2^x \geq 4$

b) $0,5^x \geq 4$

c) $0,5^x \leq 4$

d) $2^x \leq 4$

Решения



Ответьте на вопросы:

1. Какая функция называется показательной?
2. Назовите свойства показательной функции.
3. Как выглядит график показательной функции?
4. Какое уравнение называют показательным?
5. Какое неравенство называют показательным?

§13. ЛОГАРИФМЫ

13.1 Понятие логарифма

<u>Текст 104</u>.

Логарифмом положительного числа b по основанию a (где $a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Логарифм числа b по основанию a обозначается символом $log_a b$.

<u>Пример.</u>

1) $log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$.

2) $log_5 25 = 2$, так как $5^2 = 25$.

Если $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$, то $log_a b$ по определению − показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Поэтому равенство $log_a a^b = b$ есть тождество, которое называют основным логарифмическим тождеством.

Для обозначения логарифмов, основанием которых является число 10 (*десятичных* логарифмов) принята специальная запись: вместо $log_{10} b$ пишут lgb.

Логарифм, основание которого является число e $(e = 2{,}718...)$, называется *натуральным* логарифмом. Натуральные логарифмы обозначают lnb.

Определение логарифма: $log_a b = x <=> a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Основное логарифмическое свойство: $a^{log_a b} = b$.

Десятичный логарифм (по основанию 10): $log_{10} b = lgb$.

Натуральный логарифм (по основанию e): $log_e b = ln\, b$.

Свойства логарифмов:

a) $log_a 1 = 0$;

b) $log_a a = 1$;

c) $log_a (x \cdot y) = log_a x + log_a y$;

d) $log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$;

e) $log_a x^p = p\, log_a x$;

f) $log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} log_a b$;

g) $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ − переход к новому основанию.

<u>Примеры:</u>

1. Вычислите:

$log_{21}\frac{1}{\sqrt{21}} = log_{21} 21^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}log_{21} 21 = -\frac{1}{2};\ log_{25} 25 = 1.$

$log_{23}\sqrt{23} = log_{23} 23^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};\ log_{\frac{1}{256}} 65536 = log_{2^{-8}} 2^{16} =$
$\frac{16}{-8}log_2 2 = -2\,;$

2. Вычислите:

a) $log_{54} 729 + log_{54} 4 = log_{54}(729 \cdot 4) = log_{54} 2916 = = log_{54} 54^2 = 2;$

b) $log_{\frac{1}{9}} 2187 + log_{\frac{1}{9}} 3 = log_{\frac{1}{9}}(2187 \cdot 3)$

$$= log_{\frac{1}{9}} 6561 = log_{9^{-1}} 9^4 = \frac{4}{-1} = -4\,;$$

c) $log_{28}6272 - log_{28} 8 = log_{28}\frac{6272}{8} = log_{28} 784 = log_{28} 28^2 = 2\,;$

d) $log_{\frac{1}{29}}5887 - log_{\frac{1}{29}}7 = log_{29^{-1}}\frac{5887}{7} = log_{29^{-1}} 841 = log_{29^{-1}} 29^2 = -2;$

?) $\left(\frac{1}{21}\right)^{log_{21}\left(\frac{1}{18}\right)} = 21^{-1\cdot log_{21} 1\,8^{-1}} = 21^{log_{21} 18^{-1\cdot(-1)}} = 18;$

f) $(21)^{log_{441} 225} = (21)^{log_{21^2} 225} = (21)^{\frac{1}{2}log_{21} 225} = (21)^{log_{21} 225^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{225} = 15.$

3. Вычислите:

a) $(\frac{1}{24})^{4\log_{\frac{1}{24}}\sqrt{3}} = (\frac{1}{24})^{\log_{\frac{1}{24}}\sqrt{3}^4} = 9;$

b) $\log_{\frac{1}{18}} 2592 - \log_{\frac{1}{18}}8 + 7^{\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{7}}}\frac{1}{2}} = \log_{18^{-1}}\left(\frac{2592}{8}\right) + 7^{\log_{7^{-\frac{1}{3}}}\frac{1}{2}} =$
$-\log_{18} 324 + 7^{-3\log_7\frac{1}{2}} = -\log_{18} 18^2 + 7^{\log_7\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = -\log_{18} 18^2 +$
$+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 8 = 6;$

c) $(\frac{1}{19})^{-\log_{361}\ 676} = (19^{-1})^{-\log_{19^2} 676} = 19^{\frac{1}{2}\log_{19} 676} =$
$= 19^{\log_{19} 676^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{676} = 26;$

d) $\left(\sqrt{17}\right)^{-\log_{289}\frac{1}{256}} = (17)^{-\frac{1}{2}\log_{17^2}\frac{1}{256}} = 17^{-\frac{1}{4}\log_{17}\frac{1}{256}} =$
$17^{\log_{17}\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{1}{4}}} = (4^4)^{\frac{1}{4}} = 4;$

?) $64^{\log_{512}\ \frac{1}{729}} = 8^{2\log_{8^3} 9^{-3}} = 8^{\frac{2\cdot(-3)}{3}\log_8 9} = 8^{-2\log_8 9} = 8^{\log_8 9^{-2}} = \frac{1}{81}.$

4. Вычислить:

a) $(20)^{2\left(\log_{400}80-\frac{1}{2}\right)}=20^{2\log_{20^2}80-1}=\frac{20^{2\log_{20^2}80}}{20}=\frac{20^{\frac{2}{2}\log_{20}80}}{20}=\frac{80}{20}=4;$

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{128}}2187+\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{128}}2187}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{-4\log_{2^{-7}}3^7}\cdot\frac{1}{4}$

$$=2^{\frac{4}{7}\log_2 3^7}\cdot\frac{1}{4}=2^{\log_2 3^{\frac{4\cdot 7}{7}}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3^4}{4}=\frac{81}{4}.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Вычислите: $log_2\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $log_2\sqrt{2}$; $log_{\frac{1}{2}}8$; $log_5 5$.

2. Вычислите:

a) $\log_{24}4+\log_{24}6$; $b)$ $\log_{28}112+\log_{28}196$; c) $\log_4 320-\log_4 20$; $d)$ $\log_3 4-\log_3 12$; $e)$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 3}$; $f)\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 5}$.

3. Вычислить:

$a)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2}$; $b)$ $\log_5 75-\log_5 3$; c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{6\log_9 2}$; $d)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4\frac{1}{36}}$; $e)$ $5^{\log_{125}64}$

4. Вычислить:

$a)$ $(5)^{\log_5 3-2}$; $b)$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2\frac{1}{7}+3}$.

13.2 Свойства логарифмов

Текст 105.

1) Если основание логарифма $a>1$, то $log_a b>0$, если $b>1$ и $log_a b<0$, если $b<1$.

Пример: $\log_2 3>0$, т.к. $2<3$ и $2>1$; $log_3 0,5<0$, т.к. $3>0,5$ и $3>1$.

2) Если основание логарифма $0<a<1$, то $log_a b<0$, если $b>1$ и $log_a b>0$, если $b<1$.

Примеры: $log_{0,5}5<0$, т.к. $0,5<5$ и $0<0,5<1$; $log_{0,3}0,7>0$, т.к. $0,3<0,7$ и $0<0,3<1$.

3) Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы, то есть, если $b_1=b_2$, то $log_a b_1=log_a b_2$.

4) Если основание логарифма $a>1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, то есть, если $b_1>b_2$, то $log_a b_1>log_a b_2$.

Пример. $log_2 7>log_2 5$, т.к. $7>5$ и $2>1$.

5) Если основание логарифма $0<a<1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, то есть, если $b_1>b_2$, то $log_a b_1<log_a b_2$.

Пример.

$log_{0,6}11 < log_{0,6}7$, т.к. $11 > 7$ и $0<0,6<1$.

6) Логарифм 1 по любому основанию $(a > 0,\ a \neq 1)$ равен нулю, то есть $log_a 1 = 0$.

7) Логарифм самого основания равен единице, то есть $log_a a = 1$.

8) Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, то есть $log_a b{\cdot}c = log_a b + log_a c$.

Пример.

$log_3 15 = log_3 3{\cdot}5 = log_3 3 + log_3 5 = 1 + log_3 5$.

9) Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел, то есть $log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c$.

Пример.

$log_3 \frac{5}{9} = log_3 5 - log_3 9 = log_3 5 - 2$.

10) Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм её основания, то есть $log_a b^c = c{\cdot}log_a b$. Замечание: если $b<0$, а c − чётное число, то справедлива формула $log_a b^c = c{\cdot}log_a|b|$.

Пример.

$log_3 125 = log_3 5^3 = 3{\cdot}log_3 5$.

11) Формула перехода от основания a к основанию c имеет вид $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$.

12) Если основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма, возвести в одну и ту же степень, отличную от нуля, то значение логарифма не изменится.

Примеры:

1. Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=7$.

$\log_2(4-x)=7 \Leftrightarrow 4-x=2^7 \Leftrightarrow 4-x=128 \Leftrightarrow x=-124$.

2. Найдите корень уравнения $\log_5(4+x)=2$.

$\log_5(4+x)=2 \Leftrightarrow 4+x=5^2 \Leftrightarrow 4+x=25 \Leftrightarrow x=21$.

3. Найдите корень уравнения $\log_5(5-x)=\log_5 3$.

$\log_5(5-x)=\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x=3 \Leftrightarrow x=2$.

4. Найдите корень уравнения $\log_2(15+x)=\log_2 3$.

$\log_2(15+x)=\log_2 3 \Leftrightarrow 15+x=3 \Leftrightarrow x=-12$.

5. Найдите корень уравнения $\log_4(x+3)=\log_4(4x-15)$.

Логарифмы двух выражений равны, если сами выражения равны и при этом положительны:

$$\log_4(x+3)=\log_4(4x-15) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4x-15, \\ 4x-15>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ 4x>15 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить, используя свойства логарифмов:

1. $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$.
2. $\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1$.
3. $\log_2(5x-7) - \log_2 5 = \log_2 21$.
4. $\log_4(x+2) + \log_4 3 = \log_4 15$.

13.3 Логарифмическая функция

Текст 106.

Функция $y = log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) называется *логарифмической* функцией. Логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной функции $y = a^x$.

Свойства функции $y = log_a x$ при $a > 1$:

1) Область определения − множество всех положительных чисел.
2) Множество значений − все действительные числа.
3) Функция возрастающая.
4) Если $x = 1$, то $log_a x = 0$.
5) Если $0 < x < 1$,то $log_a x < 0$.
6) Если $x > 1$, то $log_a x > 0$.

График функции $y = log_2 x$ показан на рис. 52, слева.

Рисунок 52. График функции $y = log_2 x$, слева и $y = log_{0,5} x$, справа

Свойства функции $y = log_a x$ при $a < 1$.

1) Область определения − множество всех положительных чисел.
2) Множество значений − все действительные числа.
3) Функция убывающая.
4) Если $x = 1$, то $log_a x = 0$.
5) Если $0 < x < 1$, то $log_a x > 0$.
6) Если $x > 1$, то $log_a x < 0$.

График функции $y = log_{0,5}x$ показан на рис. 52, справа.

13.4 Логарифмические уравнения

Текст 107.

Уравнение, которое содержит переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим*. Простейшим примером логарифмического уравнения является уравнение $log_a x= b$ (где $a>0,\ a\neq 1$).

Примеры.

1. Решить уравнение $log_2 x = 5$.

Используя основное логарифмическое тождество, получим $x=2^5=32$.

Решение логарифмического уравнения вида $log_a f(x) = log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению f(x)=g(x) при дополнительных условиях $f(x)>0$ и $g(x)>0$.

Однако переход от уравнения $log_a f(x) = log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ может приводить к появлению посторонних корней. Такие корни можно определить или с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, или с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область определения задается неравенствами $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

2. Решить уравнение $log_2(x + 2) = log_2(2x + l)$.

Данное уравнение эквивалентно уравнению $x + 2 = 2x + 1$ при условии положительности выражений под знаком логарифма: $x+ 2 > 0$, $2x + 1 > 0$. Корень данного уравнения есть $x = 1$.

Проверка показывает, что данное значение x удовлетворяет требованию положительности выражений под знаком логарифма: $1+ 2> 0,\ 2+ 1> 0$, следовательно, значение $x=1$ является корнем исходного логарифмического уравнения.

3. $log_2(x - 3) = log_2(2x + 5)$.

Данное уравнение эквивалентно уравнению $x- 3= 2x+ 5$ при условии положительности выражений под знаком логарифма: $x- 3 > 0,\ 2x + 5 > 0$. Корень данного уравнения: $x = -8$.

Проверка показывает, что данное значение x не удовлетворяет требованию положительности выражений под знаком логарифма: $- 8 - 3 < 0,\ -16 + 5 < 0$, следовательно, исходное логарифмическое уравнение не имеет корней.

При решении логарифмических уравнений иногда применяют метод замены переменной.

4. Решить уравнение: $log_2^2 x - 3log_2 x + 2 = 0$.

Выполним замену переменной $y = log_2x$. В результате получим уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$, решением которого являются значения $y_1=1$ и $y_2=2$. Решаем далее уравнения $log_2x = 1$ и $log_2x = 2$.

Решениями данных уравнений являются значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

При решении логарифмических уравнений также используют свойства логарифмов.

5. Решить уравнение: $0,5\ log_3(x - 3) + log_9(x + 1) = 1 - log_{27}8$.

Используем формулу перехода к новому основанию (св–во 11) для второго слагаемого в левой части. Используем свойство 12 для второго слагаемого.

Уравнение примет вид:

$0,5log_3(x - 3) + 0,51og_3(x + 1) = 1 - log_32$.

Умножим уравнение на 2:

$log_3(x - 3) + log_3(x + 1) = 2 - 2log_32$.

Используя свойства логарифмов преобразуем данное уравнение к виду:

$log3(x - 3)(x + 1) = log_3(\frac{9}{4})$.

Данное уравнение эквивалентно уравнению $4x^2 - 8x - 21 = 0$ при условиях $x-3>0$ и $x+1>0$. Данное уравнение имеет корни $x_1=3,5$ и

$x_2= -1,5$. Из данных значений условиям удовлетворяет только первое решение. Таким образом, корнем исходного логарифмического уравнения является единственное значение $x = 3,5$.

6. а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25}x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9\frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_5(2-x) = \log_5 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=x^2, \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $\log_9\frac{1}{82} < -2 < \log_9 8 < 1,$ отрезку $\left[\log_9\frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$ принадлежит единственный корень −2.

Ответ: а) −2; 1, б) −2.

7. а) Решите уравнение $\log_2\left(x^2 - 14x\right) = 5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 0,1;\ 5\sqrt{10}\right]$.

Решение.

а) Из уравнения получаем:

$$\log_2\left(x^2-14x\right)=5 \Leftrightarrow x^2-14x=32 \Leftrightarrow x^2-14x-32=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=16. \end{array}\right.$$

б) Заметим, что $\log_3 0,1<\log_3\frac{1}{9}=-2<5\sqrt{10}=\sqrt{250}<\sqrt{256}=16.$

Значит, указанному отрезку принадлежит только корень −2.

Ответ: а) −2 и 16; б) −2.

8. а) Решите уравнение $6\log_8^2 x-5\log_8 x+1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\ 2,5]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(3\log_8 x-1)(2\log_8 x-1)=0.$$

Значит, $3\log_8 x=1$, откуда $x=2$, или $2\log_8 x=1$, откуда $x=2\sqrt{2}.$

б) Заметим, что $2<2,5=\sqrt{6,25}<\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

Значит, указанному отрезку принадлежит корень 2.

Ответ: а) 2 и $2\sqrt{2}$; б) 2.

9. а) Решите уравнение $1+\log_2(9x^2+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1;\ \frac{8}{9}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что уравнение определено при любом x. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2+5)=\log_2(8x^4+14)-\log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2+5)=\log_2(4x^4+7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+5=4x^4+7 \Leftrightarrow 4x^4-9x^2+2=0 \Leftrightarrow (4x^2-1)(x^2-2)=0.$$

Значит, либо $4x^2-1=0$, откуда $x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{2}$, либо $x^2-2=0$, откуда $x=\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}.$

б) Поскольку $-\sqrt{2}<-1<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{8}{9}<\sqrt{2},$ отрезку $\left[-1;\frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}.$

Ответ: а) $x=\pm\sqrt{2}, x=\pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}.$

10. а) Решите уравнение $\log_7(x+2)=\log_{49}(x^4)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6\frac{1}{7};\ \log_6 35\right]$.

Решение.

а) Поскольку $\log_{7^2} x^4=\log_7 x^2$, получаем:

$$\log_7(x+2)=\log_{49}x^4 \Leftrightarrow \log_7(x+2)=\log_7 x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2>0, \\ x+2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

б) В силу цепочки соотношений $\log_6\frac{1}{7}<\log_6\frac{1}{6}=-1<\log_6 35<\log_6 36=2$ заданному отрезку принадлежит только число -1.

Ответ: а) $\{-1, 2\}$, б) -1.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Решить уравнения:

1. $log_{1/3}(2x-l)=-2$.
2. $log_{0,2}(3x+5)=l$.
3. $log_2(x^2+4x+3)=3$.
4. $lg(3x-17)-lg(x+l)=0$.
5. $log_2(4x-5)-log_2(5x+2)=0$.
6. $2lg(-x)=lg(x+6)$.
7. $log_2(x+l)\, log_2(x-1)\, log_2(x+2)=0$.
8. $log_3(x^2-4x-5)-log_3(7-3x)=0$.
9. $log_{25}x-log_5x=2$.
10. $log_2x+3log_2x-4=0$.
11. $log_2(x-4)+2log_4(2x+3)=1+log_8 27$.
12. $0,5log_3(x-3)+log_9(x+1)=1-log_{27}8$.
13. а) Решите уравнение $\log_3(x^2-2x)=1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,2;\ \log_2 5]$.

14. а) Решите уравнение
$$\log_2(x^2-5)\cdot\log_3^2(7-x)+3\log_2(x^2-5)-2\log_3^2(7-x)-6=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9\right]$.

15. а) Решите уравнение
$$\log_2(x^2-5)\cdot\log_3^2(7-x)+3\log_2(x^2-5)-2\log_3^2(7-x)-6=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\log_2 \frac{1}{7}; \log_2 9\right]$.

13.5 Логарифмические неравенства

Текст 108.

Неравенство, которое содержит переменную только под знаком логарифма, называется *логарифмическим*. Например, неравенства вида $log_a f(x) > b$, $log_a f(x) < b$, $log_a f(x) > log_a g(x)$, $log_a f(x) < log_a g(x)$ при $a>0$, $a\neq 1$ являются логарифмическими. При решении логарифмических неравенств необходимо учитывать общие свойства неравенств, свойство монотонности логарифмической функции, а также область её определения.

Например, неравенство $log_a f(x)>b$ при $a>1$ равносильно неравенству $f(x) > a$, а при $0< a< 1$ − двойному неравенству $0< f(x)< ab$. Неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ при $a>1$ равносильно двойному неравенству $f(x)>g(x)> 0$, а при $0< a< 1$ − двойному неравенству $0<f(x)<g(x)$.

Пример.

Решить неравенство:

1. $log_2(x - 4) < 2$

Так как основание логарифма больше единицы, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0< (x- 4)< 22 = 4$.
Данное двойное неравенство имеет решение: $4< x< 8$.

2. $log_{0,1}(x + l) > log_{0,1}(5 - x)$

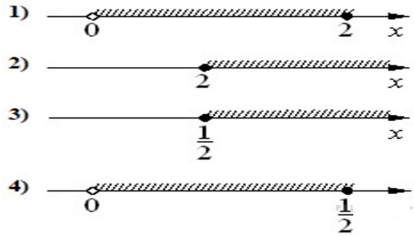
Так как основание логарифма меньше единицы, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0 < x +1<5- x$.
Данное двойное неравенство имеет решение $-1< x < 2$.

3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства

a) $\log_2 x \geq 1$
b) $\log_2 x \leq -1$
c) $\log_2 x \geq -1$
d) $\log_2 x \leq 1$

Решения



Решение.

Учитываем ОДЗ для логарифма во всех случаях: $x > 0$

a) $\log_2 x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2^1 \Leftrightarrow x \geq 2$, следовательно, вариант 2).

b) $\log_2 x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq 2^{-1} \Leftrightarrow 0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, вариант 4).

c) $\log_2 x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq 2^{-1} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$, вариант 3).

d) $\log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 2^1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$, вариант 1).

4. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства	Решения
a) $\log_2 x > 1$	1) $0 < x < \frac{1}{2}$
b) $\log_2 x > -1$	2) $x > 2$
c) $\log_2 x < 1$	3) $x > \frac{1}{2}$
d) $\log_2 x < -1$	4) $0 < x < 2$

Решение.

a) $\log_2 x > 1 \Leftrightarrow x > 2.$

b) $\log_2 x > -1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}.$

c) $\log_2 x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

d) $\log_2 x < -1 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2}.$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Решить неравенства:

1. $log_3(x + 2) < 1$

2. $log_5(x^2 + 2x - 3) \le 1$
3. $log_{0,2}(4x - l) < -2$
4. $log_{0,5}(2x - 4) < log_{0,5}(x + 1)$
5. $log_{0,5}(2x - 3) > - l$
6. $log_2(x^2 + x - 2) \le log_2(10 + 2x)$
7. $log_{0,3}(2x^2 - 9x + 4) \ge 2log_{0,3}(x + 2)$
8. $log_{0,5}x + log_{0,5}(x + 1) \ge 1$

9. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства	Решения
a) $\log_3 x < -1$	1) $(3;+\infty)$
b) $\log_3 x > 1$	2) $(0;3)$
c) $\log_3 x < 1$	3) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$
d) $\log_3 x > -1$	4) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$

Решите неравенство:

10. $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3(x^2+3x+\frac{1}{x}-10)$.

11. $9\log_7(x^2+x-2) \le 10+\log_7 \frac{(x-1)^9}{x+2}$.

12. $\log_2(x^2-4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2$.

13. $\frac{\log_2 x - 5}{1-2\log_2 x} \ge 2\log_2 x$.

Ответьте на вопросы:

1. Что называется логарифмом положительного числа b по основанию а?
2. Какое равенство называется основным логарифмическим тождеством?
3. Назовите свойства логарифмов.
4. Какая функция называется логарифмической?
5. Назовите свойства логарифмической функции.
6. Какой вид имеет график логарифмической функции?
7. Какое уравнение называется логарифмическим?
8. Какое неравенство называется логарифмическим?

§14. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

14.1 Основные термины и определения

Текст 109.

События, которые происходят реально или в нашем воображении, можно разделить на три группы. Это *достоверные* события, которые обязательно произойдут, *невозможные* события и *случайные* события. Теория вероятностей изучает случайные события, т.е. события, которые могут произойти или не произойти.

Объектом изучения теории вероятностей являются события и их *вероятности*. Если событие является сложным, то его можно разбить на простые составляющие, вероятности которых найти несложно.

Суммой событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произошло либо событие A, либо событие B, либо события A и B одновременно.

Произведением событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произошло и событие A и событие B.

События A и B называется *несовместными*, если они не могут произойти одновременно.

Событие A называется *невозможным*, если оно не может произойти. Такое событие обозначается символом Ø.

Событие A называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет. Такое событие обозначается символом Ω.

Пусть каждому событию A поставлено в соответствие число $P(A)$. Это число $P(A)$ называется *вероятностью* события A, если при таком соответствии выполнены следующие условия.

1. *Вероятность* принимает значения на отрезке от 0 до 1, т.е. $0<P(A)<1$.
2. Вероятность *невозможного* события равна 0, т.е. $P(\varnothing)= 0$.
3. Вероятность *достоверного* события равна 1, т.е. $P(\Omega)=1$.
4. Если события A и B *несовместные*, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, т.е. $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Важным частным случаем является ситуация, когда имеется n равновероятных элементарных исходов, и произвольные k из этих исходов образуют события A. В этом случае вероятность можно ввести по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$. Вероятность, введенная таким образом, называется *классической вероятностью*. Можно доказать, что в этом случае свойства 1–4 выполнены.

Пример

На столе лежат 20 пирожков – 5 с капустой, 7 с яблоками и 8 с рисом. Марина хочет взять пирожок. Какова вероятность, что она возьмет пирожок с рисом?

Решение.

Всего равновероятных элементарных исходов 20, то есть Марина может взять любой из 20 пирожков. Но нам нужно оценить вероятность того, что Марина возьмет пирожок с рисом, то есть $P(A)=\frac{m}{n}$, где *A* – это выбор пирожка с рисом. Значит у нас количество благоприятных исходов (выборов пирожков с рисом) всего 8. Тогда вероятность будет определяться по формуле: $P(A) = \frac{8}{20} = 0{,}4.$

Ответ: 0,4.

5. Независимые, противоположные и произвольные события

Текст 110.

События *A* и *B* называется *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло ли другое событие.

Событие *B* состоит в том, что событие *A* не произошло, т.е. событие *B* является *противоположным* к событию *A*. Вероятность противоположного события равна единице минус вероятность прямого события, т.е.

$$P(B) = 1 - P(A).$$

Для произвольных событий *A* и *B* вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного события, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)- P(AB).$$

Для независимых событий А и В вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей, т.е. в этом случае:

$$P(AB)= P(A)\cdot P(B).$$

Последние 2 утверждения называются *теоремами сложения и умножения вероятностей.*

Не всегда подсчет числа исходов является столь простым. В ряде случаев необходимо использовать формулы *комбинаторики*. При этом наиболее важным является подсчет числа событий, удовлетворяющих определенным условиям. Иногда такого рода подсчеты могут становиться самостоятельными заданиями.

Пример.

Сколькими способами можно усадить 6 учеников на 6 свободных мест? Первый ученик займет любое из 6 мест. Каждому из этих вариантов соответствует 5 способов занять место второму ученику. Для третьего ученика остается 4 свободных места, для четвертого – 3, для пятого – 2, шестой займет единственное оставшееся место. Чтобы найти число всех вариантов, надо найти произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, которое обозначается символом 6! и читается «шесть факториал».

В общем случае ответ на этот вопрос дает формула для *числа перестановок из n элементов*: $P_n = n!$

В нашем случае $n=6$.

Пример.

Рассмотрим теперь другой случай с нашими учениками. Сколькими способами можно усадить 2 учеников на 6 свободных мест? Первый ученик займет любое из 6 мест. Каждому из этих вариантов соответствует 5 способов занять место второму ученику. Чтобы найти число всех вариантов, надо найти произведение: $5 \cdot 6$.

В общем случае ответ на этот вопрос дает формула для *числа размещений из n элементов по m элементам:* $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

В нашем случае n=6, m=2.

Пример.

Сколькими способами можно выбрать трех учеников из 6? Первого ученика можно выбрать 6 способами, второго – 5 способами, третьего – четырьмя. Но среди этих вариантов 6 раз встречается одна и та же тройка учеников. Чтобы найти число всех вариантов, надо вычислить величину: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$. В общем случае ответ на этот вопрос дает формула для *числа сочетаний из n элементов по m элементам:* $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

В нашем случае $n=6$, $m=3$.

Примеры.

1. В среднем из 800 садовых насосов, поступивших в продажу, 4 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение.

В среднем из 800 садовых насосов, поступивших в продажу, $800 - 4 = 796$ не подтекают. Значит, вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает, равна $\frac{796}{800} = 0,995.$

Ответ: 0,995.

2. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда $A + B + C$ = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года – строго в тот же день, час и секунду – равна нулю. Тогда:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B),$

откуда, используя данные из условия, получаем $0,93 = P(A) + 0,87.$

Тем самым, для искомой вероятности имеем:

$P(A) = 0,93 - 0,87 = 0,06.$

Ответ: 0,06.

3. На конференцию приехали 4 ученых из Швеции, 4 из России и 2 из Италии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвертым окажется доклад ученого из Швеции.

Решение.

Всего в семинаре принимает участие 4 + 4 + 2 = 10 ученых, значит, вероятность того, что ученый, который выступает четвертым, окажется из Швеции, равна $\frac{4}{10} = 0,4.$

Ответ: 0,4.

4. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0,0025 = 0,9975$.

Ответ: 0,9975.

Приведем другое решение.

Вероятность того, что исправен первый автомат (событие A) равна 0,95. Вероятность того, что исправен второй автомат (событие B) равна 0,95. Это совместные независимые события. Вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий, а вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Имеем:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975.$

Приведем еще одно решение.

Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат является суммой трех несовместных событий, каждое из которых является произведением двух независимых событий:

A = исправен первый автомат, при этом неисправен второй;

B = исправен второй автомат, при этом неисправен первый;

C = исправен первый автомат, при этом второй тоже исправен.

Поэтому для искомой вероятности получаем:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}95 \cdot 0{,}05 + 0{,}95 \cdot 0{,}05 +$
$+ 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975.$

5. Фабрика выпускает сумки. В среднем 14 сумок из 190 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Решение.

Из 190 сумок 14 некачественных. Значит, вероятность того, что купленная сумка окажется качественной, равна

$$\frac{190-14}{190} = \frac{176}{190} = 0{,}926... \approx 0{,}93.$$

Ответ: 0,93.

6. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение.

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}56 \cdot 0{,}3 = 0{,}168$.

Ответ: 0,168.

7. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называ-

ется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 76% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение.

Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$P(A) = 0,8 \cdot 0,76 = 0,608,$

$P(B) = 0,02 \cdot 0,24 = 0,0048,$

$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,608 + 0,0048 = 0,6128.$

Ответ: 0,6128.

8. В сборнике билетов по географии всего 40 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме "Реки и озера". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме "Реки и озера".

Решение.

Вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме "Реки и озера", равна $\frac{12}{40} = 0,3$.

Ответ: 0,3.

9. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений − по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день 18 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение.

На третий день запланировано $\frac{60-18}{2} = 21$ выступлений. Значит, вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна $\frac{21}{60} = 0,35.$

Ответ: 0,35.

10. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того,

что биатлонист первые 4 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение.

Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,9, он промахивается с вероятностью 1 − 0,9 = 0,1. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, попал, промахнулся» равна

$0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,06561 \approx 0,07.$

Ответ: 0,07.

<u>*Задания для самостоятельной работы:*</u>

1. Вероятность того, что новый ноутбук в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,091. В некотором городе из 1000 проданных ноутбуков в течение года в гарантийную мастерскую поступило 96 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

2. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей − 1 очко, если проигрывает − 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

3. В сборнике билетов по химии всего 40 билетов, в 20 из них встречается вопрос по теме «Кислоты». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Кислоты».

4. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °C, равна 0,7. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °C или выше.

5. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой–то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 5, но не дойдя до отметки 11 часов.

6. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мотор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартер» и

«Ротор». Найдите вероятность того, что «Мотор» будет начинать с мячом только вторую игру.

7. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 12 спортсменов из России, в том числе Сергей Котов. Найдите вероятность того, что в первом туре Сергей Котов будет играть с каким–либо бадминтонистом из России.

8. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

9. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие–то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

10. В соревнованиях по лёгкой атлетике участвуют 6 спортсменов из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Словении и 8 − из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Словении.

11. Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,58. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач, равна 0,64. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.

12. Люба включает телевизор. Телевизор включается на случайном канале. В это время по шести каналам из сорока восьми показывают документальные фильмы. Найдите вероятность того, что Люба попадет на канал, где документальные фильмы не идут.

13. На борту самолёта 10 мест рядом с запасными выходами и 11 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

14. Чтобы поступить в институт на специальность «Переводчик», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 79 баллов по каждому из трёх предметов − математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы

поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 79 баллов по каждому из трёх предметов − математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент Б. получит не менее 79 баллов по математике, равна 0,9, по русскому языку − 0,7, по иностранному языку − 0,8 и по обществознанию − 0,9.

Найдите вероятность того, что Б. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

15. В кармане у Пети было четыре конфеты − «Белочка», «Василёк», «Красная шапочка» и «Маска», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Петя случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Василёк».

16. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

17. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

18. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

19. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 20 спортсменов, среди них 3 прыгуна из Чехии и 2 прыгуна из Боливии. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым будет выступать прыгун из Чехии.

20. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

§15. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

5.1 Общие сведения

Текст 11.

Основная трудность при решении текстовой задачи состоит в переводе её условий на математический язык уравнений. Общего способа такого перевода не существует. Однако многие задачи достаточно типичны. Для начала узнаем, что такое задача:

Задача – это требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь или учитывая те условия, которые в ней указаны.

Любая задача состоит из трёх частей: *условие, объект, требование (вопрос)* задачи.

Приступая к решению какой–либо задачи, надо её внимательно изучить, установить, в чем состоят её требования, каковы условия, исходя из которых надо её решать. Всё это называется *анализом задачи.*

Весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов:

a) анализ;
b) схематическая запись;
c) поиск способа решения;
d) осуществление решения;
e) проверка решения;
f) исследование задачи;
g) формулировка ответа;
h) анализ решения.

Стандартная *схема решения* таких задач включает в себя:

1. Выбор и обозначение неизвестных.
2. Составление уравнений (возможно неравенств) с использованием неизвестных и всех условий задачи.
3. Решение полученных уравнений (неравенств).
4. Отбор решений по смыслу задачи.

Текст 112.

В задачах на движение используются обычно формулы, выражающие законы равномерного движения:

$$\boldsymbol{S=V\cdot t},$$

где S – пройденное расстояние, V – скорость равномерного движения, t – время движения.

При составлении уравнений в таких задачах часто бывает удобно прибегнуть к геометрической иллюстрации процесса движения: путь изображается в виде отрезка прямой, место встречи движущихся с разных сторон объектов точкой на отрезке и т.д.

Часто для усложнения задачи её условие формулируется в различных единицах измерения (метры, километры, часы, минуты и т.д.). В этом случае при выписывании уравнений необходимо пересчитывать все данные задачи в одинаковых единицах измерения:

1. Если расстояние между двумя движущимися *навстречу друг другу* телами равно S, а их скорости v_1 и v_2, то время t через которое они встретятся, находится по формуле $t = \frac{S}{V_1+V_2}$.

2. Если движение – *вдогонку*, то есть первое тело следует за вторым, то время t, через которое первое тело догонит второе, находится по формуле $t = \frac{S}{V_1-V_2}$.

3. В задачах на *движение по воде* скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, при движении против течения – вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

4. *Средняя скорость* вычисляется по формуле $v = \frac{S}{t}$, где S– путь, пройденный телом, а t – время, за которое этот путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения.

Между величинами, описывающими равномерное движение и величинами, характеризующими процесс работы, имеется полная аналогия.

Представим это так:

$$\boldsymbol{A = p \cdot t},$$

здесь вся работа – A; время работы – t; производительность – p.

При совместной работе нескольких объектов, выполняющих одновременно работу, их общая производительность равна сумме производительностей отдельных объектов.

Во многих задачах на работу точный характер этой работы не определен, тогда удобно принять объем всей работы за единицу и измерять части такой работы в долях от единицы.

Иногда в задачах на совместную работу можно обойтись без решения уравнений, используя только арифметический способ.

6.2 Задачи на движение по прямой

Примеры:

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть v км/ч – скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на второй половине пути равна $v+16$ км/ч. Примем расстояние между пунктами за 1. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда имеем:

$$\frac{1}{v}=\frac{0,5}{24}+\frac{0,5}{v+16}\Leftrightarrow\frac{1}{v}=\frac{1}{48}+\frac{1}{2(v+16)}\Leftrightarrow\frac{1}{v}=\frac{(v+16)+24}{48(v+16)}\Leftrightarrow$$

$$\underset{v>0}{\Leftrightarrow}48(v+16)=v(v+40)\Leftrightarrow v^2-8v-768=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=32,\\ v=-24\end{array}\right.\underset{v>0}{\Leftrightarrow}v=32.$$

Таким образом, скорость первого автомобиля была равна 32 км/ч.

Ответ: 32.

2. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть v км/ч – скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на первой половине пути равна $v-13$ км/ч. Примем расстояние между пунктами за 2. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда имеем:

$$\frac{2}{v}=\frac{1}{78}+\frac{1}{v-13}\underset{v>48}{\Leftrightarrow}2\cdot78(v-13)=v^2-13v+78v\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2-91v+52\cdot39=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=52;\\ v=39\end{array}\right.\underset{v>48}{\Leftrightarrow}v=52.$$

Таким образом, скорость первого автомобиля была равна 52 км/ч.

Ответ: 52.

3. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, тогда скорость автомобилиста равна $v+40$ км/ч. Велосипедист был в пути на 6 часов больше, отсюда имеем: $\dfrac{75}{v}-\dfrac{75}{v+40}=6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{75\cdot 40}{v(v+40)}=6 \underset{v>0}{\Leftrightarrow} 25\cdot 20=v(v+40) \Leftrightarrow v^2+40v-500=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=10; \\ v=-50 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v=10.$$

Таким образом, скорость велосипедиста была равна 10 км/ч.

Ответ: 10.

4. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста на пути из B в A, тогда скорость велосипедиста на пути из A в B равна $v-3$ км/ч. Сделав на обратном пути остановку на 3 часа, велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B, отсюда имеем:

$$\frac{70}{v}+3=\frac{70}{v-3} \Leftrightarrow \frac{70+3v}{v}=\frac{70}{v-3} \underset{v>3}{\Leftrightarrow} 70v=70v-210+3v^2-9v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2-3v-70=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=10; \\ v=-7 \end{array}\right. \underset{v>3}{\Leftrightarrow} v=10.$$

Таким образом, скорость велосипедиста была равна 10 км/ч.

Ответ: 10.

5. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста на пути из A в B, тогда скорость велосипедиста на пути из B в A – $v+7$ км/ч. Сделав на обратном пути остановку на 7 часов, велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B, отсюда имеем:

$$\frac{98}{v}=\frac{98}{v+7}+7 \Leftrightarrow \frac{98}{v}=\frac{98+7v+49}{v+7} \underset{v>0}{\Leftrightarrow} 98v+7\cdot 98=98v+7v^2+49v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2+7v-98=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=7; \\ v=-14 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v=7.$$

Таким образом, скорость велосипедиста была равно 7 км/ч.

Ответ: 7.

6. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым, тогда скорость второго велосипедиста $v-1$ км/ч, $v>1$.

Первый велосипедист прибыл к финишу на 1 час раньше второго, отсюда имеем:

$$\frac{240}{v}+1=\frac{240}{v-1} \Leftrightarrow \frac{240+v}{v}=\frac{240}{v-1} \underset{v>1}{\Leftrightarrow} 240v+v^2-240-v=240v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2-v-240=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=16; \\ v=-15 \end{array}\right. \underset{v>1}{\Leftrightarrow} v=16.$$

Значит, первым финишировал велосипедист, двигавшийся со скоростью 16 км/ч.

Ответ: 16.

7. Два велосипедиста одновременно отправились в 88–километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, тогда скорость первого велосипедиста равна $v+3$ км/ч. Первый велосипедист прибыл к финишу на 3 часа раньше второго, отсюда имеем:

$$\frac{88}{v}=\frac{88}{v+3}+3\underset{v>0}{\Leftrightarrow}\frac{88}{v}=\frac{88+3v+9}{v+3}\Leftrightarrow 88v+3\cdot 88=88v+3v^2+9v\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2+3v-88=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=8;\\ v=-11\end{array}\right.\underset{v>0}{\Leftrightarrow} v=8.$$

Таким образом, скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, равна 8 км/ч.

Ответ: 8.

<u>Задания для самостоятельного решения</u>

1. Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км – со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км –со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

2. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

3. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

4. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

5. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 65 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 700 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

6. Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от дома. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой – со скоростью 3 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

7. Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 8 км. Путь из A в B занял у туриста 5 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

8. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 75 км/ч из города *A* в город *B*, расстояние между которыми равно 275 км. Одновременно с ним из города *C* в город *B*, расстояние между которыми равно 255 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 50 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город *B* одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

9. Иван и Алексей договорились встретиться в городе *H*. Они едут к Н разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнаёт, что тот находится в 168 км от *H* и едет с постоянной скоростью 72 км/ч. Иван в момент звонка находится в 165 км от Н и ещё должен по дороге сделать 30-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в *H* одновременно с Алексеем?

10. Дорога между пунктами *A* и *B* состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 8 км. Пешеход прошёл путь из *A* в *B* за 2 часа 45 минут. Время его движения на спуске составило 1 час 15 минут. С какой скоростью пешеход шёл на спуске, если скорость его движения на подъёме меньше скорости движения на спуске на 2 км/ч? Ответ выразите в км/ч.

11. Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 70 км/ч по прямому шоссе, обгоняет другой автомобиль, движущийся в ту же сторону с постоянной скоростью 40 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 15 минут после обгона?

6.3 Задачи на движение по окружности

Примеры:

1. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

Решение:

Пусть v км/ч –скорость первого мотоциклиста, тогда скорость второго мотоциклиста равна $v+21$ км/ч. Пусть первый раз мотоциклисты поравняются через t часов. Для того, чтобы мотоциклисты поравнялись, более быстрый должен преодолеть изначально разделяющее их расстояние, равное половине длины трассы. Поэтому $(v+21)t - vt = 7 \Leftrightarrow 21t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Таким образом, мотоциклисты поравняются через $t = \frac{1}{3}$ часа или через 20 минут.

Ответ: 20.

Приведём другое решение.

Быстрый мотоциклист движется относительно медленного со скоростью 21 км в час, и должен преодолеть разделяющие их 7 км. Следовательно, на это ему потребуется одна треть часа.

2. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть скорость второго автомобиля равна v км/ч. За 2/3 часа первый автомобиль прошел на 14 км больше, чем второй, отсюда имеем

$$80 \cdot \frac{2}{3} = v \cdot \frac{2}{3} + 14 \Leftrightarrow 2v = 80 \cdot 2 - 14 \cdot 3 \Leftrightarrow v = 59.$$

Ответ: 59.

3. Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 минут он еще не вернулся в пункт А и из пункта А следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

К моменту первого обгона мотоциклист за 10 минут проехал столько же, сколько велосипедист за 40 минут, следовательно, его скорость в 4 раза больше. Поэтому, если скорость велосипедиста принять за x км/час, то скорость мотоциклиста будет равна $4x$, а скорость их сближения –$3x$ км/час.

С другой стороны, второй раз мотоциклист догнал велосипедиста за 30 минут, за это время он проехал на 30 км больше. Следовательно, скорость их сближения составляет 60 км/час.

Итак, $3x = 60$ км/час, откуда скорость велосипедиста равна 20 км/час, а скорость мотоциклиста равна 80 км/час.

Ответ: 80.

Задания для самостоятельной работы

1. Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

2. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 60 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 10 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 15 минут? Ответ дайте в км/ч.

6.4. Задачи на движение по воде

Примеры:

1. Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 30 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч –собственная скорость моторной лодки, тогда скорость лодки по течению равна $u+1$ км/ч, а скорость лодки против течения равна $u-1$ км/ч. На весь путь лодка затратила $8-2,5=5,5$ (часов), отсюда имеем:

$$\frac{30}{u-1}+\frac{30}{u+1}=5,5 \Leftrightarrow \frac{60u}{u^2-1}=5,5 \Leftrightarrow 11u^2-120u-11=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{120+\sqrt{120^2+4\cdot 11^2}}{22}=11; \\ u=\dfrac{120-\sqrt{120^2+4\cdot 11^2}}{22}=-\dfrac{1}{11} \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=11.$$

Таким образом, собственная скорость лодки равна 11 км/ч.

Ответ: 11.

2. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч –скорость течения, тогда скорость теплохода по течению равна $15+u$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $15-u$ км/ч. На весь путь теплоход затратил 40 – 10 = 30 часов, отсюда имеем:

$$\frac{200}{15-u}+\frac{200}{15+u}=30 \Leftrightarrow \frac{200\cdot 15\cdot 2}{225-u^2}=30 \Leftrightarrow \frac{200}{225-u^2}=1 \underset{0<u<15}{\Leftrightarrow} 200=225-u^2$$

$$\Leftrightarrow u^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=5; \\ u=-5 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=5.$$

Таким образом, скорость течения реки равна 5 км/ч.

Ответ: 5.

3. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч –собственная скорость теплохода, тогда скорость теплохода по течению равна $u+1$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $u-1$ км/ч. На весь путь теплоход затратил 34 – 2 = 32 часов, отсюда имеем:

$$\frac{255}{u+1}+\frac{255}{u-1}=32 \Leftrightarrow \frac{255\cdot 2u}{u^2-1}=32 \Leftrightarrow 255u=16u^2-16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16u^2-255u-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{255+\sqrt{255^2+4\cdot 16^2}}{32}; \\ u=\dfrac{255-\sqrt{255^2+4\cdot 16^2}}{32} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=16; \\ u=-\dfrac{1}{16} \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=16.$$

Ответ: 16.

Примечание.

Корни квадратного уравнения $16u^2-255u-16=0$ можно найти по теореме, обратной теореме Виета. Действительно,

$u_1+u_2=\dfrac{255}{16}=16+\left(-\dfrac{1}{16}\right)$, при этом $u_1\cdot u_2=-1=16\cdot\left(-\dfrac{1}{16}\right)$.

Поэтому корни уравнения есть числа 16 и $-\dfrac{1}{16}$.

4. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч –скорость первого теплохода, тогда скорость второго теплохода по течению равна $u+1$ км/ч. Первый теплоход находился в пути на 1 час больше, чем второй, отсюда получаем:

$$\frac{420}{u}-\frac{420}{u+1}=1\Leftrightarrow\frac{420}{u^2+u}=1\underset{u>0}{\Leftrightarrow}420=u^2+u\Leftrightarrow u^2+u-420=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=20,\\u=-21\end{array}\right.\underset{u>0}{\Leftrightarrow}u=20.$$

Таким образом, скорость первого теплохода равна 20 км/ч.

Ответ: 20.

5. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч –скорость второго теплохода, тогда скорость первого теплохода равна $u-1$ км/ч. Первый теплоход находился в пути на 1 час больше, чем второй, отсюда имеем:

$$\frac{110}{u-1}-\frac{110}{u}=1\Leftrightarrow\frac{110}{u^2-u}=1\Leftrightarrow 110=u^2-u\Leftrightarrow u^2-u-110=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=11;\\u=-10\end{array}\right.\underset{u>0}{\Leftrightarrow}u=11.$$

Ответ: 11.

6. Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч – скорость течения реки, тогда скорость баржи по течению равна $7+u$ км/ч, а скорость баржи против течения равна $7-u$ км/ч. Баржа вернулась в пункт A через 6 часов, но пробыла в пункте B 1 час 20 минут, поэтому общее время движения баржи дается уравнением:

$$\frac{15}{7-u}+\frac{15}{7+u}=6-\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{15\cdot(7+u)+15\cdot(7-u)}{49-u^2}=\frac{14}{3}\Leftrightarrow$$

$$\underset{u>0}{\Leftrightarrow} 30\cdot 7\cdot 3 = 14\cdot 49 - 14u^2 \Leftrightarrow u^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2; \\ u = -2 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u = 2.$$

Поэтому скорость течения реки равна 2 км/ч.

Ответ: 2.

Задания для самостоятельной работы

1. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

2. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3. Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними 390 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 9 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

4. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

5. Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в $\text{км}/\text{ч}$.

6. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

7. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй –длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент

времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

8. Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

6.5 Задачи на совместную работу

<u>Примеры:</u>

1. Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 1 деталь больше?

Решение.

Обозначим n –число деталей, которые изготавливает за час второй рабочий. Тогда первый рабочий за час изготавливает $n+1$ деталь. На изготовление 110 деталей первый рабочий тратит на 1 час меньше, чем второй рабочий, отсюда имеем:

$$\frac{110}{n+1}+1=\frac{110}{n} \Leftrightarrow \frac{110+n+1}{n+1}=\frac{110}{n} \underset{n>0}{\Leftrightarrow} 110n+110=n^2+111n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-110=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=10; \\ n=-11 \end{array}\right. \underset{n>0}{\Leftrightarrow} n=10.$$

Таким образом, второй рабочий изготавливает 10 деталей в час.

Ответ: 10.

2. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение.

Обозначим n – число деталей, которые изготавливает за час второй рабочий. Тогда первый рабочий за час изготавливает $n+1$ деталь. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей, отсюда имеем:

$$\frac{99}{n+1}+2=\frac{110}{n} \Leftrightarrow \frac{101+2n}{n+1}=\frac{110}{n} \Leftrightarrow 110(n+1)=n(101+2n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2-9n-110=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=\dfrac{9+\sqrt{81+4\cdot 2\cdot 110}}{4}=10; \\ n=\dfrac{9-\sqrt{81+4\cdot 2\cdot 110}}{4}=-5,5 \end{array}\right. \underset{n>0}{\Leftrightarrow} n=10.$$

Таким образом, второй рабочий делает 10 деталей в час.

Ответ: 10.

3. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

Решение.

Обозначим v_1 и v_2 –объёмы работ, которые выполняют за день первый и второй рабочий, соответственно, полный объём работ примем за 1. Тогда по условию задачи $12(v_1+v_2)=1$ и $2v_1=3v_2$. Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 12(v_1+v_2)=1, \\ 2v_1=3v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(v_1+\dfrac{2}{3}v_1\right)=1, \\ v_2=\dfrac{2}{3}v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1=\dfrac{1}{20}, \\ v_2=\dfrac{1}{30}. \end{cases}$$

Тем самым, первый рабочий за день выполняет одну двадцатую всей работы, значит, работая отдельно, он справится с ней за 20 дней.

Ответ: 20.

Приведем арифметическое решение.

Пусть первый рабочий, работая один, выполняет в день некоторую часть работы; назовем ее нормой. Тогда второй выполняет две трети нормы, а вместе рабочие выполняют пять третьих нормы. За 12 дней рабочие выполнят всю работу или $12\cdot\dfrac{5}{3}=20$ норм. Следовательно, первый рабочий один может выполнить всю работу за 20 дней.

4. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

Решение.

Обозначим x – количество литров воды, пропускаемой первой трубой в минуту, тогда вторая труба пропускает $x+1$ литров воды в минуту. Резервуар объемом 110 литров первая труба заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба, отсюда имеем:

$$\frac{110}{x}-\frac{110}{x+1}=1 \Leftrightarrow \frac{110}{x^2+x}=1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 110=x^2+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-110=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10; \\ x=-11 \end{array}\right. \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=10.$$

Таким образом, первая труба пропускает 10 литров воды в минуту.

Ответ: 10.

5. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение.

Рабочий выполняет 1/15 часть заказа в час, поэтому за 3 часа он выполнит 1/5 часть заказа. После этого к нему присоединяется второй рабочий, и, работая вместе, два рабочих должны выполнить 4/5 заказа. Чтобы определить время совместной работы, разделим этот объём работы на совместную производительность:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{2}=6$$

часов. Тем самым, на выполнение всего заказа потребуется 6 + 3 = 9 часов.

Ответ: 9.

Приведем другое решение.

Один рабочий работал 3 часа и должен был бы еще 12, но к нему присоединился второй рабочий, и они стали работать в два раза быстрее. Поэтому вдвоем они работали только 6 часов. Значит, полное время работы 9 часов.

6. Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой –за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Решение.

Первый мастер выполняет 1/12 работы в час, а второй 1/6 работы в час. Следовательно, работая вместе, мастера выполняют $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ работы в час. Поэтому всю работу мастера выполнят за 4 часа.

Другое рассуждение.

Время работы равно отношению объёма к скорости её выполнения. Поэтому два мастера, работая вместе, выполнят заказ за

$$\frac{1}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$ часа.

Ответ: 4.

7. Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь – за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Решение.

Обозначим выполняемую мальчиками работу по покраске забора за 1. Пусть за $\frac{1}{v_1}$, $\frac{1}{v_2}$, $\frac{1}{v_3}$ часов Игорь, Паша и Володя, соответственно, покрасят забор, работая самостоятельно. Игорь и Паша красят забор за 9 часов: $\frac{1}{v_1+v_2}=9 \Leftrightarrow v_1+v_2=\frac{1}{9}$.

Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов: $\frac{1}{v_3+v_2}=12 \Leftrightarrow v_3+v_2=\frac{1}{12}$, а Володя и Игорь – за 18 часов: $\frac{1}{v_1+v_3}=18 \Leftrightarrow v_1+v_3=\frac{1}{18}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_1+v_2=\frac{1}{9}, \\ v_3+v_2=\frac{1}{12}, \\ v_1+v_3=\frac{1}{18}. \end{cases}$$

Просуммируем левые и правые части данных трех уравнений, получим:

$$2(v_1+v_2+v_3)=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9} \Leftrightarrow 2(v_1+v_2+v_3)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow v_1+v_2+v_3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_1+v_2+v_3}=8.$$

Ответ: 8.

Приведём ещё одно решение.

За один час Игорь и Паша красят 1/9 забора, Паша и Володя красят 1/12 забора, а Володя и Игорь –1/18 забора. Работая вместе, за один час два Игоря, Паши и Володи покрасили бы: $\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ забора.

Тем самым, они могли бы покрасить один забор за 4 часа. Поскольку каждый из мальчиков был учтен два раза, в реальности Игорь, Паша и Володя могут покрасить забор за 8 часов.

Задания для самостоятельной работы

1. Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша – за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

2. Две трубы наполняют бассейн за 3 часа 36 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 6 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

3. Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

4. Первый садовый насос перекачивает 5 литров воды за 2 минуты, второй насос перекачивает тот же объём воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды?

5. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня – на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

6. Плиточник планирует уложить 175 $м^2$ плитки. Если он будет укладывать на 10 $м^2$ в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

7. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий –за 14 минут, а первый и третий –за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

8. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 16 рабочих, а во второй –25 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

9. Вова и Гоша решают задачи. За час Вова может решить на две задачи больше, чем Гоша (при этом оба за час решают целое количество задач). Известно, что вместе они решат 33 задачи на 1 час 15 минут быстрее, чем это сделал бы один Вова. За какое время Гоша может решить 20 задач? Ответ дайте в часах.

10. Два промышленных фильтра, работая одновременно, очищают цистерну воды за 30 минут. Определите, за сколько минут второй фильтр очистит цистерну воды, работая отдельно, если известно, что он сделает это на 25 минут быстрее, чем первый.

11. При двух одновременно работающих принтерах расход бумаги составляет 1 пачку за 12 минут. Определите, за сколько минут израсходует пачку бумаги первый принтер, если известно, что он сделает это на 10 минут быстрее, чем второй.

6.6 Задачи на прогрессии

Примеры:

1. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение.

Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй a_2, … , в последний – a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n$ метров забора.

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8.

2. Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

Решение.

Пусть рабочие в первый день проложили a_1 метров тоннеля, во второй a_2, …, в последний a_{10} метров тоннеля. Длина тоннеля $S_n = 500$ метров. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, $n = 10$ дней. Тогда в последний день рабочие проложили $a_{10} = \frac{2S_n}{n} - a_1 = \frac{1000}{10} - 3 = 97$ метров.

Таким образом, рабочие в последний день проложили 97 метров тоннеля.

Ответ: 97.

3. Васе надо решить 434 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

Решение.

В первый день Вася решил $a_1 = 5$ задач, в последний a_{14} задач. Всего надо решить $S_{14} = 434$ задач. Поскольку $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, где $a_1 = 5, n = 14$ имеем: $S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(5 + a_{14})$.

Тогда $7(5 + a_{14}) = 434 \Leftrightarrow 5 + a_{14} = 62 \Leftrightarrow a_{14} = 57$ задач.

Ответ: 57.

4. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение.

В первый день турист прошел $a_1 = 10$ км, во второй a_2, …, в последний a_6 км. Всего он прошел $S_n = 120$ км. Если каждый день турист проходил больше, чем в предыдущий день, на d км, то $S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n$, где $n = 6$ дней, $a_1 = 10$ км. Таким образом, $\frac{2 \cdot 10 + 5d}{2} \cdot 6 = 120 \Leftrightarrow 5d = 20 \Leftrightarrow d = 4.$ Тогда за третий день турист прошел $a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2 \cdot 4 = 18$ км.

Ответ: 18.

5. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

Решение.

Пусть в первый день грузовик перевез $a_1 = 2$ тонны щебня, во второй a_2, …, в последний a_{14} тонн; всего было перевезено $S_{14} = 210$ тонн; норма перевозки увеличивалась ежедневно на d тонн. Таким образом, $S_n = \frac{2a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n$

$$S_{14} = \frac{2a_1 + d\cdot(14-1)}{2}\cdot 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 210 = \frac{2\cdot 2 + 13d}{2}\cdot 14 \Leftrightarrow 30 = 4 + 13d \Leftrightarrow d = 2.$$

Имеем: $a_9 = a_1 + 8d = 2 + 8\cdot 2 = 18.$

Следовательно, за девятый день было перевезено 18 тонн щебня.

Ответ: 18

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

2. Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

3. Бизнесмен Бубликов получил в 2020 году прибыль в размере 5000 тыс. рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивается на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработает Бубликов за 2023 год?

4. Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2018 году, имея капитал в размере 5000 тыс. долларов. Каждый год, начиная с 2019 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2020 году, имея капитал в размере 10000 тыс. долларов, и, начиная с 2021 года, ежегодно планирует получать прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний станет больше капитала другой к концу 2025 года, если прибыль из оборота не изымается?

6.7 Задачи на проценты, сплавы и смеси

Примеры:

1. В 2018 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2019 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2020 году на 9% по сравнению с 2019 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2020 году?

Решение.

В 2019 году число жителей стало $40\ 000 + 0{,}08 \cdot 40\ 000 = 43\ 200$ человек, а в 2020 году число жителей стало $43\ 200 + 0{,}09 \cdot 43\ 200 = 47\ 088$ человек.

Ответ: 47 088.

2. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Решение.

Обозначим первоначальную стоимость акций за 1. Пусть в понедельник акции компании подорожали на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c \cdot 1$. Во вторник акции подешевели на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c - c(1+c)$. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник, то есть 0,96. Таким образом,

$$1 + c - c(1+c) = 0{,}96 \Leftrightarrow 1 - c^2 = 0{,}96 \Leftrightarrow c^2 = 0{,}04 \underset{c>0}{\Leftrightarrow} c = 0{,}2.$$

Ответ: 20.

3. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

Решение.

Стоимость четырех рубашек составляет 92% стоимости куртки. Значит, стоимость одной рубашки составляет 23% стоимости куртки. Поэтому стоимость пяти рубашек составляет 115% стоимости куртки. Это превышает стоимость куртки на 15%.

Ответ: 15.

4. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение.

Условие «если бы зарплата отца увеличилась вдвое, доход семьи вырос бы на 67%» означает, что зарплата отца составляет 67% дохода семьи. Условие «если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, доход семьи сократился бы на 4%», означает, что 2/3 стипендии составляют 4% дохода семьи, то есть вся стипендия дочери составляет 6% дохода семьи. Таким образом, доход матери составляет
$100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ дохода семьи.

Ответ: 27.

5. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

Решение.

Пусть цена холодильника ежегодно снижалась на p процентов в год. Тогда за два года она снизилась на $(1-0,01p)^2$, откуда имеем:

$$20000(1-0,01p)^2 = 15842 \Leftrightarrow (1-0,01p)^2 = 0,7921 \Leftrightarrow$$

$$\underset{1-0,01p>0}{\Leftrightarrow} 1-0,01p = 0,89 \Leftrightarrow p = 11.$$

Ответ: 11.

6. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон 42000 рублей, Гоша 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1000000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Антон внес $\frac{42000}{200000} \cdot 100$ уставного капитала. Тогда Борис внес $100 - 12 - 14 - 21 = 53\%$ уставного капитала. Таким образом, от прибыли 1000000 рублей Борису причитается $0,53 \cdot 1\,000\,000 = 530\,000$ рублей.

Ответ: 530 000.

7. В сосуд, содержащий 5 литров 12–процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Концентрация раствора равна $C=\frac{V_{\text{в-ва}}}{V_{\text{р-ра}}}\cdot 100\%.$ Объем вещества в исходном растворе равен $0,12\cdot 5=0,6$ литра. При добавлении 7 литров воды общий объем раствора увеличится, а объем растворенного вещества останется прежним. Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\frac{0,6}{5+7}\cdot 100\%=\frac{0,6}{12}\cdot 100\%=5\%.$$

Ответ: 5.

8. Смешали некоторое количество 15–процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19–процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Процентная концентрация раствора (массовая доля) равна $\omega=\frac{m_{\text{в-ва}}}{m_{\text{р-ра}}}\cdot 100\%.$ Пусть масса получившегося раствора $2m.$ Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\omega=\frac{0,15m+0,19m}{2m}\cdot 100\%=\frac{0,34}{2}\cdot 100\%=17\%$$

Ответ: 17.

9. Смешали 4 литра 15–процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25–процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Концентрация раствора равна $C=\frac{V_{\text{в-ва}}}{V_{\text{р-ра}}}\cdot 100\%.$ Таким образом, концентрация получившегося раствора равна:

$$\frac{0,15\cdot 4+0,25\cdot 6}{4+6}\cdot 100\%=\frac{2,1}{10}\cdot 100\%=21\%.$$

Ответ: 21.

10. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение.

Виноград содержит 10% питательного вещества, а изюм – 95%. Поэтому 20 кг изюма содержат $20 \cdot 0,95 = 19$ кг питательного вещества. Таким образом, для получения 20 килограммов изюма требуется $\frac{19}{0,1} = 190$ кг винограда.

Ответ: 190.

Задания для самостоятельной работы

1. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

2. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй –40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

3. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

4. Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй – 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

5. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

6. Имеется два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 140 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

§16. СТЕРЕОМЕТРИЯ

16.1 Основные понятия

Стереометрия – это раздел геометрии, изучающий фигуры в *пространстве*. Сформулируем *основные аксиомы* стереометрии.

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости, т.е. прямая лежит в плоскости или плоскость проходит через прямую.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Следствия из аксиом:

1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, притом только одна.
2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, притом только одна.

Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки

Признак *параллельности прямой и плоскости*. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в данной плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Признак *параллельности двух плоскостей.* Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Прямая и плоскость называются *взаимно перпендикулярными*, если прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости.

Признак *перпендикулярности прямой и плоскости.* Если прямая перпендикулярна к каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Теоремы о взаимно перпендикулярных прямых и плоскостях:

а) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна плоскости;

б) прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, – это отрезок, соединяющий данную точку с точкой на плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра.*

Наклонная, проведенная из данной точки плоскости, – любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой на плоскости, не являющийся перпендикуляром к данной плоскости. Конец отреза, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной.*

Проекцией наклонной на плоскость называется отрезок, соединяющий основания наклонной и перпендикуляра.

Теорема о трех перпендикулярах. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна проекции прямой на эту плоскость.

Две плоскости называются *взаимно перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная *линии* пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Признак *перпендикулярности двух плоскостей.* Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

*Углом между прямой и плоскос*тью называется угол, образованный этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними считается равным $0°$.

Углом между плоскостями называется угол, образуемый прямыми, полученными при пересечении этих двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной заданным плоскостям. Если данные плоскости параллельны, то угол между ними считается равным $0°$.

16.2 Призма и пирамида

Многогранником называется тело, ограниченное со всех сторон конечным числом плоскостей. Поверхность многогранника состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Площадью поверхности многогранника называется сумма площадей всех его граней.

Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (их называют основаниями), а все другие грани – параллелограммы (их называют боковыми гранями).

Площадь поверхности призмы:

$$S=2S_{осн}+S_{бок},$$

здесь $S_{осн}$ – площадь одного основания, $S_{бок}$ – сумма площадей боковых граней.

Высотой призмы называется перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки на плоскость другого основания.

Объем призмы:

$$V=S_{осн}H.$$

здесь $S_{осн}$ – площадь основания, H – высота призмы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В случае прямой призмы высота равна длине бокового ребра, а площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания на высоту призмы:

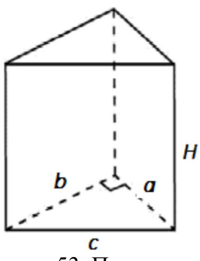


Рисунок 53. Прямая призма

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания – правильные многоугольники.

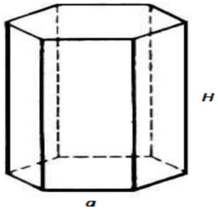


Рисунок 54. Правильная шестиугольная призма

Параллелепипедом называется призма, в основаниях которой лежат параллелограммы.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, в основаниях которого лежат прямоугольники.

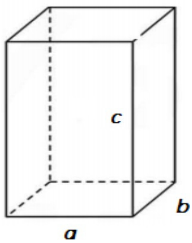


Рисунок 55. Прямоугольный параллелепипед

Введем обозначения: a и b – стороны прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда; c – длина бокового ребра. Формулы для вычисления *площади поверхности* и *объема* прямоугольного параллелепипеда имеют вид:

$$S = 2ab + 2(a+b)c\,,\ V = abc\,.$$

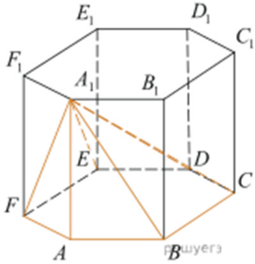
Кубом называется параллелепипед, у которого все грани – равные квадраты. Формулы для вычисления *площади поверхности* и *объема* куба со стороной a имеют вид:

$$S = 6a^2,\ V = a^3$$

Примеры.

1. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ A_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 4.

Решение. Основание пирамиды такое же, как основание правильной шестиугольной призмы, и высота у них общая. Поэтому



$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}}=\frac{1}{3}\cdot 9\cdot 4=12.$$

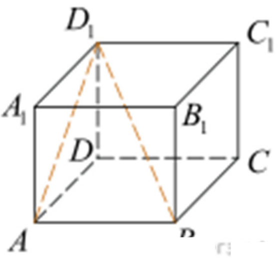
Ответ: 12.

1. Объем одного куба в 729 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Решение. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен 9. Площади поверхностей подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому их отношение равно 81.

Ответ: 81.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$известно, что $BD_1=5;CC_1=3;B_1C_1=\sqrt{7}.$Найдите длину ребра AB.



Решение.

По теореме Пифагора: $AD_1=\sqrt{AA_1^2+A_1D_1^2}=\sqrt{CC_1^2+B_1C_1^2}=\sqrt{9+7}=4.$

Тогда длина ребра равна AB: $AB=\sqrt{BD_1^2-AD_1^2}=\sqrt{25-16}=3.$

Ответ: 3.

4. От треугольной призмы, объем которой равен 150, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

Решение. Объем призмы больше объема пирамиды с такой же площадью основания и высотой в 3 раза. Объем оставшейся части составляет тогда две трети исходного, он равен 100.

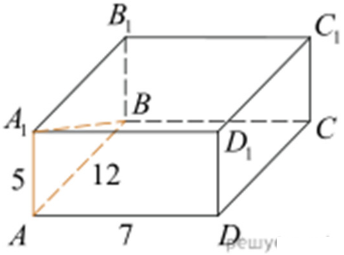
Ответ: 100.

5. Диагональ куба равна $\sqrt{588}.$ Найдите его объем.

Решение. Диагональ куба в $\sqrt{3}$раз больше его ребра. Получим, что ребро равно $a=\frac{\sqrt{588}}{\sqrt{3}}=14.$ Тогда объем куба $V=a^3=2744.$

Ответ: 2744.

6. Найдите расстояние между вершинами B и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 12, AD = 7, AA_1 = 5$.



Решение. Рассмотрим треугольник AA_1B, в котором A_1B является гипотенузой и найдем ее длину по теореме Пифагора: $A_1B^2 = AA_1{}^2 + AB^2 = 25 + 144 = 169$.
Значит, $A_1B = 13$.

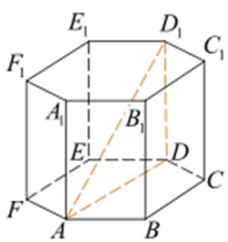
Ответ: 13.

7. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда равен $V = Sh$, где S – площадь грани, а h – высота перпендикулярного к ней ребра. Тогда $h = \frac{V}{S} = \frac{24}{12} = 2$.

Ответ: 2.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла AD_1D.



Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ADD_1, катет которого является большей диагональю основания. Длина большей диагонали правильного шестиугольника равна его удвоенной стороне: $AD = 2$. Поскольку $DD_1 = 1$ имеем: $\operatorname{tg}\angle AD_1D = \frac{AD}{DD_1} = \frac{2}{1} = 2$.

Ответ: 2.

9. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в два раза?

Решение. Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому при увеличении ребра в 2 раза, площадь поверхности увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

10. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.

Решение. Площадь поверхности правильной четырехугольной призмы выражается через сторону ее основания a и боковое ребро H формулой $S = 2a^2 + 4aH$. Подставим значения a и S: $1760 = 2 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 \cdot H$, откуда находим, что $H = 12$.

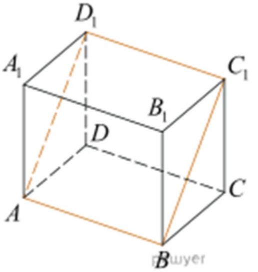
Ответ: 12.

11. Диагональ куба равна 13. Найдите площадь его поверхности.

Решение. Сторона куба меньше диагонали в $\sqrt{3}$ раз и равна в данном случае $a = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь поверхности куба $S = 6a^2 = 6\left(\frac{13}{\sqrt{3}}\right)^2 = 338$.

Ответ: 338.

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 2,\ AD = 24,\ AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки $A,\ B$ и C_1.



Решение. Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому сечение ABC_1D_1 – параллелограмм. Кроме того, ребро AB перпендикулярно граням AA_1D_1D и BB_1C_1C. Поэтому углы D_1AB и ABC_1 – прямые. Поэтому сечение ABC_1D_1 – прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника AD_1D найдем AD_1:

$AD_1 = \sqrt{(AD)^2 + (DD_1)^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{1600} = 40.$

Тогда площадь прямоугольника ABC_1D_1 равна: $AB \cdot AD_1 = 2 \cdot 40 = 80.$

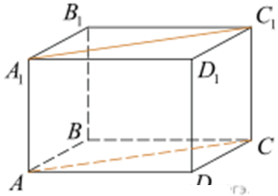
Ответ: 80.

13. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3. Объем призмы равен 18. Найдите ее боковое ребро.

Решение. Объем прямой призмы равен $V = Sh$ где S – площадь основания, а h – боковое ребро. Тогда длина ее бокового ребра равна $h = \frac{V}{S} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2} = 6.$

Ответ: 6.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C.



Решение. Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому сечение AA_1C_1C – параллелограмм. Кроме того, ребро A_1A перпендикулярно граням $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому углы AA_1C_1 и A_1AC – прямые. Поэтому сечение AA_1C_1C – прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника ABC найдем AC:
$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26.$ Тогда площадь прямоугольника AA_1C_1C равна: $AA_1 \cdot AC = 22 \cdot 26 = 572.$

Ответ: 572.

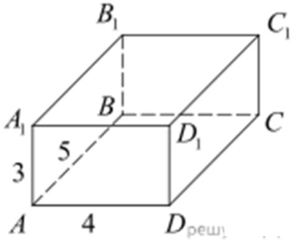
15. Объем куба равен $375\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

Решение. Если ребро куба равно a, то его объем и диагональ даются формулами $V = a^3$ и $d = a\sqrt{3}$. Следовательно, $d^3 = (a\sqrt{3})^3 = a^3 \cdot 3\sqrt{3} = 375\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3375.$ Тогда диагональ равна 15.

Ответ: 15.

Задания для самостоятельного решения.

1. Найдите расстояние между вершинами A и D_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.



2. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

3. Диагональ куба равна 11. Найдите площадь его поверхности.

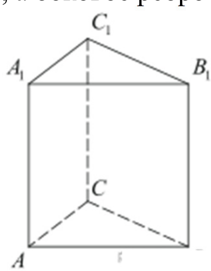
4. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $\sqrt{3}$.

5. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 3$, $AA_1 = 6$.

6. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в пятнадцать раз?

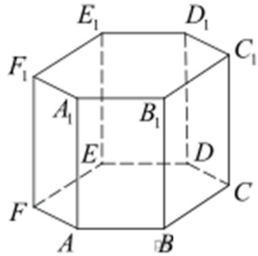
7. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки D, B, B_1, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $AD = 6$, $AA_1 = 9$.

8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 8.



9. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 919. Найдите ребро куба.

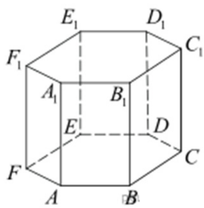
10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.



11. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 4 и 2. Найдите ребро равновеликого ему куба.

12. Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 8, найдите угол между прямыми FA и D_1E_1. Ответ дайте в градусах.



14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 18$, $AD = 36$, $AA_1 = 15$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

15. Диагональ куба равна $\sqrt{243}$. Найдите его объем.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (называемая *основанием*) является многоугольником, а все другие грани (называемые *боковыми*) – треугольники, имеющие общую вершину (называемую *вершиной* пирамиды).

Площадь поверхности пирамиды:

$$S = S_{осн} + S_{бок},$$

здесь $S_{осн}$ – площадь основания пирамиды, $S_{бок}$ – сумма площадей боковых граней.

Высотой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} H$$,

здесь $S_{осн}$ – площадь основания, H – высота пирамиды.

Пирамида называется *правильной,* если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. Все боковые ребра правильной пирамиды равны между собой.

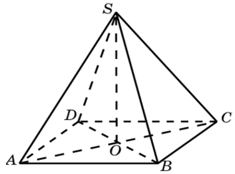


Рисунок 56. Правильная четырехугольная пирамида

Все боковые грани правильной пирамиды – *равнобедренные* треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой.* Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$$S_{бок} = ph.$$

здесь p – полупериметр основания, h – апофема.

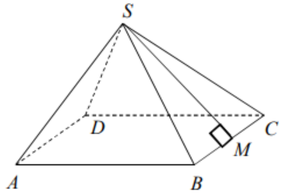


Рисунок 57. Апофема правильной пирамиды

Тетраэдром называется пирамида, в основании которой лежит треугольник. Очевидно, что любая из четырех граней тетраэдра может быть принята за основание. Тетраэдр называется *правильным*, если все его грани – правильные треугольники.

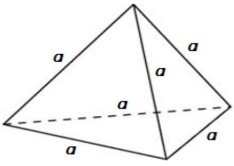


Рисунок 58. Правильный тетраэдр с ребром a

Площадь поверхности S и *объем V правильного тетраэдра* с ребром a вычисляются по следующим формулам:

$$S = a^2\sqrt{3}, \quad V = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

<u>Примеры.</u>

1. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Решение. Площадь пирамиды равна: $S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = ph + a^2.$ Полупериметр основания $p = 20$, апофему h найдем по теореме Пифагора: $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$ Тогда площадь поверхности пирамиды: $S = 20 \cdot 12 + 10^2 = 340.$

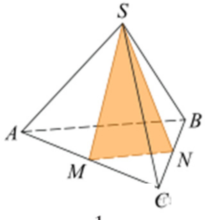
Ответ: 340.

2. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 и высота равна 4.

Решение. Высоту треугольника, образующего грани пирамиды, найдем по теореме Пифагора: $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$
Тогда площадь боковой поверхности пирамиды: $S_{\text{бок}} = 4 \cdot \frac{1}{2}al = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60.$

Ответ: 60.

3. От треугольной пирамиды, объем которой равен 100, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



Решение. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}Sh.$ Исходная и отсеченная пирамиды имеют общую высоту, поэтому их объемы относятся как площади их оснований. Площадь основания отсеченной части в 4 раза меньше площади основания исходной пирамиды, так как средняя линия отсекает от треугольника подобный с коэффициентом подобия 0,5. Поэтому объем отсеченной пирамиды в 4 раза меньше объема исходной. Тем самым, он равен 25.

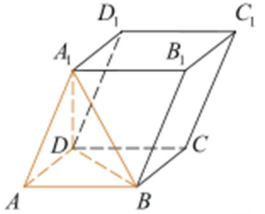
Ответ: 25.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L − середина ребра BC, S − вершина. Известно, что $SL = 2$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB.

Решение. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению апофемы на полупериметр основания. Поэтому $SL \cdot \dfrac{AB+BC+AC}{2} = 3 \Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{3AB}{2} = 3 \Leftrightarrow AB = 1$.

Ответ: 1.

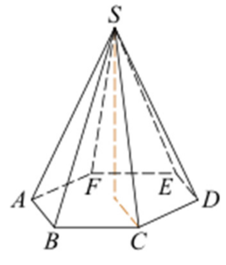
5. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



Решение. Объем параллелепипеда равен $V = Sh$, где S − площадь основания, h − высота. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S_{\Delta}h$, где S_{Δ} − площадь основания пирамиды, равная половине площади основания параллелепипеда. Тогда объем параллелепипеда в 6 раз больше объема пирамиды $ABDA_1$.

Ответ: 18.

6. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10, боковое ребро равно 20. Найдите объем пирамиды.

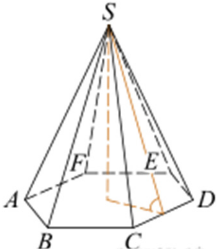


Решение. В правильном шестиугольнике сторона равна радиусу описанной окружности, поэтому для высоты пирамиды по теореме Пифагора имеем: $h=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}.$ Площадь правильного шестиугольника, лежащего в основании, равна $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 10^2=150\sqrt{3}.$

Тогда объем пирамиды равен: $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}150\sqrt{3}\cdot 10\sqrt{3}=1500.$

Ответ: 1500.

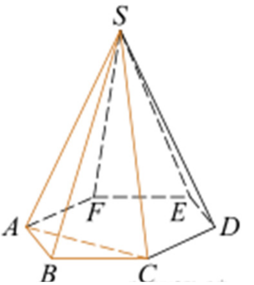
7. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.



Решение. Вершина правильной пирамиды проектируется в центр ее основания. В правильном шестиугольнике со стороной a расстояние от его центра до стороны равно радиусу вписанной окружности, который равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a=4\sqrt{3}.$ Так как угол между боковой гранью и основанием равен 45°, высота пирамиды также равна $h=4\sqrt{3}.$ Тогда имеем: $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{8^2\sqrt{3}}{4}\cdot 4\sqrt{3}=384.$

Ответ: 384.

8. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 23. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



Решение. Данные пирамиды имеют общую высоту, поэтому их объемы соотносятся как площади их оснований. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равна $S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$ Площадь равнобедренного треугольника ACB с боковой стороной a и углом при вершине 120° равна $S_\Delta = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$ Таким образом, площадь шестиугольника больше площади треугольника в $\frac{S_6}{S_\Delta} = 6$ раз, поэтому искомый объем равен $23 \cdot 6 = 138$.

Ответ: 138.

9. Во сколько раз уменьшится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра уменьшить в три раза?

Решение. Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому если все ребра уменьшить в 3 раза, объём уменьшится в 27 раз.

Это же следует из формулы для объёма правильного тетраэдра $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3,$ где a − длина его ребра.

Ответ: 27.

10. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 5. Найдите её объём.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник, катетом которого является высота пирамиды, а гипотенузой − ее боковое ребро. По теореме Пифагора неизвестный катет равен $\sqrt{21}.$ В то же время этот катет является половиной диагонали лежащего в основании квадрата.

Тогда длина всей диагонали равна $2\sqrt{21}.$ Площадь квадрата равна половине произведения диагоналей: $0,5(2\sqrt{21})^2 = 42,$ тогда объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\cdot 42 \cdot 2 = 28.$

11. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.

Решение. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh,$ где S − площадь основания, а h − высота пирамиды. Найдем площадь равностороннего треугольника, лежащего в основании: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}.$

Тогда высота пирамиды равна $h = \frac{3V}{S} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3.$

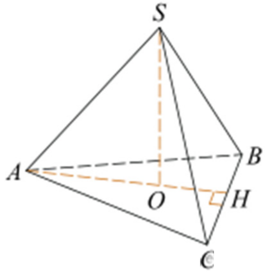
Ответ: 3.

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 30, $MS = 21$. Найдите объем пирамиды.

Решение. Основание пирамиды − равносторонний треугольник, поэтому, M является центром основания, а отрезок MS − высотой пирамиды $SABC$. Тогда $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot MS = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 21 = 210.$

Ответ: 210.

13. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $0,25\sqrt{11}.$ Найти сторону основания пирамиды.



Решение. Введём обозначения, как показано на рисунке. Выразим длину стороны AC через длину боковой стороны $AS.$ Высота правильного треугольника выражается через его сторону: $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC.$ Точкой O высота AH делится в отношении $2:1$, поэтому $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}AC,$ $OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{6}AC.$

Угол SHO равен углу между боковой гранью и плоскостью основания. Из прямоугольного треугольника SOH: $SO = OH \operatorname{tg} \angle SHO = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} AC = \frac{\sqrt{33}}{24} AC.$

Из прямоугольного треугольника AOS по теореме Пифагора:

$$AS = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{1}{3}AC^2 + \frac{11}{192}AC^2} = AC\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{11}{192}}$$
$$= AC\sqrt{\frac{64+11}{192}} = AC\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}AC.$$

Откуда $AC = \frac{8}{5}AS = 8.$

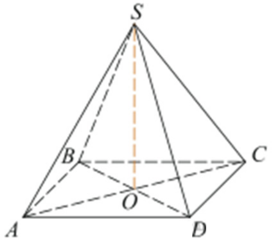
Ответ: 8.

14. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 5, а объем равен $6\sqrt{3}.$

Решение. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh,$ где S − площадь основания, а h − высота пирамиды. Найдем площадь равностороннего треугольника, лежащего в основании: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 25.$ Тогда высота пирамиды равна $h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 6\sqrt{3}}{25\sqrt{3}} = 2,88.$

Ответ: 2,88.

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O − центр основания, S вершина, $SD = 5,$ $AC = 8.$ Найдите длину отрезка SO.



Решение. Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный: т. к. SO − высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит, и прямой AC, ребра SD и SC равны, т. к. пирамида правильная. Тогда по теореме Пифагора $SO = \sqrt{SC^2 - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{25 - 16} = 3.$

Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения.

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 48,\ SD = 60.$ Найдите длину отрезка AC.

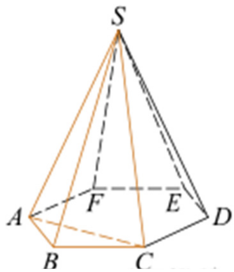
2. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 4 и 5. Ее объем равен 80. Найдите высоту этой пирамиды.

3. Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

4. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.

5. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 9. Найдите объем пирамиды.

6. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 21. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

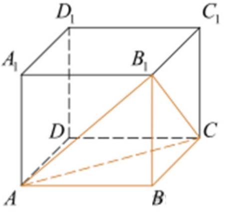


7. Найдите объем пирамиды, изображенной на рисунке. Ее основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.

8. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 5. Найдите её объём.

9. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

10. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $1,5$. Найдите объем треугольной пирамиды $ABCB_1$.



16.3 Тела вращения

Цилиндр – это фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.

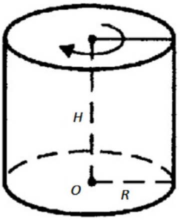


Рисунок 59. Цилиндр радиусом R и высотой H

Основания цилиндра представляют собой круги радиусом R, лежащие в параллельных плоскостях. *Высота* цилиндра – это расстояние между плоскостями его оснований.

Площадь боковой поверхности цилиндра:

$$S_{бок} = 2\pi RH.$$

Основаниями цилиндра служат круги радиусом R, следовательно, *площадь* одного основания:

$$S_{осн} = \pi R^2.$$

Площадь полной поверхности цилиндра можно представить в виде:

$$S = 2S_{осн} + S_{бок}.$$

Подставив в последнюю формулу выражения для $S_{осн}$ и $S_{бок}$ через радиус и высоту цилиндра, получим:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_{осн}H.$$

Подставив в последнюю формулу вместо выражение через радиус основания, получим:

$$V = \pi R^2 H$$

Отметим, что формулы для площади поверхности и объема цилиндра структурно подобны соответствующим формулам для призмы.

Конус – это фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащий катет.

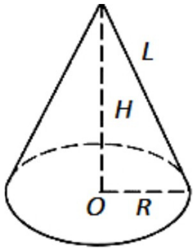


Рис. 60. Конус радиусом R образующей L высотой H

Основание конуса – круг радиусом R.

Высота конуса H – катет треугольника, принадлежащий оси вращения, а *образующая конуса* L – гипотенуза треугольника.

Площадь боковой поверхности конуса

$$S_{бок} = \pi RL.$$

Основанием конуса служит круг радиусом R, следовательно, площадь основания равна:

$$S_{осн} = \pi R^2.$$

Площадь полной поверхности конуса можно представить в виде

$$S = S_{осн} + S_{бок}.$$

Подставив в последнюю формулу выражения для $S_{бок}$ и $S_{осн}$ через радиус, высоту и образующую конуса, получим

$$S = \pi R^2 + \pi RL.$$

Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} H.$$

Подставив в последнюю формулу вместо $S_{осн}$ выражение через радиус основания, получим $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$

Очевидно, что формулы для площади поверхности и объема *конуса* структурно *подобны* соответствующим формулам для *пирамиды*.

Шар – это фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей диаметр круга.

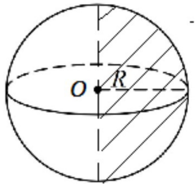


Рис. 61. Шар радиусом R

Площадь поверхности S и *объем* V шара радиусом R вычисляются по формулам:

$$S = 4\pi R^2, \ V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Примеры.

1. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 128 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 8 раз больше первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение. Объем цилиндра выражается через его диаметр и высоту формулой $V = \frac{\pi d^2}{4}h,$ откуда $h = \frac{4V}{\pi d^2}.$ При увеличении диаметра сосуда в восемь раз высота жидкости уменьшится в 64 раза. Поэтому уровень жидкости во втором сосуде будет находиться на высоте $\frac{128}{64} = 2$ см.

Ответ: 2.

2. Объем первого шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Решение. Найдем отношение объемов шаров: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 27,$ откуда $\frac{R_1}{R_2} = 3.$ Площади их поверхностей соотносятся как квадраты радиусов: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 9.$

Ответ: 9.

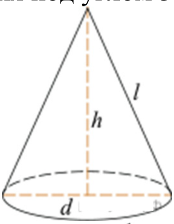
3. Диаметр основания конуса равен 30, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π.

Решение. В треугольнике, образованном радиусом основания r, высотой h и образующей конуса l, углы при образующей равны, поэтому высота конуса равна радиусу его основания: $h = r$. Тогда объем конуса, деленный на π, вычисляется следующим образом:

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3}r^2 r = \frac{1}{3}\cdot 15^3 = 1125.$$

Ответ: 1125.

4. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



Решение. Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}Sh,$ где S – площадь основания, а h – высота конуса. Высоту конуса найдем по свойству стороны прямоугольного треугольника, находящейся напротив угла в $30°$ – он вдвое меньше гипотенузы, которой в данном случае является образующая конуса. Радиус основания найдем по теореме Пифагора: $r = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$

Тогда объем $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 1 = \pi.$

Ответ: 1.

5. Объем первого цилиндра равен 30 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

Решение. Пусть объём первого цилиндра равен $V_1 = \pi {R_1}^2 h_1,$ объём второго – $V_2 = \pi {R_2}^2 h_2,$ где $R_{1,2}$ – радиусы оснований цилиндров, $h_{1,2}$ – их высоты. По условию $h_2 = 3h_1,\ R_2 = 0,5R_1.$ Выразим объём второго цилиндра через объём первого:

$$V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi\left(\frac{R_1}{2}\right)^2 3h_1 = \frac{3}{4}(\pi R_1^2 h_1) = \frac{3}{4}V_1.$$

Тогда $V_2 = \frac{3}{4} \cdot 30 = 22,5$ м^3.

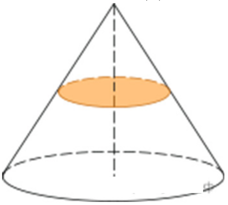
Ответ: 22,5.

6. Дано два шара. Радиус первого шара в 19 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Решение. Площадь поверхности шара выражается через его радиус формулой $S = 4\pi r^2$, поэтому при увеличении радиуса в 19 раз площадь увеличится в $19^2 = 361$ раз.

Ответ: 361.

7. Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



Решение. Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем меньшего конуса в восемь раз меньше объема большего конуса.

Ответ: 3.

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π, а высота – 4. Найдите диаметр основания.

Решение. Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле: $S_{бок} = 2\pi rh$, значит, $d = 2r = \frac{S_{бок}}{\pi h} = \frac{36\pi}{4\pi} = 9.$

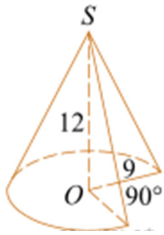
Ответ: 9.

9. Объем первого шара в 2197 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Решение. Объемы шаров соотносятся как $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 2197,$ откуда $\frac{R_1}{R_2} = 13.$ Площади их поверхностей соотносятся как $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 169.$

Ответ: 169.

10. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Решение. Объем данной части конуса равен:
$$\frac{270^\circ}{360^\circ}V_{\text{кон}} = \frac{3}{4}V_{\text{кон}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{4}\cdot 9^2\cdot 12\pi = 243\pi.$$

Ответ: 243.

11. Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.

Решение. Площадь большого круга равна πR^2, где R – радиус шара, а площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$ – в 4 раза больше. Следовательно, искомая площадь равна 6.

Ответ: 6.

12. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π, а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.

Решение. Поскольку $S_{\text{бок}} = 2\pi Rh,$ имеем: $h = \frac{S_{\text{бок}}}{2\pi R} = \frac{S_{\text{бок}}}{\pi D} = \frac{40\pi}{5\pi} = 8.$

Ответ: 8.

13. Высота конуса равна 12, а диаметр основания равен 10. Найдите образующую конуса.

Решение. Образующая конуса по теореме Пифагора равна:
$$l = \sqrt{h^2 + R_{\text{осн}}^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{D_{\text{осн}}}{2}\right)^2} = \sqrt{144+25} = 13.$$

Ответ: 13.

14. Объем шара равен 18 432 π.Найдите площадь его поверхности, деленную на π.

Решение. Объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 18432\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 512} = 24.$

Площадь его поверхности: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 24^2 = 2304 \cdot \pi.$

Ответ: 2304.

15. В цилиндрический сосуд налили 1000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 20 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 4 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.

Решение.

По закону Архимеда объем детали равен объему вытесненной ею жидкости. Объем вытесненной жидкости равен 4/20 исходного объема, следовательно $V_{\text{дет}} = \frac{4}{20} \cdot 1000 = 200 \quad \text{см}^3.$

Ответ: 200.

<u>*Задания для самостоятельного решения.*</u>

1. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

2. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ дайте в сантиметрах.

3. Дано два шара. Радиус первого шара в 45 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

5. Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 15 и 45, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

6. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в десять раз?

7. Радиусы двух шаров равны 21 и 72. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

8. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 5 раз, а радиус основания останется прежним?

9. Площадь осевого сечения цилиндра равна 9. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

10. Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 17 раз, а высота останется прежней?

11. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите полную площадь поверхности призмы и ее объем, если длина бокового ребра равна 4.

12. Свинцовый прямоугольный параллелепипед переплавили в куб. Найдите ребро куба, если ребра параллелепипеда были равны 1, 3 и 9.

13. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 3.

14. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 10, а сторона основания равна 12.

15. Цилиндр получен в результате вращения квадрата со стороной $a = 3$ вокруг одной из его сторон. Найдите полную площадь поверхности цилиндра и его объем.

16. Конус получен в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг большего катета. Найдите полную площадь поверхности конуса и его объем.

17. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала анализа. 8–11 классы. Пособие для классов с углубленным изучением математики. – Звавич, Л.И. – 2002г. https://www.math–solution.ru/books/6173

2. Геометрия. 8–11классы. Пособие для классов с углубленным изучением математики. – Звавич, Л.И. – 2000г. https://www.math–solution.ru/books/6240

3. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы (с решениями и ответами) – Райхмист, Р.Б. – 2007г. https://www.math–solution.ru/books/6298

4. Математика I. Вводно-предметный курс. Рабочая тетрадь. УМП. – Казань: Изд-во К(П)ФУ, – 2017г., – 83 с.

5. https:// math–vpr.sdamgia.ru/

6. https://math–oge.sdamgia.ru/

7. https://math–ege.sdamgia.ru/

РУССКО–АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ

А	
абсци́сса	*abscissa, x−coordinate*
алгебраи́ческий	*algebraic(al)*
алфави́т	*alphabet*
арифмети́ческий	*arithmetical*
Б	
бесконе́чный	*infinite*
бо́льше	*greater, more*
большо́й	*big, large*
бу́ква	*letter*
бу́квенный	*in letters, lettered*
быва́ть / быть	*be*
В	
в	*in, at, into, to*
в ви́де	*as, in the form*
величина́	*quantity, value*
ве́рный	*correct, right*
вид	*form, mode*
внесе́ние	*entering*
вноси́ть / внести́	*enter, put on*
возведе́ние	*exponentiation, raising*
возводи́ть / возвести́ (в степень)	*raise (to power)*
вопро́с	*question*
восемна́дцать	*eighteen*
во́семь	*eight*
во́семьдесят	*eighty*
восемьсо́т	*eight hundred*
всё	*all*
вставля́ть / вста́вить	*put*
второ́й	*second*
входи́ть	*enter*
вынесе́ние	*taking−out*
выноси́ть / вы́нести	*take out, factor out*
выпи́сывать / вы́писать	*extract*
выполня́ть / вы́полнить	*act, accomplish, perform*
выража́ть / вы́разить	*express*
выраже́ние	*expression*
выска́зывание	*sentence*

вы́учить	*learn*
вычисля́ть / вы́числить	*calculate, find, determine*
вычита́емое	*subtrahend*
вычита́ние	*subtraction*
Г	
где	*where*
группиро́вка	*classification, breakdown*
Д	
дано́	*given*
два	*two*
два́дцать	*twenty*
двена́дцать	*twelve*
две́сти	*two hundred*
девяно́сто	*ninety*
девятна́дцать	*nineteen*
де́вять	*nine*
девятьсо́т	*nine hundred*
де́йствие	*operation, rule*
действи́тельный	*real*
де́лать / сде́лать	*make, do*
деле́ние	*division*
дели́мое	*dividend*
дели́тель	*divisor*
десятиты́сячный	*ten−thousandth*
десятичный	*decimal*
десять	*tenth*
джоуль	*joule*
до	*to*
дописывать/дописать	*finish, write*
дополнять/дополнить	*add*
дробь	*fraction*
Е	
единственный	*sole, singular*
если…, то	*if … so*
З	
за	*behind, out*
задание	*task*
задача	*problem, example*
заканчивать/закончить	*end, finish, complete*

записывать/записать	*put down, record, write down*
запись	*recording, writing*
заполнять/заполнить	*fill in, complete*
запоминать/запомнить	*store, memorize*
Земля	*Earth*
знак	*sign, symbol, digit*
знаменатель	*denominator*
знать	*know*
значение	*value*
значить	*signify*
И	
и	*and*
и так далее	*and so on, and so forth, etc.*
из	*from, of, out of*
извлекать/извлечь	*extract*
изменяться/измениться	*change*
изображать/изобразить	*represent*
из−под	*from under*
или	*or*
иметь	*have*
интервал	*interval*
информация	*information*
иррациональность	*irrational, surd*
иррациональный	*irrational*
использовать	*use*
их	*their*
К	
к	*to*
каждый	*each, every*
как	*as, like*
какой	*what sort of, what*
квадрат	*square*
квадратный	*square, quadratic*
киловатт−час	*kilowatt−hour*
километр	*kilometer*
когда	*when*
компонент	*component*
конечный	*finite*

координата	*coordinate*
координатный	*coordinate*
корень	*root*
который	*which, that*
коэффициент	*coefficient*
кроме	*except*
куб	*cube*
кубический	*cubic, cube*
Л	
латинский	*Roman, Latin*
лежать	*lie*
любой	*any, every*
М	
маленький	*small*
меньше	*less*
минус	*minus*
многочлен	*polynomial*
множество	*set*
множитель	*multiplier, factor*
модуль	*modulus, magnitude, absolute value*
можно	*one can*
мочь	*be able*
Н	
на	*by, into*
над	*over, above*
надо	*it is necessary, must, need*
название	*name, title*
называть/назвать	*call, name*
называться	*call, name*
наибольший	*the greatest*
наизусть	*by heart*
найти	*find, evaluate*
например	*for example*
натуральный	*natural*
начало	*origin, beginning*
не	*not*
нельзя	*it is impossible*
неполный	*incomplete*
неправильный	*improper*

несколько	*several*
нет	*there is no, there are no*
нечётный	*uneven*
никакой	*no*
нужный	*necessary, need*
нулевой	*zero*
нуль	*naught, zero, cipher*
О	
область	*domain, interval*
обозначать/обозначить	*denote, designate, express*
обозначаться	*denote, designate, express*
обозначение	*designation, denotation, indication*
образец	*sample, specimen*
образовывать/образовать	*form, produce*
обратно	*back, backwards, inversely*
общий	*common*
объединение	*unification*
объяснять/объяснить	*explain*
один	*one*
один и тот же	*the same*
одинаковый	*identical, the same*
одиннадцать	*eleven*
одночлен	*monomial*
означать	*mean*
он	*he (it)*
она	*she (it)*
они	*they*
описывать/описать	*describe*
определение	*definition*
определять/определить	*define*
ордината	*ordinate*
освобождать/освободить	*eliminate, get rid of, clear*
освобождение	*evolution, extraction*
основание	*base*
основной	*principal, main*
остальной	*the rest of*
ось	*axis*
от	*from*

отвечать/ответить	*answer, reply*
отличаться	*differ*
отмечать/отметить	*mark, record*
отношение	*ratio, proportion*
отрезок	*interval, segment, section*
отрицательный	*negative*
П	
пара	*pair*
первый	*first*
переменная (величина)	*variable (quantity)*
переменный	*variable*
пересечение	*intersection, crossing*
периодический	*periodic*
писать/написать	*write*
плоскость	*plane*
плюс	*plus*
по	*by, according*
повторять/повторить	*repeat*
под	*into, under*
подкоренной	*radical*
подмножество	*subset*
подобный	*similar*
показатель	*exponent, index*
положительный	*positive*
полуинтервал	*semi−interval*
полупрямая	*semi−straight line*
полупрямой	*semi−straight*
получаться/получиться	*receive, derive*
понятие	*idea, concept*
постоянный	*constant*
почему	*why*
правильно	*rightly, correctly*
правильный	*correct, proper, exact*
предложение	*sentence*
представлять/представить	*represent*
при	*by, when*
приблизительно	*about, around, approximately*
приведение	*reduction*
приводить/привести	*reduce, transform*

пример	*example*
принадлежать чему	*belong*
проверять/проверить	*test, check*
продолжать/продолжить	*go on, continue*
произведение	*product*
промежуток	*interval, spacing*
противоположный	*opposite, reverse*
прямая	*straight line*
прямой	*straight*
прямоугольный	*right−angled*
пустой	*sine−less*
пятнадцать	*fifteen*
пять	*five*
пятьдесят	*fifty*
пятьсот	*five hundred*
Р	
равен	*equal*
равенство	*equality*
равно	*equal, be, make*
равный	*equal*
разделить	*divide*
разлагать/разложить	*factor, disintegrate*
разложение	*factorization, factoring*
разность	*difference*
разный	*different, distinct*
рассматривать/рассмотреть	*consider*
расстояние	*distance*
рациональный	*rational*
результат	*result*
решать/решить	*solve*
решение	*solution, answer*
рисунок	*drawing*
С	
с	*with*
свойство	*property*
семнадцать	*seventeen*
семь	*seven*
семьдесят	*seventy*
семьсот	*seven hundred*
символ	*symbol*

симметрический	*symmetrical*
система	*system*
сказать	*tell*
скобка	*bracket*
сколько	*how much*
слагаемое	*item*
следующий	*following, next*
слово	*word*
сложение	*addition, composition*
слушать	*listen*
смешанный	*mixed*
смотреть	*look, take notice*
смысл	*sense, meaning*
содержать	*contain, involve*
содержаться	*contain, involve*
сокращать/сократить	*reduce, cancel out, divide out*
сокращение	*reduction*
сокращённый	*reduced, cancelled*
Солнце	*sun*
сомножитель	*factor, cofactor*
соответствовать	*correspond*
сорок	*forty*
составлять/составить	*form, set up, add up to*
состоять	*consist*
сотый	*hundredth*
способ	*way*
сравнение	*comparison*
сравнивать/сравнить	*compare*
ставить/поставить	*put, state*
степень	*power, degree*
сто	*hundred*
стотысячный	*hundred−thousandth*
сумма	*sum, total*
существовать	*be*
схема	*scheme, pattern*
Т	
таблица	*table*
так	*so*
текст	*text*

тема	*theme, subject*
тогда	*then*
тождество	*identity*
только	*only*
точка	*point*
три	*three*
тридцать	*thirty*
тринадцать	*thirteen*
триста	*three hundred*
тысяча	*thousand*
тысячный	*thousandth*
У	
удвоенный	*double, twice*
указывать/указать	*indicate, show*
уменьшаемое	*minuend*
умножать/умножить	*multiply*
умножение	*multiplying, multiplication*
упрощать/упростить	*simplify*
условие	*condition*
устанавливать/установить	*establish, lay down, prescribe, setup*
утверждение	*contention, statement*
утроенный	*tripled, treble*
Ф	
формула	*formula*
формулировать/сформулировать	*enunciate, formulate, state*
Ц	
целый	*whole, integer*
цифра	*numeral, cipher*
Ч	
час	*hour*
частное	*quotient*
чётный	*even*
четыре	*four*
четыреста	*four hundred*
четырнадцать	*fourteen*
числитель	*numerator*
число	*number*
числовой	*numerical*
читать/прочитать	*read*

член	*term*
чтение	*reading*
что	*what*
что (союз)	*that*
чтобы	*that*
Ш	
шестнадцать	*sixteen*
шесть	*six*
шестьдесят	*sixty*
шестьсот	*six hundred*
Э	
элемент	*element*
энный	*nth, unspecified*
эрг	*erg*
это	*that, this, it*
этот	*this*
Я	
являться	*be*

Д.Ю. Сулейманова

ПРАКТИКУМ
ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ УЧАЩИХСЯ

Учебное пособие

Подписано в печать 21.11.2024.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 16,5.

ООО «Русайнс».
117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.
Тел.: +7 (495) 741-46-28.
E-mail: autor@ru-science.com
http://ru-science.com