Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется оформлять результаты решений в более пристойней форме, как это делает, скажем, ваша староста Ангелина (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

Пока, в ближайшее время, студентам открыт доступ в университет, так что вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию (во вторник 11h.50m.-13h.30m. и в пятницу 15h.40m.-17h.30m.) для консультаций по решению домашних задач.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 42

Критерий Коши сходимости интегралов
Абсолютная и условная сходимости

На этом занятии будут рассматриваться критерии сходимости интегралов от функций $f(x)$, принимающих произвольные (не обязательно только положительные) значения. Как и прежде, будет предполагаться, что функция определена при любых $x \geq a$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любых $b > a$.

В основе критерия сходимости интеграла

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

лежит следующее соображение. Если этот интеграл сходится, то абсолютное значение интеграла

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx$$

становится сколь угодно малым (меньше любого наперед заданного ε), когда значения η_1 и η_2 оказываются достаточно большими, больше некоторого η, значение которого выбирается по заданному ε. Строгая математическая формулировка данного соображения была дана математиком Коши в виде следующего утверждения.

Интеграл
$$\int_a^{\infty} f(x)dx \tag{1}$$
сходится *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\eta = \eta(\varepsilon) > a$, *то для любых* $\eta_1, \eta_2 > \eta$
$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Из этого утверждения вытекает следующий критерий расходимости интеграла (1).

Интеграл (1) **расходится** *тогда и только тогда, когда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для любого* $\eta > a$ *найдутся такие* $\eta_1, \eta_2 > \eta$, *что*
$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| > \varepsilon.$$

Естественно, аналогичный критерий справедлив и для интеграла
$$\int_a^b f(x)dx$$
с особенностью в точке b. В этом случае выбор η_1 и η_2 производится в интервале $[\eta,\, b)$.

Приведем пример на использование критерия расходимости.

Пример 1. Доказать расходимость интеграла
$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} dx$$
при любом $\alpha \leq 1$

Решение. Для любого $\eta > 1$ выберем целое число n, удовлетворяющее неравенству $\pi n > \eta$, и положим $\eta_1 = \pi n$, $\eta_2 = 2\pi n$. Для этих выбранных значений, когда $\alpha \leq 1$, интеграл
$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} dx = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} dx \geq \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq$$
$$\frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1 - cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi n} \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, существует такое $\varepsilon = 1/4$, что для любого $\eta > 1$ существуют такие $\eta_1 = \pi n$, $\eta_2 = 2\pi n > \eta$, что
$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} dx \right| > \varepsilon.$$

Интеграл расходится.

Определение. Интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ (или $\int_a^b f(x)dx$) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^\infty |f(x)|dx,$$

и *условно сходящимся*, если исходный интеграл сходится, а интеграл от $|f(x)|$ расходится.

Пример 2. Доказать, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx \tag{3}$$

сходится условно (сравните с Примером 1).

Решение. Применяя к этому интегралу формулу интегрирования по частям с $u = 1/x$, $\sin x dx = dv$, получаем, что

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Интеграл в правой части данной цепочки равенств сходится – достаточно применить признак Вейерштрасса, используя неравенство

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}.$$

Однако интеграл от модуля подынтегральной функции расходится:

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \ge \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx,$$

и последний интеграл расходится, как было показано в Примере 1. Таким образом, исходный интеграл (3) сходится условно.

Приведем два достаточных признака сходимости несобственных интегралов от произведения двух функций произвольного знака.

Признак Дирихле. Интеграл

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \tag{4}$$

сходится (вообще говоря, условно), если
1). $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)$ при любых $x \in [a, \infty)$,
2). $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонно у бывает к нулю, когда $x \to \infty$, начиная с некоторого $x_0 \geq a$.

Признак Абеля. Интеграл (3) сходится (вообще говоря, условно), если
1). $f(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$ и интеграл

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

сходится,
2). $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, \infty)$.

Пример 3. Исследовать на условную и абсолютную сходимости интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx. \tag{4}$$

Решение. В Примере 2 было показано, что этот интеграл сходится условно, когда $\alpha = 1$, – исследуем теперь этот интеграл при всех других значениях $\alpha = 1$.

1^0. При $\alpha > 1$ интеграл (4) сходится абсолютно, поскольку (признак сходимости Вейерштрасса)

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

а интеграл от $1/x^\alpha$ сходится

2^0. При $0 < \alpha \leq 1$ сходится, и для этого достаточно применить признак сходимости Дирихле с $f(x) = \sin x,\ g(x) = 1/x^\alpha$. Действительно, $\sin x$ имеет ограниченную на всей числовой оси первообразную $-\cos x$, функция $g(x) = 1/x^\alpha$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[1, \infty)$ и монотонно убывает, стремясь к нулю, когда $x \to \infty$. Однако это только условная сходимость, ибо $|\sin x| \geq \sin^2 x$, и в Примере 1 было доказано, что

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$$

расходится при любом $\alpha \leq 1$.

3^0. При $\alpha \leq 0$ интеграл (4) расходится, и для этого достаточно воспользоваться критерием Коши, как это делалось в Примере 1.

Для любого $\eta > 1$ выберем целое число n, удовлетворяющее неравенству $2\pi n > \eta$, и положим $\eta_1 = 2\pi n + \pi/6$, $\eta_2 = 2\pi n + 5\pi/6$. Для этих выбранных значений, когда $\alpha \leq 0$, модуль интеграла

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| = \int_{2\pi n+\pi/6}^{2\pi n+5\pi/6} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geq \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin x dx \geq \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, существует такое $\varepsilon = \pi/3$, что для любого $\eta > 1$ существуют такие $\eta_1 = 2\pi n + \pi/6$, $\eta_2 = 2\pi n + 5\pi/6 > \eta$, что

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| > \varepsilon.$$

Интеграл расходится.

Легко понять, что результаты исследований в Примерах 1-3 остаются справедливыми, если в подынтегральных функциях sin заменить на cos. Это, так называемые, интегралы Дирихле, и если в домашнем задании после проведенных замен вы получает такой интеграл, то окончательный вердикт состоит в ссылке на один из Примеров 1-3.

Задание 42

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий.

Следующие интегралы исследовать на условную и абсолютную сходимости

12.115. $\int\limits_0^\infty \sin(x^2) dx$

(сделать замену $x^2 = t$ и применить признак Дирихле).

11.106. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos^3(\ln x)}{x \ln x} dx$

(сделать замену $\ln x = t$, $\cos^3 x = (\cos 3x + 3\cos x)$ и применить признак Дирихле).

12.114. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin 2x}{x^2-4x+5} dx$

$\left(\frac{x-1}{(x-2)^2+1} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to \infty\right).$

12.116. $\int\limits_0^\infty \cos(x^4)dx$

(сделать замену $x^4 = t$ и применить признак Дирихле, обратить внимание на особенность в точке $t = 0$).

12.138. $\int\limits_2^\infty \frac{\cos\sqrt{x}}{x^\alpha \ln x}dx$

(сделать замену $\sqrt{x} = t$ и применить признаки Абеля и Дирихле).