

О классах симметричных и асимметричных логик множеств

А.М. Бикчентаев, М. Мохамед Али, Х. Фауаз

Аннотация. Уточнена аксиоматика асимметричных логик множеств. Для логик $X(km, k)$ – семейств всех подмножеств km -элементного множества X , число элементов которых кратно k , – полностью описаны случаи, когда $X(km, k)$ а) симметрична или б) асимметрична. Для бесконечного множества Ω и натурального числа $n \geq 2$ построены логики множеств \mathcal{E}_Ω^n и полностью описаны случаи, когда эти логики асимметричны. Для асимметричной логики \mathcal{E} определено, когда и множество $A \in \mathcal{E}$, и его дополнение A^c одновременно являются атомами логики \mathcal{E} . Пусть симметричная логика \mathcal{E} подмножеств конечного множества Ω не является булевой алгеброй, пусть \mathcal{A} – алгебра подмножеств Ω и $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Тогда существует мера на \mathcal{E} , которая не продолжается до меры на \mathcal{A} .

Ключевые слова: квантовая логика, логика множеств, атом, симметричная логика, асимметричная логика, заряд, мера.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.16-30

Введение

Пусть Ω – непустое множество. Обозначим через 2^Ω множество всех подмножеств множества Ω . Семейство $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ называется *логикой множеств* на Ω (см. [1–3]), если выполнены условия:

- (i) $\Omega \in \mathcal{E}$;
- (ii) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$;
- (iii) $A \cup B \in \mathcal{E}$ для всех $A, B \in \mathcal{E}$ с $A \cap B = \emptyset$.

Логика множеств \mathcal{E} называется *σ -классом*, если $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{E}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ ($n \neq m$) $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{E}$. *Зарядом* на логике множеств \mathcal{E} называется отображение $\nu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. *Мерой* на \mathcal{E} называется заряд ν такой, что $\nu(A) \geq 0$ для всех $A \in \mathcal{E}$. Если $\nu(\Omega) = 1$, то мера ν называется *состоянием* (или *вероятностной мерой*).

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Изучаемые нами σ -классы, а также заряды и меры на них относятся к “обобщенной теории меры” [2, 3], которую можно рассматривать как самую близкую к классической (здесь “классическая” означает на “ σ -алгебрах множеств”) версию теории меры на квантовых логиках [1, 2]. О квантово-логическом подходе в аксиоматике физических систем см. [4, гл. VI, §5]. Если \mathcal{E} – логика множеств, то множество \mathcal{S} всех состояний на \mathcal{E} полно и пара $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ удовлетворяет всем требованиям к модели физической системы [4, гл. VI, §6].

Мы продолжаем исследования, проведенные в [5–14], уделяя особое внимание классам а) симметричных и б) асимметричных логик множеств. В [следствии 8](#) уточнена аксиоматика асимметричных логик. Для логик $X(km, k)$ – семейств всех подмножеств km -элементного множества X , число элементов которых кратно k , – полностью описаны случаи, когда $X(km, k)$ а) симметрична ([предложение 17](#)) или б) асимметрична ([предложение 20](#)). Для бесконечного множества Ω и натурального числа $n \geq 2$ построены логики множеств \mathcal{E}_Ω^n ([лемма 21](#)) и полностью описаны случаи, когда эти логики асимметричны ([теорема 22](#)). Для асимметричной логики \mathcal{E} определено, когда и множество $A \in \mathcal{E}$, и A^c одновременно являются атомами логики \mathcal{E} ([теорема 23](#)). Также исследованы заряды и меры на логиках множеств.

1. Обозначения и определения

Положим $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ для любого числа $n \in \mathbb{N}$. Хорошо известна

Лемма 1. Если \mathcal{E} – логика множеств, то выполнено условие

(iv) $B \setminus A \in \mathcal{E}$ для всех $A, B \in \mathcal{E}$ с $A \subset B$.

Действительно, из $B^c \subset A^c$ имеем $A \cap B^c = \emptyset$. Поэтому $A \cup B^c \in \mathcal{E}$ в силу (iii) и

$$(A \cup B^c)^c = A^c \cap B = B \setminus A \in \mathcal{E}.$$

Семейство $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ является логикой множеств тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям (i) и (iv). Проверим достаточность (т. е. выполнение (ii) и (iii)).

(ii) Если $A \in \mathcal{E}$, то $A \subset \Omega \in \mathcal{E}$, поэтому $\Omega \setminus A = A^c \in \mathcal{E}$.

(iii) Если $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \cap B = \emptyset$, то $A \subset B^c$ и $B^c \setminus A = B^c \cap A^c \in \mathcal{E}$, поэтому $A \cup B = (B^c \cap A^c)^c \in \mathcal{E}$.

Пример 2. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ – логика множеств и $T \in \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$. Тогда семейство

$$\mathcal{E}_T = \{A \in \mathcal{E} \mid A \subset T\}$$

является логикой множеств с наибольшим элементом T . Поскольку $T \in \mathcal{E}_T$, проверим (iv). Если $A, B \in \mathcal{E}_T$, $A \subset B$, то $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \subset B \subset T$. Поэтому $B \setminus A \subset T$ и в силу [леммы 1](#) $B \setminus A \in \mathcal{E}$, значит, $B \setminus A \in \mathcal{E}_T$.

Атомом в логике множеств \mathcal{E} называется минимальный по включению элемент множества $\mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$. Множество всех атомов в \mathcal{E} обозначим через $\alpha(\mathcal{E})$. Легко видеть, что \mathcal{E}

есть множество всех всевозможных сумм элементов множества $\alpha(\mathcal{E})$. (Суммой называем объединение семейства множеств, любые два из которых имеют пустое пересечение.) Для $A \in \mathcal{E}$ положим $\tilde{\mathcal{E}}(A) = \mathcal{E} \setminus \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

Состояние m_x на логике \mathcal{E} подмножеств Ω называется *сосредоточенным в точке* $x \in \Omega$, если для всех $A \in \mathcal{E}$

$$m_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Для $A, B \subset \Omega$ определим их симметрическую разность

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Тогда $A^c \Delta B = A \Delta B^c = (A \Delta B)^c$ и $A^c \Delta B^c = A \Delta B$.

2. Симметричные и асимметричные логики множеств

Предложение 3. Пусть \mathcal{E} – логика множеств и $A, B \in \mathcal{E}$. Тогда

$$A \cap B \in \mathcal{E} \iff A \cup B \in \mathcal{E}.$$

Доказательство. “ \Leftarrow ”. В силу [леммы 1](#) имеем $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A \in \mathcal{E}$. Следовательно, $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B \in \mathcal{E}$ в силу [леммы 1](#).

“ \Rightarrow ”. Поскольку $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \in \mathcal{E}$, в силу вышедоказанного $A^c \cap B^c \in \mathcal{E}$ и $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{E}$. \square

Следствие 4. Пусть \mathcal{E} – логика множеств и $A, B \in \mathcal{E}$. Если $A \cap B \in \mathcal{E}$, то $A \Delta B \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Так как $A \cup B \in \mathcal{E}$, то $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{E}$ в силу [леммы 1](#). \square

Следствие 5. Пусть \mathcal{E} – логика множеств в Ω и $B \subset \Omega$. Имеем

$$B \in \mathcal{E} \iff \exists A \in \mathcal{E} (A \cap B, A \cup B \in \mathcal{E}).$$

Доказательство. “ \Rightarrow ”. Можно выбрать $A \in \{B, B^c\}$.

“ \Leftarrow ”. Для $C = A \cap B \in \mathcal{E}$ имеем $A \cap C = C \in \mathcal{E}$ и в силу [следствия 4](#) получаем $A \Delta C = A \setminus B \in \mathcal{E}$. Теперь $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{E}$ в силу [леммы 1](#). \square

Определение 6. Симметричной логикой называется логика множеств \mathcal{E} , удовлетворяющая условию

$$(v) A \Delta B \in \mathcal{E} \text{ для всех } A, B \in \mathcal{E}.$$

Семейство $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ является симметричной логикой множеств тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям (i) и (v) [9, предложение 1].

Определение 7 ([11]). Асимметричной логикой называется логика множеств \mathcal{E} , удовлетворяющая условию

$$(vi) A \cap B \in \mathcal{E} \iff A \Delta B \in \mathcal{E} \text{ для всех } A, B \in \mathcal{E}.$$

Из следствия 4 вытекает

Следствие 8. Для логики множеств \mathcal{E} равносильны условия:

- (vii) если $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \Delta B \in \mathcal{E}$, то $A \cap B \in \mathcal{E}$;
- (viii) \mathcal{E} – асимметричная логика.

Логика множеств \mathcal{E} является алгеброй множеств тогда и только тогда, когда \mathcal{E} симметричная и асимметричная [11, предложение 4.5].

Лемма 9. Пусть \mathcal{E} – симметричная логика и отображение $\nu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$(ix) \nu(A \Delta B) \leq \nu(A) + \nu(B) \text{ для всех } A, B \in \mathcal{E}.$$

Тогда $\nu(A) \geq 0$ для всех $A \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Для $A = B = \emptyset$ из (ix) получаем $\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset \Delta \emptyset) \leq 2\nu(\emptyset)$, поэтому $\nu(\emptyset) \geq 0$. Теперь для каждого $A \in \mathcal{E}$ в силу (ix) имеем $0 \leq \nu(\emptyset) = \nu(A \Delta A) \leq 2\nu(A)$. \square

Мера ν на симметричной логике \mathcal{E} называется Δ -субаддитивной, если она удовлетворяет условию (ix). Из леммы 9 следует, что всякий заряд ν на симметричной логике \mathcal{E} , удовлетворяющий условию (ix), является Δ -субаддитивной мерой. Следующее утверждение известно (см. [9, лемма 1]); здесь приводится его новое доказательство.

Предложение 10. Для меры ν на симметричной логике \mathcal{E} следующие условия эквивалентны:

- (x) ν Δ -субаддитивна;
- (xi) $\nu(A \Delta B) \leq \nu(A \Delta C) + \nu(C \Delta B)$ для всех $A, B, C \in \mathcal{E}$.

Доказательство. (x) \Rightarrow (xi). В силу ассоциативности и коммутативности операции Δ симметрической разности имеем

$$\nu(A \Delta B) = \nu(A \Delta B \Delta (C \Delta C)) = \nu((A \Delta C) \Delta (B \Delta C)) \leq \nu(A \Delta C) + \nu(C \Delta B)$$

для всех множеств $A, B, C \in \mathcal{E}$.

(xi) \Rightarrow (x). Предположим, что условие (xi) выполнено, но (x) не выполнено. Тогда найдутся множества $A, B \in \mathcal{E}$ такие, что $\nu(A \Delta B) > \nu(A) + \nu(B)$. Значит,

$$\nu(\Omega) - \nu(A \Delta B) < \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B).$$

Поскольку $A^c \Delta B = (A \Delta B)^c$ и $\Omega \setminus A = A^c$, имеем

$$\begin{aligned} \nu(A^c \Delta B) + \nu(B) &< \nu(A^c) = \nu(A^c \Delta (C \Delta C)) = \nu((A^c \Delta C) \Delta C) \\ &\leq \nu((A^c \Delta C) \Delta B) + \nu(B \Delta C) \\ &= \{\text{при } C = A^c\} = \nu(B) + \nu(B \Delta A^c). \end{aligned}$$

Получили противоречие. Предложение доказано. \square

Следствие 11. Для меры ν на симметричной логике \mathcal{E} отображение

$$(A, B) \mapsto d(A, B) := \nu(A \Delta B) \quad (\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+)$$

задает псевдометрику d на \mathcal{E} тогда и только тогда, когда ν является Δ -субаддитивной.

Пример 12. Если в условиях примера 2 логика множеств \mathcal{E} является симметричной (соответственно асимметричной), то и логика \mathcal{E}_T является симметричной (соответственно асимметричной).

Пример 13 ([11, пример 4.2]). Пусть $\Omega = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел и $\Omega \in \ell_1$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно. Пусть $\Lambda \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ и $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Напомним, что каждая перестановка последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сохраняет абсолютную сходимость и сумму z . Семейство

$$\mathcal{E}_{\Lambda, \Omega} = \left\{ I \subset \Omega \mid \sum_{x \in I} x = \lambda z \text{ для некоторого } \lambda \in \Lambda \right\}$$

является асимметричной логикой. (Сумма пустой последовательности по определению равна нулю, поэтому $\emptyset \in \mathcal{E}_{\Lambda, \Omega}$.) Более того, $\mathcal{E}_{\mathbb{R}, \Omega}$ – σ -класс и $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}, \Omega}$ – его подлогика.

Пример 14 ([11, пример 4.3]). Пусть \mathcal{A} – лебегова σ -алгебра на $\Omega = [0, 1]$, μ – линейная мера Лебега с $\mu(\Omega) = 1$. Тогда $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}, \mu} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) \in \mathbb{Q}\}$ является асимметричной логикой.

Пример 15 ([13, пример 4.4]). Пусть Ω – бесконечное множество. Положим

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq \Omega \mid \text{card}(A) \text{ конечно или } \text{card}(\Omega \setminus A) \text{ конечно}\},$$

$$\mathcal{E}_{\Omega}^{\text{even}} = \{A \subseteq \Omega \mid \text{card}(A) \text{ четно или } \text{card}(\Omega \setminus A) \text{ четно}\} \subset \mathcal{B}.$$

Тогда \mathcal{B} – алгебра подмножеств Ω и $\mathcal{E}_{\Omega}^{\text{even}}$ – симметричная логика.

Напомним, что на $\mathcal{E}_{\Omega}^{\text{even}}$ каждое состояние Δ -субаддитивно [13, предложение 4.4].

Определение 16 ([15]). Пусть числа $k, m \in \mathbb{N}$ и множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{km}\}$. Обозначим через $X(km, k)$ семейство всех подмножеств X , число элементов которых кратно k :

$$X(km, k) = \{A \subset X \mid \text{card}(A) = ik, i = 0, 1, 2, \dots, m\}.$$

Тогда $\mathcal{E} = X(km, k)$ – логика множеств с $\alpha(\mathcal{E}) = \{A \subset X \mid \text{card}(A) = k\}$.

Каждая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ определяет заряд ν_f на логике $X(km, k)$ по формуле

$$\nu_f(A) = \sum_{x \in A} f(x), \quad A \in X(km, k).$$

Такие заряды называются *регулярными*. В [15] показано, что любая мера на логике множеств $X(km, k)$ имеет единственное продолжение до заряда на алгебре 2^X . Доказательство этого факта опирается на интересную комбинаторную лемму, утверждающую, что в качестве образующих логики $X(km, k)$ можно выбрать $km - 1$ некоторых k -элементных множеств. В [16] приведено прямое доказательство этого факта; также описаны крайние точки пространства состояний логики $X(km, k)$ и автоморфизмы этой логики. Показано, что для любого заряда ν на логике множеств $X(km, k)$ при $m \geq 3$ существует единственная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\nu = \nu_f$.

Предложение 17. *Логика множеств $X(km, k)$ на X является симметричной логикой тогда и только тогда, когда а) $m = 1$ и $k \in \mathbb{N}$ любое или б) $k \in \{1, 2\}$ и $m \in \mathbb{N}$ любое.*

Доказательство. При условии а) имеем $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ и логика множеств $X(km, k) = \{\emptyset, X\}$ симметрична. При условии б) рассмотрим отдельно случаи $k = 1$ и $k = 2$.

Случай I. Пусть $k = 1$ и $m \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Тогда $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и логика $X(km, k) = 2^X$, очевидно, симметрична.

Случай II. Пусть $k = 2$ и $m \in \mathbb{N}$ – произвольное число (в силу уже разобранных случаев а), считаем $m \geq 2$). Тогда $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{2m}\}$ и логика $X(km, k)$ изоморфна хорошо известной симметричной логике $\mathcal{E} = \{A \subset \Omega_{2m} \mid \text{card}(A) \text{ четно}\}$.

Теперь покажем, что логика множеств $X(km, k)$ не является симметричной в случае $k \geq 3, m > 1$.

Так как $m \geq 2$, то $\text{card}(X) \geq 2k$ и в логике $X(km, k)$ существуют два непересекающиеся атома $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ и $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_k\}$. Положим $A = \{x, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ и $B = \{x, b_2, b_3, \dots, b_k\}$. Тогда

$$A \Delta B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) = \{a_2, a_3, \dots, a_k, b_2, b_3, \dots, b_k\}$$

и $\text{card}(A \Delta B) = 2k - 2$. Так как $k \geq 3$, то $k < \text{card}(A \Delta B) = 2k - 2 < 2k$. Это значит, что k не является делителем натурального числа $2k - 2$. Следовательно, $A \Delta B \notin X(km, k)$. \square

Следствие 18. *На симметричной логике $X(2m, 2)$ ($m \geq 2$) существует не Δ -субаддитивное состояние.*

Доказательство. Пусть \mathcal{E} – конечная симметричная логика со свойством:

“каждое состояние на \mathcal{E} , являющееся аффинной комбинацией сосредоточенных состояний, Δ -субаддитивно”.

Тогда \mathcal{E} – булева алгебра [11, теорема 4.17]. В частности, если на конечной симметричной логике \mathcal{E} каждое состояние Δ -субаддитивно, то \mathcal{E} – булева алгебра [13, теорема 4.3]. Но логика $X(2m, 2)$ ($m \geq 2$) не является булевой алгеброй. \square

Если симметричная логика не является булевой алгеброй, то она содержит подлогику, изоморфную $X(4, 2)$ [11, следствие 4.6]. Из леммы 1 следует, что если ν – мера на асимметричной логике \mathcal{E} , то $\nu(A \Delta B) \leq \nu(A) + \nu(B)$ для всех $A, B \in \mathcal{E}$ с $A \Delta B \in \mathcal{E}$.

Следствие 19. Пусть симметричная логика \mathcal{E} подмножеств конечного множества Ω не является булевой алгеброй, пусть \mathcal{A} – алгебра подмножеств Ω и $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Тогда существует мера на \mathcal{E} , которая не продолжается до меры на \mathcal{A} .

Доказательство. Всякая мера на булевой алгебре множеств Δ -субаддитивна. \square

Предложение 20. Логика множеств $X(km, k)$ на X является асимметричной тогда и только тогда, когда а) $m = 1$ и $k \in \mathbb{N}$ любое или б) k нечетное и $m \in \mathbb{N}$ любое.

Доказательство. При условии а) имеем $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ и логика множеств $X(km, k) = \{\emptyset, X\}$, очевидно, асимметрична.

Рассмотрим условие б).

Случай I. Если k нечетно, то покажем, что логика множеств $X(km, k)$ асимметрична. В силу **следствия 8** достаточно доказать, что для произвольных $A, B \in X(km, k)$ таких, что $A \Delta B \in X(km, k)$, пересечение $A \cap B$ также лежит в $X(km, k)$. Так как $A, B, A \Delta B \in X(km, k)$, то $\text{card}(A) = s_1 k$, $\text{card}(B) = s_2 k$, $\text{card}(A \Delta B) = s_3 k$, где $s_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_i \leq m$, $i = 1, 2, 3$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{card}(A \Delta B) &= \text{card}[(A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B))] = \text{card}(A \setminus (A \cap B)) + \text{card}(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\text{card}(A \cap B), \end{aligned}$$

значит, $s_3 k = s_1 k + s_2 k - 2\text{card}(A \cap B)$ и $\text{card}(A \cap B) = \frac{(s_1 + s_2 - s_3)k}{2} = \frac{s_4 k}{2}$, где $s_4 \in \mathbb{N}$, $s_4 = s_1 + s_2 - s_3$. Пусть $\text{card}(A \cap B) = n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Если $n = 0$, то $A \cap B = \emptyset \in X(km, k)$. Если $n > 0$, то $\text{card}(A \cap B) = \frac{s_4 k}{2} = n$, поэтому $s_4 k = 2n$. Это значит, что $s_4 k$ – четное число. Так как число k нечетно, то s_4 четно. Тогда $s_4 = 2j$ и $\frac{s_4}{2} = j$, где $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\text{card}(A \cap B) = \frac{s_4}{2} k = jk$, $A \cap B \in X(km, k)$ и логика $X(km, k)$ асимметрична.

Случай II. Если k четно, то $k = 2t$ с $t \in \mathbb{N}$. Покажем, что логика множеств $X(km, k)$ не является асимметричной (в силу уже разобранных случаев а) считаем $m \geq 2$). Так как $m \geq 2$, то $\text{card}(X) \geq 2k$ и в логике $X(km, k)$ существуют два непересекающиеся атома $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2t}\}$ и $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2t}\}$. Положим

$$A = \{x_1, \dots, x_t, a_{t+1}, \dots, a_{2t}\}, \quad B = \{x_1, \dots, x_t, b_{t+1}, \dots, b_{2t}\}, \quad \text{тогда}$$

$$A \Delta B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) = \{a_{t+1}, \dots, a_{2t}, b_{t+1}, \dots, b_{2t}\},$$

$\text{card}(A \Delta B) = 2t = k$ и $A \Delta B \in X(km, k)$. Но $A \cap B = \{x_1, \dots, x_t\}$ и $\text{card}(A \cap B) = t = \frac{1}{2}k$. Следовательно, $A \cap B \notin X(km, k)$ и логика $X(km, k)$ не является асимметричной. \square

Лемма 21. Пусть Ω – бесконечное множество и натуральное число $n \geq 2$. Тогда семейство

$$\mathcal{E}_\Omega^n = \{A \subset \Omega : \text{card}(A) = ns \text{ или } \text{card}(A^c) = ns, \text{ где } s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

является логикой множеств.

Доказательство. Очевидно, $\Omega \in \mathcal{E}_\Omega^n$ и $A \in \mathcal{E}_\Omega^n \iff A^c \in \mathcal{E}_\Omega^n$, т. е. выполнены условия (i) и (ii) определения логики множеств. Покажем (iv): для $A, B \in \mathcal{E}_\Omega^n$ с $A \subset B$ проверим, что $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$. Возможны три случая: а) $\text{card}(A) = ns_1, \text{card}(B) = ns_2$ с $s_1, s_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; тогда $s_1 \leq s_2$ и $\text{card}(B \setminus A) = ns_2 - ns_1 = n(s_2 - s_1)$, поэтому $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$; б) $\text{card}(A) = ns_1, \text{card}(B) = +\infty$ с $s_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; в) $\text{card}(A) = \text{card}(B) = +\infty$.

При б) имеем $\text{card}(B^c) = ns_2$ и $(B \setminus A)^c = (B \cap A^c)^c = B^c \cup A$, причем $B^c \cap A = \emptyset$. Поэтому $\text{card}((B \setminus A)^c) = \text{card}(B^c) + \text{card}(A) = n(s_1 + s_2)$ и $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$.

При в) имеем $\text{card}(A^c) = ns_1, \text{card}(B^c) = ns_2$ и $s_1 \geq s_2$ в силу включения $B^c \subset A^c$. Так как

$$B \setminus A = B \Delta A = B^c \Delta A^c = A^c \setminus B^c,$$

то $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(A^c \setminus B^c) = n(s_1 - s_2)$ и $B \setminus A \in \mathcal{E}_\Omega^n$. \square

Очевидно, что логика \mathcal{E}_Ω^n лежит в алгебре \mathcal{B} подмножеств Ω из [примера 15](#).

Теорема 22. Пусть Ω – бесконечное множество и натуральное число $n \geq 3$ нечетно. Тогда \mathcal{E}_Ω^n является асимметричной логикой.

Доказательство. Пусть $A, B, A \Delta B \in \mathcal{E}_\Omega^n$. В силу [следствия 8](#) нужно проверить, что множество $A \cap B$ лежит в \mathcal{E}_Ω^n . Считаем, что $A \cap B \neq \emptyset$ и $A \neq B$. Возможны три случая:

- а) $\text{card}(A) = ns_1, \text{card}(B) = ns_2$ с $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$;
- б) $\text{card}(A) = ns_1, \text{card}(B) = +\infty$ с $s_1 \in \mathbb{N}$;
- в) $\text{card}(A) = \text{card}(B) = +\infty$.

При а) имеем $\text{card}(A \Delta B) < +\infty$ и $\text{card}(A \cap B) < +\infty$. Так как $A \Delta B \in \mathcal{E}_\Omega^n$, то существует $s_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $\text{card}(A \Delta B) = ns_3$. Тогда $\text{card}A + \text{card}B - 2\text{card}(A \cap B) = ns_3$, и поэтому

$$\text{card}(A \cap B) = \frac{\text{card}(A) + \text{card}(B) - ns_3}{2} = \frac{n(s_1 + s_2 - s_3)}{2} = \frac{ns^*}{2} \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\text{НОД}(2, n) = 1$, число s^* делится на 2. Положим $\frac{s^*}{2} = s^{**}$, тогда $\text{card}(A \cap B) = ns^{**}$, и $A \cap B \in \mathcal{E}_\Omega^n$.

При б) имеем $\text{card}(A) = ns_1, \text{card}(B^c) = ns_2, \text{card}((A \Delta B)^c) = \text{card}(A \Delta B^c) < +\infty$ и $\text{card}(A \cap B) < +\infty$. Пусть $\text{card}((A \Delta B)^c) = \text{card}(A \Delta B^c) = ns_3$, тогда

$$\text{card}(A) + \text{card}(B^c) - 2\text{card}(A \cap B^c) = ns_3, \quad \text{card}(A \cap B^c) = \frac{n(s_1 + s_2 - s_3)}{2} = \frac{ns^*}{2} = ns^{**},$$

поскольку $\text{НОД}(2, n) = 1$. Отсюда получаем

$$\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A \setminus (A \cap B^c)) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B^c) = 3s_1 - 3s^{**} = 3(s_1 - s^{**}) = 3s_4,$$

и $A \cap B \in \mathcal{E}_\Omega^n$.

При с) имеем $\text{card}(A^c) = ns_1$, $\text{card}(B^c) = ns_2$. Тогда

$$\text{card}((A \cap B)^c) = \text{card}(A^c \cup B^c) \leq \text{card}(A^c) + \text{card}(B^c) < +\infty.$$

Так как $\text{card}(A \Delta B) = \text{card}(A^c \Delta B^c) = ns_3$, где $s_3 \in \mathbb{N}$, то

$$\text{card}(A^c) + \text{card}(B^c) - 2\text{card}(A^c \cap B^c) = ns_3, \quad \text{card}(A^c \cap B^c) = \frac{n(s_1 + s_2 - s_3)}{2} = \frac{ns^*}{2} = ns^{**},$$

поскольку $\text{НОД}(2, n) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{card}((A \cap B)^c) &= \text{card}(A^c \cup B^c) = \text{card}(A^c \Delta B^c) + \text{card}(A^c \cap B^c) \\ &= ns_3 + ns^{**} = n(s_3 + s^{**}) = ns_4. \end{aligned}$$

Следовательно, $A \cap B \in \mathcal{E}_\Omega^n$.

Если натуральное число $n \geq 2$ четно, то логика \mathcal{E}_Ω^n не асимметрична (это проверяется аналогично случаю II в доказательстве [предложения 20](#)). \square

Теорема 23. Пусть \mathcal{E} – логика множеств и $A \in \mathcal{E}$. Если $A \Delta B \notin \mathcal{E}$ для всех $B \in \tilde{\mathcal{E}}(A)$, то $A, A^c \in \alpha(\mathcal{E})$. Обратное утверждение верно для асимметричной логики \mathcal{E} .

Доказательство. Поскольку

$$A \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{E} \text{ и } A \Delta B \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A^c \Delta B = (A \Delta B)^c \in \mathcal{E},$$

достаточно показать, что $A^c \in \alpha(\mathcal{E})$. Если $A \Delta B \notin \mathcal{E}$ для всех $B \in \tilde{\mathcal{E}}(A)$, то множество $(A \Delta B)^c = A^c \Delta B$ не лежит в логике \mathcal{E} для всех $B \in \tilde{\mathcal{E}}(A)$. В частности, не существует множества $B \in \tilde{\mathcal{E}}(A)$ с $B \subset A^c$ (в противном случае $A^c \Delta B = A^c \setminus B \in \mathcal{E}$ в силу [леммы 1](#)). Следовательно, $A^c \in \alpha(\mathcal{E})$.

Пусть теперь \mathcal{E} – асимметричная логика и $A, A^c \in \alpha(\mathcal{E})$. Не существует множества $B \in \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$ с $B \subset A^c$, $B \neq A^c$ (так как A^c – атом), т.е. для каждого множества $B \in \tilde{\mathcal{E}}(A)$ выполнено в точности одно из следующих условий:

$$1) B \cap A^c = A^c \text{ или } 2) B \cap A^c \notin \mathcal{E} \text{ и } B \cap A^c \neq A^c.$$

В случае 1) $B \supset A^c$ и $B \neq A^c$, поэтому $A \supset B^c$ и $A \neq B^c \neq \emptyset$. Поскольку A – атом, имеем $A = B^c$. Значит, $B = A^c$ – получили противоречие.

В случае 2) в силу асимметричности логики \mathcal{E} имеем $B \Delta A^c \notin \mathcal{E}$. Следовательно, $A \Delta B = (B \Delta A^c)^c \notin \mathcal{E}$. \square

Пример 24. Логика множеств $\mathcal{E} = X(8, 4)$ не симметрична и не асимметрична (см. [предложения 17](#) и [20](#)). Пусть $X = \Omega_8$ и $A = \{1, 2, 3, 5\}$. Тогда $A, A^c \in \alpha(\mathcal{E})$, причем для $B = \{1, 2, 7, 8\} \in \tilde{\mathcal{E}}(A)$ имеем $A \Delta B \in \mathcal{E}$.

Пример 25. Для симметричной логики $\mathcal{E} = X(4, 2)$ имеем $A, A^c \in \alpha(\mathcal{E})$ для всех множеств $A \in \mathcal{E} \setminus \{\emptyset, X\}$.

Предложение 26. Если \mathcal{E} – конечная симметричная логика, то $\text{card}(\mathcal{E}) = 2^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В частности, $\text{card}(X(2m, 2)) = 2^{2m-1}$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Назовем элементы A, B, \dots симметричной логики \mathcal{E} векторами и определим сумму векторов A и B как $A \Delta B$. Определим операцию умножения векторов на элементы поля $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ по формуле $0 \times A = \emptyset$, $1 \times A = A$ ($A \in \mathcal{E}$). Легко проверить, что выполнены все аксиомы линейного пространства над полем \mathbb{Z}_2 . По условию наше пространство конечномерно; выберем в нем базис e_1, \dots, e_n . Тогда все векторы пространства суть всевозможные линейные комбинации e_1, \dots, e_n , их 2^n штук.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ в силу бинома Ньютона получаем

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = (1 + 1)^k = 2^k, \quad \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = (1 - 1)^k = 0.$$

Следовательно, $\text{card}(X(2m, 2)) = \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{2i} = 2^{2m-1}$, $m \in \mathbb{N}$. □

Предложение 27. Пусть \mathcal{E} – логика множеств в Ω , $B \subset \Omega$ и $A \in \mathcal{E}$ с $A \Delta B \in \mathcal{E}$. Если а) $A = \{x\}$ или б) \mathcal{E} асимметрична, то $B \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Если $A \cap B = \emptyset$, то $A \Delta B = A \cup B \in \mathcal{E}$ и $B = (A \cup B) \setminus A \in \mathcal{E}$ в силу [леммы 1](#). Пусть теперь $A \cap B \neq \emptyset$. При условии а) имеем $A \cap B = A$, т.е. $A \subset B$ и $x \in B$. По предположению $A \Delta B = B \setminus \{x\} \in \mathcal{E}$. Поэтому

$$B = (B \setminus \{x\}) \cup \{x\} \in \mathcal{E}$$

в силу аксиомы (iii) логики множеств.

При условии б) имеем $A \cap B \in \mathcal{E}$ и $A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c \in \mathcal{E}$ в силу [леммы 1](#). По предположению $A \Delta B \in \mathcal{E}$, поэтому $B \cap A^c = (A \Delta B) \setminus (A \cap B^c) \in \mathcal{E}$ в силу [леммы 1](#). Следовательно,

$$B = (B \cap A^c) \cup (B \cap A) \in \mathcal{E}$$

в силу аксиомы (iii) логики множеств. □

Список литературы

- [1] А.Н. Шерстнев, *О булевских логиках*, Учен. зап. Казан. ун-та **128** (2), 48–62 (1968).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/uzku/v128/i2/p48>
- [2] S.P. Gudder, *Stochastic methods in quantum mechanics*, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland, New York–Oxford, 1979.

- [3] S.P. Gudder, *An extension of classical measure theory*, SIAM Rev. **26** (1), 71–89 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.1137/1026002>
- [4] Г.Д. Луговая, А.Н. Шерстнев, *Функциональный анализ: специальные курсы*, Editorial URSS, М., 2019.
- [5] П.Г. Овчинников, *Соответствие Галуа, связанное с продолжением зарядов на σ -классе подмножеств конечного множества*, Изв. вузов. Матем. (5), 36–40 (1994).
URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ivm/y1994/i5/p36>
- [6] P.G. Ovchinnkov, F.F. Sultanbekov, *Finite concrete logics: their structure and measures on them*, Internat. J. Theoret. Phys. **37** (2), 147–153 (1998).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1026681710332>
- [7] P.G. Ovchinnkov, *Measure on finite concrete logics*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (7), 1957–1966 (1999).
URL: <https://www.ams.org/journals/proc/1999-127-07/S0002-9939-99-04761-9>
- [8] P. Pták, *Concrete quantum logics*, Internat. J. Theoret. Phys. **39** (3), 827–837 (2000).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1003626929648>
- [9] A.M. Bikchentaev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence*, Lobachevskii J. Math. **30** (2), 101–106 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080209020024>
- [10] A. Bikchentaev, R. Yakushev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence. II*, Internat. J. Theoret. Phys. **53** (2), 397–408 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1824-8>
- [11] A. Bikchentaev, M. Navara, R. Yakushev, *Quantum logics of idempotents of unital rings*, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (6), 1987–2000 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-014-2405-1>
- [12] A. De Simone, M. Navara, P. Pták, *States on systems of sets that are closed under symmetric difference*, Math. Nachr. **288** (17–18), 1995–2000 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.201500029>
- [13] A. Bikchentaev, M. Navara, *States on symmetric logics: extensions*, Math. Slovaca **66** (2), 359–366 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1515/ms-2015-0141>
- [14] V. Voráček, P. Pták, *A symmetric-difference-closed orthomodular lattice that is stateless*, Order **40** (2), 397–402 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11083-022-09621-7>
- [15] R.E. Prather, *Generating the k -subsets of an n -set*, Amer. Math. Monthly **87** (9), 740–743 (1980).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2321866>

- [16] Ф.Ф. Султанбеков, *Заряды и автоморфизмы одного класса конечных логик множеств*, Конструктивная теория функций и функц. анализ, Вып. 8, 57–68 (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1992).

DOI: <https://www.mathnet.ru/rus/kuktf/v8/p57>

Айрат Мидхатович Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Мунтадхер Мохамед Али

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: grenday343@gmail.com

Хаттаб Фауаз

Казанский государственный энергетический университет,
Кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: khattab1058@hotmail.com

On classes of symmetric and asymmetric concrete logics

A.M. Bikchentaev, M. Mohamed Ali, Khattab Fawwaz

Abstract. We refined the axiomatics of asymmetric logics. For logics $X(km, k)$ of family subsets of the km -element set X , which cardinal numbers are multiples of k we completely described the cases in which $X(km, k)$ a) is symmetric or b) is asymmetric. For an infinite set Ω and a natural number $n \geq 2$ we constructed the concrete logics \mathcal{E}_Ω^n and completely described the cases in which these logics are asymmetric. For asymmetric logics \mathcal{E} we determine when both the set $A \in \mathcal{E}$ and its complement A^c are atoms of the logic \mathcal{E} . Let a symmetric logic \mathcal{E} of a finite set Ω be not a Boolean algebra, and let \mathcal{A} be an algebra of subsets from Ω , and assume that $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Then there exists a measure on \mathcal{E} , that does not admit an extension to a measure on \mathcal{A} .

Keywords: quantum logics, concrete logics, atom, symmetric logics, asymmetric logics, charge, measure.

DOI: 10.26907/2949-3919.2024.1.16-30

References

- [1] A.N. Sherstnev, *On Boolean logics*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, **128** (2) Kazan Univ., Kazan, 1968, 48–62 [in Russian].
DOI: <https://www.mathnet.ru/eng/uzku/v128/i2/p48>
- [2] S.P. Gudder, *Stochastic methods in quantum mechanics*, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland, New York–Oxford, 1979.
- [3] S.P. Gudder, *An extension of classical measure theory*, SIAM Rev. **26** (1), 71–89 (1984).
DOI: <https://doi.org/10.1137/1026002>
- [4] G.D. Lugovaya, A.N. Sherstnev, *Functional analysis: special courses*, Editorial URSS, Moscow, 2019 [in Russian].
- [5] P.G. Ovchinnikov, *Galois correspondence associated with the extension of charges on the σ -class of subsets of a finite set*, Russian Math. (Iz. VUZ), **38** (5), 34–38 (1994).
URL: <https://www.mathnet.ru/eng/ivm/y1994/i5/p36>

Acknowledgements. The work is performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-944).

Received: 19 January 2024. Accepted: 27 February 2024. Published: 11 April 2024.

- [6] P.G. Ovchinnkov, F.F. Sultanbekov, *Finite concrete logics: their structure and measures on them*, Internat. J. Theoret. Phys. **37** (2), 147–153 (1998).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1026681710332>
- [7] P.G. Ovchinnkov, *Measure on finite concrete logics*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (7), 1957–1966 (1999).
URL: <https://www.ams.org/journals/proc/1999-127-07/S0002-9939-99-04761-9>
- [8] P. Pták, *Concrete quantum logics*, Internat. J. Theoret. Phys. **39** (3), 827–837 (2000).
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1003626929648>
- [9] A.M. Bikchentaev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence*, Lobachevskii J. Math. **30** (2), 101–106 (2009).
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080209020024>
- [10] A. Bikchentaev, R. Yakushev, *States on symmetric logics: conditional probability and independence. II*, Internat. J. Theoret. Phys. **53** (2), 397–408 (2014).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-013-1824-8>
- [11] A. Bikchentaev, M. Navara, R. Yakushev, *Quantum logics of idempotents of unital rings*, Internat. J. Theoret. Phys. **54** (6), 1987–2000 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-014-2405-1>
- [12] A. De Simone, M. Navara, P. Pták, *States on systems of sets that are closed under symmetric difference*, Math. Nachr. **288** (17–18), 1995–2000 (2015).
DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.201500029>
- [13] A. Bikchentaev, M. Navara, *States on symmetric logics: extensions*, Math. Slovaca **66** (2), 359–366 (2016).
DOI: <https://doi.org/10.1515/ms-2015-0141>
- [14] V. Voráček, P. Pták, *A symmetric-difference-closed orthomodular lattice that is stateless*, Order **40** (2), 397–402 (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11083-022-09621-7>
- [15] R.E. Prather, *Generating the k -subsets of an n -set*, Amer. Math. Monthly **87** (9), 740–743 (1980).
DOI: <https://doi.org/10.2307/2321866>
- [16] F.F. Sultanbekov, *Charges and automorphisms of a class of finite set logics*, Constructive theory of functions and functional analysis (8), 57–68, Kazan. Gos. Univ., Kazan, 1992 [in Russian].
URL: <https://www.mathnet.ru/eng/kuktf/v8/p57>

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,

Volga Region Mathematical Center,

18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Muntadher Mohamed Ali

Kazan Federal University,

N. I. Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics,

18 Kremlyovskaya str., Kazan 420008, Russia,

e-mail: grenday343@gmail.com

Khattab Fawwaz

Kazan State Power Engineering University,

Department of Higher Mathematics,

51 Krasnoselskaya str., Kazan 420066, Russia,

e-mail: khattab1058@hotmail.com