

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**  
*Кафедра радиоэлектроники*

**Е.А. МАРФИН, М.Н. ОВЧИННИКОВ**

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН  
В ГАЗАХ, ЖИДКОСТЯХ, ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И  
НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

**Учебно-методическое пособие**

**Казань – 2025**

УДК 532.5  
ББК 22.253, 22.311  
М25

*Принято на заседании Учебно-методической комиссии  
Института физики КФУ  
Протокол № 09 от 09 июня 2025 года*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник лаборатории подземной гидродинамики  
ФИЦ КазНЦ РАН **П.Е. Морозов;**  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры математических методов в  
геологии КФУ **М.Г. Храмченков**

**Марфин Е.А., Овчинников М.Н.**

**Распространение упругих волн в газах, жидкостях, твердых телах и насыщенных пористых средах:** учебно-методическое пособие /  
Е.А. Марфин, М.Н. Овчинников – Казань: Казанский федеральный университет, 2025. – 102 с.

В данном учебно-методическом пособии дается изложение теории распространения упругих волн в различных средах. Рассматриваются основные законы и уравнения, описывающие этот процесс, приводятся примеры решения задач. Данное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Радиофизика», а также для иных студентов физико-математических и технических специальностей, обучающихся по направлениям, связанным с механикой и акустикой, и может быть полезно для специалистов в этих областях.

© Марфин Е.А., Овчинников М.Н., 2025  
© Казанский федеральный университет, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Краткий очерк об истории акустики	5
1.1. Излучение звука	5
1.2. Распространение звука	17
1.3. Регистрация звука	29
1.4. Лорд Релей и современная акустика	35
1.5. Контрольные вопросы	39
2. Основы теории распространения упругих волн	41
2.1. Акустические волны в жидкостях и газах	41
2.2. Акустическое волновое уравнение	43
2.3. Представления волнового уравнения в различных системах координат	47
2.4. Затухание акустических волн	49
2.5. Отражение и преломление акустических волн	51
2.6. Энергия акустических волн	52
2.7. Акустический импеданс и электроакустическая аналогия	54
2.8. Излучение звука	55
2.9. Характеристики излучателей	57
2.10. Радиационное давление	64
2.11. Контрольные вопросы и задания	65
3. Упругие волны в твердых телах	68
3.1. Скорость продольных и сдвиговых волн	72
3.2. Распространение акустических волн на границе раздела твердых тел	74
3.3. Поверхностные акустические волны	78
3.4. Контрольные вопросы и задачи	81
4. Упругие волны в насыщенных пористых средах	83
4.1. Уравнения Гассмана	84
4.2. Основы теории Френкеля-Био-Николаевского	88
4.3. Контрольные вопросы и задания	90
Список использованных источников	92
Приложение. Примеры решения задач	93

## **ВВЕДЕНИЕ**

Акустика – раздел физики, изучающий звуковые волны, включая их возбуждение, распространение, прием и взаимодействие с окружающей средой. Главной характеристикой звуковых волн, которая отличает их от других типов волн, таких как электромагнитные или гравитационные, является то, что они могут распространяться только в упругой среде. Звук распространяется в атмосфере, под водой, под землей, в биологических средах и различных материалах. Среди различных типов волн звук – единственный, способный распространяться в земных структурах и под водой без значительного затухания. Это делает его бесценным инструментом в изучении горных пород и мирового океана.

Термин «звук» обычно используется для описания того, что мы слышим. Диапазон слышимых частот звука простирается от 20 Гц до 20 кГц. Звуковые волны, частота колебаний которых выходит за пределы указанного диапазона, получили свои названия. Термин «ультразвук» используется для описания звуковых волн с частотой колебаний от 20 кГц до 100 МГц. Волны в более высоком диапазоне частот классифицируются как гиперзвуковые. Звуковые волны с частотами ниже 20 Гц называются инфразвуком.

Упругим колебаниям, как и для электромагнитных волн, присущи задачи распространения, преломления, рассеяния, излучения и т.д. В этом учебно-методическом пособии разбираются вопросы распространения акустических колебаний в различных средах, включая жидкости, газы, твердые тела и пористые среды.

Пособие подготовлено в рамках гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан» (соглашение №71/2024-ПД).

# 1. КРАТКИЙ ОЧЕРК ОБ ИСТОРИИ АКУСТИКИ

Акустика является одной из древнейших областей науки и берет свое начало с необходимости объяснить явления слуха и речи, и в особенности музыкальные звуки и инструменты. Краткую историю зарождения акустики как науки [1] рассмотрим с трех сторон: 1) излучение звука, 2) распространение звука и 3) регистрация звука.

## 1.1. Излучение звука

Тот факт, что при ударе по твердому телу издается звук, должен был наблюдаться с самых древних времен. При определенных обстоятельствах производимые таким образом звуки были особенно приятны для слуха, и это послужило основой для создания музыки, которая должна была возникнуть задолго до начала письменности. При этом она также была тесно связана с приятными звуками, издаваемыми ртом человека. Музыка была искусством на протяжении тысячелетий, и ее природа начала изучаться научными методами. Принято считать, что Пифагор (570-490 до н.э.), основавший свою школу в Кротоне на юге Италии в VI веке до нашей эры, был первым философом, изучавшим происхождение музыкальных звуков. Предполагается, что на него произвел впечатление тот факт, что из двух натянутых струн, закрепленных на концах, нота более высокого тона издается более короткой струной. Представляется очевидным, что зародыш идеи о том, что высота звука каким-то образом зависит от частоты вибраций звукового объекта, был в умах философов пифагорейской школы, таких как Архит из Тарента в Италии, который процветал около 375 г. до н.э. Довольно ясное изложение этой точки зрения можно найти в сочинениях о музыке римского философа Боэция, написанных в VI веке нашей эры.

Современное научное обоснование этого отношения принято искать у Галилео Галилея (1564-1642). В «*Dialogues concerning Two New Sciences*» великого итальянца, впервые опубликованных в 1638 г., есть дискуссия о вибрациях тел. Начинается она с известных наблюдений над изохронностью простого маятника

(в которых Галилей совершает ошибку, простительную в свое время, о том, что период маятника не зависит от амплитуды, какой бы большой она ни была) и зависимости частоты колебаний от длины подвеса. Далее автор описывает явление резонанса, с помощью которого вибрация одного тела может вызвать аналогичную вибрацию в другом удаленном теле. Он рассматривает общепринятые представления об отношении высоты тона колеблющейся струны к ее длине и высказывает мнение, что физический смысл этого соотношения следует искать в числе колебаний в единицу времени, т.е. в том, что мы называем частотой. Галилей утверждал, что его мнение об этом было подтверждено двумя наблюдениями. Первым был стеклянный кубок, поставленный дном на дно большого сосуда и наполненный водой почти до краев кубка. Потерев край кубка пальцем, можно заставить кубок вибрировать и издавать звук. В то же время наблюдается рябь, бегущая по поверхности воды. И когда случается, что нота из кубка поднимается на октаву по высоте, рябь на воде «делится надвое», т.е. то, что мы называем длиной волны, уменьшается вдвое. Второе наблюдение было результатом несчастного случая, когда он случайно поцарапал медную пластину железным зубилом, чтобы удалить с нее несколько пятен. Время от времени скрежет сопровождался резким свистящим звуком определенного музыкального характера. При этом он всегда наблюдал длинный ряд параллельных тонких полос на поверхности меди, равноудаленных друг от друга. Кроме того, он заметил, что высота свистящей ноты может быть увеличена за счет увеличения скорости скребка, и в этом случае разделение полос уменьшилось.

Галилей утверждал, что он мог настраивать струны спинета (музыкального инструмента, разновидность клавесина), с помощью таких тонов и обнаружил, что, когда музыкальный интервал между двумя такими струнами оценивался на слух как квинта, средние расстояния между линиями на медной пластине для соответствующих скребковых тонов были в соотношении три к двум. При внимательном прочтении трудов Галилея становится ясно, что он имел четкое представление о зависимости частоты натянутой струны от длины, натяжения и плотности, хотя большая часть его знаний, несомненно, была получена от

предшественников. Он провел интересное сравнение между колебаниями струн и маятников, пытаясь понять, почему звуки определенных частот, т.е. такие, частоты которых находятся в соотношении двух малых целых чисел, кажутся уху приятными сочетаниями, в то время как другие, не обладающие этим свойством, звучат диссонансно. Галилей заметил, что набор маятников разной длины, колеблющихся вокруг общей оси и рассматриваемых в исходной плоскости, представляет для глаза (по крайней мере, для его глаза) приятную картину, если их частоты просто соизмеримы, в то время как в противном случае он образует сложную мешанину. Надо признать, что это кинематическое наблюдение большой изобретательности легло в основу наводящей на размышления аналогии.

Следует иметь в виду, что история науки, как и всякая история, в значительной степени зависит от историка. Поэтому неудивительно, что достижения Галилея в акустике были поставлены под сомнение. Так, американский математик и историк науки Клиффорд Трусделл (1919-2000) в своей «*The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies; 1638-1788*» высказывает мнение, что значение вклада Галилея в механику вибрации преувеличено. Он указывает на то, что несколько исследователей пришли к фундаментальным идеям, которые так увлекательно выражает Галилей. Француз Исаак Бекман (1588-1637), по-видимому, много думал о вибрации струн и уже в 1618 году напечатал некоторые из своих рассуждений. В них он проявил свою уверенность в связи между высотой тона и частотой и привел аргументы в ее пользу. Ему обычно приписывают посвящение Рене Декарта (1596-1650) в изучение физики. Еще раньше Бекмана был итальянец Джованни Баттиста Бенедетти (1530-1590), который в работе о музыкальных интервалах, опубликованной в Турине в 1585 году, уверенно заявил о равенстве между соотношением высот и отношением частот вибрирующих движений, соответствующих излучению звуков. Более сложными были исследования французского монаха Марена Мерсенна (1588-1648). В 1625 году Мерсенн опубликовал некоторые результаты, полученные им в результате экспериментального наблюдения колебаний натянутой струны. Он показал, что при прочих равных условиях частота колебаний обратно пропорциональна длине струны и

прямо пропорциональна квадратному корню из площади поперечного сечения. Трусделл считает, что Мерсенн определенно превзошел Галилея в этих важных выводах о вибрирующих струнах.

Человеком, который провел наиболее тщательное исследование связи частоты с высотой тона, несомненно, был француз Жозеф Совёр (1653-1716). Он может претендовать на то, что первым предложил применить название «*акустика*» к науке о звуке. Хорошо известно, что этот термин происходит от греческого слова, означающего «слышать», и поэтому в определенной степени уместен, хотя современная акустика намного превосходит звуки, которые мы можем слышать. Совёр знал о значении биений, которые наблюдаются при совместном звучании двух органичных труб (или подобных источников звука) немного разных высот. В частности, он экспериментально обнаружил, что при совместном звучании трубы дают шесть ударов в секунду. Рассматривая это число как разницу между частотами труб, Совёр пришел к выводу, что эти частоты этих труб составляют, 90 и 96 Гц соответственно.

Английский математик Брук Тейлор (1685-1731), автор теоремы Тейлора о бесконечных рядах, первым дал строгое динамическое решение колеблющейся струны. Его работа была опубликована в 1713 году и была основана на предполагаемой кривой для формы струны при вибрации в том, что мы сейчас называем ее фундаментальной модой (т.е. когда все части струны одновременно находятся по одну сторону от равновесного горизонтального положения). Эта кривая была принята так, что каждая точка одновременно достигала горизонтального положения. Выведя формулу для частоты собственных колебаний из уравнения этой кривой и уравнения движения Ньютона, он смог прийти к результату, который согласуется с экспериментальным законом Мерсенна и Галилея. Особенно интересно отметить, что, как указывал Трусделл, это, по-видимому, был первый случай, когда ньютоновское уравнение движения  $F=ma$  было применено к элементу сплошной среды. Несмотря на то, что Тейлор рассматривал только частный случай и не смог перейти к рассмотрению общей струны со всеми ее модами из-за отсутствия у него метода исчисления частных производных, он открыл путь для

более сложных математических методов швейцарцу Даниэлю Бернулли (1700-1782), французу Жану Лерону Д'Аламберу (1717-1783) и швейцарцу Леонарду Эйлеру (1707-1783). Этим ученым удалось составить дифференциальное уравнение движения колеблющейся струны в частных производных и решить его, по сути, современным способом. Здесь уместно задуматься о том, как отсутствие адекватных математических инструментов тормозило прогресс науки о звуке, так же как оно сдерживало прогресс механики в целом. К сожалению, ни метод флюксии Исаака Ньютона (1642-1727), ни дифференциалы барона Готфрида Вильгельма фон Лейбница (1646-1716) не были адекватны для обработки движений непрерывных сред.

Возвращаясь к физической стороне вопроса о вибрирующей струне как источнике звука, следует отметить, что уже было замечено, в частности, Джоном Уоллисом (1616-1703) в Англии, а также Совёром во Франции, что натянутая струна может вибрировать частями так, что в некоторых промежуточных точках, которые Совёр называл узлами, никакого движения никогда не происходит, в то время как очень сильное движение имеет место в промежуточных точках, называемых пучностями. Вскоре стало ясно, что такие колебания соответствуют более высоким частотам, чем те, которые связаны с простыми колебаниями струны в целом без узлов, и что эти частоты являются кратными частоте фундаментальной моды. Связанные с этим излучаемые звуки Совёр называл гармоническими тонами, а звук, соответствующий простой вибрации, назывался основным тоном. Совёр отметил еще один важный факт, что вибрирующая струна может издавать звуки, соответствующие нескольким ее гармоникам одновременно. Объяснение этому дал Даниэль Бернулли в своих знаменитых мемуарах для Королевской академии Берлина. Он показал, что струна может вибрировать таким образом, что одновременно присутствует множество простых гармонических колебаний, и что каждое из них независимо вносит свой вклад в результирующую вибрацию, причем смещение в любой точке струны в любой момент времени является алгебраической суммой перемещений, связанных с различными простыми гармоническими модами. Таким образом, Бернулли выдвинул знаменитый принцип

сосуществования малых колебаний, называемый принципом суперпозиции. Он попытался доказать правильность этого принципа, но ему это не удалось. Его понимание математики было не так велико, как понимание физики. Почти сразу же Эйлер указал на действительное значение принципа суперпозиции, а именно, что дифференциальное уравнение в частных производных, управляющее движением идеальной струны без трения, является линейным. Для такого понимания принцип суперпозиции может быть доказан в виде теоремы.

Вся история вибрирующей струны до 1785 года состоит из ряда споров, в которых гениальные исследователи, такие как Бернулли, Эйлер и Д'Аламбер, яростно спорили друг с другом в своих журнальных мемуарах. Они очень серьезно относились к своей работе и, к сожалению, не стеснялись очернять друг друга в довольно резких выражениях. Это был период, когда зарождалась математика, необходимая для описания движения сплошных сред, столь фундаментальная для прогресса акустики как точной науки, и труд был нелегким.

Возможность выражения какой-либо произвольной функции (например, начальная форма колеблющейся струны в терминах бесконечного ряда синусов и косинусов, вытекающих из теоремы о суперпозиции) была трудно применима с точки зрения математики середины XVIII века. Только в 1822 г. Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830) в своей аналитической теории теплоты обосновал свою знаменитую теорему об этом типе разложения, имевшем огромное значение для развития акустики. Среди математиков 18 века, занимавшихся проблемой вибрирующей струны, был Лагранж (1736-1813), итальянец из Турина, проведший большую часть своей активной карьеры во Франции. Он был автором трактата «*Mecanique analytique*», в котором механика была сведена к разделу математического анализа, и в предисловии к которому автор хвастался, что не включил никаких рисунков, так как в них нет необходимости. В обширных мемуарах, представленных Туринской академии в 1759 году, Лагранж решил принять то, что, по его словам, было другим и новым подходом к проблеме струн. Он предположил, что струна состоит из конечного числа равноудаленных частиц одинаковой массы, связанных между собой равными сегментами натянутой

невесомой струны. Затем он решил задачу о движении этой системы как динамической системы со многими степенями свободы и установил существование числа независимых частот, равного числу частиц. Когда он дошел до предела и допустил, чтобы число частиц стало бесконечно большим, а масса каждой из них соответственно малой (так что их сумма сравнялась с конечной массой струны), оказалось, что эти частоты в точности являются гармоническими частотами растянутой непрерывной струны. Лагранж чувствовал, что его устройство избежало аналитических трудностей, связанных с движением непрерывной струны, и что он сделал решительный шаг вперед. Здесь уместно сделать несколько замечаний. Во-первых, Эйлер уже в 1744 г. решил механическую задачу о движении  $n$  частиц по струне, где  $n$  – любое целое число, хотя ему и не удалось найти предел. Во-вторых, Трусделл указывал на то, что переход Лагранжа к пределу был математически ошибочным и, если быть строгим, требовал, по существу, тех же математических допущений, против которых он возражал при анализе своих современников, Бернулли, Эйлера и Д'Аламбера, для непрерывной струны. Как бы то ни было, метод Лагранжа был принят лордом Рэлеем (1842-1919) в его «*Theory of Sound*» и нашел свое отражение в большинстве современных текстов по механике и акустике. На самом деле, это не самый прямой способ обращения с вибрирующей струной, и, несомненно, Лагранж преувеличил значение своего достижения. Но достоинство его метода состоит в разнообразии, а это важно в науке: «Чем большим количеством способов мы можем рассматривать одно и то же явление, тем лучше мы его понимаем».

Д'Аламберу обычно приписывают то, что он был первым, кто разработал в 1747 г. дифференциальное уравнение в частных производных колеблющейся струны в форме, которую мы теперь называем волновым уравнением. Он также нашел ее общее решение в виде волн, распространяющихся в обоих направлениях вдоль струны. С этой точки зрения, колебания струны обусловлены сочетанием таких бегущих волн с образованием так называемых стоячих волн.

Не следует думать, что вибрирующая струна, какой бы важной она ни была, занимала все внимание ученых 18-го века. Их интересовали и другие

производящие звук движения. В мемуарах Лагранжа 1759 года, например, рассматриваются звуки, издаваемые органными трубами и музыкальными духовыми инструментами в целом. Основные экспериментальные факты были уже известны, и Лагранж смог теоретически предсказать приблизительные гармонические частоты закрытых и открытых труб. Граничные условия доставляли некоторые неприятности, как, впрочем, и до сих пор.

В небольшом трактате «*Physical Dissertation on Sound*», написанном в Базеле в 1727 году, когда Эйлеру было всего около двадцати лет, основные черты обертонов труб изложены им в основном в современной форме. Это было, конечно, гораздо раньше, чем отмеченные работы Лагранжа. В то время Эйлер особенно интересовался музыкальными инструментами, такими как флейта. Примерно в 1759 году Эйлер и Лагранж активно занимались звуковыми колебаниями в трубах. Около 1766 г. Эйлер написал сложный трактат по механике жидкости, четвертый раздел которого был целиком посвящен звуковым волнам в трубах. Сегодня трудно оценить то огромное рвение, с которым великие математики с механическим складом ума брались и решали подобные проблемы. Вряд ли будет преувеличением назвать этот период золотым веком математической физики.

Ученые-математики 18 века, конечно, понимали, что другие твердые тела, кроме струн, издадут звук при возмущении. Например, они, конечно, были знакомы с колокольчиками, и к тому времени должно было накопиться огромное количество эмпирических знаний об источниках звука такого рода. Но успешное применение математических методов к колебаниям металлических стержней, пластин и оболочек, естественно, требовало знания связи между деформацией твердого тела и действующей на него силой. К счастью, эта проблема уже была рассмотрена и решена в простейшей форме Робертом Гуком, который в 1660 г. открыл и в 1675 г. объявил в форме анаграммы CEIINNOSSSTTUV закон, который в латинской форме он выразил как «*ut tensio sic vis*», связывающий напряжение и деформацию для тел, подверженных упругим деформациям. В ней говорится, что в пределах так называемого предела упругости деформация упругого тела (т.е. дробное увеличение длины линейного стержня или стержня) прямо

пропорциональна напряжению (т.е. силе на единицу площади поперечного сечения стержня или стержня в направлении растяжения). Этот закон лежит в основе всей математической теории упругости, в том числе и упругих колебаний, порождающих звук. Его применение к колебаниям стержней, поддерживаемых и зажимаемых различными способами, по-видимому, было сделано еще в 1734-1735 гг. Эйлером и Бернулли. Используемые математические методы были позднее систематизированы и расширены лордом Рэлеем в его «*Theory of Sound*». Основная идея заключалась в том, чтобы начать с выражения для энергии деформированного стержня и использовать так называемый вариационный метод, который приводит к известному уравнению четвертого порядка в пространственных производных.

Соответствующее аналитическое решение для колебаний твердой упругой пластины оказалось гораздо более сложным и появилось значительно позже, хотя много полезной экспериментальной информации было получено во второй половине 18 в. немецким учёным Эрнстом Хладни (1756-1827). В 1787 году он опубликовал свой знаменитый трактат «*Entdeckungen über die Theorie des Klanges*», в котором описал свой метод использования песка, посыпанного на вибрирующие пластины. Хладни создавал свои вибрационные паттерны (узоры), «разбрасывая песок» по вибрирующей пластине, который затем собирался вдоль узловых линий (рис.1). Получаемые таким образом хладнинские фигуры были признаны предметами необычайной красоты. Позже он заметил, что тонкая стружка из волос его скрипичного смычка не следовала за песком к узлам, а собиралась у пучностей. Французский физик Феликс Савар (1791-1841) отметил такое же поведение для мелкодисперсного порошка ликоподиума, а Майкл Фарадей (1791-1867) объяснил это взаимосвязью с акустическими течениями.

Значительно позднее Мэри Д. Уоллер из Лондонской медицинской школы для женщин опубликовала несколько статей и книгу о паттернах Хладни, в которых отметила, что диаметр частиц должен превышать 100 мкм, чтобы собираться в узлах. В общем виде они могут быть объяснены соображениями, аналогичными тем, которые объясняют существование узлов в вибрирующей струне.

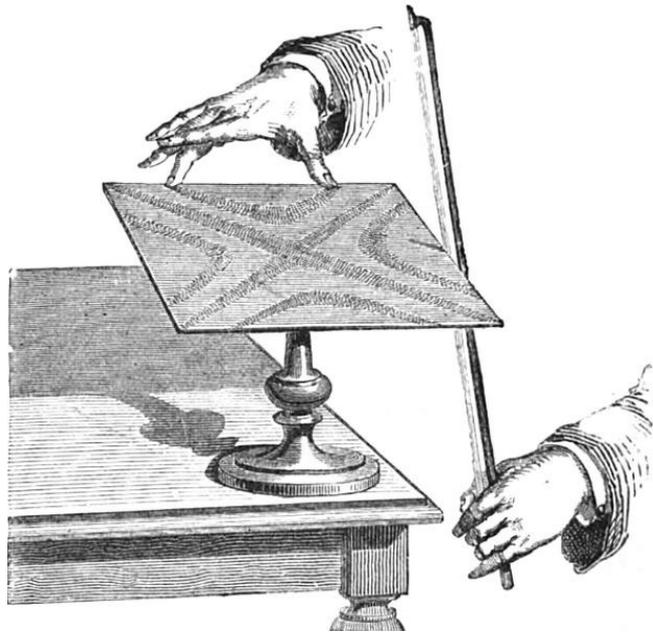


Рис.1. Способ получения фигур Хладни

Точные формы паттернов, однако, не поддавались анализу в течение многих лет, даже после публикации в 1802 году классического труда Хладни «*Die Akustik*». Император Наполеон любезно предложил премию в 3000 франков Институту Франции за удовлетворительную математическую теорию колебаний пластин. В 1815 году премия была присуждена известной женщине-математику Софи Жермен (1776-1831), которая успешно вывела правильное уравнение четвертого порядка. Однако ее выбор граничных условий мог быть не совсем точным. Только в 1850 г. Густав Кирхгоф (1824-1887) дал более точную теорию. Современные технологии, учитывающие влияние вибраций на конструкции (такие как фюзеляжи самолетов и другие элементы), стимулируют активные исследования колебаний пластин и твердых оболочек различной формы.

Первое решение аналогичной задачи о колебаниях гибкой мембраны, важное для понимания звуков, издаваемых барабанами, обычно приписывается французскому математику Пуассону (1781-1840), хотя ему не удалось завершить случай с круговой мембраной. Трусделл указал, что такое приписывание Пуассону пренебрегает очень важной работой Эйлера, выполненной на семьдесят лет раньше. Эйлер вывел соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных для вибрирующей мембраны и правильно выразил его как для

прямоугольной, так и для круглой формы, но допустил любопытную ошибку в задании граничных условий и, следовательно, не смог получить правильный ответ для нормальных мод (в два раза). Пуассон, по-видимому, никогда не был знаком с этой статьей Эйлера. Он получил правильные нормальные режимы для прямоугольной мембраны. Знаменательно, что большая часть теоретической работы по проблемам вибрации в XIX веке была проведена людьми, называвшими себя математиками. Это было естественно, так как большая часть применения математики того периода касалась физических задач такого рода, но это было также довольно неудачно, так как выбор граничных условий не всегда отражал экспериментально реализуемые ситуации.

Способность возбуждать вибрации в средах произвольного характера, размера, формы и с произвольной частотой в широком диапазоне должна была ожидать развития электроакустики, в значительной степени являющейся продуктом исследований 20-го века. Это правда, что электрические колебания и колеблющиеся электрические цепи были открыты и изобретены в середине 19-го века, но методы их соединения с механическими системами таким образом, чтобы заставить их производить механические колебания, возникли на практике только после 1900 года. В то время как камертоны оставались единственными практическими стандартами частоты для источников звука, большого прогресса в применении математической теории акустики к практическим случаям ожидать не приходилось. Основные физические принципы для этой цели были действительно хорошо известны в 19 веке. Так, сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, была открыта в 1820-х годах. Пьезоэлектрический эффект возник из опытов братьев Кюри в 1880 году. Это свойство, проявляемое некоторыми кристаллами (в частности, кварцем), иметь электрические заряды, возникающие на гранях при воздействии механических напряжений различного рода, и, наоборот, изменять размеры (т.е. проявлять деформацию) при помещении в электрическое поле. Рано было признано, что в этом заключается возможность создания как управляемых источников, так и приемников звуковых волн, но фактическое использование этого эффекта для этой цели произошло только во втором

десятилетия 20 века. Такая же ситуация сложилась и с магнестрикционным эффектом, т.е. тенденцией намагничиваемых материалов изменять размеры при помещении в магнитное поле. Это было открыто Ж. Джоулем (1818-1892) в 1842 году. Появление сперва лампового генератора и усилителя, а затем устройств на основе полупроводников, сделало возможным использование этих эффектов для излучения и приема звука на всех частотах и интенсивностях на прецизионной основе.

История излучения звука во многом отражает развитие электроакустики, и её основную часть мы оставим до конца этого очерка, где кратко рассмотрим вклад лорда Рэля и его последователей. Однако нельзя упустить один из ключевых механизмов звукообразования – голосовые связки, благодаря которым возникает человеческая речь, а также звуки, издаваемые животными. Примечательно, что, несмотря на очевидность этих примеров, исторически они получали мало внимания в научных исследованиях. Вероятно, причина в том, что речь интересовала скорее лингвистов, чем физиков и математиков, сосредоточенных на объективных физических аспектах звука. Её кажущаяся простота и связь с языком, возможно, отодвинули её в сферу филологии и этимологии, оставив за рамками «чистой» акустики.

В то же время основной механизм человеческой речи, т.е. сочетание вибрирующих голосовых связок и ротовых полостей, считался в значительной степени делом анатомов и физиологов. Во всяком случае, интересно отметить, что еще в 1629 г. англичанин У. Бабингтон наблюдал движения голосовых связок с помощью света, отраженного от зеркал во рту. Это было началом разработки того, что стало называться ларингоскопом, окончательно усовершенствованным чешским физиологом Я. Н. Чермацем в 1857 году. Примерно восемьдесят лет спустя Д.У. Фарнсуорт снял видео с голосовыми связками в *Bell Telephone Laboratories*.

Природа гласных звуков речи и пения была впервые тщательно исследована Германом фон Гельмгольцем (1821-1894) в 1860 году с использованием знаменитых резонаторов, носящих его имя. Его результаты были изложены в

трактате «*Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*», опубликованном в 1862 году. Это один из величайших шедевров акустики. Правда, более ранние исследования англичанина сэра Чарльза Уитстона (1802-1875) в 1837 г. привели к разработке гармонической теории для образования гласных звуков. В соответствии с этим голосовые связки вибрируют таким образом, чтобы создать как основную частоту, так и многочисленные гармоники. Предполагалось, что эти колебания при передаче в воздух усиливаются резонансом в ротовых полостях. Другая теория, впервые предложенная У.Т. Уиллисом в Англии в 1829 году, предполагала, что происхождение гласного звука заключается не в непрерывной вибрации голосовых связок, а скорее в выпускаемых ими воздушных потоках. Эти кратковременные затяжки вызывают вибрацию воздуха в ротовых полостях, и резонанс там придает издаваемому звуку характерное качество. Гельмгольц позже указывал, что в обеих идеях есть элементы правильности, и современные исследования подтвердили это мнение.

Некоторые ранние исследователи считали, что вся ротовая полость действует как единый резонатор, в то время как другие, в частности Александр Грейам Белл (1847-1922), изобретатель телефона, и сам фон Гельмгольц считали, что гласные звуки зависят от двух характерных резонансов, соответствующих действию рта как двойного резонатора, т.е. двух резонаторов, соединенных вместе. Гельмгольц указывает в своем знаменитом трактате, что знание о том, что полости рта могут быть настроены на различные частоты, восходят к началу 17-го века, хотя ясно, что в то время не существовало высокоразвитого инструментального изучения этого явления.

## **1.2. Распространение звука**

С самых ранних зарегистрированных наблюдений существовало общее согласие в том, что звук передается из одной точки пространства в другую посредством некоторой активности воздуха. Действительно, Аристотель (384-322 до н.э.) подчеркивает, что в действительности имеет место движение воздуха, и в описании в его трактате «*De Aina*» и в трактате «*De Audibilibus*», который часто

приписывается ему, можно прочесть представление о том, что звук возникает из-за волн сжатия в воздухе. Трудно быть уверенным в том, что Аристотель и его современники действительно поняли идею о том, что при распространении звука воздух не движется как единое целое, т.е. как поток, в направлении распространения. Кажется очевидным, что знаменитый римский инженер-архитектор Марк Витрувий Поллион, живший в первом веке до нашей эры, довольно хорошо разбирался в волновой теории звука, о чем свидетельствуют проведенные им аналогии с поверхностными волнами на воде. Тем не менее, учитывая, что воздух, по видимому, не движется при передаче звука, возможно, понятно, что другие, гораздо более поздние философы решили оспорить эти взгляды, выдвинутые Аристотелем и Витрувием. Так, французский ученый Пьер Гассенди (1592-1655) представил альтернативную версию распространения звука. Он предположил, что звуковые волны излучаются звучащим телом в виде потока очень маленьких невидимых частиц, которые затем движутся по воздуху и воздействуют на ухо. Отто фон Герике (1602-1686) выразил большое сомнение в том, что звук передается движением воздуха, заметив, что он передается лучше, когда воздух неподвижен, чем когда есть ветер. Более того, примерно в середине 17-го века он попробовал провести эксперимент по звону колокольчика в банке, воздух в которой был откачан с помощью насоса, и утверждал, что он все еще слышит этот звук.

На самом деле, первым, кто попробовал колокол в вакууме, был, по видимому, иезуит Афанасий Кирхер (1602-1680). Он описал эксперимент в своей книге «*Musurgia Universalis*», опубликованной в 1650 году, и пришел к выводу, что воздух не является необходимым для передачи звука. Несомненно, проблема с исследованиями фон Герике и Кирхера заключалась в том, что им не удалось избежать передачи вибрации через стенки сосуда в сочетании с довольно недостаточным вакуумом, который они смогли получить. В 1660 году Роберт Бойль (1627-1691) в Англии повторил эксперимент со значительно улучшенным воздушным насосом и более тщательными устройствами и наблюдал хорошо известное сейчас снижение интенсивности звука по мере откачки воздуха. Он определенно пришел к выводу, что воздух является средой для передачи звука, хотя,

по-видимому, не единственной. На самом деле, это объяснение эксперимента ошибочно. Более внимательное изучение ситуации показывает, что снижение интенсивности звука связано не столько с неспособностью воздуха низкого давления передавать звук, сколько с возрастающей трудностью вывода звука из колокола (или другого источника звука) в воздух, а затем снова из воздуха в стеклянную емкость. Так называемое рассогласование импеданса между источником и окружающей жидкой средой становится больше по мере уменьшения плотности среды. Конечно, эксперимент демонстрирует очень важную связь между источником и средой при распространении звука, а современная теория звука подразумевает, что для акустической передачи необходима некая материальная среда.

Если предположить, что воздух является средой, через которую передается звук, было бы интересно рассмотреть, с какой скоростью происходит это распространение? Было бы упущением с нашей стороны не упомянуть Пьера Гассенди (1592-1655), который, находясь в Париже, предпринял попытку измерить скорость звука в воздухе с помощью огнестрельного оружия. Он предположил, что свет вспышки передается мгновенно. Его значение оказалось равным 1473 парижским футам в секунду или 478,4 м/сек в более поздней терминологии метрической системы, которой, конечно, Гассенди не пользовался, так как она не была введена до времен Французской революции. Несколько позже, путем более тщательных измерений, Мерсенн показал, что цифра Гассенди была слишком высокой; его значение составляло 1380 парижских футов в секунду или около 450 м/сек. Гассенди отметил один важный факт: а именно, что скорость не зависит от высоты звука, тем самым дискредитируя точку зрения Аристотеля, который учил, что высокие ноты передаются быстрее, чем низкие. С другой стороны, Гассенди допустил ошибку, полагая, что ветер не влияет на измеренную скорость звука. В 1650 г. итальянец Борелли (1608-1679) и его коллега Вивиани (1622-1703) из Академии Чименто во Флоренции провели тот же эксперимент и получили 1077 парижских футов в секунду или 350 м/сек. Основным недостатком всех этих измерений было игнорирование таких параметров, как температура,

влажность и скорость ветра. В начале восемнадцатого века англичанин Дерхэм (1657-1735) проводил обширные измерения скорости звука (результаты опубликованы в 1708 году). Он пришел к выводу, что скорость звука зависит только от ветра и не зависит от других условий окружающей среды. Однако его вывод позже был оспорен итальянцем Бьянкони (1717-1781), который в 1740 году доказал, что скорость звука в воздухе увеличивается с ростом температуры.

Представляется вероятным, что самые первые измерения скорости звука в воздухе в безветренную погоду, которые можно было бы считать точным в современном смысле, были проведены Парижской академии наук в 1738 году с использованием пушки в качестве источника звука. При снижении до 0°C результат в современных единицах составил 332 м/сек. Тщательные повторения в течение двух последующих столетий дали результаты, отличающиеся от этого значения менее чем на 1%. Современное значение составляет  $331,45 \pm 0,05$  м/сек. Можно смело дать дань уважения той тщательности, с которой парижские академики выполняли свою работу. На самом деле, очень немногие ранние физические измерения выдержали испытание временем, так же, как и измерения скорости звука в воздухе.

Проблемой измерения скорости звука в твердых средах занялся Хладни, о чьих исследованиях узловых линий в вибрирующих пластинах уже упоминалось. Он использовал аналогичные приборы для изучения распространения звука в металлических стержнях и, измеряя внутримодальные расстояния, смог рассчитать скорость звука в этих образцах. Французский физик Жан Батист Био (1774-1862) провел в 1808 году в Париже фактические измерения скорости звука в железной водопроводной трубе по прямому хронометражу распространения звука. Длина трубы составила почти 1000 метров. Сравнивая соответственно время прихода данного звука через металл и воздух, он, в частности, установил, что скорость волны сжатия в твердом металле во много раз больше, чем в воздухе. Этого и следовало ожидать от гораздо большей упругости металла по сравнению с воздухом. Экспериментальные значения Био совпадали по порядку величин с показателями Хладни.

Первая серьезная попытка измерить скорость звука в такой жидкости, как вода, была предпринята швейцарским физиком Даниэлем Колладоном (1802-1893), который при содействии математика Шарля Штурма (1803-1855) провел исследования на Женевском озере в 1826 году. Кто-то может предположить, что Колладон был мотивирован просто любопытством к фактической скорости звука в озерной воде. Но это не так. В 1825 г. Академия наук в Париже объявила в качестве предмета конкурса на соискание премии 1826 г. измерение сжимаемости основных жидкостей. Колладон решил принять участие в соревнованиях и успешно измерил статическую сжимаемость воды и некоторых жидкостей. Он, должно быть, был несколько удивлен его относительно низким значением и, соответственно, большой обратной величиной – объемным модулем упругости. Он, конечно, знал о теоретической связи между сжимаемостью и скоростью звука. Поэтому сразу же было высказано предположение о том, что можно проверить точность измерений сжимаемости по скорости звука. Испытания были проведены на Женевском озере в ноябре 1826 года, а результаты появились в знаменитой *«Memoire sur la compression des liquides et la vitesse du son dans l'eau»*, которая была удостоена Гран-при конкурса Академии. Сжимаемость воды, вычисленная по скорости звука, оказалась очень близкой к статически измеренной величине. Вся история этого исследования Колладона и Штурма изложена в увлекательной форме в автобиографии *«Souvenirs et memoires: Autobiographie de J.-Daniel Colladon»*. В ней автор, проделавший эту работу, и стал впоследствии известным физиком и инженером, неформально рассказывает, как он это сделал, включая такие неприятные подробности, как трудности, с которыми он столкнулся, перевоза пороха, необходимый для его световых вспышек, через границу между Швейцарией и Францией. Средняя скорость, обнаруженная в этом измерении, составила 1435 м/сек при 8°C.

Хотя распространение звука в воздухе уже сравнивалось, как было замечено ранее, с движением ряби на поверхности воды, первая попытка разработать строгую математическую теорию звуковых волн была, по видимому, предпринята английским физиком Исааком Ньютоном (1642-1727).

Во второй книге своего знаменитого труда 1687 года «*Principia mathematica*» Ньютон сравнивает передачу звука с импульсами, производимыми вибрацией. Тело перемещает соседние части окружающей среды, а те, в свою очередь, перемещают соседние по отношению к себе и так далее. Затем Ньютон сделал несколько довольно произвольных предположений, главное из которых состояло в том, что, когда импульс распространяется через жидкость, частицы жидкости всегда движутся в простом гармоническом движении, или, как он выражается, «всегда ускоряются или замедляются в соответствии с законом колеблющегося маятника». Он действительно доказывает теорему о том, что если это верно для одной частицы, то она должна быть верна и для всех соседних. Не обязательно проходить полную демонстрацию, за которой всегда было трудно уследить. В результате скорость звука равна квадратному корню из отношения атмосферного давления к плотности воздуха.

Как и следовало ожидать, «вывод» Ньютона подвергся резкой критике со стороны натурфилософов континентальной Европы, среди которых были Эйлер, Джон Бернулли (младший брат Даниэля) и Лагранж. Мы уже комментировали трактат Эйлера «*Physical Dissertation on Sound*» 1727 года. В этой замечательной работе он с большой ясностью изложил свои идеи о физических принципах, лежащих в основе распространения звука, а также звукоизвлечения, и подверг критике метод Ньютона, назвав его слишком специализированным. Он представил выражение для скорости звука в воздухе, очень близкое к выражению Ньютона, хотя следует признать, что его метод не ясен. В более позднем трактате 1749 года Эйлер развил теорию Ньютона в гораздо более ясной аналитической форме и получил результат Ньютона.

Постепенно стало ясно, как отмечается в работе [1], «что проблема распространения звука никогда не будет полностью решена до тех пор, пока не будет установлено и решено волновое уравнение для звуковых волн в жидкости». Д'Аламбер впервые вывел волновое уравнение для непрерывной струны в 1747 году. Тогда же он предположил, что это же уравнение можно использовать применительно и к звуковым волнам. Однако далеко он не ушел с деталями, они

были разработаны Эйлером, который, по-видимому, в этом случае, как и в других задачах динамики твердого тела и жидкости, «знал все».

Претензии и контрпретензии, эпистолярная критика друг друга со стороны этих ревностных ученых XVIII века делают задачу изучения истории акустики увлекательной, но трудной. В трех всеобъемлющих трактатах, представленных в Берлинскую академию в 1759 году, Эйлер заложил основные принципы распространения звуковых волн в атмосфере. Примерно в то же время Лагранж в своих мемуарах, представленных в Туринскую академию, предпринял критический анализ рассуждений Ньютона и расширил их, включив в них динамику звуковых волн с произвольными характеристиками, отличных от простых гармонических волн. На самом деле, он пришел к тому же результату, что и Ньютон, для скорости звука в воздухе. Смотреть на это можно как на доказательство гениальности Ньютона или его удачи! Теоретический расчет скорости звука в газе составляет знаменитую главу в истории физики. Хорошо известно, что если подставить соответствующие данные для воздуха при 16,25 °C (60 °F) в уравнение Ньютона для скорости  $c = \sqrt{p / \rho}$  (где  $p$  – давление газа, а  $\rho$  – соответствующая плотность), то получится около 310 м/сек. Хотя это определенно ниже, чем результаты ранних парижских экспериментов, упомянутых выше. Ньютон сначала считал, что совпадение по порядку величины удовлетворительно. Однако, когда все более и более точные измерения подтверждали более высокое значение, Ньютон, очевидно, забеспокоился, и во втором издании (1713 г.) своей «*Principia mathematica*» пересмотрел свою теорию, чтобы попытаться добиться лучшего согласия с экспериментом. Очевидно, он чувствовал, что необходимо внести некоторую поправку на нечистоту воздуха.

По-видимому, больше ничего не было сделано для решения проблемы скорости звука до тех пор, пока Пьер Симон Лаплас (1749-1827) в 1816 г. не предположил, что в ньютоновских и лагранжевых определениях была допущена ошибка в использовании для объемной упругости воздуха (обратной сжимаемости) самого давления, что эквивалентно предположению, что упругие движения частиц воздуха происходят при постоянной температуре. Однако, принимая во

внимание быстроту движений, участвующих в прохождении звуковой волны, Лапласу казалось более разумным предположить, что сжатия и разрежения подчиняются закону адиабаты, т.е. тепло не имеет возможности выйти из сжатой области до того, как сжатие уступит место разрежению. Но в этом случае адиабатическая упругость выше изотермического значения в  $\gamma$  раз, где  $\gamma$  – отношение удельной теплоемкости газа при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. В соответствии с этим ходом рассуждений формула Ньютона должна быть изменена на  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ , так как  $\gamma > 1$  всегда, вновь вычисленная скорость звука обязательно будет больше старой и, следовательно, ближе к экспериментальной величине. В 1816 г., когда Лаплас выдвинул свою теорию, хотя существование двух удельных теплоемкостей газа было признано, величина  $\gamma$  не была известна очень точно. Используя значение 1,5 для воздуха, полученное экспериментаторами Ларошем и Бераром, Лаплас обнаружил, что  $c=345,9$  м/с при  $6^\circ\text{C}$ , по сравнению с лучшим экспериментальным значением 337,18 м/сек для этой температуры. Это было достаточно близко, чтобы Лаплас почувствовал, что он на правильном пути. Позже он вернулся к этой проблеме и включил главу о скорости звука в свою знаменитую «*Mecanique celeste*» (1825 г.). К этому времени известные тепловые экспериментаторы Клемент и Дезорм провели классический эксперимент по определению числа  $\gamma$  (1819 г.) и нашли значение 1,35, что дало 332,9 м/с для скорости звука при  $6^\circ\text{C}$ . Несколько лет спустя более точное значение 1,40 привело к полному согласию между теорией Лапласа и экспериментом. Эта теория в настоящее время настолько хорошо известна, что обычной практикой является определение  $\gamma$  для различных газов путем точных измерений скорости звука.

Во второй половине 18-го века и в первой четверти 19-го века были предприняты многочисленные попытки теоретизировать о волнах в сплошных средах, основанные в основном на общем решении волнового уравнения. Большое внимание, например, уделялось волнам на поверхности жидкостей, таких как вода. Эта работа имела ценность в связи с акустикой лишь постольку, поскольку

она приводила к повышению уверенности в применимости волнового уравнения к распространению звука в жидкостях. К 1800 году решение уравнения распространения воздушного звука в трубах с учетом граничных условий на концах было довольно хорошо установлено, и предсказанные гармонические частоты (нормальные или частичные) были проверены экспериментально с достаточной точностью. Действительно, существовали загадочные расхождения в деталях, которые не были полностью прояснены до тех пор, пока полвека спустя не были поняты «концевые поправки». Экспериментальные методы измерения звука в трубах долгое время оставались довольно примитивными. Лишь в 1866 г. А. Кундт (1839-1894) разработал простой, но эффективный метод с использованием пылевых фигур для экспериментального изучения распространения звука в трубах. В частности, предложен способ измерения скорости звука в воздухе и других газах по паттернам стоячей волны (узлам и пучностям).

Тем временем гораздо более трудная проблема распространения волны сжатия в трехмерной жидкой среде была поставлена Пуассоном в знаменитых мемуарах 1820 года. Тремя годами ранее в таких же пространственных мемуарах Пуассон изложил самую сложную на тот момент теорию передачи звука в трубах, включая теорию стационарных воздушных волн в трубах конечной длины, как открытых, так и закрытых. Он даже рассматривал возможность торцевой коррекции, чтобы учесть тот факт, что конденсация (дробное изменение плотности под действием звуковой волны) не может рассматриваться как точно равная нулю на открытом конце, в результате чего наблюдаемые резонансные частоты соответствуют длине, немного превышающей фактическую геометрическую длину трубки.

Однако Герману фон Гельмгольцу оставалось в 1860 г. дать более подробное рассмотрение всей этой проблемы. Частный случай резкого изменения поперечного сечения также был изучен Пуассоном, наряду с отражением и передачей звука при нормальном падении на границе двух различных жидкостей. Многие современные работы, имеющие практическое значение, были предвосхищены в этих великих мемуарах Пуассона.

Более сложная задача отражения и передачи плоской звуковой волны, падающей наискось на границу двух различных жидкостей, была решена гением-самоучкой Джорджем Грином (1783-1841) в 1838 году. В своих мемуарах он делал акцент на преломлении звука и подчеркивал как сходства, так и различия между отражением и преломлением звука и света. Следует напомнить, что звуковые волны в идеальных жидкостях, будучи строго сжатыми, являются продольными, тогда как световые волны – поперечными. Следовательно, световые волны могут быть поляризованы, в то время как звуковые волны в жидкостях не могут быть поляризованы в обычном смысле. С другой стороны, упругие волны в вытянутом твердом теле могут быть как продольными, так и поперечными. Это было осознано Пуассоном в его исследовании изотропных упругих сред в 1829 г. В то время казалось, что это не имело существенного значения для акустики. Однако это имело первостепенное значение для зарождающейся теории упругих твердых тел, которая активно развивалась в середине 19-го века. Эта ранняя работа, однако, приобрела новое и решающее значение в середине 20-го века из-за растущего интереса к распространению упругих волн в таких конструкциях, как фюзеляжи самолетов и космические ракеты. Очевидна также и связь с современной геофизикой (сейсмическими волнами).

В работе [2] отмечается, что «звуковые волны в природе распространяются по своеобразным каналам. Подводный звуковой канал был впервые обнаружен в нашей стране в 1946 году, когда ученые и военные провели эксперимент в Японском море с целью оценки возможностей акустической аппаратуры для измерения подводных звуковых волн после взрыва американской атомной бомбы на атолле Бикини. В ходе экспериментов регистрировалась интенсивность акустического сигнала, генерируемого при взрыве глубинных бомб, в зависимости от расстояния. Результаты эксперимента выявили неожиданный результат: на расстояниях, превышающих 50 км, зарегистрированные сигналы демонстрировали минимальные изменения с расстоянием, а звуки взрывов глубинных бомб были слышны даже на расстоянии 600 км уже после завершения эксперимента». Предполагалось, что на обширном пространстве океана, удаленном от береговой

линии, акустический сигнал будет распространяться сферически от точечного источника, которым могла быть глубинная бомба. В этом случае интенсивность звука должна быть обратно пропорциональна площади сферы, охватывающей источник. Следовательно, интенсивность должна уменьшаться обратно пропорционально квадрату расстояния, пройденного звуком.

Как было отмечено в работе [2]: «Научное объяснение этого интересного эффекта дал советский физик Л.М. Бреховских (1917-2005). Он заметил, что температура воды быстро понижается до глубины 100-200 м, после чего достигает постоянного значения около 4°C. Снижение температуры приводит к снижению скорости распространения звука, тогда как рост давления с глубиной приводит к ее увеличению. Следовательно, в зависимости скорости звука от глубины имеется минимум, на котором концентрируется акустическая энергия. То есть, если источник звука находится на глубине минимума скорости звука, то излучаемые звуковые лучи будут удерживаться вблизи этого минимума. Следовательно, часть звуковых лучей, излучаемых под небольшими углами, сохраняется при распространении через слой толщиной в несколько сотен метров. Такой слой представляет собой своеобразный подводный акустический волновод, или подводный звуковой канал».

Следует отметить, что эффект акустического волновода использовался средневековыми мастерами при строительстве так называемых «шепчущих» галерей. Такие галереи характеризуются изогнутыми или закрытыми стенами. Если кто-то заговорит вблизи такой стены и звуковые волны сошлись бы в этой точке, то на расстоянии нескольких десятков метров шепот будет слышен, даже если говорящий не находится в прямом физическом контакте со стеной. Известные примеры шепчущих галерей можно найти в соборе Святого Павла в Лондоне и соборе Святого Петра в Риме, в Храме Неба под Пекином, в арке влюбленных у парка Черное озеро в Казани (рис.2).

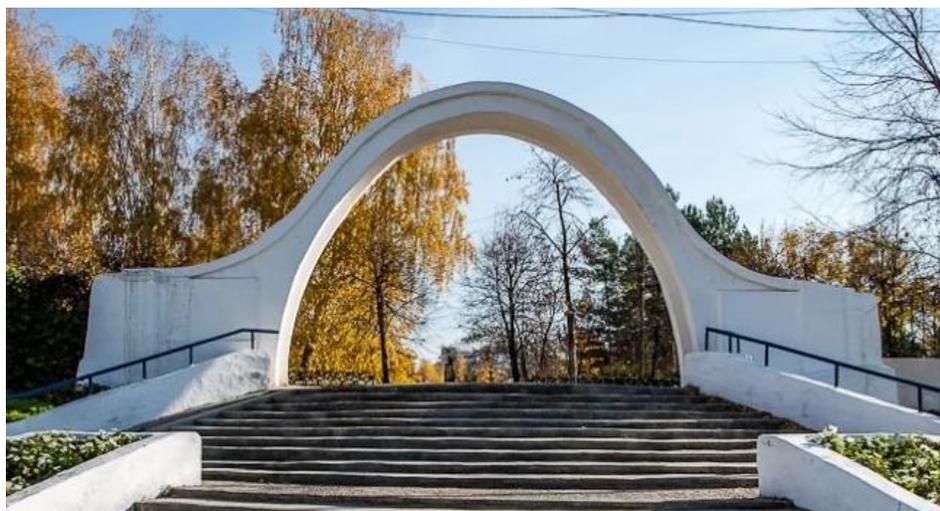


Рис. 2. Арка влюбленных в Казани

До сих пор в этом историческом очерке распространения звука молчаливо предполагалось, что возмущение в материальной среде, распространяемой в виде звуковой волны (например, избыточная плотность или давление в жидкости), очень мало по сравнению с равновесным значением. В этом случае уравнение распространения волн является линейным. Это тот тип уравнения, которому исследователи акустики 18-го века уделяли все свое внимание. То, что ее решение дает лишь приблизительное представление о реальной передаче звука при относительно больших возмущениях, было окончательно осознано в 19 веке. Однако Эйлер уже вплотную подошел к так называемому волновому уравнению конечной амплитуды в своих знаменитых мемуарах 1759 года «*On the Propagation of Sound*». Здесь он вывел уравнение движения тонкого среза воздуха под действием сил давления с двух его сторон. Он получил бы точный результат исследований 19-го века, если бы не допустил необъяснимую алгебраическую ошибку. В этом случае его физика была безупречна, но его математика сбилась с пути. Во всяком случае, он понял, что нормальное линейное волновое уравнение, содержащее только вторые производные волновой функции смещения относительно пространства и времени, должно быть исправлено путем включения нелинейного члена всякий раз, когда градиент смещения составляет заметную долю единицы.

По-видимому, нелинейное распространение акустических волн не рассматривалось всерьез до середины 19-го века, когда немецкий математик Георг Риман (1826-1866) и британский математик и физик Эрншоу (1805-1888) более или менее независимо друг от друга исследовали некоторые частные случаи. В частности, результаты показали, что при нелинейном распространении скорость распространения зависит от амплитуды, так что только при очень особых условиях может быть реализована нелинейная волна постоянного типа. Следует отметить, что некоторое понимание этой ситуации ранее было достигнуто Пуассоном. Вся эта работа привела к созданию теории ударных волн, разработанной Г.Г. Стоксом, Дж. Чаллисом, У.Дж.М. Рэнкином, Х. Гюгонио, лордом Рэлеем и другими.

### ***1.3. Регистрация звука***

В истории акустики вплоть до середины прошлого столетия самым важным приемником звука представляло человеческое ухо, и прием звука долгое время изучался в основном в связи с поведением этого органа. В этом отношении человеческое ухо оказало большее влияние на развитие акустики, чем человеческая речь. Ухо удивительно универсальное и чувствительное. Установлено, что его нормальный порог слышимости составляет около  $10^{-16}$  Вт/см<sup>2</sup> интенсивности звука [1]. Если принять площадь нормальной барабанной перепонки около 0,66 см<sup>2</sup>, то это означает, что средний поток механической энергии всего  $6,6 \cdot 10^{-17}$  Вт может вызвать ощущение звука. Гармонический звук в слышимом диапазоне частот будет идентифицирован, если его длительность составляет порядка 0,1 сек. Таким образом, акустическая энергия порядка  $6,6 \cdot 10^{-18}$  Дж достаточна для возбуждения различимого звука в ухе. С энергетической точки зрения ухо оказывается таким же чувствительным, как и глаз.

После того, как связь между высотой тона и частотой была установлена, возникла интересная задача определить частотные пределы слышимости. Французский физик Ф. Савар (1791-1841), используя в своих исследованиях вентиляторы и вращающиеся зубчатые колеса, около 1830 г. установил минимальную

слышимую частоту в 8 колебаний/сек и верхний предел в 24 000 колебаний/сек (сейчас называют циклами в секунду или герцами, по имени знаменитого немецкого физика Генриха Герца (1857-1894), чьи исследования электромагнитных волн были эпохальными).

Другие исследователи, такие как Л.Ф.В.А. Зеебек (1805-1849) (не путать с первооткрывателем термоэлектрического эффекта), И.Б. Био (1774-1802), Р. Кёниг (1832-1901), Г.Л.Ф. фон Гельмгольц, получили значения нижнего предела в диапазоне от 16 до 32 Гц. Это служит для того, чтобы подчеркнуть роль, которую индивидуальные различия играют в слухе, особенно в случае верхнего частотного предела слышимости. Последние могут не только значительно варьироваться от человека к человеку, но и обычно уменьшаются с возрастом. Конечно, значения в каждом конкретном случае зависят от интенсивности. Наиболее сложные исследования слышимости, сделанные в 19 веке, были проведены Рудольфом Кёнигом, который посвятил всю свою жизнь проектированию и производству прецизионных источников звука контролируемой частоты, таких как камертоны, стержни, струны и трубы. Это было до эпохи электроакустических источников.

Проблема определения минимальной интенсивности звука, воспринимаемого человеческим ухом (порога слышимости), впервые была исследована около 1870 года физиками А. Тёплером (1836–1912) и Л. Больцманом (1844–1906). Благодаря изобретательному использованию оптической интерференции они смогли измерить максимальное изменение плотности (или, по сути, максимальную конденсацию) в только что слышимой звуковой волне. Их экспериментальные результаты приводят к слышимому порогу около  $10^{-11}$  Вт/см<sup>2</sup>, что значительно превышает порог, полученный современными методами, но, во всяком случае, свидетельствует о большой чувствительности человеческого уха. Это сотрудничество великого венского физика-теоретика с Тёплером в акустическом проекте интересно с учетом принципиальной известности Больцмана как одного из создателей статистической теории газов.

В 1843 году Георг Симон Ом (1787-1854), автор знаменитого закона электрических токов, выдвинул теорию слуха, которая постулировала, что все музыкальные тоны возникают из простых гармонических колебаний определенной частоты. Он также предположил, что отличительное качество или тембр музыкальных звуков обусловлены комбинацией простых тонов с соизмеримыми частотами. Кроме того, он постулировал, что человеческое ухо способно анализировать любую сложную ноту как набор простых гармонических тонов, которые затем могут быть математически разложены с помощью теоремы Фурье. Эта теорема, датируемая 1822 г. и уже упомянутая ранее, гласит, что при соблюдении некоторых специфических математических ограничений любая произвольная функция переменной  $t$ , скажем, времени, может быть разложена в сходящийся ряд круговых функций, аргументы которых кратны фундаментальной частоте. Если произвольная функция сама по себе периодична во времени, то она может быть представлена таким образом для всех значений переменной  $t$ , тогда как если функция не периодична, то она может быть представлена только на конечном интервале времени. Эта теорема имеет большое значение в анализе колебаний всех видов.

Закон Ома стимулировал множество исследований в области так называемой физиологической и психологической акустики, т.е. акустики слуха. Величайшими из них в XIX веке были, несомненно, работы Гельмгольца, чей трактат *«Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik»* уже упоминался. В ней автор дал первую разработанную теорию механизма работы уха, так называемую резонансную теорию, в соответствии с которой различные элементы базилярной мембраны в улитке резонируют с определенными частотами в звуке, падающем на ухо. С помощью этой теории он смог теоретически обосновать закон Ома. Гельмгольц очень заинтересовался механическим явлением резонанса и в ходе своих исследований изобрел особый тип звукового резонатора, который с тех пор известен под его именем. Это просто сферическая камера с отверстием. Когда гармонический источник звука соответствующей частоты подносится близко к отверстию, если размеры камеры и

отверстия правильные, звук будет очень сильно усилен энергичным колебательным движением воздуха в отверстии. Большая камера резонирует с низкочастотным тоном и наоборот. Гельмгольц показал, что когда два тона разных частот направлены на асимметричный вибратор, результирующая вибрация будет содержать частоты, которые являются суммой и разностью исходных частот, и действительно, будут возникать многие другие линейные комбинации исходных частот. Он выдвинул гипотезу, что барабанная перепонка действует как асимметричный вибратор, и на этом основании предсказал способность человека воспринимать суммарные и разностные тона. Это предсказание подтвердилось, пионерские исследования Гельмгольца заложили основу для всех последующих исследований в области слуха. Один из величайших физиков 19-го века, он не коснулся ни одной области, которую не обогатил бы своим экспериментальным и теоретическим гением.

Поскольку восприятие звука ухом в замкнутых пространствах, таких как комнаты, театры, церкви и аудитории в целом является обычным явлением, здесь уместно уделить некоторое внимание развитию того, что стало называться архитектурной акустикой. На раннем этапе было признано, что некоторые помещения не подходят для хорошей акустики, и для преодоления трудностей использовались различные устройства. Сначала это были просто геометрические приспособления, такие как деки и другие отражатели. Бостонский врач Апхэм в 1853 г. написал несколько статей, указывающих на ясное понимание более важного вопроса, а именно, реверберации или многократного отражения звука от всех поверхностей комнаты. Он также показал, как можно сократить время реверберации за счет установки тканевых штор и мягкой мебели. В 1856 г. выдающийся американский физик Джозеф Генри (1797-1878), ставший первым секретарем Смитсоновского института в Вашингтоне, провел исследование акустики зрительного зала, которое отражает ясное понимание всех вовлеченных факторов, хотя все его предложения носили качественный характер. Несмотря на эти ранние шаги в правильном направлении, архитекторы полностью пренебрегали этой темой, и во второй половине 19-го века часто предпринимались попытки

исправить грубые акустические дефекты в комнатах с помощью таких абсурдно неадекватных устройств, как нанизывание проводов и т. д. Современная количественная основа архитектурной акустики восходит к работам физика Гарвардского университета Уоллеса Сабина (1868-1919), который в 1900 году установил закон, связывающий время реверберации в помещении (т.е. время, необходимое для того, чтобы любая первоначально созданная интенсивность звука затухала до одной миллионной доли его первоначального значения) с объемом помещения и количеством звукопоглощающего материала в нем. Это сделало возможной прикладную архитектурную акустику в том смысле, что любое помещение может быть спроектировано для удовлетворительного восприятия речи и до некоторой степени также и для музыки, хотя здесь вступают тонкие психологические факторы, которые создают проблемы.

Специальные устройства для усиления звука, принимаемого ухом, имеют давнюю историю. Рога, например, явно очень древние. Точно неизвестно, когда возникло предположение о том, что они могут быть использованы для улучшения восприятия звука. Во всяком случае, упомянутый выше иезуит Афанасий Кирхер в 1650 г. сконструировал параболический горн как слуховой аппарат, так и как говорящую трубу, и, очевидно, понимал важность расширения трубы в усилении как принимаемого, так и излучаемого звука. Роберт Гук, который в связи со своими обязанностями в Королевском обществе постоянно испытывал новые идеи, экспериментировал с ушными трубами и, как полагают, даже предложил возможность устройства для усиления звуков тела. Но, по-видимому, французскому врачу Рене Юппесу (1781-1826) было поручено изобрести и использовать стетоскоп в клинических целях (1817-1819). Английский физик сэр Чарльз Уитстон (1802-1875) в 1827 году разработал аналогичный прибор, который он назвал микрофоном, название, применяемое в настоящее время к устройству для приема звука. Об электроакустике тогда почти не думали. Без него современная экспериментальная акустика не могла бы существовать.

На протяжении всего исторического развития физики прослеживается тенденция сводить наблюдение физических явлений и особенно экспериментальные

измерения к тому, что можно увидеть. Практически все физические измерения основаны на этом принципе и используют стрелку, движущуюся по шкале. Попытки визуального изучения звуковых явлений были неизбежны. Это, конечно, было особенно необходимо для исследования звуков, частоты которых выходят за пределы слышимости уха, так называемого ультразвукового излучения. Одним из первых шагов в этом направлении было наблюдение американского физика Джона Леконта (1818-1891) о том, что музыкальные звуки могут вызывать скачки в газовом пламени, если давление правильно отрегулировано. Чувствительное пламя, как его позже стали называть, было доведено до совершенства английским физиком Джоном Тиндалем (1820-1893), который использовал его для обнаружения высокочастотных (неслышимых) звуков и для изучения отражения, преломления и дифракции звуковых волн. Этот метод по-прежнему обеспечивает очень эффективную демонстрацию лекций, но для практического применения он был заменен в 20-м веке различными типами электрических микрофонов, соединенных с электронно-лучевым осциллографом.

Стремясь сделать видимой форму звуковой волны, Кёниг в 1860 г. изобрел манометрическое устройство пламени, состоящее из коробки, через которую поступает газ к горелке. Одна сторона коробки представляет собой гибкую мембрану. Когда звуковые волны ударяются о мембрану, переменные изменения давления вызывают соответствующие флуктуации пламени, которые можно сделать видимыми, отражая борьбу пламени от быстро вращающегося зеркала. Еще одна попытка визуализации звуковых волн была предпринята французским корректором, редактором и ученым-любителем XIX века Эдуардом-Леоном Скоттом де Мартинвилем (1817-1879) в 1857 году в его «фонавтографе», в котором гибкая диафрагма в горловине приемного горна была прикреплена к стилусу, который, в свою очередь, касался закопченной вращающейся поверхности барабана и вычерчивал кривую, соответствующую падающему звуку. Это был предшественник фонографа. Не менее амбициозная попытка добиться подобных результатов была предпринята Эли Уитни Блейком (1836-1895), первым профессором физики в Брауновском университете, который в 1878 году сделал микрофон,

прикрепив маленькое металлическое зеркало к вибрирующему диску в задней части телефонного мундштука. Отражая световой луч от зеркала, Блейку удалось сфотографировать звуки человеческой речи. Такие исследования были значительно продвинуты американским физиком Д. К. Миллером (1866-1941), который изобрел аналогичный инструмент «фонодейк» и сделал очень сложные фотографии звуковых волн. Эти различные приборы Скотта, Блейка и Миллера были предшественниками электронно-лучевого осциллографа.

#### ***1.4. Лорд Релей и современная акустика***

Публикация в 1877 г. «*Theory of Sound*» лорда Рэля знаменует собой в некотором смысле конец того, что можно назвать классической эрой в акустике, и начало современной эры звука. Рэйлей был выпускником математической школы Кембриджского университета, который окончил в 1865 году. Таким образом, он был хорошо подготовлен к решению аналитических проблем, возникших при чтении трактата Гельмгольца «*Sensations of Tone*». Это привело его к мысли о желательности написания содержательного и обобщающего в одном месте материала, разбросанного по большей части в статьях в научных журналах. В то же время он воспользовался случаем, чтобы подробно изложить некоторые свои собственные статьи. В результате получилась работа [3], которая долгое время стояла как памятник физической литературы, оказав огромное влияние на последующее развитие науки акустики, особенно в аналитической части.

Работа делится на две части, первая из которых относится к механическим вибрационным явлениям всех видов, включая колебания струн, стержней, мембран и пластин. Движения таких структур, конечно, тесно связаны с излучением звука, как было подчеркнуто ранее. Особенной ценностью трактата является настойчивость в установлении общих принципов, а также приложений к частным случаям, имеющим практическое значение. Рэйлей был опытным прикладным математиком и разработал полезные методы для решения сложных вибрационных задач. Один из них, лежащий в основе так называемого метода Рэля-Ритца, нашел широкое современное применение не только в изучении колебаний

твердых конструкций, но и в квантовой механике. Рэлей никогда не упускал из виду физический смысл, присущий природным явлениям, и его анализ всегда имеет достоинство быть применимым на практике.

Вторая часть «*Theory of Sound*» Рэрея посвящена главным образом акустическому распространению в жидких средах. Здесь ему приходилось заниматься такими сложными вопросами, как, например, дифракция звуковых волн вокруг препятствий и общее рассеивание звука при прохождении через среду с большим количеством взвешенных частиц, например, пузырьков в воде. Акустическая дифракция и рассеяние представляют собой математически гораздо более сложную задачу, чем соответствующие явления в свете, так как длина волны обычного слышимого звука имеет порядок размеров самих препятствий. Большое внимание уделяется также геометрическим характеристикам акустического излучения от вибрирующих объектов, например, пульсирующих сфер или колеблющихся дисков, для создания «лучей» звука. Проблемы такого рода рассматривались так тщательно, и Рэлей так полно и ясно обобщил работы предыдущих исследователей по таким вещам, как затухание звука в жидкостях различными диссипативными механизмами, что, когда между 1894 и 1896 гг. вышло второе, расширенное и переработанное издание «*Theory of Sound*», многие считали, что вся тема акустики как раздела физики теперь завершена и что больше учиться нечему.

Несомненно, было много тех, кто считал, что будущее этой области находится в руках инженеров, как это уже было в случае с базовой теорией электричества и магнетизма, разработанной Ампером, Фарадеем и Максвеллом, чьи научные усилия заложили основы электротехники. Конечно, в то время такое отношение к акустике имело некоторое оправдание, и не столько потому, что не было более интересных акустических явлений, которые можно было бы исследовать, сколько потому, что экспериментальные средства, с помощью которых можно было бы осуществить эти исследования на практике, еще не были доступны. Например, работы Рэрея и его современников убедительно свидетельствовали о том, что множество интересных свойств может быть связано со звуковыми волнами с частотой, значительно превышающей слышимый предел. Но

когда был опубликован «*Sound*» Рэля, единственным практическим источником такого излучения был птичий свисток!

Если заглянуть в физику 19-го века, то кажется почти невероятным, что электромеханические эффекты не использовались ранее в качестве источников звука широкого диапазона частот. Основная трудность, конечно, заключалась в неадекватности средств получения электрических колебаний, а также в связи этих колебаний с твердотельными вибраторами. Действительно, пьезоэлектрический эффект был открыт братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 году, и это позволило предположить, что если бы существовал какой-то способ создания чередующихся положительных и отрицательных электрических зарядов на противоположных гранях правильно ограненного кристалла кварца, то можно было бы заставить его вибрировать. Успешное использование этого эффекта в качестве источника и приемника звука, однако, должно было подождать изобретения лампового генератора и усилителя, которое появилось только в работах Флеминга и ДеФореста в первые два десятилетия 20-го века.

На самом деле, на заре 20-го века многие фундаментальные проблемы в акустике остались нерешенными. С биологической точки зрения природа слуха была понята далеко не до конца, так как связь между анатомией уха и связанной с ним нервной системой, с одной стороны, и наблюдаемыми явлениями слуха, с другой, была отнюдь не ясна. С физической стороны, хотя существовала теория затухания звука в жидких средах, таких как атмосфера, с точки зрения влияния транспортных свойств, вязкости и теплопроводности, было ясно, что результаты, предсказанные такими эффектами, не согласуются с экспериментом, так как в целом намного меньше соответствующих наблюдаемых значений.

XX век ознаменовался революцией в акустике, начавшейся в 20-х годах. Важнейшую роль в этой трансформации сыграли достижения в области электроакустики, радиотехники и радиовещания. Появилась новая категория задач, связанных с преобразованием звуковых сигналов в электромагнитные и обратно, их усилением и качественным воспроизведением. В то же время радиотехника и электроакустика открыли для акустики ранее недоступные

горизонты. Опираясь на достижения электроакустики и радиотехники, современная акустика стала не просто наукой о звуке, но и инструментом, позволяющим создавать новые звуковые миры. Она стала основой для развития современных музыкальных инструментов, систем звукозаписи, радиовещания, кино и телевидения, а также множества других областей.

Первая половина XX века стала для акустики эпохой стремительного развития, вызванного, в первую очередь, военными потребностями. На поле боя звук стал не просто звуком, а стратегическим инструментом. Определение местоположения и скорости самолета (с помощью звуковой локации), подводной лодки (через гидролокацию), а также выяснение места, времени и характера взрыва – все эти задачи требовали глубоких знаний механизмов формирования и поглощения звука, а также распространения звуковых и ультразвуковых волн в различных условиях.

Первые шаги в гидроакустике сделал французский физик П. Ланжевен (1872-1946) в 1916 году. Используя ультразвуковые волны, он разработал метод измерения глубины моря, а также методы обнаружения подводных лодок. Ультразвук, с его способностью проходить сквозь воду на большие расстояния и отражаться от различных препятствий, стал идеальным инструментом для «прослушивания» океана.

В 1944 году американские ученые М. Ивинг и Д. Ворцель, а также независимо от них в 1946 году, как было описано выше в разделе распространения звука, советские ученые Л. М. Бреховских и Л. Д. Розенберг сделали открытие сверхдальнего распространения звука взрыва в море, которое происходит в подводных звуковых каналах. Эти открытия заложили основы для развития гидроакустических методов исследования океана. С помощью гидроакустики ученые стали изучать рельеф морского дна, определять местоположение и характеристики косяков рыбы, контролировать загрязнение океана, а также изучать поведение китов и других морских животных.

Особую актуальность в XX веке приобрели проблемы звукопоглощения и звукорассеяния, связанные с развитием архитектурной и строительной акустики.

Советские ученые С.Н. Ржевкин, Г.Д. Малюжинец и В.В. Фурдудев провели обширные исследования в этой области. Они изучали звукопоглощающие свойства различных материалов и конструкций, разрабатывали методы звукоизоляции помещений, чтобы обеспечить комфортные условия для жизни и работы людей. Значительное внимание уделялось изучению акустических шумов и методам их устранения. Шум окружает нас везде, и он может негативно влиять на здоровье и работоспособность человека. Ученые изучали природу шума, разрабатывали методы его поглощения и изоляции, создавали тихие машины и оборудование.

Некоторые физики, увлеченные тонкостями физики высоких энергий и свойствами твердых тел, утверждали [1], что «будущее так называемых «классических» областей физики, таких как акустика, целиком зависит от ее технологических приложений». По их мнению, «физическая наука она достигла своего пика. Это ошибка, как показывает история науки за последний век. Нет никаких оснований предполагать, что у человека когда-нибудь закончатся вопросы об акустике, так же как у него не закончатся вопросы о ядре и теоретических частицах, которые его населяют или могут быть созданы из него. Конечно, верно то, что по мере исследования границы между различными типами природных явлений, искусственно воздвигнутых человечеством в целях удобства, становятся все более размытыми и нереалистичными. Целью науки будущего является содержательный синтез. В этом акустика займет достойное место.»

### ***1.5. Контрольные вопросы***

- 1) Как древние греки и римляне использовали акустические принципы в архитектуре и музыке?
- 2) Какими были первые научные открытия в области акустики, кто их совершил?
- 3) Как развивалась теория звука в XVII-XVIII веках?
- 4) Как возникла связь акустики с физиологией и психологией?
- 5) Какие революционные открытия в акустике были сделаны в XIX веке?

- 6) Как развитие электроники и электроакустики повлияло на развитие акустики в XX веке?
- 7) Какие ключевые открытия и исследования в области акустики были сделаны в XX веке?
- 8) Как современная наука использует акустику в различных областях, таких как медицина, геология, материаловедение, океанология?
- 9) Какие актуальные задачи и направления исследований в области акустики существуют сегодня?
- 10) Как вы думаете, каким будет будущее акустики как науки?

## 2. Основы теории распространения упругих волн

### 2.1. Акустические волны в жидкостях и газах

Описание произвольных движений газа или жидкости основывается на уравнениях механики сплошных сред [4, 5]. Если диссипативными процессами в среде можно пренебречь, то скорость частиц среды  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , плотность  $\rho(\vec{r}, t)$  и давление среды  $p(\vec{r}, t)$  связаны системой уравнений:

1) Уравнение непрерывности (закон сохранения массы вещества):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0. \quad (2.1)$$

2) Уравнение движения (второй закон Ньютона для элемента сплошной среды):

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} \right] = \vec{F} = -\nabla p. \quad (2.2)$$

3) Уравнение состояния:

$$p = p(\rho). \quad (2.3)$$

В уравнении (2.2) выражение в квадратных скобках представляет собой ускорение – полную производную скорости по времени в представлении Эйлера

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}. \quad (2.4)$$

Охарактеризуем равновесное состояние среды давлением  $p_0$ , объемом  $V_0$  и плотностью  $\rho_0$ . Волновой процесс сопровождается чередующимися сжатиями и разрежениями, что приводит к нарушению равновесного состояния. Новое состояние среды опишем величинами  $p = p_0 + p'$ ,  $V = V_0 + V'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , где  $p'$  – избыточное давление, созданное звуковой волной. Волновой процесс не сопровождается переносом вещества, поэтому масса газа и жидкости остается постоянной и равной ее величине в равновесном состоянии:

$$\rho_0 V_0 = \rho V = (\rho_0 + \rho')(V_0 + V') = (1 + \delta)(1 + s) \rho_0 V_0, \quad (2.5)$$

где  $\delta = dV/V_0$  – относительное изменение объема (разрежение),  $s = d\rho/\rho_0$  – относительное изменение плотности (уплотнение). Приблизительно выполняется равенство  $\delta \approx -s$ .

Предположим, что деформации являются упругими, т.е. они полностью исчезают после прекращения воздействия. Согласно закону Гука для объемной деформации, изменение давления газа  $p'$  при малом изменении объема  $V'$  прямо пропорционально относительной деформации:

$$p' = -K \frac{V'}{V}, \quad (2.6)$$

где  $K$  – модуль объемной упругости:

$$K = -\frac{V p'}{V'}. \quad (2.7)$$

Распространение звуковой волны сопровождается локальными изменениями температуры. В большинстве случаев чередование процессов сжатия и разрежения совершается настолько быстро, что процесс сжатия можно считать

адиабатическим. В этом случае не теряется кинетическая и потенциальная энергия волн в процессе распространения. Такое приближение справедливо, если амплитуда избыточного давления ограничена по величине. При очень большой амплитуде волны процесс распространения будет сопровождаться увеличением температуры в областях с большим давлением, и энергия за счет теплопроводности будет рассеиваться из волновой системы.

Для равновесного адиабатического процесса справедливо уравнение Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \text{или} \quad p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (2.8)$$

где  $\gamma = C_p/C_v$  – показатель адиабаты, отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении  $C_p$  и объеме  $C_v$ , Модуль всестороннего сжатия (или объемный модуль упругости) равен  $K = \gamma p$ .

В случае жидкостей уравнение (2.8) можно рассматривать как приближенное эмпирическое уравнение, в котором константы  $\gamma$  и  $p_0$  определяются по данным экспериментов.

Дифференцируя уравнение Пуассона, получаем:

$$V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0 \quad \text{или} \quad -V \frac{dp}{dV} = \gamma p = K. \quad (2.9)$$

Если упругость газа (жидкости), характеризуемая величиной  $\gamma p = \text{const}$ , тогда справедливо соотношение для избыточного давления:  $p' = -K\delta = Ks$ .

## 2.2. Акустическое волновое уравнение

Как известно [4-6], движение сжимаемой невязкой жидкости (газа) описывается посредством уравнения неразрывности (2.1) и уравнения Эйлера (2.2).

Для рассмотрения распространения акустических колебаний в жидкостях можно записать соотношения

$$\begin{cases} p = p_0 + p' \\ \rho = \rho_0 + \rho' \end{cases} \quad (2.12)$$

$$p' \ll p_0, \quad \rho' \ll \rho_0, \quad (2.13)$$

здесь  $p_0$  и  $\rho_0$  – равновесные значения плотности и давления,  $p'$  и  $\rho'$  – изменения давления и плотности, возникающие в процессе распространения акустической волны, которые весьма малы.

Тогда из (2.2) можно получить линеаризованное уравнение:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{V} = 0, \quad (2.14)$$

где  $\bar{V}$  – колебательная скорость частиц жидкости. Далее под  $\bar{V}$  всюду понимается акустическая колебательная скорость.

Относительная малость колебаний частиц жидкости означает, что амплитуда этих колебаний много меньше длины волны  $a \ll \lambda$ . Отсюда критерий линейности для линеаризации (2.10):

$$\left| \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right| \gg |(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}|. \quad (2.15)$$

Действительно [6], полагая, что за время характерного периода колебаний  $T$  частицы жидкости проходят расстояние порядка амплитуды волны  $a$ , скорость движения самих частиц будет порядка  $\sim a/T$ , а производные от скорости по времени  $\sim V/T$ , и по координатам  $\sim V/\lambda$ , получим из этих оценок  $|(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}| \sim \frac{a}{T^2} \frac{a}{\lambda}$ ,

$\frac{\partial V}{\partial t} \sim \frac{a}{T^2}$ , так что при  $\lambda \ll a$  действительно можно считать, что  $\left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \gg |(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V}|$ .

В итоге, линейризованное уравнение Эйлера (2.2) будет

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (2.16)$$

Предполагая процесс распространения волны адиабатическим, получим уравнения состояния для выражений  $p'$  и  $\rho'$ :

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho' = c_s^2 \rho'. \quad (2.17)$$

В итоге, после дифференцирования (2.14) по времени  $t$  и применения оператора дивергенции к (2.16) получим:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \rho' = 0. \quad (2.18)$$

Здесь в (2.17) и (2.18)  $c_s$  – скорость звука в жидкости.

Скорость звука в жидкостях и газах можно вычислить по формуле:

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \beta_s}}, \quad (2.19)$$

здесь  $\beta_s$  – адиабатическая сжимаемость. Для идеального газа она будет:

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (2.20)$$

В случае изотермической сжимаемости

$$\beta_T = \gamma \beta_s, \quad (2.21)$$

$$c_s = \sqrt{\gamma \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T}. \quad (2.22)$$

В результате, вместо уравнения (2.18) для звукового давления  $p'$  линейное акустическое уравнение становится таким:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 p' = 0. \quad (2.23)$$

Заметим, что ранее рассматривалась слабо сжимаемая невязкая жидкость. Более общим выражением для описания движения жидкости является уравнение Навье-Стокса:

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \bar{V} + \left( \eta' + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div} \bar{V}, \quad (2.24)$$

здесь  $\eta$  и  $\eta'$  – первая и вторая вязкости.

Первый коэффициент вязкости связан со сдвиговыми напряжениями в жидкостях, а второй коэффициент вязкости относится к внутренним силам в жидкости при объемном растяжении – сжатии. Это нетрудно заметить из следующей записи для тензора вязких напряжений в жидкости:

$$\sigma_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} \text{div} \bar{V}, \quad (2.25)$$

здесь  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Заметим, что член со второй вязкостью исчезает для несжимаемой жидкости ( $\operatorname{div} \bar{V} = 0$ ), где используются методы теории подобия с введением характерных безразмерных чисел. Напомним здесь, что в акустике, связанной с гидродинамикой, таких как:

$$\text{число Струхала } \operatorname{Sh} = \frac{fL}{V}, \quad (2.26)$$

$$\text{число Рейнольдса } \operatorname{Re} = \frac{\rho VL}{\eta}, \quad (2.27)$$

$$\text{число Маха } M = \frac{V}{c_s}, \quad (2.28)$$

где  $f$  – частота,  $L$  – линейный размер.

### 2.3. Представления волнового уравнения в различных системах координат

Считая процесс распространения продольных упругих волн в жидкостях, относящийся к потенциальным течениям, введем функцию потенциала скорости  $\Phi$  в виде [7]:

$$\bar{V} = \nabla \Phi. \quad (2.29)$$

Тогда волновое уравнение для потенциала скорости:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.30)$$

Из (2.15) для давления получим:

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Отметим, что существует произвол в выборе знаков. Иногда знаки в формулах (2.25) и (2.27) выбирают противоположным образом:

$$\bar{V} = -\nabla\Phi, \quad (2.32)$$

$$p' = \rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (2.33)$$

В трехмерной декартовой системе координат уравнение распишем как:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2.34)$$

Отметим, что в одномерном случае частным решением (2.34) для плоской волны, распространяющейся в направлении  $x$ , будет:

$$\Phi = g(x - c_s t). \quad (2.35)$$

здесь  $g$  – произвольная функция.

А для гармонической волны:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 \exp(i(\omega t - kx)). \quad (2.36)$$

Отсюда из (2.30) и (2.31) можно получить:

$$\frac{V}{c_s} = \frac{\rho'}{\rho_0}. \quad (2.37)$$

В результате, другим условием линеаризации является то, что условию неравенства

$$\rho' \ll \rho_0 \quad (2.38)$$

соответствует

$$|\bar{V}| \ll c_s. \quad (2.39)$$

Для цилиндрической системы координат волновое акустическое уравнение запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (2.40)$$

а для сферической системы координат в виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (2.41)$$

Для однородных и изотропных сред, когда потенциал не зависит от координат  $z$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , уравнения (2.40) и (2.41) будут пространственно одномерными:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.43)$$

а частные решения для функции потенциала скорости тогда запишутся как:

$$\Phi_{\text{цил}} = \frac{1}{\sqrt{r}} g(r - c_s t), \quad \Phi_{\text{сфер}} = \frac{1}{r} g(r - c_s t), \quad (2.44)$$

соответственно.

#### 2.4. Затухание акустических волн

Зависимость интенсивности  $J$  акустической волны, распространяющейся в жидкости или газе в направлении  $x$ , удовлетворительно описывается экспоненциальным уравнением

$$J = J_0 \exp(-2\alpha x), \quad (2.45)$$

здесь  $\alpha$  – коэффициент поглощения.

А для акустического давления будет, соответственно:

$$p' = p'_0 \exp(-\alpha x) \quad (2.46)$$

Для жидкостей с учетом вязкости и теплопроводности коэффициент поглощения акустических волн описывается формулой Стокса – Кирхгофа:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_s^2} \left[ \frac{4}{3} \eta + \chi \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (2.47)$$

Здесь  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота,  $\chi$  – температуропроводность.

Распространение плоской одномерной гармонической акустической волны можно описать, используя комплексное представление волнового вектора  $\tilde{k}$  в виде:

$$\tilde{p} = p_0 \exp\left(i\left[\omega t - \tilde{k}x\right]\right), \quad (2.48)$$

$$\tilde{k} = k - i\alpha = k \left( 1 - i\alpha \frac{c_s}{\omega} \right). \quad (2.49)$$

Для удобства описания волновых процессов можно ввести комплексный модуль упругости [5]

$$\tilde{E}_s = E' + iE'' = \frac{1}{\tilde{\beta}_s} \quad (2.50)$$

и получить из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\Phi} - \frac{\tilde{E}_s}{\rho} \Delta \tilde{\Phi} = 0 \quad (2.51)$$

$$E' = \frac{\left(1 - \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2\right) \rho_0 c_s^2}{\left(1 + \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2\right)^2}, \quad E'' = \frac{\alpha c_s}{\omega} \frac{2\rho_0 c_s^2}{\left(1 + \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2\right)^2}. \quad (2.52)$$

Добротность рассматриваемой колебательной системы  $Q$  будет равна

$$Q = \frac{E'}{E''} = \frac{1 - \left(\frac{\alpha c_s}{\omega}\right)^2}{\frac{2\alpha c_s}{\omega}} = \frac{\omega^2 - (\alpha c_s)^2}{2\alpha c_s \omega}. \quad (2.53)$$

Если затухание мало ( $\alpha c_s \ll \omega$ ), то выражения (2.52 – 2.53) упрощаются и будут:

$$E' \approx \rho_0 c_s^2, \quad E'' \approx 2\rho_0 c_s^2 \frac{\alpha c_s}{\omega}, \quad Q \approx \frac{\omega}{2\alpha c_s} \gg 1. \quad (2.54)$$

## 2.5. Отражение и преломление акустических волн

Рассмотрим распространение акустической падающей волны с амплитудой  $p'_1$ , волновым вектором  $\bar{k}_1$  в жидкости с номером один. Пусть волна падает на вторую жидкость под углом  $\theta_1$  к нормали [4, 5]. Плотность первой жидкости равна  $\rho_1$ , скорость звука в ней  $c_1$ , а для второй жидкости они равны  $\rho_2$  и  $c_2$  соответственно.

Возникают отраженная и преломленные волны. Обозначим амплитуду отраженной волны  $p'_1$ , волновой вектор  $\bar{k}_1$  и угол отражения  $\theta_1'$ , а для преломленной волны –  $p'_2$ ,  $\bar{k}_2$  и  $\theta_2$  (рис.3).

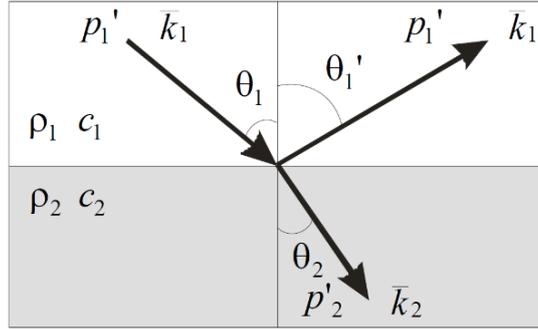


Рис.3. Отражение и преломление волны на границе раздела двух жидкостей.

Из акустического закона Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta'_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \quad (2.55)$$

следует, что  $\theta_1 = \theta'_1$  – угол падения равен углу отражения и

$$\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1. \quad (2.56)$$

Назовем коэффициентом прохождения  $r_p$  отношение амплитуды колебаний давления преломленной (прошедшей) волны к амплитуде падающей волны:

$$r_p = \frac{p'_2}{p'_1} = \frac{\varepsilon_\theta - 1}{\varepsilon_\theta + 1}, \quad \text{где } \varepsilon_\theta = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1}{\rho_1 c_1 \cos \theta_2}. \quad (2.57)$$

## 2.6. Энергия акустических волн

Изменение энергии в объеме  $\Omega$  при наличии в нем звуковой волны можно рассчитать по формуле [7]:

$$E = \int_{\Omega} \left( \frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{c_s^2 \rho'^2}{2\rho_0} \right) d\Omega, \quad (2.58)$$

где подынтегральное выражение играет роль плотности звуковой энергии – энергии, приходящейся на единицу объема [Дж/м<sup>3</sup>]

$$W = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{c_s^2 \rho'^2}{2\rho_0}. \quad (2.59)$$

Для плоской бегущей волны (2.59) трансформируется в

$$W = \rho_0 V^2. \quad (2.60)$$

Поток акустической энергии [размерностью Вт=Дж/с] в замкнутой области  $\Omega$  с площадью  $S$  определяется как

$$\bar{\Pi} = \oint_S p \bar{V} d\bar{S}, \quad (2.61)$$

что эквивалентно изменению энергии в объеме  $\Omega$  или мощности

$$P = \frac{\partial E}{\partial t} = |\bar{\Pi}|. \quad (2.62)$$

Интенсивность же звука  $J = \frac{\Pi}{S}$  определяется как поток звуковой энергии, приходящейся на единицу площади и измеряется в [Вт/м<sup>2</sup>].

Для бегущей волны будет

$$J = W c_s. \quad (2.63)$$

Часто акустическое давление измеряют в децибелах, используя формулу перевода

$$L_p = 20 \log \frac{p'}{p_0}, \quad (2.64)$$

где  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па – условное пороговое значение давления. Аналогичное для интенсивности звука пороговое значение равно

$$I_0 = 10^{-2} \frac{Вт}{м^2}. \quad (2.65)$$

Приставка деци – означает десятую часть и для акустического давления соответствует изменению интенсивности звука в  $10^{0.1} \approx 1.26$  раза [7] или 0,1 бела (децибел).

## 2.7. Акустический импеданс и электроакустическая аналогия

Существует аналогия между описанием распространения упругих колебаний в жидкостях и газах и распространением волн в колебательных системах, например, таких как система грузиков, связанных пружинами. Или токи в RLC – цепях [7]. В связи с этим можно ввести понятие акустического сопротивления, или импеданса. Теперь электрическому току  $I$  будет соответствовать колебательная скорость частиц  $\bar{V}$ , напряжению  $U$  – акустическое давление  $p'$ , а акустический импеданс  $Z = X + i\omega M$  – импедансу цепи переменного тока  $Z = R + i\omega L$ , где  $R$  – активное сопротивление,  $L$  – индуктивность,  $M$  – присоединенная масса.

Введем понятие объемной колебательной скорости  $V_\Omega$  [7], выражаемой через линейную колебательную скорость  $\bar{V}$ , в виде интеграла по поверхности, совершающей акустические колебания в виде:

$$V_\Omega = \int \bar{V}_n d\bar{S}. \quad (2.66)$$

Здесь  $\bar{V}_n$  – нормальная составляющая колебательной скорости к поверхности  $d\bar{S}$ .

Полное акустическое сопротивление выразится в виде:

$$Z_a = \operatorname{Re} Z_a + i \operatorname{Im} Z_a, \quad (2.67)$$

где  $\operatorname{Re} Z_a$  – активное сопротивление, диссипация энергии в самой излучательной системе, включая затраты энергии на излучение звука,  $\operatorname{Im} Z_a$  – реактивное сопротивление, реакция сил упругости и инерции.

$$\operatorname{Re} Z_a = \frac{p'}{V_\Omega}. \quad (2.68)$$

Часто используется понятие удельного акустического сопротивления как импеданса, отнесенного к площади:

$$Z_s = Z_a / S. \quad (2.59)$$

Учитывая, что обычно  $V_\Omega = SV$ , например, для волны от пульсирующей сферы, плоских бегущих волн, звука в волноводах, собственно акустическим импедансом среды называют отношение звукового давления к колебательной скорости частиц среды

$$Z_s = \frac{p'}{V} = \rho_0 c_s. \quad (2.70)$$

## 2.8. Излучение звука

Колебания какого-либо тела в жидкости приводят к появлению в ней разрежений и сжатий [5, 7], что соответствует распространению упругих колебаний. Таким образом, задача об излучении звуковых волн колеблющимся телом предполагает решение волнового уравнения, например, для потенциала скорости

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.71)$$

с граничным условием для нормальной составляющей скорости частиц жидкости на границе с излучателем

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} \right|_S = -V_n(t) \quad (2.62)$$

и условием излучения, например, для сферической расходящейся волны в виде:

$$\Phi_{r \rightarrow \infty} = 0 \left( \frac{1}{r} \right). \quad (2.63)$$

Здесь и далее индекс  $n$  обозначает нормальные компоненты скорости  $\bar{V}_n$  и давления  $p_n$  на границе «излучатель-среда».

Будем также далее считать, что скорость колеблющегося тела много меньше скорости звука  $V_n \ll c_s$  или, соответственно, что линейная амплитуда колебаний тела мала по отношению к длине волны  $a \ll \lambda$ .

Полная мощность излучения будет

$$P = \oint_S \bar{V}_n p dS = \frac{\rho_0 c_s}{16\pi^2 c_s^2} \oint_S \frac{1}{r^2} \left[ \frac{dV_\Omega}{dt} \left( t - \frac{r}{c_s} \right) \right]^2 dS. \quad (2.74)$$

Объемная скорость будет равна

$$V_\Omega = \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega}, \quad (2.75)$$

а объемное ускорение

$$\frac{dV_\Omega}{dt} = \frac{d^2\Omega}{dt^2} = \ddot{\Omega}. \quad (2.76)$$

Для полной мощности излучения при излучении низких частот, когда  $\lambda \gg l$ , где  $l$  – характерные размеры тела, можно получить выражение [5]:

$$P|_{\lambda \gg l} = \oint_S V_n p dS = \frac{\rho_0}{16\pi^2 c_s} \oint_S \frac{1}{r^2} \langle \ddot{\Omega} \left( t - \frac{r}{c_s} \right) \rangle_t dS. \quad (2.77)$$

В случае излучения высоких частот, когда  $\lambda \ll l$ , где  $l$  – линейные размеры тела, мощность излучаемого звука вычисляется как

$$P|_{\lambda \ll l} = \frac{\partial E}{\partial t} = \rho_0 c_s \oint_S \langle V_n^2 \rangle_t dS. \quad (2.78)$$

## 2.9. Характеристики излучателей

В процессе излучения источник упругих волн часть своей энергии затрачивает на работу против сил реакции упругой внешней среды  $\bar{F}_r$  [5]. Эту работу сил сопротивления излучения за период излучения  $T$  можно рассчитать по формуле

$$A = - \int_0^T \bar{V}_n \bar{F}_r dt. \quad (2.79)$$

Положим, что элемент поверхности излучателя  $ds$  имеет нормальную составляющую колебательной скорости, равную  $\bar{V}_n \exp(i\omega t)$ , а давление акустического поля среды равно  $p'_n \exp(i[\omega t + \Delta\varphi])$ , где  $\Delta\varphi$  – разность фаз между колебаниями скорости и давления. Обозначим через  $V_0$  амплитуду скорости движения точки приведения сил давления и запишем безразмерный вектор скорости любой точки на поверхности излучателя в виде

$$\bar{D}_n = \frac{\bar{V}_n}{V_0}. \quad (2.80)$$

Векторы  $\bar{V}_n$  и  $\bar{D}_n$  направлены по нормали к поверхности  $S$ . В частных случаях излучателей в виде пульсирующей сферы или пульсирующего цилиндра вектор  $\bar{D}_n$  будет просто единичным вектором нормали  $\bar{n}$ .

Определим теперь механический импеданс излучателя  $\tilde{Z}_M$  как отношение амплитуды силы реакции поля излучения  $\bar{F}_r$ , действующей на поверхность излучателя, к амплитуде скорости точки приведения  $V_0$ :

$$\tilde{Z}_M = \frac{\tilde{F}_r^A}{V_0} = \frac{1}{V_0} \oint_S p'_n \bar{D}_n \exp(i\Delta\varphi) d\bar{S}. \quad (2.81)$$

Здесь и ниже верхний индекс  $A$  у величины показывает, что речь идет о ее амплитуде.

Если скорости отдельных точек излучающей поверхности различаются, величину  $\tilde{Z}_M$  относят к отдельно избранной точке. Поскольку мы выбрали начальную фазу колебаний равной нулю, значок комплексной величины в  $\tilde{V}_0$  ниже можно не ставить.

Для силы реакции поля излучения на поверхности излучателя мы можем записать в комплексной форме

$$\tilde{F}_r = \oint_S p'_n \bar{D}_n \exp(i(\omega t + \Delta\varphi)) d\bar{S}, \quad (2.82)$$

или для ее амплитудной части

$$\begin{aligned} \tilde{F}_r^A &= \oint_S p'_n \bar{D}_n \exp(i\Delta\varphi) d\bar{S} = \\ &= \oint_S p'_n \bar{D}_n \cos \Delta\varphi dS + i \oint_S p'_n \bar{D}_n \sin \Delta\varphi dS = R_1^A + iR_2^A. \end{aligned} \quad (2.83)$$

В результате, в соответствии с определением (2.81), для импеданса можно записать

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_M &= \frac{1}{V_0} \oint_S p'_n \bar{D}_n \exp(i\Delta\varphi) d\bar{S} = \\ &= \frac{1}{V_0} \oint_S p'_n \bar{D}_n \cos \Delta\varphi d\bar{S} + \frac{i}{V_0} \oint_S p'_n \bar{D}_n \sin \Delta\varphi d\bar{S} = X + iY.\end{aligned}\quad (2.84)$$

Здесь  $X$  – активное сопротивление,  $Y$  – реактивное сопротивление.

Для компонент силы реакции излучения запишем

$$\begin{cases} R_1^A = V_0 X \\ R_2^A = V_0 Y \end{cases}.\quad (2.85)$$

Для расчета работы сил реакции поля  $A$  за период  $T$  возьмем  $\text{Re}V_n(t)$  и  $\text{Re}p'_n(t)$  и получим

$$\begin{aligned}A &= -V_0 \int_0^T \oint_S p'_n \cos(\omega t + \varphi) \bar{D}_n \cos(\omega t) d\bar{S} dt = \\ &= -V_0^2 \int_0^T \left( X \cos^2(\omega t) - Y \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right) dt = -\frac{V_0^2}{2} XT.\end{aligned}\quad (2.86)$$

Работу за период  $T$  можно вычислить также по общей формуле

$$A = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ - \int_0^T \oint_S p_n'^* V_n dS dt \right\},\quad (2.87)$$

где  $p_n'^*$  – комплексно-сопряженное  $p_n'$ . С учетом (2.79) получим

$$A = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} V_0^2 \int_0^T (X - iY) dT \right\} = -\frac{V_0^2}{2} XT.\quad (2.88)$$

Таким образом, среднее значение работы за период  $T$  зависит от действительной части импеданса  $\operatorname{Re} \tilde{Z} = X$ . Далее разобьем интервал времени периода  $T$  в (2.86) на 4 части (четверть-периоды):

$$\int_0^{T/4} (*) dt + \int_{T/4}^{T/2} (*) dt + \int_{T/2}^{3T/4} (*) dt + \int_{3T/4}^T (*) dt, \quad (2.89)$$

здесь  $(*) = V_0^2 X \cos^2(\omega t) - V_0^2 Y \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ .

Легко получить отсюда

$$\begin{aligned} V_0^2 \int_0^{T/4} X \cos^2(\omega t) dt &= V_0^2 \int_{T/4}^{T/2} X \cos^2(\omega t) dt = \\ &= V_0^2 \int_{T/2}^{3T/4} X \cos^2(\omega t) dt = V_0^2 \int_{3T/4}^T X \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_0^2 X T}{8} = \frac{V_0^2 X}{4\pi\omega} \end{aligned} \quad (2.90)$$

и

$$\begin{aligned} V_0^2 \int_0^{T/4} Y \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt &= -V_0^2 \int_{T/4}^{T/2} Y \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = \\ &= V_0^2 \int_{T/2}^{3T/4} Y \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = -V_0^2 \int_{3T/4}^T Y \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = \frac{V_0^2 Y}{2\omega}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Мы видим, что знакопеременные слагаемые в (2.91) соответствуют работе излучателя против мнимой составляющей силы реакции поля  $R_2(\operatorname{Im} \tilde{Z}_M = Y)$ .

Учитывая эту закономерность, можно прийти к выводу о работе, проделываемой на протяжении каждой из четвертей периода как накоплении кинетической энергии  $\frac{MV_0^2}{2}$  присоединенной массы жидкости к источнику (см.(2.91)):

$$\frac{MV_0^2}{2} = \frac{Y}{2\omega} V_0^2. \quad (2.92)$$

Таким образом, величина  $\frac{Y}{\omega} = M$  играет роль присоединенной массы жидкости, соколеблющейся с излучателем. Появление этой массы обусловлено инерцией среды, окружающей излучатель.

Разность фаз  $\Delta\varphi$  вычисляется из соотношения  $Y/X$  как

$$\Delta\varphi = \arctan \frac{Y}{X} = \arctan \frac{M}{\omega X}. \quad (2.93)$$

Амплитудную и фазовую характеристику направленности излучателя по давлению можно рассчитать из

$$\Phi(\theta) = \frac{p(\theta)}{p(0)} \exp(i[\gamma(\theta) - \gamma(0)]) = A(\theta)e^{i\gamma(\theta)}, \quad (2.94)$$

здесь  $\frac{p(\theta)}{p(0)}$  – амплитудная характеристика направленности,  $[\gamma(\theta) - \gamma(0)]$  – фазовая характеристика.

Собственная частота нагруженного преобразователя излучателя рассчитывается по формуле

$$\omega_n = \beta\omega_0, \quad (2.95)$$

здесь  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m_3 c_3}}$  – резонансная частота преобразователя без учета присоединенной массы,  $m_3, c_3$  – эквивалентные механические масса и гибкость излучателя.

С учетом поправки к резонансной частоте, присоединенной массы и реакции излучения можно этот коэффициент  $\beta$  рассчитать как

$$\beta = \delta \sqrt{1 - \left( \frac{X\delta^2}{2m_s\omega_0} \right)^2}, \text{ где } \delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{m_s}}} \quad (2.96)$$

*Пример.* Пульсирующая сфера с заданным радиусом  $a$  [5, 7]. Пусть на границе сферы колебательная скорость  $V_n$  является гармонической функцией

$$V_n(t) = V_0 \exp(i\omega t). \quad (2.97)$$

Такой излучатель называют пульсирующей сферой. Частота ее акустического излучения –  $\omega$ , длина волны –  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c_s}{\omega}$ ,  $c_s$  – по-прежнему скорость звука в жидкости. Очевидно, возникающее звуковое поле будет сферически симметричным. Тогда за точку приведения можно выбрать любую точку на поверхности сферы. Безразмерная скорость  $\bar{D}_n$  будет одновременно и единичным вектором нормали вектором нормали  $\bar{n}$  элемента поверхности  $dS$ .

Для волнового уравнения:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.98)$$

с граничным условием на сфере

$$V_n(t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = V_0 \exp(i\omega t) \quad (2.99)$$

и, учитывая условие излучения (2.62), для потенциала скорости получим:

$$\Phi = -\frac{1}{r} \frac{V_0 a^2}{1 + ika} \exp[i(\omega t - k(r - a))]. \quad (2.100)$$

Находим из (2.63) колебательную скорость в жидкости

$$V(r,t) = \frac{V_0 a^2}{1 + ika} \frac{1 + ikr}{r^2} \exp[i(\omega t - k(r - a))] \quad (2.101)$$

и звуковое давление

$$p' = \frac{V_0 a^2}{1 + ika} \rho \frac{i\omega}{r} \exp[i(\omega t - k(r - a))], \quad (2.102)$$

интенсивность излучателя

$$J = \frac{1}{2} \operatorname{Re} p^* V = \frac{V_0^2 a^4}{2(1 + k^2 a^2)} \frac{\rho_0 c_s k^2}{r^2}, \quad (2.103)$$

разность фаз  $\Delta\varphi$  между акустическим давлением и скоростью

$$\Delta\varphi = \arctan \frac{1}{kr}, \quad (2.104)$$

механический импеданс на  $r=a$  и с учетом  $c_s = \frac{\omega}{k}$  (см. (2.81), (2.85))

$$Z_M = \frac{F}{V} = \frac{p'S}{V} = 4\pi a^2 \rho_0 c_s \frac{ika}{1 + ika} = X + iY. \quad (2.105)$$

Отсюда

$$X = 4\pi a^2 \rho_0 c_s \frac{k^2 a^2}{1 + k^2 a^2}, \quad (2.106)$$

$$Y = 4\pi a^2 \rho_0 c_s \frac{ka}{1 + k^2 a^2}, \quad (2.107)$$

приведенная масса

$$M = \frac{Y}{\omega} = \frac{3M_0}{1+k^2a^2}, \quad (2.108)$$

здесь  $M_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$  – масса жидкости в объеме сферы. При  $ka \ll 1$  (низкие частоты) это будет  $M = 3M_0$ , при  $ka \gg 1$  (высокие частоты)  $M \rightarrow 0$ .

### 2.10. Радиационное давление

Акустическое радиационное давление  $p_a$  – это давление, испытываемое телом, находящимся в акустическом поле [5] (не путать с силой реакции поля на излучатель!). Если в (2.11) не учесть нелинейность  $(\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V}$ , то силу акустического давления можно записать как

$$F_i = -\oint_s T_{ij} n_j dS, \quad (2.109)$$

где тензор  $T_{ij} = p'\delta_{ij} + \rho_0 V_i V_j$ . Также  $n_j$  – нормаль к поверхности. При учете вязкости дополнительно появится тензор, соответствующий уравнению Навье–Стокса. Для нахождения постоянной составляющей силы  $F_i$  следует взять среднее по времени  $\langle F_i \rangle_t$ , где  $\langle \dots \rangle_t$  – усреднение по времени.

Учитывая, что для гармонической волны  $\langle p'_{(1)} \rangle_t = 0$  в первом приближении при разложении  $p' = p'_{(1)} + p'_{(2)} + \dots$  по порядкам малости, получим, что

$$\langle F_i \rangle_t = \rho_0 \langle V^2 \rangle_t. \quad (2.110)$$

По порядку величины сила радиационного давления может быть оценена как

$$F_a = \frac{l^2 p'^2}{\rho_0 c_s^2}. \quad (2.111)$$

Здесь  $l$  – характерный линейный размер тела, а  $l^2$  – его площадь. Или, в терминах радиационного давления,

$$p_a = \frac{F_a}{l^2} = \frac{p'^2}{\rho_0 c_s^2}. \quad (2.112)$$

Таким образом, радиационное давление квадратично акустическому давлению  $p'$  и величина его в линейной акустике весьма мала.

### ***2.11. Контрольные вопросы и задания***

- 1) Что такое упругая волна и каковы её основные характеристики?
- 2) Как скорость звука в среде зависит от ее физических свойств?
- 3) Выведите волновое уравнение для линейной акустики.
- 4) Как затухание звуковой волны зависит от свойств среды и частоты?
- 5) Что такое акустическое сопротивление и как его можно измерить?
- 6) Объясните принцип отражения и преломления звуковых волн на границе двух сред.
- 7) Как связаны между собой энергия, интенсивность и амплитуда звуковой волны?
- 8) Как можно использовать электроакустическую аналогию для решения акустических задач?
- 9) Каковы основные характеристики излучателей звука?
- 10) Как происходит излучение звука из диафрагмы динамика?
- 11) Что такое радиационное давление и как его можно рассчитать?
- 12) Как звуковые волны взаимодействуют с различными материалами, такими как жидкости, твердые тела, газы?
- 13) Как можно использовать акустические методы для исследования морского дна и подземных объектов?
- 14) Рассчитайте скорость звука в воде при температуре 20°C.
- 15) Определите, с какой скоростью распространяется звуковая волна в воздухе при температуре 0°C.

- 16) Определите коэффициент отражения звука от поверхности воды при нормальном падении.
- 17) Рассчитайте акустическое сопротивление стали.
- 18) Определите, на каком расстоянии от точечного источника звука интенсивность звука уменьшится в 4 раза.
- 19) Рассчитайте радиационное давление звуковой волны с интенсивностью  $10 \text{ Вт/м}^2$ .
- 20) Определите длину волны звука с частотой 1 кГц в воздухе.
- 21) Рассчитайте угол преломления звуковой волны при переходе из воздуха в воду.
- 22) Вычислите частоту звука, длина волны которого в воздухе равна 1 метр.

### 3. Упругие волны в твердых телах

Распространение акустических волн в твердых телах обусловлено силами межмолекулярного взаимодействия и их структурой. В макроскопическом описании речь идет об упругих свойствах твердых тел с учетом их строения. В отличие от жидкостей и газов, в твердых телах возможны сдвиговые напряжения и возникают как продольные, так и поперечные волны.

Будем считать в данном разделе твердое тело изотропным, что означает одинаковость его упругих свойств во всем объеме в любых направлениях. Также будем считать, что электрические и магнитные поля отсутствуют, и будем рассматривать два типа деформации: растяжение-сжатие и сдвиг.

Продольные деформации типа растяжение-сжатие вызывают продольные волны, а сдвиговые деформации соответственно поперечные волны. Между силами (напряжениями), приложенными к твердому телу, и деформациями существует связь, определяемая законом упругости Гука. Рассмотрим это на примере круглого металлического стержня длиной  $l$  и диаметром  $d$ . Пусть к стержню приложена продольная сила  $F$ . Для силы, отнесенной на единицу площади поверхности твердого тела, можно ввести понятие напряжения, как аналог давления

$$T = \frac{F}{\Delta S}. \quad (3.1)$$

В результате под действием продольной силы, направленной на растяжение или сжатие, средняя его длина изменится на величину  $\pm \Delta l$ . Относительное изменение длины металлического стержня можно считать величиной его (продольной) деформации

$$S = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.2)$$

При небольших напряжениях в пределах закона Гука обычно величина деформации прямо пропорциональна приложенному напряжению

$$T = E S. \quad (3.2)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $E$  – модуль Юнга.

Ситуацию можно представить себе как систему грузиков, связанных пружинками, когда при растяжении-сжатии системы меняется среднее расстояние между грузиками, а модуль Юнга, как модуль продольной упругости, соответствует жесткости пружинок. При растяжении-сжатии стержня его линейный поперечный размер (диаметр) изменяется на величину  $\Delta d$ . Это соответствует возникновению поперечной деформации. Теперь можно ввести характеристику в виде отношения относительного изменения поперечного сечения стержня  $\Delta d/d$  к относительному изменению длины  $\Delta l/l$ . Эта величина называется коэффициентом Пуассона:

$$\sigma = \frac{\Delta l / l}{\Delta d / d} = \frac{\Delta d}{d} \frac{E}{T}, \quad (3.3)$$

Она будет в рамках сделанных выше предположений константой, в конечном счете определяемой силами межмолекулярного взаимодействия в данном твердом теле. Обычно коэффициент Пуассона принимает значения от 0,05 до 0,5. Для металлов  $\sigma$  составляет  $\sim 0,25 - 0,35$ , для резины  $\sigma \approx 0,5$ . Таким образом, модуль продольной упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\sigma$  описывают упругие свойства изотропного материала. Отметим, что часто для описания поперечных деформаций пользуется модуль сдвига, определяемый как:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{(1 + \sigma)}. \quad (3.3)$$

Значения указанных выше модулей упругости приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Акустические свойства ряда твердых веществ

Вещество	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга, $E \cdot 10^{-10}$ Н/м <sup>2</sup>	Модуль сдвига, $\mu \cdot 10^{-10}$ Н/м <sup>2</sup>	Коэффициент Пуассона $\sigma$
Алюминий	2710	7,1	2,6	0,33
Медь	8900	12,3	4,55	0,35
Свинец	11340	1,6	0,57	0,44
Сталь	7700	20,6	8,0	0,29
Лед	900	10,1	4,0	-
Кварц	2200	7,2	3,1	0,17

В большинстве случаев возникает необходимость учитывать анизотропию реального твердого тела, и напряжения и деформации являются тензорами второго ранга, а константа в законе Гука – тензором четвертого ранга.

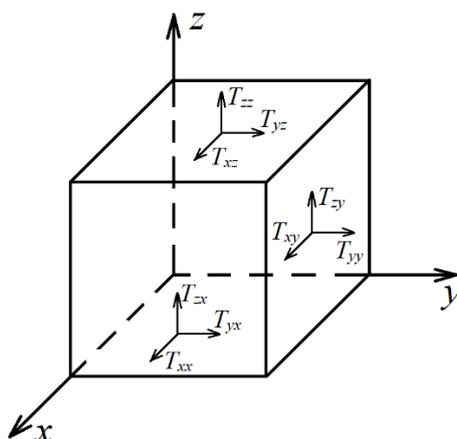


Рис.4. Пример направленности напряжений на гранях твердого тела

Тензор напряжений  $T_{ij}$  может быть представлен в виде матрицы из 9 элементов. Здесь  $i, j = x, y, z$  в трехмерном пространстве. Индекс  $i$  фиксирует

направление приложенного напряжения, индекс  $j$  – перпендикулярную ему плоскость. При этом диагональные элементы  $T_{ii}$  матрицы соответствуют силам.

При деформации твердого тела изменяется расстояние между его точками. Введем вектор смещения для двух точек 1 и 2:

$$\bar{u}_M = \bar{r}_1 - \bar{r}_2, \quad (3.4)$$

формирующим продольные деформации, а остальные (недиагональные) – поперечные (сдвиговые) деформации.

В результате деформирования твердого тела происходит изменение расстояний между фиксированными точками в нем. Смещение в разных направлениях определим как  $u_k, u_l$  и в декартовой системе координат тензор деформации можно определить как

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial q_l} + \frac{\partial u_l}{\partial q_k} \right), \quad q_l, q_k = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $k, l, q_l, q_k$  соответствуют  $x, y, z$ .

Здесь производные в скобках определяют относительные деформации в разных направлениях. Диагональные элементы матрицы  $S_{kk}$  связаны с продольной деформацией. Отметим, что тензоры напряжений и деформаций являются симметричными  $T_{ij} = T_{ji}, S_{kl} = S_{lk}$ .

В изотропном твердом теле связь между тензором напряжений и тензором деформаций можно выразить в виде закона Гука с двумя константами – модулями упругости  $\lambda$  и  $\mu$ , называемыми также коэффициентами Ламе.

$$T_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}. \quad (3.6)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  - единичная матрица Кронекера  $\begin{cases} \delta = 1, & i = j \\ \delta = 0, & i \neq j \end{cases}$ , диагональные элементы равны единице, а остальные – нулю. Размерность модулей  $F/S$  [Н/м<sup>2</sup>].

На практике обычно ограничиваются следующими модулями упругости:  $E$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $K$ . Здесь  $K$  – модуль объемной упругости. Эти модули связаны между собой соотношениями:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{(1 + \sigma)}, \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad K = \lambda + 2\mu. \quad (3.7)$$

С учетом сказанного выше для движущегося элемента твердого тела можно записать второй закон ньютона ( $F=ma$ ) в виде:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = F_i. \quad (3.8)$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность,  $u_i$  – смещение в направлении оси  $i$ ,  $T_{ij}$  – тензор напряжений.

### 3.1. Скорости продольных и поперечных волн

Принимая во внимание уравнение движения (3.8) и закон Гука, можно получить волновое уравнение для описания распространения упругих волн в твердом теле:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } u - \mu \text{rot rot } u. \quad (3.9)$$

Векторное акустическое поле можно представить в виде потенциальной  $u_l$  и векторной  $u_t$  частей:

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t. \quad (3.10)$$

Для них будут, соответственно,  $\text{rot } \vec{u}_l = 0$  и  $\text{div } \vec{u}_t = 0$ , и можно использовать функцию потенциала  $\varphi$  и ротора  $\vec{u}_l = \text{rot } \vec{a}$  и вихря  $\vec{u}_t = \text{grad } \varphi$ . Здесь  $\varphi$  и  $\vec{a}$  – скалярный и векторный потенциалы. Из (3.10) и (3.9) получаем два волновых акустических уравнения для продольных и поперечных волн (уравнения Даламбера)

$$\nabla^2 \vec{u}_l - \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 \vec{u}_t - \frac{\rho_0}{\mu} \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = 0. \quad (3.12)$$

Их фазовая скорость по аналогии с (2.18) может быть определена следующим образом. В уравнении (3.11)  $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$  – фазовая скорость  $V_l$  продольных волн:

$$V_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{E(1 - \sigma)}{\rho_0(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}}. \quad (3.13)$$

Фазовая скорость поперечных (сдвиговых) волн из уравнения (3.12) равна

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (3.15)$$

Нетрудно заметить, что  $V_l > V_t$ .

Если мы будем рассматривать гармонические волны, то из (3.11), (3.12) можно получить уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{u}_l + k_l^2 \vec{u}_l = 0, \quad (3.16)$$

$$\nabla^2 \vec{u}_t + k_t^2 \vec{u}_t = 0. \quad (3.17)$$

Здесь  $k_l = \frac{\omega}{V_l}$ ,  $k_t = \frac{\omega}{V_t}$  – волновые числа для продольных и поперечных волн.

Пусть плоская гармоническая волна распространяется в направлении оси  $z$ . Тогда получим:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k_l^2 u_z = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + k_t^2 u_x = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + k_t^2 u_y = 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.18) описывает распространение продольной волны, в ней направления вектора смещения совпадает с направлением распространения плоской акустической волны. В поперечной волне (3.19) и (3.20) компоненты вектора смещения  $u_x$  и  $u_y$  направлены перпендикулярно оси  $z$ . Решения уравнений (3.18-3.20) определяют поле плоской акустической волны в твердой изотропной среде

$$u_x = u_{x0} e^{-k_l z}, \quad u_y = u_{y0} e^{-k_t z}, \quad u_z = u_{z0} e^{-k_l z}. \quad (3.21)$$

Первые две составляющие вектора смещения определяют сдвиговую волну,  $z$ -я составляющая определяет продольную волну.

### 3.2. Распространение акустических волн на границе раздела твердых тел

Для решения задач распространения упругих волн на границе раздела двух твердых тел необходимо учесть условия непрерывности нормальных компонент элементов тензора напряжений на границе. Будем считать, что поперечная волна поляризована вертикально, если вектор смещения в этой волне лежит в плоскости падения (рис.5), и поляризована горизонтально, если колебания частиц происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Число типов волн в задачах преломления и отражения акустических упругих колебаний увеличивается за счет деления на волны продольного и поперечного типа и эффекта поляризации поперечных волн.

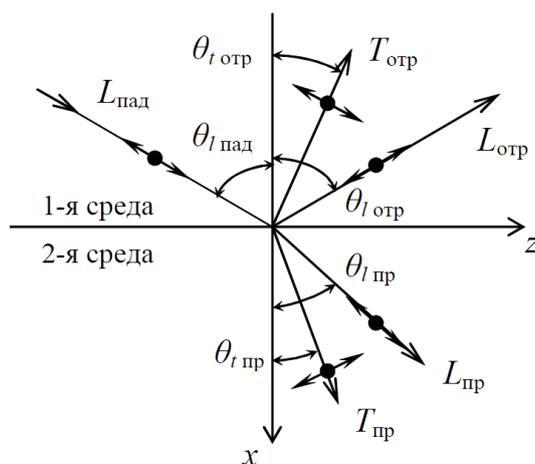


Рис.5. Наклонное падение продольной волны на границу раздела твердых тел

*Задача 1. На границу раздела твердых тел под углом  $\theta_{\text{пад}}$  падает продольная акустическая волна.*

В этом случае отраженная и прошедшая волны будут состоять из двух видов волн – продольной и сдвиговой вертикальной поляризации. Трансформация падающей продольной волны связана с изменением параметров движения частиц на поверхности твердого тела. На рис.5 отраженные продольная и

поперечная волны обозначены соответственно  $L_{отр}$  и  $T_{отр}$ , прошедшие –  $L_{пр}$  и  $T_{пр}$ . Направление колебания частиц среды условно показаны стрелками. Сдвиговые волны  $T_{отр}$  и  $T_{пр}$  поляризованы вертикально.

Для рассматриваемой ситуации закон Снеллиуса о падении, отражении и преломлении волн имеет вид:

$$\frac{\sin \theta_{l_{пад}}}{V_{l_{пад}}} = \frac{\sin \theta_{l_{отр}}}{V_{l_{отр}}} = \frac{\sin \theta_{t_{отр}}}{V_{t_{отр}}} = \frac{\sin \theta_{l_{пр}}}{V_{l_{пр}}} = \frac{\sin \theta_{t_{пр}}}{V_{t_{пр}}}. \quad (3.22)$$

Здесь  $V_{l_{пад}} = V_{l_{отр}}$  – скорость падающей и отраженной продольной волн в первой среде;  $V_{t_{отр}}$  – скорость отраженной сдвиговой волны в первой среде;  $V_{l_{пр}}$  и  $V_{t_{пр}}$  – скорости распространения прошедших продольной и сдвиговой волн во второй среде. Продольная волна падает на границу раздела под углом  $\theta_{l_{пад}}$ . Угол отражения продольной волны  $\theta_{l_{отр}} = \theta_{l_{пад}}$ , угол отражения сдвиговой волны –  $\theta_{t_{отр}}$ , углы преломления прошедших продольной и сдвиговой волн обозначены соответственно  $\theta_{l_{пр}}$  и  $\theta_{t_{пр}}$ . Принимая во внимание, что скорость поперечных волн меньше, чем продольных, получаем, что для отраженных волн  $V_{t_{отр}} < V_{l_{отр}}$ ,  $\theta_{t_{отр}} < \theta_{l_{отр}}$ , и для преломленных  $V_{t_{пр}} < V_{l_{пр}}$  и  $\theta_{t_{пр}} < \theta_{l_{пр}}$ .

Из выражения (3.22) видно, что направление распространения отраженных и прошедших волн зависит от скорости продольных и сдвиговых волн в рассмотренных средах, а следовательно, от параметров упругости и плотности этих сред. Пусть скорость продольной волны во второй среде больше, чем в первой ( $V_{l_{пр}} > V_{l_{пад}}$ ). Приравняв  $\theta_{l_{пр}} = \frac{\pi}{2}$ , из (3.22) находим критический угол падения

$$\sin \theta_{кр1} = \frac{V_{l_{пад}}}{V_{l_{пр}}},$$

при котором прошедшая продольная  $L_{пр}$ -волна начинает «скользить» вдоль поверхности раздела, т.е. начиная с этого угла наблюдается полное отражение для продольных  $L$ -волн. При дальнейшем увеличении угла падения

до значения, определяемого выражением  $\sin \theta_{\text{кр}2} = \frac{V_{l\text{пад}}}{V_{t\text{пр}}}$ , во второй среде пропадет и прошедшая сдвиговая  $T_{\text{пр}}$ -волна. Она тоже начинает скользить вдоль границы раздела. При углах падения  $\theta_{\text{пад}} > \theta_{\text{кр}2}$  граница раздела будет служить абсолютным отражателем.

*Задача 2. На границу раздела падает сдвиговая волна, поляризованная в плоскости падения (вертикальная поляризация).*

В этом случае также наблюдается трансформация падающей волны на сдвиговую и продольную волны (рис.6).

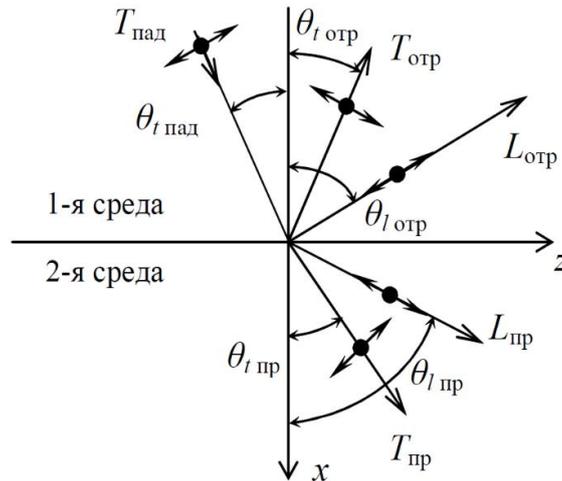


Рис.6. Наклонное падение сдвиговой волны вертикальной поляризации на границу раздела твердых тел

Теперь закон Снеллиуса запишется в виде:

$$\frac{\sin \theta_{t\text{пад}}}{V_{t\text{пад}}} = \frac{\sin \theta_{t\text{отр}}}{V_{t\text{отр}}} = \frac{\sin \theta_{l\text{отр}}}{V_{l\text{отр}}} = \frac{\sin \theta_{t\text{пр}}}{V_{t\text{пр}}} = \frac{\sin \theta_{l\text{пр}}}{V_{l\text{пр}}}. \quad (3.23)$$

Из (3.23) аналогично предыдущему случаю следует, что  $V_{t\text{отр}} = V_{t\text{пад}}$ ,  $\theta_{t\text{отр}} < \theta_{t\text{пад}}$ ,  $V_{l\text{отр}} > V_{t\text{пад}}$ ,  $\theta_{l\text{отр}} > \theta_{t\text{пад}}$ ,  $V_{l\text{пр}} > V_{t\text{пр}}$ , то  $\theta_{l\text{пр}} > \theta_{t\text{пр}}$ . Угол отражения

продольной волны всегда больше угла падения, поэтому расщепление лучей в первой среде наблюдается до момента, когда продольная волна начинает скользить вдоль границы раздела  $\theta_{\text{отр}} = \frac{\pi}{2}$ . При дальнейшем увеличении угла падения в первой среде остается лишь одна сдвиговая волна.

Пусть скорость поперечной волны во второй среде больше, чем в первой,  $V_{\text{тпр}} > V_{\text{тпад}}$ . Считая  $\theta_{\text{тпр}} = \frac{\pi}{2}$ , находим первый критический угол падения  $\sin \theta_{\text{кр1}} = \frac{V_{\text{тпад}}}{V_{\text{тпр}}}$ , при котором прошедшая продольная волна распространяется вдоль поверхности раздела и наблюдается полное отражение. Приравняв  $\theta_{\text{тпр}} = \frac{\pi}{2}$  находим второй угол падения из условия  $\sin \theta_{\text{кр2}} = \frac{V_{\text{тпад}}}{V_{\text{тпр}}}$ , при котором прошедшая сдвиговая волна «скользит» вдоль границы и поле во второй среде отсутствует.

*Задача 3. На границу раздела двух твердых сред падает сдвиговая волна, поляризованная горизонтально.*

В этом случае отраженный и прошедший лучи образуются сдвиговыми волнами, поляризованными также горизонтально (рис.7), поскольку частицы в среде 1 совершают колебания только перпендикулярно плоскости падения.

Закон Снеллиуса теперь имеет вид

$$\frac{\sin \theta_{\text{тпад}}}{V_{\text{тпад}}} = \frac{\sin \theta_{\text{тотр}}}{V_{\text{тотр}}} = \frac{\sin \theta_{\text{тпр}}}{V_{\text{тпр}}}. \quad (3.23)$$

Отметим, что если в одной из сред распространение сдвиговых волн невозможно (например, граница твердого тела и жидкости), то в ней остается лишь продольная волна, в то время как в твердом теле будет наблюдаться эффект трансформации. В случае падения сдвиговой волны горизонтальной поляризации из твердого тела на границу с жидкостью в твердом теле наблюдается

отраженная сдвиговая волна горизонтальной поляризации, в то время как прошедшей волны в жидкость вообще не будет.

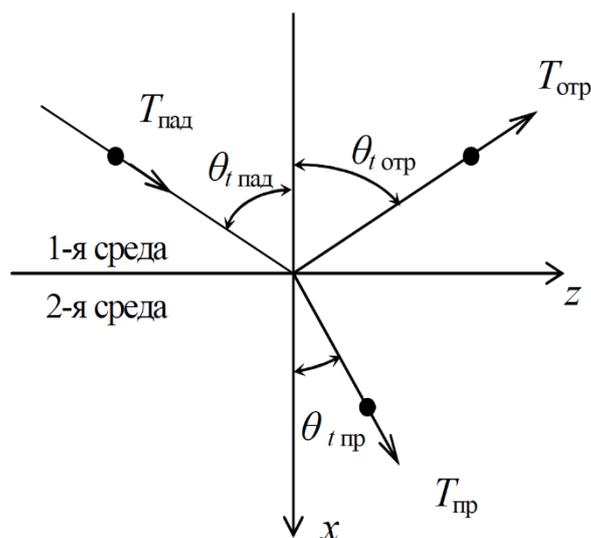


Рис.7. Падение сдвиговой волны горизонтальной поляризации на границу раздела твердых сред

### 3.3. Поверхностные акустические волны

Поверхностные акустические волны нашли широкое применение в радиотехнике для создания таких устройств, как линии задержки и фильтры. Учитывая, что длина акустической волны значительно меньше электромагнитной волны той же частоты, все устройства получаются существенно более компактными. Поверхностные акустические волны отличаются от пространственных тем, что вся их энергия сосредоточена вблизи границы раздела материалов с различными свойствами. Теория поверхностных волн впервые была предложена Дж. У. Рэлеем. Он теоретически доказал возможность распространения в тонком поверхностном слое твердого тела, граничащего с воздухом, поверхностных акустических волн, которые принято называть волнами Рэлея (*R*-волна). Действительно, пусть имеется плоская граница вакуум – изотропная твердая среда, граница раздела совпадает с плоскостью  $xOy$ , а ось  $z$  направлена вглубь твердой среды (рис.8).

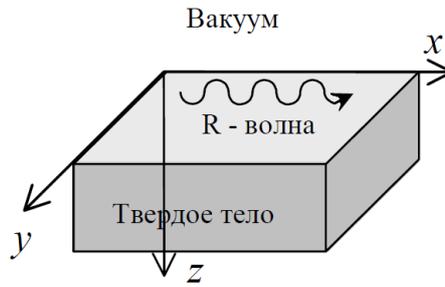


Рис.8. Образование поверхностной волны Рэлея на границе твердого тела с вакуумом

Исходными для решения задачи Гельмгольца для плоских гармонических колебаний являются волновые уравнение для вектора смещения частиц среды твердого тела (см. 3.16, 3.17):

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{u}_l + k_l^2 \vec{u}_l = 0 \\ \nabla^2 \vec{u}_t + k_t^2 \vec{u}_t = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

В данной задаче на границе с вакуумом напряжения отсутствуют:  $T_{iz}=0$ , где  $i=x, y, z$ . Решение ищем в виде плоских гармонических волн, бегущих вдоль оси  $x$  в твердом полупространстве.

Рэлеевская волна представляет собой совокупность продольных и сдвиговых компонентов вектора смещения. Решение уравнений (3.25) для смещения частиц в поверхностной волне Рэлея записывается в следующем виде:

$$u_x = A \left[ e^{-qz} + \frac{2qs}{(k_R^2 + s^2)} e^{-sz} \right] e^{i(\omega t - k_R x)}, \quad (3.26)$$

$$u_z = A \frac{iq}{k_R} \left[ e^{-qz} - \frac{2k_R^2}{(k_R^2 + s^2)} e^{-sz} \right] e^{i(\omega t - k_R x)}, \quad (3.27)$$

$$u_y = 0, \quad (3.28)$$

где

$$q = \sqrt{k_R^2 - k_l^2}, \quad s = \sqrt{k_R^2 - k_t^2}, \quad (3.29)$$

$$k_l = \frac{\omega}{V_l}, \quad k_t = \frac{\omega}{V_t}, \quad k_R = \frac{\omega}{V_R}, \quad (3.29)$$

а  $V_l, V_t, V_R$  – скорости распространения продольной, поперечной и поверхностной волн. Из (3.26), (3.27) видно экспоненциальное убывание амплитуды смещений при удалении от границы внутрь твердого тела. Можно ввести понятие толщины локализации волны Рэлея, которая составляет  $\sim 1-2 \lambda_R$ .

Отметим, что из-за сдвига фазы колебаний  $u_z$  относительно продольной составляющей  $u_x$  на четверть ( $T/4$ ) периода ( $\pi/2$  в формуле (3.27)), движение частиц среды происходит по эллиптической траектории. Большая ось эллипса перпендикулярна поверхности твердого тела, а малая – параллельна направлению распространения волны.

Указанная выше скорость поверхностной волны  $V_R$  находится из решения дисперсионного уравнения

$$\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^6 - 8\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^4 + 8\left[3 - 2\left(\frac{V_t}{V_l}\right)^2\right]\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^2 - 16\left(1 - \frac{V_t}{V_l}\right)^2 = 0. \quad (3.30)$$

Это уравнение имеет действительный корень – корень Рэлея, который приближенно можно представить в следующем виде:

$$\frac{V_R}{V_t} \approx \frac{0,875 + 1,125\sigma}{1 + \sigma}, \quad (3.31)$$

или  $V_R \approx V_t \frac{0,875 + 1,125\sigma}{1 + \sigma}$ ,  $\sigma$  – коэффициента Пуассона.

Таким образом, скорость  $V_R$  зависит только от упругих свойств твердого тела и не зависит от частоты. Волна Рэлея в определенном смысле аналогична поперечной волне.

Кроме рэлеевской существует целый ряд других типов поверхностных акустических волн (ПАВ): волны Лява, волны Лэмба и т.д.

Любопытно, что впервые на поверхностные волны обратили внимание сейсмологи при анализе землетрясений, когда регистрируется 3 сигнала, приходящих от эпицентра земных толчков с разными скоростями: первый – переносимый продольной акустической волной; второй – поперечная волна; третий – поверхностная волна.

Широта применения поверхностных акустических волн в радиотехнике обусловлена их малым затуханием, небольшой скоростью распространения, несколько меньшей, чем у сдвиговой волны (3.31), отсутствие дисперсии и простота их генерации в широком частотном диапазоне.

### ***3.4. Контрольные вопросы и задачи***

- 1) Опишите основные типы упругих волн в твердых телах и их отличительные особенности.
- 2) Как связаны скорость распространения упругих волн в твердом теле с его упругими свойствами и плотностью?
- 3) В чем заключается эффект расщепления упругой волны при падении на границу твердого тела?
- 4) Опишите физический смысл граничного условия, используемого при решении задачи о распространении упругих волн в твердом теле.
- 5) Чем отличается распространение поверхностных волн от распространения продольных и поперечных волн в объеме твердого тела?
- 6) Опишите свойства рэлеевской волны и ее роль в различных областях науки и техники.
- 7) Как связаны между собой понятия акустического сопротивления и скорости распространения упругих волн в твердом теле?

- 8) Каким образом можно использовать принцип суперпозиции волн при анализе сложных акустических процессов в твердых телах?
- 9) Определите скорость продольных и поперечных волн в стальном стержне с модулем Юнга  $E = 200$  ГПа, модулем сдвига  $G = 79$  ГПа и плотностью  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>.
- 10) Плоская продольная волна с частотой 1 кГц падает на границу раздела между стальным ( $E = 200$  ГПа,  $G = 79$  ГПа,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>) и алюминиевым полупространствами ( $E = 70$  ГПа,  $G = 26$  ГПа,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>) под углом  $30^\circ$ . Рассчитайте коэффициенты отражения и преломления для продольных и поперечных волн. Постройте графики зависимости коэффициентов отражения и преломления от угла падения.
- 11) Определите скорость распространения рэлеевской волны в стальном стержне, используя значения модуля Юнга  $E = 200$  ГПа, модуля сдвига  $G = 79$  ГПа и плотности  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>. Проанализируйте, как изменяется глубина проникновения рэлеевской волны с изменением частоты. Исследуйте, как меняется траектория движения частиц среды при распространении рэлеевской волны в зависимости от соотношения между модулем Юнга и модулем сдвига.
- 12) Объясните, как можно использовать поверхностные акустические волны для обнаружения дефектов в материалах, например, трещин или пустот. Предложите схему эксперимента по неразрушающему контролю с использованием поверхностных волн.

#### 4. Упругие волны в насыщенных пористых средах

Механические свойства горных пород, как и других твердых тел, традиционно описываются основными упругими характеристиками: модулем Юнга, модулем сдвига и коэффициентом Пуассона. Осадочные горные породы часто представляют собой пористые среды, состоящие из твердого скелета и системы пор, заполненных флюидом (жидкостью или газом). Для описания таких пористых сред данного набора упругих параметров становится недостаточно из-за сложного влияния структуры пор, их насыщения флюидами и неоднородности деформационного поведения.

Математическое моделирование многофазных континуумов, в том числе насыщенных жидкостью пористые среды, берет начало более века назад – с исследований процессов консолидации грунтов. Несмотря на значительное количество прикладных задач, требующих учета многокомпонентности (геофизика, нефтедобыча, строительная механика), создание общепринятой модели насыщенной пористой среды остается актуальной проблемой. Основная сложность заключается в описании взаимодействия фаз, фазовых переходов, теплообмена и сопутствующих нелинейных эффектов. Даже в упрощенных случаях (без учета фазовых переходов и температурных эффектов) модель пористо-упругой среды существенно сложнее классического упругого или вязкоупругого континуума. Это связано со способностью поровой жидкости перераспределяться внутри пористой матрицы, что принципиально отличает такие среды от однородных упругих тел. В последних элементарный объем предполагает, что частицы колеблются около положений равновесия, оставаясь в относительной близости друг к другу. В пористых же средах частицы жидкости могут значительно удаляться от исходных положений, что критически важно при анализе волновых процессов, особенно на высоких частотах, где динамика жидкости играет ключевую роль.

Исторически сложились два основных подхода к описанию механики насыщенных пористых сред [8]:

- Теория Fillunger (1913) – основана на концепции несмешивающихся взаимопроницающих континуумов с внутренним взаимодействием.
- Теория Terzaghi (1923) – более интуитивная модель, заложившая основы механики грунтов. Terzaghi ввел понятие эффективных напряжений и применил закон Дарси для описания фильтрации жидкости в упругом скелете.

Несмотря на взаимную критику, оба ученых считаются основоположниками теории пористых сред [8]. Их работы охватывали ключевые эффекты: капиллярность, трение жидкости о скелет, изменение порового давления. Подробный исторический обзор этих подходов представлен в работе [9].

Распространение упругих волн в насыщенных пористых средах имеет особенности, связанные с их структурой. Для описания упругих свойств используются модели, учитывающие взаимодействие между твердой и жидкой фазами. Наиболее широко применяемыми являются уравнения Гассмана [10] и теория Френкеля-Био-Николаевского [11, 12, 13].

#### ***4.1. Уравнения Гассмана***

Модель Гассмана [10] представляет пористую среду в виде двухфазной системы: твердого каркаса, состоящего из кристаллов или зерен минералов, и порового флюида (нефти, газа или воды). Упругие свойства каркаса описываются макроскопическими модулями, определяющими его сопротивление деформации. Ключевой характеристикой пустотного пространства горных пород, влияющей на упругие свойства пористой среды, является пористость – безразмерная величина, определяемая как отношение объёма пор к полному объёму образца  $n = V_{por}/V$ . Основное допущение модели заключается в том, что пористость распределена в среде статистически равномерно, а сама среда является изотропной, то есть ее свойства не зависят от направления.

Вывод уравнений Гассмана основан на концепции эффективной среды, в которой неоднородная пористая среда заменяется эквивалентной однородной изотропной системой. Такой подход, предполагающий, что усредненное поведение модели соответствует макроскопическому отклику реальной среды,

позволяет существенно упростить математический анализ и получить замкнутые аналитические решения. Двухфазная система в модели Гассмана характеризуется следующими параметрами:

- пористость –  $n$ ;
- эффективные упругие модули насыщенного материала –  $K, G, \rho$ ;
- упругие модули твердой фазы (минерального вещества), слагающей скелет –  $K_m, G_m, \rho_m$ ;
- упругие модули флюида –  $K_f, \rho_f$ ;
- эффективные упругие модули каркаса ненасыщенной породы –  $K_{dry}, G_{dry}$ .

Еще одним допущением, используемым в модели Гассмана, является предположение о том, что модуль сдвига  $G$  двухфазной среды не зависит от свойств флюида, заполняющего поры. Это означает, что модуль сдвига остается равным модулю сдвига сухого каркаса  $G = G_{dry}$ . Однако важно отметить, что  $G_{dry}$  не равен модулю сдвига минерального вещества  $G_m$ . Плотность пористой среды, насыщенной флюидом, является средневзвешенной величиной между плотностью твердой фазы и плотностью флюида. Уравнения Гассмана представляют собой формулы для расчета модуля всестороннего сжатия пористых насыщенных сред, общее выражение для которого имеет вид:

$$F(K, K_m, K_{dry}, K_f, n) = 0. \quad (4.1)$$

Любой из пяти параметров, входящих в это уравнение, может быть вычислен, если известны значения остальных четырех параметров. Формы уравнений Гассмана, которые позволяют рассчитать эффективные упругие модули насыщенного материала, имеют следующий вид:

$$K = K_{dry} + \frac{\left(1 - \frac{K_{dry}}{K_m}\right)^2}{\frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_m} - \frac{K_{dry}}{K_m^2}}, \quad (4.2)$$

$$G = G_{dry}; \quad (4.3)$$

$$\rho = \rho_m(1-n) + \rho_f n. \quad (4.4)$$

Уравнения Гассмана устанавливают количественную связь между упругими свойствами насыщающего флюида и эффективными упругими характеристиками породы. На основе данной модели возможно определение полного набора макроскопических упругих параметров флюидонасыщенной пористой среды. В частности, скорость продольных волн рассчитывается по формуле:

$$V_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}. \quad (4.5)$$

Скорость поперечных волн:

$$V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{G_{dry}}{\rho}}. \quad (4.6)$$

Следует подчеркнуть, что модуль сдвига горной породы, определяющий скорость поперечных волн, не зависит от упругих свойств насыщающего флюида. Наблюдаемые изменения скорости поперечных волн при смене типа флюида связаны исключительно с вариациями плотности системы.

Для расчета упругих характеристик насыщенной пористой среды с помощью уравнений Гассмана необходимо знать упругие модули «сухого» скелета  $K_{dry}$  и  $G_{dry}$ . Эти параметры часто определяются эмпирически, используя различные модели, например, обобщенную модель критической пористости Нура:

$$K_{dry} = K_m \left( 1 - \frac{n}{n_{cr}} \right)^a, \quad n < n_{cr}, \quad (4.7)$$

$$G_{dry} = G_m \left( 1 - \frac{n}{n_{cr}} \right)^b, \quad n < n_{cr}, \quad (4.8)$$

где  $n_{cr}$  – критическая пористость, а  $a$  и  $b$  – коэффициенты, калибруемые на результаты измерений. Такая модель хорошо согласуется с экспериментальными данными и подтверждена результатами численного моделирования.

В этих уравнениях критическая пористость – это значение пористости, при превышении которого материал теряет свою жесткость. Например, песчаник, при достижении критической пористости, превращается в песок, а насыщенная порода – во взвесь. При пористости выше критической, модуль Юнга и модуль сдвига сухого каркаса считаются равными нулю  $K_{dry} = G_{dry} = 0$ . В этом случае уравнение Гассмана упрощается и превращается в уравнение Вуда. Параметры  $a$  и  $b$  в уравнении зависят от множества факторов, определяющих структуру породы, таких как форма и размер пор, тип контакта между зернами, форма и состав минералов.

Теория Гассмана находит применение как при определении статических упругих характеристик, так и при моделировании динамических процессов, включая прогнозирование скоростей распространения упругих волн в коллекторах. Однако область ее применимости ограничивается рядом ключевых допущений:

- предполагается, что минеральный скелет и флюид движутся синхронно, то есть отсутствует скольжение между ними. Изменение элементарного объема породы равно сумме изменений объема флюида и твердой фазы;
- свойства флюида не оказывают влияния на модуль сдвига породы;
- напряжение в породе складывается из напряжения в скелете и порового давления, которое является давлением во флюиде, заполняющем поры.

Первое ключевое допущение теории Гассмана о синхронном движении скелета и флюида ограничивает её применимость в динамических задачах низкочастотным диапазоном. При повышении частоты, когда длина волны

становится сравнимой с характерным размером пор, возникает относительное движение фаз (эффект проскальзывания), приводящее к частотной дисперсии волновых скоростей и диссипации энергии. Для корректного описания таких эффектов необходимо привлекать более общие подходы, в частности теорию Френкеля-Био-Николаевского, учитывающую межфазное взаимодействие. Уравнения Гассмана выступают как низкочастотное приближение этой теории при выполнении определенных условий.

Частотный диапазон, в котором теория Гассмана дает точные результаты, ограничен. Его верхняя граница обычно определяется как 10% от резонансной частоты Био [11]:

$$f_{max} = 0,1f_{Bio} = 0,1 \frac{\eta n}{2\pi k \rho_f}, \quad (4.9)$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость флюида,  $k$  – коэффициент проницаемости (абсолютная проницаемость горной породы). Резонансная частота Био характеризует переход от низкочастотного режима, когда скелет и флюид движутся синхронно, к высокочастотному, когда флюид проскальзывает относительно скелета.

#### ***4.2. Основы теории Френкеля-Био-Николаевского***

Обобщение модели Terzaghi на трехмерный случай было выполнено Био (Biot M.A.), разработавшим теорию пористых сред, насыщенных вязкой жидкостью. В основе его подхода лежит принцип соответствия: уравнения механики пористых сред формально совпадают с уравнениями классической упругости при замене упругих коэффициентов соответствующими операторами [12]. Первые работы Био касались консолидации грунтов и связи напряжений с деформациями. Параллельно Яков Ильич Френкель (1894-1952) в 1944 г. впервые рассмотрел распространение акустических волн в насыщенных пористых средах [11], что положило начало волновой динамике таких систем.

Ключевой вклад Био состоит в предсказание трех типов волн в пористых средах [12]:

- быстрая продольная волна – близка по природе к волнам в упругих средах, слабо затухает;
- поперечная волна – также аналогична волнам в упругих телах;
- медленная продольная волна (волна Био, II рода) – уникальна для пористых сред, характеризуется сильным затуханием и низкой скоростью.

Виктор Николаевич Николаевский (1935-2022) – выдающийся советский и российский геомеханик, внесший значительный вклад в развитие механики деформируемых пористых сред, включая теорию распространения упругих волн. Его работы охватывают как фундаментальные аспекты, так и прикладные задачи, связанные с фильтрацией, волновыми процессами и динамикой многофазных сред. Николаевский дополнил и обобщил модель Био, уделяя особое внимание влиянию вязкости и инерции флюида на волновые процессы; неупругим эффектам (пластичность, диссипация) в скелете пористой среды; роли градиентов давления в формировании медленных волн. В отличие от Био, который рассматривал преимущественно линейную упругую модель, Николаевский исследовал нелинейные эффекты, возникающие при больших деформациях и высокоамплитудных воздействиях.

В монографии [13] Николаевский развил теорию, объединяющую: уравнения движения скелета и флюида с учетом инерционного взаимодействия; условия на границах раздела сред, важные для сейсмических и акустических приложений; модели затухания волн, связанные с внутренним трением и неупругими свойствами матрицы.

Теория Френкеля-Био-Николаевского долгое время оставалась гипотетической, пока в конце прошлого столетия не были получены экспериментальные подтверждения существования медленной волны. Так, по данным работы [8] Plona T.J. в 1980 году обнаружил эту волну на ультразвуковых частотах (500 кГц) в искусственных водонасыщенных средах (пористость 8–28 %), Johnson D.L. в том же году исследовал свойства волны Био в газонасыщенных средах, Kelder и Smeulders в 1997 году наблюдали ее в естественных водонасыщенных породах.

Медленная продольная волна наиболее выражена в средах с высокой сжимаемостью порового флюида (например, газов). Ее регистрация затруднена из-за малой амплитуды, сильного затухания и наложения сигналов от других волн. Тем не менее, игнорирование этой волны приводит к значительным ошибкам в оценке затухания быстрой продольной и поперечной волн.

Теория Френкеля-Био-Николаевского не только качественно, но и количественно корректно описывает волновые процессы в пористых средах, включая скорости, амплитуды и частотную зависимость затухания. Дальнейшее развитие модели включает учет анизотропии скелета, вязкоупругих свойств, нелинейных эффектов при высоких амплитудах.

### ***4.3. Контрольные вопросы и задания***

- 1) Чем отличаются упругие свойства насыщенных пористых сред от свойств сплошных твердых тел?
- 2) Как связаны упругие модули минерального скелета, флюида и пористой среды?
- 3) Каковы основные допущения модели Гассмана?
- 4) Что такое критическая пористость и как она влияет на упругие свойства породы?
- 5) Объясните физический смысл резонансной частоты Био.
- 6) Какие факторы могут привести к дисперсии скорости волн в пористой среде?
- 7) Как можно использовать уравнения Гассмана для оценки скорости распространения сейсмических волн в горных породах?
- 8) Какие методы можно использовать для определения упругих свойств "сухого" скелета породы?
- 9) Как можно использовать данные о скорости распространения упругих волн для определения свойств флюида, заполняющего поры?
- 10) Как можно использовать уравнения Гассмана для решения задач о вытеснении флюида из пористой среды?

- 11) Рассчитайте скорость продольных и поперечных волн в пористой среде, используя уравнения Гассмана.
- 12) Проведите анализ влияния пористости на скорость распространения упругих волн в пористой среде.
- 13) Определите резонансную частоту Био для заданного типа породы и флюида.
- 14) Проанализируйте, как изменение упругих свойств флюида влияет на скорость распространения упругих волн в пористой среде.
- 15) Предложите способы определения упругих характеристик пористой среды с помощью экспериментальных методов.
- 16) Проведите анализ применения уравнений Гассмана в практических задачах нефтяной и газовой геологии, геофизики и сейсморазведки.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lindsay R. B. The Story of Acoustics // Journal of the Acoustical Society of America. – 1966. – Vol. 39. – P. 629-644.
2. Есипов И. Физика звука // Квант. – 2018. – Т. 12. – С. 8–15.
3. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука в 2-х томах. – М.: Гос. Изд-во техн. лит-ры, 1955. – 980 с.
4. Насыров А.М., Христофоров А.В. Волновые процессы. Часть 7. Распространение упругих волн. Учебно-методическое пособие. – Казань, 1998. – 53 с.
5. Насыров А. М., Овчинников М.Н. Волновые процессы. Часть 8. Акустические колебания и волны. Учебное пособие. – Казань, 2003. – 32с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика (том VI), – М.: Наука, 1988. – 733 с.
7. Лепендин Л.Ф. Акустика. – М.: Высшая школа, 1978. – 448 с.
8. Городецкая Н.С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акустичний вісник. 2007. – Т. 10, N 2. – С. 43-63.
9. De Boer R. Theory of porous media. Highlights in historical development and current state. – Berlin: Springer, 2000.
10. Gassmann F. Elastic waves through a parking of spheres // Geophysics. – 1951.– Vol. 16.– P. 673–685.
11. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. – 1944. – Т.8, N 4.– С. 133–149.
12. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. Part I. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– Vol. 28, N 2. – P. 168-178.
13. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред – М.: Недра, 1984. – 232 с.
14. Акустика в задачах. Учеб. рук-во.: Для вузов / Под ред. С.Н. Гурбатов и О.В. Руденко. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 336 с.

## Примеры решения задач [14]

**Задача 1.**

Найти решение волнового уравнения для бегущей плоской волны. Показать, что звуковая волна является продольной. Установить связь между возмущениями давления, плотности и колебательной скоростью в такой волне.

**Решение**

1. Для плоской волны, распространяющейся по оси  $x$ , волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{П.1})$$

где  $c_s$  – волновая скорость (скорость звука),  $\Phi(x, t)$  – потенциал скорости. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Phi(x, t) = F_1(x - c_s t) + F_2(x + c_s t). \quad (\text{П.2})$$

Здесь  $F_1$  и  $F_2$  – произвольные функции.

Для волны, распространяющейся в сторону положительных  $x$ , потенциал скорости  $\Phi(x, t)$  имеет вид:

$$\Phi(x, t) = F_1(x - c_s t). \quad (\text{П.3})$$

Потенциал скорости вводится соотношением:

$$\bar{V} = \text{grad} \Phi. \quad (\text{П.4})$$

Из (П.3) и (П.4) видно, что в бегущей волне колебательная скорость имеет единственную компоненту  $V_x = V$ . Т.е. частицы среды в волне колеблются вдоль направления распространения, следовательно, звуковая волна является продольной.

2. В продольной волне колебательная скорость  $V$  связана с приращением давления  $p'$  и плотности  $\rho'$  алгебраическими соотношениями. Используя (П.4) и соотношение

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rho \quad (\text{П.5})$$

из (П.3) получаем

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(x - c_s t), \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho_0 c_s F_1(x - c_s t). \quad (\text{П.6})$$

Следовательно

$$\frac{p'}{V} = \rho_0 c_s. \quad (\text{П.7})$$

Соотношение (П.7) называют акустическим законом Ома, величину  $\rho_0 c_s$  – волновым сопротивлением.

Воспользуемся уравнением состояния:

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho', \quad (\text{П.8})$$

где  $S$  – энтропия и учтено, что звуковая волна в идеальной жидкости есть адиабатическое движение.

Для возмущений плотности  $\rho'$  и колебательной скорости имеем:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{V}{c_s}. \quad (\text{П.9})$$

### Задача 2.

Найти длину звуковой волны в воздухе на частоте 500 Гц при температуре  $t = 15^\circ\text{C}$  и давлении  $p_0 = 10^5 \text{Па}$ . Плотность воздуха  $\rho = 1,26 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , показатель адиа-

баты  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ .

### Решение

$$\lambda = \frac{c_s}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \approx 0,7 \text{ м}$$

### Задача 3.

Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна

$p'_0 = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ . Вычислить амплитуды колебательной скорости  $V_0$  и смещения

$\xi_0$ , средние интенсивность  $J$  и плотность энергии волны в воздухе  $W$  на частоте

$$f = 1 \text{ кГц} \left( \rho_0 c_s = 420 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right).$$

### Решение

$$V_0 = \frac{p'_0}{\rho_0 c_s} = 4,7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$\xi_0 = \frac{V_0}{2\pi f} = 7 \cdot 10^{-11} \text{ м},$$

$$J = \frac{p_0'^2}{2\rho_0 c_s} = 4.8 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

$$W = \frac{J}{c_s} = 1.4 \cdot 10^{-13} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

#### Задача 4.

Источник звука  $A$  в среде со скоростью звука  $c_1$  расположен над поверхностью раздела, а приемник  $B$  в среде со скоростью звука  $c_2$  – под поверхностью раздела (см. рис.П.1). Источник и приемник разнесены на горизонтальное расстояние  $d$ . Доказать, что время распространения сигнала вдоль луча, испытавшего преломление на поверхности раздела, минимально, если луч подчиняется закону Снеллиуса (т.н. принцип Ферма).

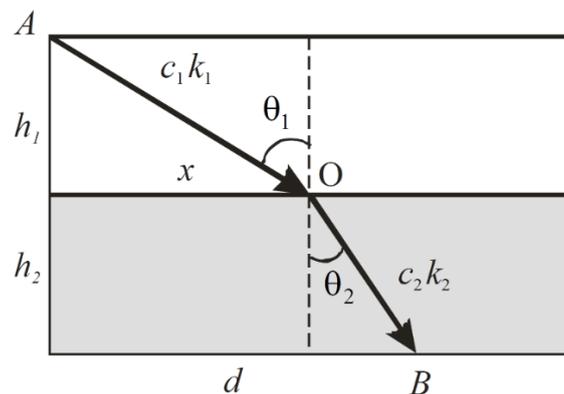


Рис.П.1

#### Решение

Закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_2}{k_1} = n, \quad (\text{П.10})$$

где  $n$  – показатель преломления.

Время распространения сигнала от точки  $A$  до точки  $B$ :

$$t = \frac{AO}{c_1} + \frac{OB}{c_2} = \frac{1}{c_1} \sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}. \quad (\text{П.11})$$

Минимальное значение  $t$  определяется из отношения:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0. \quad (\text{П.12})$$

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \quad (\text{П.13})$$

### Задача 5

Найти коэффициент отражения звука от плоского жидкого слоя с нормальным импедансом  $Z_2$  и толщиной  $d$ , разделяющего два полупространства с нормальными импедансами (см. рис.3)  $Z_1$  и  $Z_3$

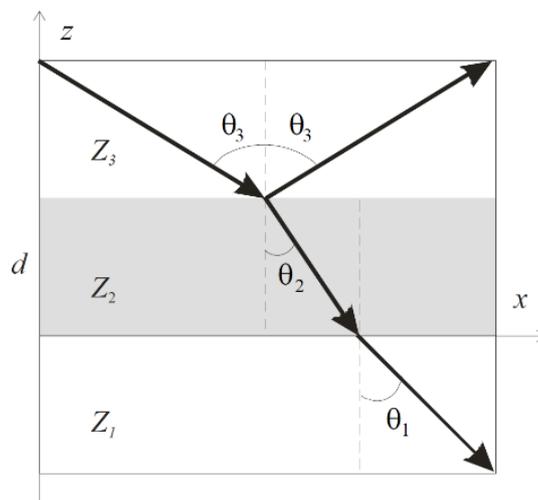


Рис.П.2.

### Решение

Нормальный импеданс каждой среды  $Z_j = \frac{\rho_j c_j}{\cos \theta_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Акустическое давл-

ение внутри слоя есть сумма полей двух плоских волн, имеющих

отрицательную и положительную проекции волнового вектора на ось (т.е. бегущих “вниз” и “вверх” на рисунке):

$$p_2 = [A \exp(-ia_2 z) + B \exp(ia_2 z)] \exp(ib_2 x). \quad (\text{П.14})$$

В этой формуле опущен временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  и  $a_2 = k_2 \cos \theta_2$ ,  $b_2 = k_2 \sin \theta_2$ ,  $k_2 = \omega / c_2$ . Нормальная составляющая скорости в том же слое

$$v_2 = Z_2^{-1} [A \exp(-ia_2 z) + B \exp(ia_2 z)] \exp(ib_2 x). \quad (\text{П.15})$$

Эти выражения позволяют рассчитать импеданс на нижней границе ( $z=0$ ) слоя

$$Z_1 = \left[ \frac{p_2}{v_2} \right]_{z=0} = Z_2 \frac{A + B}{A - B}, \quad (\text{П.16})$$

откуда определяется отношение амплитуд двух волн в слое:

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (\text{П.17})$$

Найдем входной ( $z = d$ ) импеданс слоя:

$$\begin{aligned} Z_{\text{ex}} &= \left[ \frac{p_2}{v_2} \right]_{z=d} = Z_2 \frac{\exp(-ia_2 d) + (B/A) \exp(ia_2 d)}{\exp(-ia_2 d) - (B/A) \exp(ia_2 d)} = \\ &= Z_2 \frac{Z_1 \cos(a_2 d) - iZ_2 \sin(a_2 d)}{Z_2 \cos(a_2 d) - iZ_1 \sin(a_2 d)}. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Перейдем к рассмотрению поля в верхней (третьей) среде, состоящего из суммы падающей и отраженной от слоя волн:

$$p_3 = [C \exp(-ia_3(z-d)) + D \exp(ia_3(z-d))] \exp(ib_3x), \quad (\text{П.19})$$

$$v_3 = Z_3^{-1} [C \exp(-ia_3(z-d)) + D \exp(ia_3(z-d))] \exp(ib_3x),$$

где  $a_3 = k_3 \cos \theta_3$ ,  $b_3 = k_3 \sin \theta_3$ ,  $k_3 = \omega / c_3$ . Отсюда находим другое выражение для входного импеданса слоя:

$$Z_{\text{вх}} = \left[ \frac{p_3}{v_3} \right]_{z=d} = Z_3 \frac{C+D}{C-D}. \quad (\text{П.20})$$

Из этой формулы, учитывая выражение (П.18), находим коэффициент отражения звука от слоя:

$$V = \frac{D}{C} = \frac{Z_{\text{вх}} - Z_3}{Z_{\text{вх}} + Z_3} = \frac{Z_2(Z_1 - Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 - Z_1 Z_3) \sin \psi}{Z_2(Z_1 + Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 + Z_1 Z_3) \sin \psi}, \quad (\text{П.21})$$

где  $\psi = k_2 d \cos \theta_2$ ,  $k_2 = \omega / c_2$ .

### **Задача 6**

Найти коэффициент отражения звука от плоского слоя толщины  $d$ , разделяющего две одинаковые по своим характеристикам среды.

### **Решение**

Полагая в формуле (110)  $Z_1=Z_3$ , находим

$$V = \frac{i(Z_1^2 - Z_2^2) \sin \psi}{2Z_1 Z_2 \cos \psi - i(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \psi} = \frac{s^{-1} - s}{s^{-1} + s + 2i c t g \psi}, \quad (\text{П.22})$$

где  $s = \rho_2 c_{s2} \cos \theta_1 / \rho_1 c_{s1} \cos \theta_2$ .

Модуль коэффициента отражения:

$$|V| = (s^{-1} - s) \left[ (s^{-1} - s)^2 + 4 \operatorname{ctg}^2(k_2 d \cos \theta_2) \right]^{-1/2}.$$

### **Задача 7**

При какой толщине жидкого слоя  $d$ , разделяющего две различные среды, свойства материала не влияют на прохождение звука из одной среды в другую?

### **Ответ**

$$d = \frac{\lambda}{2} \text{ (полуволновой слой)}$$

См. решение задачи 5.

### **Задача 8**

Рассчитать “просветляющий” слой, обеспечивающий наилучшую передачу звука из воды в воздух.

### **Решение**

Наилучшую звукопрозрачность обеспечивает слой вещества с минимальной тол-

щиной  $d = \frac{\lambda}{4}$ , если его удельное акустическое сопротивление удовлетворяет

условию  $Z = \sqrt{Z_1 Z_2}$ , где  $Z_1 = 1.5 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$  – акустические сопротивления воды и

$$Z_2 = 420 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \text{ воздуха.}$$

Импеданс “просветляющего” слоя

$$Z \approx 2.45 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$$

### Задача 9

Звук падает на препятствие произвольной формы, имеющее малые (по сравнению с длиной волны) размеры. Препятствие неподвижно относительно колеблющейся окружающей среды, но его объем пульсирует под действием переменного акустического давления. Рассчитать сечение рассеяния, зная частоту волны, объем  $V$  и свойства материала препятствия, а также свойства среды.

### Решение

При адиабатическом деформировании материала препятствия (скорость звука  $c_1$ , плотность  $\rho_1$ ) приращения давления и плотности связаны соотношением  $p' = c_1^2 \rho'$ . Поскольку относительное изменение объема  $V' / V = -\rho' / \rho_1$ , получим

$$V' = -(\rho' / c_1^2 \rho_1) V = -\beta_1 V p', \quad (\text{П.23})$$

где  $\beta_1$  – адиабатическая сжимаемость материала. Если бы препятствие отсутствовало, выделенный им объем среды изменялся бы по аналогии с (П.23) на  $V' = -\beta_0 V p'$ , где  $\beta_0 = (c_0^2 \rho_0)^{-1}$ , индекс нуль относится к параметрам окружающей среды. Разность этих величин  $(\beta_0 - \beta_1) V p'$  характеризует изменение объема, связанное с присутствием препятствия. Производная по времени от последнего выражения

$$Q = (\beta_0 - \beta_1) V \frac{dp'}{dt} = -i\omega(\beta_0 - \beta_1) V p' \quad (\text{П.24})$$

есть производительность монопольного источника, излучающего рассеянное поле:

$$p_s = -\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 V \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0}\right) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} p'. \quad (\text{П.25})$$

Мощность рассеянной волны, вычисляемая на основе (П.25), есть

$$N = 4\pi r^2 \frac{|p_s|^2}{2c_0\rho_0} = \frac{1}{8\pi c_0\rho_0} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^4 V^2 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^2 |p'|^2. \quad (\text{П.26})$$

Поскольку интенсивность плоской волны, падающей на препятствие, равна

$J = \frac{|p'|^2}{2c_0\rho_0}$ , сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{N}{J} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^4 V^2 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^2. \quad (\text{П.27})$$

*Учебное издание*

**Марфин** Евгений Александрович, **Овчинников** Марат Николаевич

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ГАЗАХ, ЖИДКОСТЯХ,  
ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

**Учебно-методическое пособие**

Подписано к использованию 14.02.2025.

**Казанский федеральный университет**