3.4 Метод Фурье для неоднородных гиперболических уравнений с неоднородными граничными условиями

Рассматривается задача

$$u_{tt} = a^2\, u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{3.28}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l, \end{cases} \tag{3.29}$$

и граничными условиями одного из трех видов (везде $t > 0$)

$$\text{I.} \begin{cases} u(0,t) = \mu_0(t), \\ u(l,t) = \mu_l(t), \end{cases} \text{II.} \begin{cases} u_x(0,t) = \mu_0(t), \\ u(l,t) = \mu_l(t), \end{cases} \text{III.} \begin{cases} u(0,t) = \mu_0(t), \\ u_x(l,t) = \mu_l(t). \end{cases} \tag{3.30}$$

Будем искать решение задач (3.28)–(3.30) в виде

$$u(x,t) = z(x,t) + s(x,t), \tag{3.31}$$

где z – произвольная гладкая функция, удовлетворяющая граничным условиям вида (3.30), т.е.

$$\text{I.} \begin{cases} z(0,t) = \mu_0(t), \\ z(l,t) = \mu_l(t), \end{cases} \text{II.} \begin{cases} z_x(0,t) = \mu_0(t), \\ z(l,t) = \mu_l(t), \end{cases} \text{III.} \begin{cases} z(0,t) = \mu_0(t), \\ z_x(l,t) = \mu_l(t). \end{cases} \tag{3.32}$$

Очевидно, проще всего искать функцию z в виде $z(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t)$, где функции α, β находятся из условий (3.32). При этом $z_{xx} = 0$. После несложных выкладок получаем

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & z(x,t) = (\mu_l(t) - \mu_0(t))x/l + \mu_0(t); \\ \text{II.} & z(x,t) = \mu_0(t)(x-l) + \mu_l(t); \\ \text{III.} & z(x,t) = \mu_l(t)x + \mu_0(t). \end{array}$$

Подставляя (3.31) в (3.28)–(3.30), получаем, что s есть решение задачи

$$\begin{cases} s_{tt} = a^2\, s_{xx} + \overline{f}(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = \overline{\psi}(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

где $\overline{f}(x,t) = f(x,t) - z_{tt}(x,t)$, $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - z(x,0)$, $\overline{\psi}(x) = \psi(x) - z_t(x,0)$, т.е. s есть фактически решение задачи (3.15).

В качестве примера рассмотрим задачу по сказке А.С. Пушкина "О попе и его работнике Балде"

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \sin(t), \quad u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Имеем $z(x,t) = \sin(t)$, а значит, $\overline{f}(x,t) = \sin(t)$, $\overline{\varphi}(x) = 0$, $\overline{\psi}(x) = -1$.

Будем искать решение задачи (3.33) в виде $s(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где v – решение задачи

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_t(x,0) = -1, & 0 < x < 1, \\ v(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.35}$$

Тогда w – решение задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + \sin(t), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ w(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ w_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ w(0,t) = 0, \quad w_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.36}$$

Решение v задачи (3.35) имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\, X_n(x)\,, \tag{3.37}$$

где

$$X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right),\ \sqrt{\lambda_n} = \frac{(2n-1)\pi}{2}\,,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$T_n(t) = B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} t\right),$$

$$B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} = -\frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} \int\limits_0^1 \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\, dx = \frac{2}{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} t)\Big|_0^1 = -\frac{2}{\lambda_n}\,.$$

Далее,

$$f_n(t) = 2\sin(t) \int\limits_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_n} x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\, \sin(t).$$

поэтому решение задачи (3.36) есть

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t)\, X_n(x)\,,$$

где

$$w_n(t) = \frac{2}{\lambda_n}\int\limits_0^t \sin(\tau)\sin(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau))\,d\tau =$$

$$= \frac{2}{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\int\limits_0^t \sin(\tau)\cos(\sqrt{\lambda_n}\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{2}{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}t)\int\limits_0^t \sin(\tau)\sin(\sqrt{\lambda_n}\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\Bigg[\int\limits_0^t \sin(1+\sqrt{\lambda_n}\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \sin(1+\sqrt{\lambda_n}\tau)\,d\tau\Bigg] -$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}t)\Bigg[\int\limits_0^t \cos(1-\sqrt{\lambda_n}\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t \cos(1+\sqrt{\lambda_n}\tau)\,d\tau\Bigg] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\Bigg[\frac{1}{1+\sqrt{\lambda_n}}\cos((1+\sqrt{\lambda_n})\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{1-\sqrt{\lambda_n}}\cos((1-\sqrt{\lambda_n})\tau)\Big|_0^t\Bigg] -$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}t)\Bigg[\frac{1}{1-\sqrt{\lambda_n}}\sin((1-\sqrt{\lambda_n})t) - \frac{1}{1+\sqrt{\lambda_n}}\sin((1+\sqrt{\lambda_n})t)\Bigg] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\Bigg[\frac{1}{1+\sqrt{\lambda_n}}\cos((1+\sqrt{\lambda_n})t) + \frac{1}{1-\sqrt{\lambda_n}}\cos((1-\sqrt{\lambda_n})t)\Bigg] -$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}t)\Bigg[\frac{1}{1-\sqrt{\lambda_n}}\sin((1-\sqrt{\lambda_n})t) - \frac{1}{1+\sqrt{\lambda_n}}\sin((1+\sqrt{\lambda_n})t)\Bigg] -$$

$$-\frac{2}{\lambda_n(1-\lambda_n)}\sin(\sqrt{\lambda_n}t) =$$

$$= -\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\cos((1+\sqrt{\lambda_n})t) - \cos(\sqrt{\lambda_n}t)\sin((1+\sqrt{\lambda_n})t)}{\lambda_n(1+\sqrt{\lambda_n})} -$$

$$-\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\cos((1-\sqrt{\lambda_n})t) + \cos(\sqrt{\lambda_n}t)\sin((1-\sqrt{\lambda_n})t)}{\lambda_n(1-\sqrt{\lambda_n})} -$$

$$-\frac{2}{\lambda_n(1-\lambda_n)}\sin(\sqrt{\lambda_n}t) = \frac{\sin(t)}{\lambda_n(1+\sqrt{\lambda_n})} - \frac{\sin(t)}{\lambda_n(1-\sqrt{\lambda_n})} -$$

$$\frac{2}{\lambda_n(1-\lambda_n)}\sin(\sqrt{\lambda_n}t) = -\frac{2(\sqrt{\lambda_n}\sin(t)+\sin(\sqrt{\lambda_n}t))}{\lambda_n(1-\lambda_n)}\,.$$

Итак,

$$u(x,t) = \sin(t) + \sum_{n=1}^{+\infty}[T_n(t)+w_n(t)]X_n(x)\,.$$

Примеры для самостоятельного решения.

Пример 3. Решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(x,0) = 0, & 0<x<1,\\ u_t(x,0) = 0, & 0<x<1,\\ u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 2\sin(t^2/2), & t>0. \end{cases} \tag{3.38}$$

Пример 4. Решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(x,0) = 0, & 0<x<1,\\ u_t(x,0) = 0, & 0<x<1,\\ u(0,t) = \sin(\pi t), \quad u(1,t) = \cos(\pi t)+1, & t>0. \end{cases} \tag{3.39}$$