Introduction au concept d'entropie à la lumière des travaux de Cédric Villani concernant l'équation de Boltzmann

Starting from Boltzmann equation, introduction to the concept of entropy according to Cédric Villani

Alain Le Méhauté[1], Dmitrii Tayurskii[2]

[1] Materials Design, 42 avenue Verdier 92120 Montrouge France, alml@materialsdesign.com
[2] Département de physique. Université Fédérale de Kazan , 18 avenue du Kremlin 420800 Kazan , Tatarstan, Fédération de Russie, dtayursk@gmail.com

RÉSUMÉ. L'objet de cette note est de rapporter certains aspects des travaux mathématiques de Cédric Villani à propos du lien entre l'équation de Boltzmann et l'irréversibilité du temps. Cette note correspond à une sélection, presque partout « copiée collée », d'un article du mathématicien publié dans le volume XV des séminaires de l'Institut Poincaré. Cet article porte le titre « (Ir)réversibilité et entropie ». Faute de disponibilité la présente note n'a pas pu être pris en charge par l'académicien lui-même ; c'est pourquoi le résumé qui suit n'a pour finalité que de convaincre le lecteur ingénieur ou physicien de se plonger dans le texte original et dans les multiples écrits et conférence de Cédric Villani. Cette note devrait permettre de comprendre pourquoi, à partir de bases mathématiquement solides, chacun de nous doit s'interroger sur le statut archétypal du modèle de Boltzmann et de ses descendants pour penser la temporalité.

ABSTRACT. The purpose of this note is to report as closely as possible some aspects of the mathematical work of Cédric Villani on Boltzmann equations and its avatars. This approach is based on a selection by the author of "copied and pasted" of the chapters of an article written by the mathematician published in volume XV of the Poincaré Institute seminars on Time between pages 17 to 75 bearing the title " (Ir)reversibility and entropy". Due to lack of availability, this note could not be taken care of by the academician, which is why it was assumed by one of the editors. Its sole purpose of the "text pasting" is to convince the engineer or physicist reader to immerse themselves in the original text and in the many writings and conferences of Cédric Villani. This note should make it possible to understand from which solid base can operate epistemological revisions of a thought about time.

MOTS-CLÉS. Boltzmann,Vlasov, amortissement, collision, transport, régularité, entropie.

KEYWORDS. Boltzmann,Vlasov, damping, collision, transport, regularity, entropy.

1. Introduction : une leçon inaugurale

La synthèse qui suit est une introduction à un cours de dynamique, donné à des étudiants de 3ème cycle entre 2008 et 2022, dans le cadre du Groupe d'Etudes des Systèmes Complexes et Condensés, pensé et mis en place au Département de Physique de l'Université Fédérale de Kazan, -Université qui fut celle où Nicolas Lobatchevski eut la responsabilité du département de Physique (1816) avant d'en devenir le Recteur (1827-1846) dans un environnement politique très instable-. Au plan théorique, ce cours avait entre autre pour finalité de démontrer le lien existant entre l'irréversibilité du temps, les propriétés d'échelles et le statut de la fonction zêta dans l'établissement de ce lien. Au plan pratique le cours avait pour objet de sortir les étudiants des silos de pensée dans lesquels l'académisme tend à les enfermer à savoir dans des problématiques d'optimisation, afin de leur donner à penser des processus disruptifs, créatifs et multi échelles. L'analyse des travaux de Cédric Villani, y compris ceux concernant le transport optimal, servait alors de propédeutique aux questions soulevées en montrant en particulier la subtilité d'approches qui, y compris dans leurs formulations élémentaires, posent des questions encore irrésolues.

Si la citation n'apparaissait pas historiquement décalée d'aucuns pourraient affirmer, parodiant Napoléon évoquant les écrits de Madame de Staël : « (Le Professeur Villani) *apprend à penser (disons ici à douter) à ceux qui ne s'en aviseraient pas, ou l'auraient oublié* ». Cette référence serait d'autant plus appropriée et flatteuse que les contributeurs aux thèmes « GEOMETRIE-TOPOS-ORDRE-INFORMATION-ENTROPIES » proposé par les numéros spéciaux de la revue Entropie, sous le titre générique Projet Lîla-Entropie, ont été choisis pour leur culture rétive aux jardins Boltzmanniens. Réserve *méthodologique* d'abord car le jardin fertiliser par le célèbre mathématicien[1] étant entretenu depuis plus de 150 ans, très peu des communications programmées dans le projet Lîla-Entropie n'iront aussi loin que les travaux de Cédric Villani en matière de recul historique, de synthèse et de rigueur dans les différents champs d'études que sont l'analyse fonctionnelle, la topologie ou la théorie de la mesure et des probabilités. Réserve *épistémologique* ensuite, car les éditeurs ont voulu faire place à l'ouverture de voies non encore pavées et à des labyrinthes voire des impasses éventuelles. En l'absence de fil d'Ariane les auteurs choisis négligeront peut-être l'adéquation des analyses à la *régularité* des tracés cognitifs. Ils négligeront peut-être aussi la *compacité* de cartes du tendre en devenir ou le *caractère tensoriel* du mouvement du coupe-coupe susceptible d'ouvrir des taillis d'hypothèses problématiques et de convergences contestables. Réserve *sémantique et heuristique* enfin car en acceptant le «*…commendably good material expressed in a deficient form* »[2], les éditeurs accepteront sans sourciller la critique toujours si nécessaire à l'avancée de sciences en devenir.

S'il est en effet une science du recul historique, de l'approfondissement, de la synthèse et de la reconnaissance académique dont Cédric Villani est aujourd'hui un digne représentant, il en est une tout autre, duale de la première, science d'évènements toujours singuliers dans le cours d'une histoire officielle et dont un digne représentant serait par exemple Herman G. Grassmann, l'instituteur dont les idées furent cernées par le jugement ci-dessus. La science n'étant qu'un palimpseste, observons que s'il y a évènement, ce dernier doit s'inscrire sur un fond historique autorisant son surgissement et son déploiement (A. Badiou). Le fond historique du thème choisi par la Revue Entropie, prend sa source il y a près de 200 ans dans les travaux de Carnot, Clausius, Maxwell, Boltzmann pour ne citer qu'eux. Pourquoi la science à l'époque en gestation, nous interroge-t-elle encore étonnamment aujourd'hui ? Les travaux de Villani nous intéressent ici parce qu'utilisant les théories les plus avancées, ils n'éludent rien des interrogations qui perdurent et leur donnent même toute leur ampleur. Ainsi, si les communications qui suivent peuvent être considérées comme des contre types du modèle de Boltzmann, elles ne le sont pas vraiment au regard des travaux du mathématicien qui en montre les limites. Par les interrogations qu'ils soulèvent, les travaux de Villani s'inscrivent en pratiques dans le présent projet comme un bourgeon encore à éclore. D'où la position prééminente d'entrée en matière que lui accordent ici les éditeurs.

S'il est en effet, des voies susceptibles de faire évènements elles ne le peuvent qu'en référence au cours d'une l'histoire que nous détaillent dans un champ certes singulier mais à résonances universelles, les travaux de Cédric Villani. C'est pour cette raison qu'il a été proposé que la « leçon inaugurale » à la série de communications sur le thème choisi par Entropie soit celle que nous donnerait le mathématicien s'il en avait la possibilité. Il eut en effet été souhaitable que ce fût Cédric Villani lui-même qui s'exprimât ici, mais les obligations sociales qui sont et restent les siennes en ces temps politiquement incertains ; peut-être aussi une certaine lassitude vis-à-vis des multiples solliciteurs dont les éditeurs ont fait partie ; enfin sans doute le besoin de prendre du champ vis-à-vis d'une notoriété peut être paralysante, ne lui ont pas permis de répondre à une demande de plus quant à son point de vue de mathématicien sur la notion d'entropie. Si les éditeurs comprennent cette décision ils ne la regrettent pas moins.

C'est donc par défaut et avec tous les risques que comporte un exercice de synthèse à usage des physiciens que les auteurs de ces lignes se sont substitués au mathématicien pour devenir les rapporteurs de la partie de ses travaux qui répondait au thème choisi. Les rédacteurs ont en cela

[1] Ici rapportée au mieux à l'attention de ceux qui n'auraient ni le courage de lire ses multiples écrits, ni la patience de suivre ses cours et conférences.

[2] Commentaire signée de la plume de Ernst Kummer à propos des notions qui conduiront aux avancées révolutionnaires des travaux de Hermann G. Grassmann en matière d'espaces vectoriels.

répondu favorablement au besoin de donner des racines à un projet qui risquait d'en manquer. L'intérêt de l'option choisie, évidemment parcellaire et déficiente, sera d'autant mieux comprise que le lecteur acceptera le conseil de se référer aux textes originaux. Puisse les lignes qui suivent donner envie de lire des écrits qui truffés de références méritent une lecture crayon à la main. Cette note ne contiendra en conséquence aucune autre référence que la publication dont elle est l'écho. Toutes les références nécessaires seront trouvées dans les travaux de Villani auxquels nous renvoyons.

Au-delà, motivés par des intérêts strictement physiques, les auteurs de ces lignes ne prétendent ni à l'exhaustivité ni même à la rigueur serrée des textes publiés. La présente note a pour seul objectif de donner envie de lire et d'écouter ce que Cédric Villani aurait à nous dire sur la production d'entropie et le fléchage du temps en physique statistique lorsque ces notions sont adossées au modèle de Boltzmann. En déployant une réflexion moderne à propos de questions posées au milieu du XIXème siècle par les immenses savants que furent entre autres Boltzmann et Maxwell et alors que les lois de la physique ne privilégient aucune direction du temps, les travaux de Villani nous parlent néanmoins en filigrane de sa flèche, donc du moteur du temps. Reposant sur la dynamique de sphères (atomes) en interactions, les méthodes développées par l'académicien et ses émules avancent que « *le flot des évènements coule naturellement de l'improbable vers le probable* », affirmation qui serait une simple tautologie si des paradoxes ne surgissaient alors immédiatement en nombre, tant d'évidences logiques qui ne le sont donc pas, que d'observations expérimentales qui semblent soit confirmer l'aphorisme (mécanique quantique), soit le contredire (la créativité du vivant et du complexe).

Pour des raisons de vulgarisation nous aborderons d'abord les paradoxes dont Villani ne traite qu'à la fin de son séminaire. On rappelle que ces paradoxes illustrent les difficultés théoriques qui résultent des multiples avatars qui émaillent on le verra, l'*ansatz Boltzmannien*. On notera que ces avatars interrogent pour l'essentiel les hypothèses portant sur l'interaction de particules en nombre infiniment grand en cours de relaxation ; particules qui sur l'immense billard d'un univers à définir dans un état initial donné -on ne sait d'ailleurs comment-, évoluent du fait de collisions binaires. Il résulte de ces collisions des lois macroscopiques qui dépendent de diverses interactions qu'il convient de préciser et de comprendre tant dans leurs fondements théoriques et physiques que, plus spécifiquement dans le projet Lîla-Entropie, dans leurs propagations dans l'ordre des échelles.

Les différents articles qui précèdent et suivent le présent résumé confronte implicitement ou explicitement la vision atomique explorée par Villani à une musique des « coins et recoins », reposant sur de tout autres chants que ceux des seules collisions. Ces chants nouveaux nous parleront d'un univers faits d'étranges randonnées et de motifs jouant de l'harmonie, de la mélodie et de la rythmique aux moyens de récursivités, de contournements, de tourbillons et d'intrications qu'il conviendra de décrypter en explicitant ce qu'est l'espace et ce qu'est le temps dans des géométries alpestres et baroques largement étrangères au monde plat de nos plaines aux allures de billards.

2. A propos de paradoxes nécessairement illusoires

Les équations cinétiques régissant des particules en interactions dynamiques dans des univers de type billard conduisent immanquablement à la question controversée de *l'existence ou non d'une flèche du temps macroscopîque,* autrement dit à une capacité au moins théorique, de reconstruire à tout moment, l'état initial. La réponse à cette interrogation est dépendante d'hypothèses strictes quant à la nature des interactions entre particules. Or ces hypothèses donnent naissance à des séries de contradictions et de paradoxes. De manière générale, les paradoxes de la physique résultent de la mise en jeu de l'infini alors même que nos moyens d'agir reste toujours discrets, finis et dénombrables. Ainsi, à titre d'exemple, l'addition ne distinguant pas l'infini à une unité près, il sera toujours difficile de prendre en compte voire de penser l'ajout d'une particule, donc son potentiel chimique, dans un univers qui non seulement peut être non borné mais encore pourra contenir une infinité de boule en jeu.

2.1. *Paradoxe de Poincaré Zermelo (PZ)*

Le paradoxe PZ explicite la contradiction qui affecterait la double affirmation du théorème de récurrence de Poincaré d'une part (tout système dynamique revient en temps long dans son état initial) et le second principe de la thermodynamique d'autre part (l'entropie d'une *transformation naturelle* est toujours monotone croissante). La théorie de Boltzmann ayant comme conséquence cette croissance de l'entropie alors qu'elle décrit un univers thermodynamique par ailleurs conforme aux hypothèses de Poincaré, d'aucuns, adeptes de l'*analyse situ*, pointant un paradoxe inacceptable, sont conduits à remettre en cause les équations de Boltzmann et ses hypothèses. Les équations d'amortissement de Landau caractérisant l'équilibre des plasmas étant de même nature que celles de Botlzmann pourront également être contestées. Villani pour sa part développe une méta contestation en contestant l'existence de ces paradoxes en démontrant que les équations explicitant la forme mathématique de entropie ne sont pas *éternelles* signifiant par là que pour un nombre de particules fixées, l'approximation supportées par ces équations proposées se dégrade en temps long et donc ne peuvent, sans précautions théoriques, être mises en conjonction avec les affirmations de Poincaré prédisant, pour une temporalité linéaire, le caractère cyclique des processus dynamiques.

2.2. *Implication de la conservation du volume dans l'espace de phase*

On rappelle que l'espace de phase est construit à partir de la localisation spatiale des particules (boules de billard de type distribution δ) et de leur vitesse locale (car selon les hypothèses celle-ci possède une signification précise et unique). Le théorème de récurrence est fondé sur la conservation du volume de l'espace de phase pour toutes les particules en jeu (Theorème de Liouville : si *f* est une fonction définie et holomorphe sur tout le plan complexe, alors *f* est constante dès lors qu'elle est bornée.) L'entropie étant une fonction du volume déterminé à partir des états micoscopiques mécaniques comment pourrait elle être croissante si le volume dans l'espace de phase est constant ? L'argument est ici que que la croissance entropique n'a pas lieu *malgré* la conservation mais à lieu *à cause* de la conservation. C'est cette conservation qui empêche l'entropie de diminuer. Cette conservation correspond en pratique à *une baisse virtuelle* de température du système avec le temps. Les configurations statistiques sont au moins aussi nombreuses au temps t que dans l'état initial $t=0$ mais la distribution des états mécaniques sur l'arbre de configuration est alors nettement différente en sorte que entropie ne peut diminuer. Par contre dans un modèle micro-irréversible on assistera à une contraction de l'espace de phase lié aux phénomènes dissipatifs ne permettant pas la diminution de la température. L'argument ne s'applique alors plus et l'entropie pourra diminuer au moins pour certaines configurations initiales. Tel sera le cas pour les gaz-granulaires équipés de collisions inélastiques.

2.3. *Apparition spontanée d'une flèche du temps*

L'équation de Boltzmann ne privilégie localement aucune direction du temps et pourtant elle prédit une évolution macroscopique de type maxwellienne en temps positif. Il y aurait donc émergence d'une flèche du temps lors de cette évolution. Toutefois, selon Villani celle-ci n'est qu'apparente car macroscopiquement le temps n'est affecté d'aucun signe particulier : ni plus ni moins. L'apparence tient au fait que l'integration exige un choix de l'état initial correspondant physiquement à la préparation d'une expérience. Partant, l'entropie est croissante en temps positif et décroissante en temps négatif [3].

2.4. *Le paradoxe de Loschmidt*

Le paradoxe de Loschmidt repose sur l'expérience de pensée qui consiste à laisser évoluer la distribution statistique pendant un temps t puis d'inverser toutes les vitesses à un instant donné afin de retrouver après un temps $2t$ l'état initial. Les évolutions complémentaires correspondraient à une croissance de l'entropie globale sans modification d'état. Ce résultat à priori logique ignore la

[3] Cette observation sera fondamentale lorsque sera abordée l'émergence des systèmes vivants et créatifs, le temps indexant alors non plus un lieu en espace mais un topos et son site arithmétique fibré selon l'ordre en échelles.

caractérisation nécessaire du chaos et plus précisément sa dégradation entre le temps $t=0$ et le temps $t>0$. Au temps initial les particules sont toutes étrangères les unes aux autres. Si cette absence de corrélation le caractérise, le chaos est alors total. Au bout d'un temps $t>0$ une fraction des particules se sont déjà heurtées elles sont donc implicitement intriquées. Celles-ci se connaissent donc un peu réciproquement ; les autres pas encore. Or les particules ont une mémoire du passé mais pas du futur. Lorsqu'on inverse les vitesses, si tant est qu'on puisse le faire, celles-ci acquièrent une mémoire du futur et non plus du passé. Le temps coule donc pour elle en sens inverse. En pratique, on à changer le signe de l'opérateur de collision qui caractérise l'équation cinétique. Dans l'équation de Boltzmann en temps positif ce sont les probabilités précollisionnelles qui sont factorisées et vice versa pour le temps négatif ce sont alors les probabilités post collisionnelles. Plus avant, l'inversion coordonnées des vitesses *stricto sensu* est en pratique impossible et la notion d'entropie émerge précisément de cette impossibilité d'agir microscopiquement. L'action ne peut être que macroscopique et c'est pour cela que l'expérience proposée ne peut être qu'une expérience de pensée. On notera toutefois qu'à partir des années 50 l'expérience des échos de spin ouvrit la voie à une approche de nos limitations expérimentales reposant sur l'usage des phases associées à toutes dynamiques analytiques. L'expérience revient alors à feuilleter l'espace-temps des interactions et à pratiquer une analyse spectrale ouvrant la voie à de nouvelles approches reposant sur des facteurs d'échelles.

2.6. *Le démon de maxwell*

On connait le paradoxe qui repose sur un démon dont la vision est tellement perçante qu'il permet partant de deux réservoirs identiquement remplis d'un gaz neutre, de déséquilibrer l'homogénéité au point d'obtenir après un certain temps et sans travail, un réservoir à haute température et un réservoir à basse température, opération contraire au principe de Carnot. On observe que le démon qui semble extérieur au système en est néanmoins partie prenante alors qu'il est contraint de mettre en jeu une énergie toute en maintenant la réversibilité de son action. Comment pourrait-il agir alors même que sa vue elle-même exige la mise en œuvre d'information donc d'énergie irréversible ? Le paradoxe reste entier.

On observera avec Villani qu'il est néanmoins possible d'obtenir de telles effets en mettant en jeu des gaz granulaires affectés de collisions inélastiques : 2 réservoirs initialement identiques se ségrègent en effet naturellement avec le temps. Cette effet repose évidemment sur le caractère extensif de l'entropie dans un système clos. En termes microscopiques le compartiment qui se remplit de particules voit sa température baisser sous l'effet des collisions inélastiques. Cette baisse conduit à une moindre mobilité relative des particules du dit réservoir qui se remplit *d'heureux chef* d'avantage. Il n'y a aucun mystère au phénomène d'auto-organisation alors observé.

2.7. *Convergence et réversibilité*

Dans le cas où les interactions dynamiques sont caractérisées par une réversibilité locale comment peut-il y avoir convergence d'états initalement distinctes lorsque t tend vers plus l'infini ? La réponse est la suivante : *parce que, puisque seule l'énergie est en jeu et le principe de Noether valide, la mécanique impose, une convergence également pour t tendant vers moins l'infini*. La symétrie locale est ainsi par simple inversion, aussi valable aux limites.

2.8. *Stabilité et réversibilité*

Comment répondre au paradoxe qui conjugue habituellement stabilité et réversibilité ? Par exemple l'équation de Vlassov conduit asymptotiquement à une instabilité qui est cependant associée à une réversibilité locale. Le paradoxe apparent tient à la différence en dimensions infinies entre topologie faible (ouvert non borné) et topologie forte (plus fine). Si la première conduit à une instabilité, la seconde autorise une certaine stabilité. Le paradoxe est donc associé aux modalités de représentation de la complexité des interactions en dimensions infinies (via des formes linéaires normées où via une théorie de la mesure utilisant des boules)

2.9. *Relaxation conservative*

La question est ici celle de l'existence observée de relaxations isentropiques. Etrange, en effet que la propriété de certaines relaxations de n'être affectée par aucun foncteur d'oubli, et donc caractérisée par la préservation de la quantité d'incertitude initiale au cours d'une évolution (cas des dynamiques de type Vlassov). De manière général, le champ de force associé à la moyenne de distribution cinétique converge vers zéro. Mais la convergence faible en moyennes et les oscillations (informations invisibles) sont caractérisées par l'oubli de l'histoire de l'évolution dynamique. En pratique, l'isentropie peut alors être associée à un simple transfert de supports des corrélations. L'information migre alors des variables spatiales vers les variables cinétiques La fonction f correspondant à une distribution macroscopique, l'entropie spatiale ($\int \rho \, log(\rho)$ avec $\rho = \int f \, dv$) tend vers zéro, alors que la forme mathématique de l'entropie cinétique globale ($\int f \, log(f)$) est conservée (mais sans converger et avec perte d'information en temps infini). Dans le cas archétypal de *l'amortissement de Landau non linéaire* l'énergie d'interaction $\int W(x\text{-}y) \, \rho(x)\rho(y)dxdy$ qui tend vers zéro, peut être convertie en une énergie cinétique susceptible d'être modifiée en fonction des interactions donc de la distribution.

3. Le royaume inaccessible de Newton

3.1. *Le modèle des sphères dures*

Tout élève de terminale sait, pour l'avoir appris au lycée, que la musique des sphères selon Newton, successeur de Pythagore puis de Copernic, Kepler et Galilée, n'est autre que la vibration d'un univers dans lequel les dynamiques reposent sur le concept de trajectoire d'une pomme dans l'espace. La vitesse de la pomme est paramétrée au moyen d'une variable temporelle dont la caractéristique est d'être indifférente à son état d'origine (Principe de Noether). Force et accélération (i.e. la dérivée de la vitesse par rapport au temps) sont liées linéairement par l'intermédiaire d'une constante : la masse de la pomme en question. La trajectoire globale à priori continue est déterministe et plongée dans un pavage euclidien qui se réduit topologiquement à un tore (espace de phase). La gravitation c'est-à-dire l'interaction entre masses, en est la cause. Le potentiel d'interactions dit Newtonien entre deux pommes ne dépend que de leur distance vue négativement comme une attraction [$\phi(x\text{-}y)= -1/(x\text{-}y)$]. Comme le montrent les formalismes hamiltoniens et lagrangiens, l'énergie globale qui équipe alors chaque pomme est le moteur de la relaxation. *Un examen approfondi de ces formalismes abstraits exprimés dans un cadre thermodynamique considérant n pommes et non plus une seule, montre alors que la continuité reste largement hypothétique. Si une discrétisation apparait, l'approche géodésique peut-être remplacée par une approche spectrale adossées à des espaces de Hilbert. La cohérence exige que l'ensemble des transitions entre raies spectrales soit alors muni d'une algèbre de von Neumann qui en assure la grammaire. La mécanique qui en ressort, dite quantique, reporte les facilités de la continuité sur l'usage de fonctions de probabilités. On peut alors examiner le changement local de ces dernières dans le cadre de la conservation globale de l'univers dans lequel ils sont plongés. Dans ce cadre dual la variable temps 'à la Newton' conserve semble-t-il son statut habituel au grand étonnement entre autres de Henri Poincaré mais pas d'Alain Connes ou de Jean Pierre Badiali qui savent en démontrer la pertinence à partir de théorèmes d'automorphismes dus à Tomita-Takesaki. En dépit de la mécanique statistique qui en est le sous-bassement rigoureux et comme le souligne cependant Lee Smolin dans son ouvrage «* Rien ne va plus en physique *» publié aux éditions Dunod, la mécanique quantique, vue comme un cas particulier de problématiques complexes, est encore loin d'avoir livré tous ses secrets et toutes ses limites. La réserve formulée par Poincaré anticipe, nous le verrons, les conclusions auxquelles parviendront des articles de la somme proposée par la revue Entropie. mais nous n'en sommes qu'aux prémices comme le montre l'analyse de Villani qui suit.*

3.2. *D'autres modèles newtoniens*

La perspective scientifique qui émerge naturellement du modèle newtonien consiste reprendre le concept de la pomme ici réduite à son pépin (particule), puis soit (i) imposer un changement de dimensions de l'espace de phase ($d \geq 2$) ; soit (ii) envisager un changement de conditions aux limites, par exemple en éliminant la notion de bord tout en restant sur une topologie de type tore $\mathbb{T}^d$; soit (iii) en diversifiant les potentiels d'interactions entre sphères, ceux-ci pouvant certes rester Newtonien donc $[\phi(x\text{-}y)=-1/(x\text{-}y)]$, mais pouvant tout autant être coulombien $[\phi(x\text{-}y)=+1/(x\text{-}y)]$, maxwellien par exemple $[\phi(x\text{-}y)=-1/(x\text{-}y)^4]$, de type Lennard-Jones, ou autre. Pour X_i point d'une trajectoire appartenant au tore précédemment défini, le flot par exemple newtonien pourra alors être associé au gradient spatial linéaire des caractéristiques d'interactions, soit $d^2(X_i)/dt^2=-a \sum_{i \neq j} \nabla_x \phi\, [(X_i\text{-}X_j)/r]$. Cette dynamique conduit à établir la distribution des N particules au temps $s+t$ à partir de celle connue au temps t. Après le rôle de l'espace déterminant des interactions, on voit ici apparaitre le rôle du temps comme facteur d'automorphisme de l'évolution sur la trajectoire dans l'espace de phase.

3.3. *Fonctions de distributions*

Même considérées dans le cadre newtonien les données microscopiques de l'univers à N particules nous sont évidemment expérimentalement inaccessibles. Les quantités empiriques, donc à notre échelle (température, pression, densité) ne peuvent s'exprimer qu'en fonction des caractéristiques scalaires individuelles X_i nécessairement moyennées[4] soit : $(1/N)\sum_{i(1\ldots N)} \chi[X_{i,}, d(X_i)/dt]$. La fonction scalaire χ est généralement à variation macroscopique. Elle ne permet donc pas de distinguer les particules. Cette fonction scalaire doit donc être associée à une *mesure empirique* ${}^{e}\mu_t^N$ comme moyenne (en 1/N) sur un ensemble de particules singulières, par hypothèse chacune étant caractérisées par une localisation et une vitesse. La forme polynomiale de l'expression implique la référence à une topologie faible. Si la densité $f(t,x,v)$ est la distribution cinétique macroscopique du gaz de particules, toute mesure empirique au temps t apparait continue, avec en particulier ${}^{e}\mu_t^N\,(dx,dv) \simeq f(t,x,v)\;dxdv$. La mesure simultanée de k particules conduit à la mesure $\mu_t^{k:N}$ qui met en jeu le facteur combinatoire $(N\text{-}k\text{-}1)\,!/N\,!$ donc des corrélations entre particules Au-delà la distribution de k particules sur les N est donnée par ${}^{e}\mu_t^{kN}\,(dx_1,dv_1\ldots dx_k,dv_k)$ faisant intervenir une fonction multivariable $f^{(k)}$. Si $k=N$ la fonction ${}^{e}\mu_t^{N:N}\,(dx_1,dv_1\ldots dx_N,dv_N)$ définit le vecteur d'état du gaz. Cette distribution si elle pouvait être obtenue, donnerait sur le système une information évidemment infiniment précise.

3.4. *L'aléatoire macroscopique*

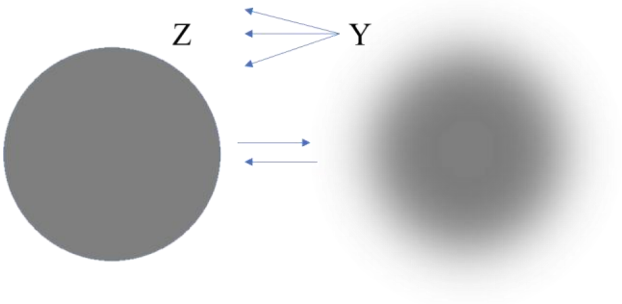
Malgré son caractère déterministe le modèle de gaz newtonien contient implicitement des hypothèses probabilistes comme par exemple l'exclusion d'un état initial conduisant de la collision de 3 particules et plus généralement de tout évènement rare. Partant, en généralisant on peut se donner une distribution de probabilité sur la distribution initiale de position et de vitesse $\mu_o^N(dx_1dv_1..dx_Ndv_N)$ ou encore $\mu_o^N(dx^Ndv^N)$ en remplacement de la mesure empirique ${}^{e}\mu_0^{N:N}$. Il s'agit d'une probabilité sur un ensemble de mesures initiales possibles. Cette distribution est invariante par permutation des particules et donne lieu à un flot de mesure probabiliste obtenu par le truchement de μ_t^N ainsi que ses « marginales » $\mu_t^{k:N}=\int_{(dx_1,dv_1\ldots dx_k,dv_k)} \mu_t^N$. Probabiliste, la signification d'une telle mesure ne pourra jamais être aussi précise que le serait une distribution « empirique ». Il s'agit donc d'une propriété presque sûre. A cet égard observons que $\mu_t^{1:N}$ n'a guère de sens physique. Toutefois la taille énorme de N conduit à penser qu'il existe au moins une boule de taille r telle que si la distance idoine entre les deux distributions ${}^{e}\mu_t^N\,(dx,dv)$ *et* $f(t,x,v)\;dxdv$ devient plus grande que r, alors la distribution initiale qui est à l'origine d'une telle configuration $\mu_o^N(dx^Ndv^N)$, doit être telle que $\mu_o^N < \alpha(N,r)$ avec en particulier $\alpha \to 0$ si $r \to \infty$ et ce d'autant plus effectivement que N sera grand ; par exemple $\alpha(N,r) \sim \exp(-cNr)$. A ce stade la prise en compte des inégalités $\int dist\,({}^{e}\mu_t^N\; d\,\mu_t^N,\, f(t,x,v)dxdv) \leq \int dist\,({}^{e}\mu_t^N, f_t\, dxdv) \leq \int \alpha(N,r)dr =: \eta(N)$ permet d'estimer un facteur de qualité $\eta(N)$. Si $\eta \to 0$ lorsque $N \to \infty$ alors $\mu_t^{1;N}$ est une excellente approximation de $f(t,x,v)dxdv$ lui-même excellente approximation de ${}^{e}\mu_t^N$.

[4] Encore faut il que la notion de moyenne ait un sens

4. Le royaume de l'entropie

Il n'est évidemment pas équivalent de manipuler une distribution macroscopique f ou de considérer la connaissance des caractéristiques de chaque particules μ. L'information f est plus petite que celle induite par μ d'où la nécessité de mettre en œuvre le concept d'Entropie (introduit en 1865 par le physicien prussien Rudolf J.E. Clausius grandeur extensive associé à la température) pour donner corps à la notion de chaleur. On doit à Boltzmann en 1868 d'avoir donné un contenu à la fois mécanique et statistique à cette notion fondamentale. A cet égard on rappellera que si des particules sont distribuées sur une arborescence ou un treillis hiérarchisé en énergie on appelle *travail* l'énergie nécessaire à la modification de la structure et *chaleur* l'énergie nécessaire à la modification de la distribution de l'occupations des branches du graphe. A une température T donnée, entropie S donne une information sur le nombre de configuration identiques possibles des différentes particules sur le graphe en question.

4.1. *Entropie et limites*



La question que soulève ici l'entropie est principalement la suivante : comment estimer l'information perdue quand on réduit l'information microscopique à la seule distribution macroscopique ? la réponse à donner est véhiculée par exemple au moyen d'une adjonction catégorique associant l'espace de configuration Z sur l'arbre des états microscopiques à l'espace de ses configurations macroscopiques Y donc au champ d'incertitudes. Tous deux sont ordonnés et dénombrables : $Z \rightleftharpoons Y$. Vue sous l'angle catégorique d'une surjection à lui associer, cette incertitude doit être liée au cardinal de la préimage de $y \in Y$: $\sharp\pi^{-1}(y) \in Z$ alors que $\pi^{-1}(y)$ correspond à une fibre Deux mesures indépendantes doivent naturellement conduire au simple produit des préimages, donc à $\sharp\pi^{-1}(y_1 y_2) = \sharp\pi^{-1}(y_1) * \sharp\pi^{-1}(y_2)$. En supposant que les incertitudes soient additives, le passage en logarithme apparait nécessaire d'où l'expression célèbre de l'entropie $S=k\ log(W)$ avec pour nombre de micro-états associé à la mesure macroscopique y la grandeur $W= \sharp\pi^{-1}(y)$. k est la constante de Boltzmann. L'hypothèse implicite majeure pour le physicien est ici celle de la séparabilité[5] des mesures qui donne tout son poids théorique à l'usage de la fonction logarithme. Dans de nombreux cas l'espace Z est continu, ce qui implique une substitution d'un décompte sur le corps des nombres naturels **N** par une mesure plus appropriée, par exemple une mesure de Liouville si l'on s'intéresse à un système hamiltonien, c'est-à-dire une mesure de volume de l'espace de phase. Si Y est lui-même continu, la fibre est alors de volume nul ce qui réduit à néant le contenu entropique de la surjection. On est alors conduit à penser l'entropie différemment en utilisant une boule $B_\varepsilon(\sharp\pi^{-1}(y))$ en utilisant la limite de la partie finie (pf) pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Ce qui revient à lisser les divergences éventuelles. $S(y)=pf(log [B_\varepsilon(\sharp\pi^{-1}(y))])_\varepsilon$, l'entropie ainsi définie apparait vraiment comme une notion idoine que l'on fait entrer dans l'approche de l'incertitude comme avec un chausse pieds. Ceci dit l'universalité de l'analyse est en particulier vérifiée si l'espace de configuration Z est celui d'un gaz de N particules soit encore Y^N. L'universalité de l'analyse est validée pour $N \rightarrow \infty$. Toutes les limites font alors sens, en particulier la

[5] Espaces polonais : métriques séparables, complets

précision infinie de la mesure $\varepsilon \to 0$ et $S(y)$ n'est alors rien d'autre que la fonction H de Boltzmann au signe près.

4.2. De la fonction H de Botzmann à l'Entropie

Soit un état macroscopique constitué de k-états défini par un vecteur de fréquences $(f_1..f_k)$ avec pour norme $f_1+ f_2...+f_k =1$. L'ensemble est dénombrable et la mesure est sans erreur donc $Nf_i=N_i$. La fonction de partition est donnée par $W=N\,!/N_1\,!..N_k\,!$. Comme il est connu en physique statistique la formule de Stirling conduit à l'expression $(1/N)logW \sim -\sum_i f_i \log f_i$ relation stricte pour $k \to \infty$ avec $k<N$. Si on ajoute l'hypothèse de l'existence d'une mesure de référence ν, sur Y et la possibilité d'un découpage en cellules $\delta(y_i)$ caractérisées par y_i. La théorie des ensembles sous contraintes ZFC faisant jouer le facteur f/δ et l'usage des approximations des sommes de Riemann, permettent de parvenir à la relation : $H(\mu)= \int f \log(f)\, d\nu$, avec $f=d\mu/d\nu$, formulation dite de Boltzmann étendue à toute probabilité macroscopique μ, en posant $H_\nu(\mu) =+\infty$ si μ n'est pas absolument continue par rapport à ν. On observera que si l'espace macroscopique Y est équipé d'une mesure de probabilité ν, alors l'espace microscopique $Z=Y^N$ dispose de la mesure naturelle $\nu^{\otimes y}$. Partant de N particules, en se donnant une famille dense de fonctions bornées uniformément continues $\{\varphi_j\}_{j \in N}$ comme suite d'observables de précision ε et en sorte que $-H(\mu)= (1/N) \log(\nu^{\otimes y})$ pour $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ et $j_{max} \to \infty$ avec pour la différence $| \int \varphi_j\, d\mu - \sum_j \varphi(y_j) | < \varepsilon$, Villani donne un contenu mathématique précis au théorème H et redémontre le théorème de Sanov, résultat phare de la théorie des grandes déviations. Le mathématicien ajoute dans son séminaire à ce résultat quelques précisions supplémentaires visant l'extension possible de son analyse.

En pratique l'entropie de Boltzmann indique la rareté de conditions susceptibles de mener à une observation inattendue. Par exemple supposons que l'on tire d'une expérience des variable aléatoires y_i associées à la mesure de probabilité ν, la mesure empirique ${}^e\mu$ est aussi une variable aléatoire. Si $N \to \infty$, elle converge vers ν la loi fondamentale de la statistique (théorème de Varadarajan). La probabilité de disposer d'une mesure μ, en lieu est place de ν, décroit alors grosso modo, comme $exp[-NH_\nu(\mu)]$ d'où la rareté en question. Il peut également être démontrer qu'il existe un lien entre l'équation de Boltzmann et la théorie de l'Information qui fut développée en 1948 par Shannon et Weaver, pour l'optimisation de l'ingénierie des lignes de transmission. On y définit la quantité d'information obtenue par déchiffrage d'un signal aléatoire en fonction de l'inverse logarithmique de sa probabilité d'apparition.

On observera que le génie de Boltzmann a été de savoir abandonner la *prédictibilité déterministe* newtonienne pour proposer à la place *une prédictibilité probabiliste*[6]. Le saut conceptuel fut considérable car en ramenant les phénomènes thermiques à une mécanique, cette révolution cognitive ouvrit la voie à Planck et à la mécanique quantique. La composante statistique de cette mécanique est dépendante d'une constante universelle k (exprimée en joule/unité de température JK^{-1}), dite de Boltzmann. L'entropie étant alors discrétisée précisément au moyen de k : $S=k \log W$ une multitude de complexions statistiques W, peuvent conduire à la même énergie macroscopique d'où l'importance du concept de surjection et d'inclusion. Le rôle de l'entropie est alors d'affecter une grandeur observable à une ambiguïté énergétique modulo une valeur de température qui pour une énergie donnée, fixe l'amplitude de la boule minimale de mesure macroscopique au-dessous de laquelle aucune observable microscopique n'est plus accessible et relève sauf cas particulier (autosimilarité) des lois du hasard pur. Pour des raisons spectrales cette amplitude est associable à un temps caractéristique[7]. Dans la même veine on doit à Shannon l'interprétation de k, comme valeur du quantum d'information attaché à

[6] Evolution qu'on retrouve en mécanique quantique.

[7] A titre d'exemple équivalence *temps-température* relation bien connue en physique des polymères et *temps-thermique* de Connes-Rovelli en mécanique quantique

chaque degré de liberté microscopique. Il résulte du caractère extensif de l'entropie et du caractère intensif de son dual la température, qu'à valeur d'énergie constante toute évolution doit opérer dans le sens d'une plus grande probabilité (au pire son maintien). Le flux thermique habituellement observé est naturellement orienté des hautes températures vers les basses températures.

4.3. *Entropies et précision de l'information*

Dès lors que l'entropie est liée à la théorie de l'information on peut être tenté de croire qu'il ne s'agit pas d'un concept universalisable mais d'un concept réduit à notre capacité d'observation. Les communications qui suivent celle-ci ont pour objet de relativiser cette conclusion à l'évidence trop connotée probabilités. Il n'empêche, l'entropie est bien associée à une question de précision[8] et chacun pourra donc questionner son universalité.

Par exemple l'entropie de Boltzmann informe sur la rareté de la fonction de distribution cinétique $f(x,v)$, ainsi que sur la quantité maximum d'informations microscopiques accessible dès lors que f est connus. Il s'agit donc de questions liées à nos capacités d'observations. Si on connait tous les détails de la distribution microscopique il n'y a pas d'information cachée donc l'entropie est nulle. Tel n'est pas le cas si on ne connait que des probabilités concernant la configurations microscopiques μ^N ; l'entropie sera d'autant plus petite que μ^N sera concentrée spatialement et détaillée. On disposera alors pour entropie microscopique de la grandeur : $S=-H_N$ avec $H_N= \int f^N \log(f^N)\, dx^N dv^N$ grandeur qui sera conservée si la dynamique est de type newtonien (Théorème de Liouville). On aura $H_N \geq H(\mu^{1:N})$ l'égalité étant validée en l'absence de corrélations entre particules, cas de $H({}_{\mu}{\otimes}^{N})$. L'idée qui ressort des hypothèses qui précèdent est la suivante : l'état microscopique est plus facile à obtenir en examinant une distribution multi-particules qu'une distribution mono-particulaire sauf bien sûr dans le cas d'égalité ci-dessus. On peut alors se contenter de disposer d'une information plus grossière que la distribution cinétique : par exemple la distribution hydrodynamique. Celle-ci repose sur les données du champ de densité $\rho(x)=\int f dv$, de la vitesse moyenne $u(x)=\rho^{-1}\int f\, v\, dv$ et de la température $d.T(x).\ \rho(x)= \int f\ |v-u|^2/2\ dv$. Alors $S_{cin}>S_{hydro} = - \int \rho \log(\rho/T^{d/2})\, dx$. Ainsi hiérarchise-t-on différents niveaux de précision d'informations : l'information microscopique, l'information statistique et mésoscopique quantifiée par l'entropie de Boltzmann, l'entropie macroscopique hydrodynamique où les particules subissent une multitude de chocs par unité de temps, etc.

5. Ordre et Chaos

5.1. *Entropie et corrélations : quid du chaos ?*

La subtilité de l'équation de Boltzmann tient à l'existence d'une adjonction entre ordonnancement (ordre) que l'on peut associer aux corrélations entre particules (corrélations que l'on associera dans certains articles qui suivent à la géométrie du support de distribution) et le chaos pur qui suppose l'indépendance des particules. Il est équivalent de dire que les particules s'ignorent ou que leur loi jointe est un produit tensoriel $\otimes$; d'où la formulation $H(\mu^{\otimes N})$. Si les particules s'ignorent dans une distribution dite initiale, elles doivent vite entrer en interdépendance du fait des collisions entre elles, la situation extrême étant celle des collisions entre sphères dures. On découvre ici une première subtilité : l'indépendance entre particules est à prendre au sens asymptotique lorsque $N \to \infty$ alors que l'indépendance mesurée l'est toujours sur un nombre fini de particules. En reprenant les notations précédentes on dira que μ^N est chaotique si $\mu^N \simeq \mu^{\otimes N}$ au sens de la topologie faible des mesures produit. Cette remarque, explicitée mathématiquement dans la référence Villani, conduit à une

[8] Les travaux dont feront états les communications qui suivent celles portant sur les recherches de Cédric Villani sur l'entropie, contournent la seule idée de mesure en attachant l'incertitude non pas à une observation mais aux propriétés spectrales naturelle de tout processus et plus spécifiquement de processus renormalisables, ou ceux plongés dans des espaces ultra-métriques. La convolution de cette distribution et des propriétés du milieu dans lequel se développe le processus jouent alors le même rôle que l'observation, cette fois sans observateur. L'entropie qui ressort des champs de surjections et des morphismes est bien un site dual mais les caractéristiques qui l'équipent ne sont pas nécessairement Anthropiques.

multiplication des fonctions de mesures indépendantes : $\varphi_{j\leq k}(y)$. Ce qui compte devient la seule indépendance d'un petit nombre k de particules parmi un très grand nombre N. En pratique il semble qu'il suffise de k=2. Le mot *chaos* serait attaché au fait que 2 particules tirées au hasard parmi $N\rightarrow\infty$ sont asymptotiquement indépendantes[9]. La démonstration repose sur l'analyse des liens entre chaos et mesures empiriques.

5.2. *Chaos et mesures empiriques*

Nous allons considérer ici une idée qui peut paraitre paradoxale à savoir que la loi des grands nombres conduit presque surement au déterminisme des lois macroscopiques. Réciproquement l'existence de corrélations s'accommode mal d'une prescription des valeurs de densités macroscopiques. Plus précisément on montre que le chaos microscopique correspond au déterminisme de la mesure empirique ; soit encore l'équivalence des énoncés (i) μ^N est μ-chaotique et (ii) la mesure empirique ${}^e\mu^N$, associée à μ^N (mesure de probabilité aléatoire en 1/N) convergent en loi vers la mesure déterministe μ ; on pourrait donc remplacer ${}^e\mu^N$ par μ dans l'expression statistique, pour N grand. Le raisonnement repose sur le fait que lorsque l'on tire 2 boules au hasard parmi N la seule information δ_{yj} dont je dispose a priori c'est qu'elles sont distinctes. N est alors par exemple réductible à $\otimes$N. Il en résulte qu'un premier tirage N_1 dans un ensemble N modifie légèrement les variables du second tirage puisque nous n'avons pas $f_1=N_1/N$ et $f_2=N_2/N$ mais $f'_1=N_1-1/N-1$ et $f'_2=N_2/N-1$. Il est par exemple possible de concevoir une notion plus « forte » dite de Chaos Entropique. On y impose alors $H_{\mu^{\otimes N}}(\mu^N)=o(N)$. Cette notion peut elle-même être généralisée à d'autres hypothèses ce qui permet une fois de plus de hiérarchiser plus précisément les différents chaos concevables. On plongera dans le texte original pour disposer des détails de cette différentiation ainsi que du nom des scientifiques qui se sont attachés à cette question.

5.3. *Le règne du Chaos et son contrôle*

Alors même que la notion d'atomicité est encore loin d'être admise, la théorie de Boltzmann conduit à ce que la règle déterminisme est remplacée par la règle statistique y compris en thermodynamique. L'idée de chaos est le fondement de cette révolution conceptuelle et partant il en est de même pour l'entropie. Or le chaos microscopique n'est pas contrôlable macroscopiquement ; donc il est possible d'affirmer que (i) nous ne pouvons pas agir microscopiquement et il est difficile d'imposer des corrélations[10] ; (ii) les lois sous-jacentes à la détermination de la structure microscopique nous sont inconnues et font intervenir un grand nombre de variables non pilotables[11] ; (iii) de ces inconnues chaotiques émergent néanmoins des lois macroscopiques déterministes et (vi) si l'on contraint la distribution macroscopique, l'entropie d'une distribution microscopique chaotique est plus grande que celle impliquant des corrélations[12].

---

[9] On peut montrer qu'il est possible de discrétiser le problème et donc en définissant une distance idoine entre les deux mesures est-il possible de quantifier le chaos.

[10] Telle est précisément la difficulté que doivent affronter les ingénieurs en concevant des dispositifs qui non seulement plongent ces corrélations dans l'action mais encore doivent les faire durer dans le temps avec maintien de leurs caractéristiques initiales. On pense là tout particulièrement aux machines, aux matériaux actifs (production d'énergie, stockage de l'énergie et des produits chimiques, catalyse…), aux dispositifs de traitement de l'information (fibres, câbles, puces…). Le plus souvent ces corrélations concernent la géométrie de l'espace et les métriques qui y sont associées. Le cas de l'électrochimie pour le stockage d'énergie est emblématique.

[11] On dirait « non pilotable simplement » car il est acquis que l'ouvrier possède précisément avec l'expérience l'art et le métier qui lui permet de piloter ce que l'ingénieur conçoit mais ne peut réaliser sans le coup de main et l'astuce que seule l'expérience permet d'acquérir. Beaucoup de systèmes ne fonctionnent que grâce à ce coup de main qui échappe souvent aux plans qualité et aux volontés d'optimisations managériales. Les variables inconnues que l'on croit incertaines ne le sont précisément pas.

[12] On observera que ce dernier argument est hautement problématique pour un ingénieur dont l'objectif est toujours de faire décroitre les facteurs entropiques qui affectent le processus qu'il met en œuvre.

Fondamentalement le statut entropique du chaos est le suivant : soit μ une probabilité sur l'ensemble Y alors la probabilité produit est la probabilité d'entropie maximale parmi toutes les probabilités μ^N sur Y^N ayant μ pour « marginale ». La mesure microscopique initiale $\mu_0{}^N$ sur l'espace des observations possibles peut être considérée comme un objet bayésien puisqu'il fixe arbitrairement une information (distribution) d'état zéro *dont l'objet est de maximiser une entropie*. L'entropie étant une grandeur extensive, on maximise ainsi de façon canonique l'information qui reste à acquérir en laissant ouvertes le maximum d'observations futures possibles.

Remarque du rapporteur : On voit que cette démarche est exactement inverse à celle de l'ingénieur qui cherche au contraire à maximiser l'énergie libre de son action, c'est-à-dire à minorer l'entropie de départ en construisant un dispositif, une machine y compris microscopique, qui contienne le maximum de corrélations visant à atteindre un objectif pratique. C'est le cas en catalyse, en électrochimie dans la conception des batteries, en rhéologie et usage des polymères, etc. On voit là l'origine de la différence de point de vue qui a conduit dans les années 70-80 à distinguer, les phénomènes de « transports » tels que pensées naturellement par les physiciens à partir de considérations statistiques (éventuellement contraintes géométriquement par exemple les phénomènes d'agrégation ou de percolation) des notions de « transferts » ayant pour objet de convoluer le déterminisme d'une action finalisée avec le chaos d'un milieu hétérogène dont il s'agissait de contrôler au mieux l'état chaotique (minoration dynamique de l'entropie) et non pas seulement à son état initial. L'exemple emblématique ici a été la mise au point des premières batteries lithium/ion. Il ne s'agit par exemple en électrochimie, en rien de propager le chaos mais au contraire de le fixer pour qu'il n'évolue pas en dépit de la production d'entropie par les processus irréversibles mis en jeu. La volonté de rapporter de façon détaillée le travail de Cédric Villani ne relève donc pas seulement d'une volonté d'honnêteté et d'exhaustivité du projet éditoriale, mais aussi celle de confronter les multiples approches possibles sans négliger le rôle de la profondeur formelle et du détail conceptuel, que révèlent les travaux de l'académicien.

Revenons à la démarche mathématique concernant la relaxation et la propagation éventuelle du chaos. Les résultats mathématiques obtenus sous les hypothèses fixées montrent que l'indépendance des particules est conservée au cours de la relaxation, autrement dit, d'une part la propagation du chaos donne des informations statistiques sur la dynamique microscopique, et d'autre part, elle garantit que la mesure empirique reste déterministe garantissant donc la disponibilité d'une équation macroscopique susceptible de représenter l'évolution observée.

5.4. *Evolution entropique*

Le thème récurrent de l'étude qualitative des systèmes dynamiques est la détermination de mesures invariantes, comme par exemple la mesure de Liouville pour les systèmes hamiltoniens, (mesure susceptible d'être tensorisée Y^N : voir ci-dessus). La question qui se pose est la suivante : que devient la préservation du volume de l'espace de phase pour $N \to \infty$ par exemple dans le cas où on dispose d'une mesure ν-chaotique $\nu^{\otimes N}$ sur Y^N ? Une conséquence des analyses précédentes est la préservation de l'information microscopique $H_{\nu^{\otimes N}}(\mu_t{}^N)$ lors d'une évolution initiée à partir de $\mu_0{}^N$. Toutes les mesures sont préservées ; il en est donc de même de la densité $f^N(t,y_1,\dots y_N)$ et donc de l'intégrale sur cette densité $\int f^N \log(f^N) d\nu^{\otimes N}$. Toutefois cette description se situe au niveau microscopique. Qu'en est-il au niveau macroscopique ? Si les différentes particules évoluent indépendamment la mesure $\mu_t{}^N$ reste factorisée et l'entropie reste constante. L'évolution opère alors sous l'effet des interactions. Il a été démontré plus haut qu'il y a propagation du chaos en un sens suffisamment fort pour que le déterminisme final soit assuré pour $N \to \infty$ avec les mesures ${}^e\mu_t \simeq \mu_t$ bien définies. Toutefois et c'est là que les difficultés apparaissent, il peut exister d'autres configurations microscopiques initiales compatibles avec la mesure empirique obtenue. On s'attend donc à ce que l'entropie augmente au cours du temps à partir d'un état initial donné (nonobstant les notes en bas de pages ci-dessus, on ne sait d'ailleurs comment il peut l'être). L'argument ne peut être renversé en prenant l'état au temps *t* comme état initial car on rappelle que l'état initial est pris chaotique au sens fort (absence totale de corrélations entre particules) ce qui n'est plus le cas au temps *t*. Il faut donc définir le statut quantitatif du chaos dont on parle, par exemple un chaos dans un sens plus faible. C'est évidemment à ce stade que les notions d'échelle de corrélations font leur entrée dans les raisonnements car les interactions peuvent opérer à des échelles très différentes comme le montrent par exemple les contraintes associées aux processus renormalisables. C'est à ce stade que les ennuis cognitifs des uns ouvrent de nouvelles perspectives heuristiques pour les autres, comme le montre les communications qui suivent la présente introduction, car les corrélations peuvent être, au moins partiellement contrôlées macroscopiquement grâce à l'ingénierie, contrairement à ce que pense naturellement le théoricien. Mais nous n'en sommes pas là et il est temps d'examiner les limitations conceptuelles évoquées par Cédric Villani.

6. Les équations cinétiques

Revenons aux systèmes newtoniens. L'espace de phase des systèmes newtoniens est défini par une localisation spatiale et une vitesse. Les équations cinétiques, faisant la part belle aux vitesses que l'on suppose exister en liens avec des trajectoires, ont pour objet de déterminer l'évolution de la fonction de distribution $f(t,x,v)$ au cours du temps (cette idée se généralise à tous les degrés de liberté rotation des « particules » par exemple). La finalité des études est de déduire de la distribution microscopique sous réserve d'hypothèses de modélisation précises, le comportement macroscopique du gaz. A cette fin Villani considère successivement les équations cinétiques de Vlasov (1938), de Boltzmann (1867), de Landau (1936) et de Balescu-Lenard (1960)

6.1. *Equation de Vlasov*

Cette équation de champ moyen est dite équation de Boltzmann sans collision. Dans le modèle newtonien la particule ressent l'influence moyennée de toutes les autres particules, la force étant évidemment associée à l'accélération. L'équation qui en résulte, linéarisée est en un certain sens élémentaire dans la mesure où on normalise les forces d'interaction $(\alpha N=1)$ et où la mesure empirique est réduite à la distribution ${}^{e}\mu=f$ et ${}^{e}\mu_t^N=f(t,x,v)dxdv$. L'équation s'exprime de manière différentielle et intégrale comme une somme de termes locaux (voir démonstration dans le texte de référence)

$$\partial f/\partial t + v\nabla_x f+[F *_x \int fdv].\nabla_v f=0$$

${}^{e}\mu_t^N$ étant une solution faible le passage à la limite est valide. Il ne s'agit que d'une conséquence de la stabilité. Nous voyons apparaitre un terme intégral qui traduit la présence du champ moyen. La topologie du problème est déterminée par la régularité de F et rien ne dit que les produits $F* {}^{e}\mu_t^N$ et $F*\int fdv$ converge de manière identique vers une solution unique même si la convergence de ${}^{e}\mu$ empirique est uniforme. Il en résulte que rien ne garantit que $[F* {}^{e}\mu]\,{}^{e}\mu$ soit équivalent à $[F*f\,]\,f$. L'équivalence est cependant vraie si F est bornée et uniformément continue. Si en outre, F est L-lipschitzienne on peut établir une estimation de la stabilité en fonction du temps. Toutefois si l'interaction est singulière la détermination de la stabilité se réduit alors à des cas particuliers à traiter spécifiquement. On voit là, à propos du cas linéarisé, le nombre de questions et d'hypothèses à mettre en jeu pour aboutir à une solution fiable. On comprend que partant des seules hypothèses newtoniennes l'équation de Vlasov soit la plus simpl des approches en champ moyen. Pour autant il apparait qu'elle ne simplifie le sens physique, en particulier par le truchement de l'équation de Vlasov-Poisson, que lorsque l'on réduit F au gradient de la solution d'un laplacien Δ : $F=-\nabla_x W$. Dans ce cas les hypothèses permettent de traiter aussi bien des plasmas (particules chargées interactions coulombiennes répulsives) que des galaxies (particules en interactions gravitationnelles attractives). La théorie de l'équation de Vlasov-Poisson reste encore incomplète et on trouvera dans l'article dont la présente note est le résumé, les remarques et les références de Cédric Villani à propos de tous les détails qu'implique l'analyse.

6.2. *Equation de Boltzmann*

L'équation de Boltzmann apparait formellement plus simple que l'expression de Vlasov. Toutefois, par essence non linéaire elle est en fait bien plus compliquée malgré la prise en compte, au moins dans une première approche, de chocs de type $0(1)$ par unité de temps associés à des sphères dures.

L'équation est par contre plus simple que l'équation hydrodynamique pour laquelle le type de choc est *0(n)*. Etablie par Maxwell et Boltzmann formulée à la fin de la première moitié du XIXème siècle l'équation prend en compte des interactions à courte portées (comme par exemple dans un gaz raréfié) :

$$\partial f/\partial t+v\nabla_x f = Q(f,f)$$

Toute la complexité de l'analyse se cache évidemment dans le noyau $Q(f,f)$ autrement dit dans l'opérateur de collision qui même pour les sphères dures apparait d'une grande subtilité. Il exige pour toute approximation, (i) une hypothèse de chaos pré collisionnelle (absence de corrélations avant choc par opposition à l'existence de corrélations après choc). La probabilité de rencontre entre les particules est donnée par des marginales uni-particule $f^{2:N}(t,x,v,x+2r\omega,\omega)\sim f^{1:N}(t,x,v,).f^{1:N}(t,x,\omega)$ si $(v-\omega)\omega<0$. Cette rencontre fait intervenir l'espace de toutes les configurations pré-collisionnelles où des particules en x et y sont telles que $|x-y|=2r$ et $(\omega-v)(y-x)<0$ et caractérisées par des vitesses v et ω[13]; (ii) une normalisation donnée par $\omega=(y-x)/|x-y|$; (iii) une section efficace de rencontre σ entre deux particules exemptée de corrélations pré-collisionnelles (en dimension $d=3$) et donnée par $\sigma=\pi r^2$; (iv) une probabilité de rencontre donnée par $\sigma|v-\omega|cos(\varphi)$ avec φ l'angle entre (v-ω) et ω (Si $\varphi=\pi/2$ les deux particules se frôlent) ; des vitesses avant et après choc ((ν,ν*), des vitesses créés par collisions (ν',ν'*) etc. Cette analyse conduit à un noyau de type

$$Q_B(f,f)\ (t,x,v)=B\int_{R^3}\int_{S^2} |(v-v^*)\omega|(f(t,x,v')f(t,x,v^{*\prime})- f(t,x,v)f(t,x,v^*))dv^*d\omega$$

B est une constante de proportionnalité alors que l'ensemble $^-S^2$ initial représente l'ensemble des configurations pré-collisionnelles $\omega(\nu-\nu^*)<0$. On observe que ce facteur peut être symétrisé pour ± ω ce qui conduit à l'usage de la valeur absolu. Ce noyau symétrisé est l'opérateur de collisions de Boltzmann pour les sphères dures. Partant, toute la question est de justifier cette approximation et la pertinence de la convergence vers une solution unique prenant en compte les hypothèses utilisées.

On appelle limite de faible densité de Boltzmann-Grad la limite qui répond à l'hypothèse d'une section efficace sommée sur toutes les particules, constante (normée à un). Partant d'une densité de probabilité initiale $f_0^N(t,x^N,v^N)dx^Ndv^N$ donnée, on cherche à montrer que la première marginale $f^{1:N}(t,x,v)$ converge vers la solution de l'équation de Boltzmann. Pour N donnée et une dilatation d'échelle spatiale $\eta \sim 1/N^{1/2}$, l'évolution de la densité de particules sera donnée par $N/N^{3/2}=N^{-1/2}$. Par un changement d'échelle standard associé à une structure de type Péano ne nécessitant donc aucune donnée additionnelle (extériorité) donc aucune condition aux limites spatiales, on fait apparaitre le facteur de puissance très sympathique ½ car liée à des lois de diffusion standard pour des sections efficaces fixes ; les bornes sont gaussiennes. On doit à Lanford une esquisse de démonstration de l'existence et de l'unicité de cette limite faible. Dans son article Villani entre dans les détails et explique pourquoi il utilise le terme « esquisse ». Plusieurs travaux complémentaires au travaux initiaux sont requis pour montrer que la distribution microscopique suit une loi de Poisson dans l'espace de phase, permettant de donner une expression précise du concept de chaos moléculaire associé à la cinétique de Boltzmann. La limite de Botzmann-Grad pas plus que, le théorème de Lanford[14] pour les sphères dures ne traitent des interactions à longues portées ni n'éclairent l'idée de chaos pré-collisionnelle car le modèle serait alors sous la contrainte de faire disparaitre le chaos après collision (une topologie uniforme conduirait par exemple à un chaos post collisionnelle avec une distribution des marginales en vitesse de type gaussienne ce qui est généralement faux). Les idées associées à ces modélisations restent donc on le voit définies de façon hautement contrainte et mériteraient sans doute qu'on y attache des trajectoires conduisant aux collisions entre sphères et non

[13] L'hypothèse de Boltzmann consiste à affirmer que lorsque deux particules ont une grande probabilité de rencontre elles ne sont au préalable que très peu corrélées

[14] Ce théorème conduit à ce que il existe un temps t*>0 tel que $f_t^{k;N}$ converge presque partout vers $f_t^{\otimes k}$ avec f_t solution de l'équation de Boltzmann pour t dans l'intervalle $[0,t^*]$

plus les seuls chocs entre sphères qui ne peuvent conduire qu'à des lois presque normales dès lors que le modélisateur évite une complexification exponentielle des hypothèses. On trouvera dans l'article de Villani les références à tous les travaux attachés au théorème de Boltzmann et tout particulièrement les questions ouvertes sur des interrogations associées à l'hypothèse du chaos pré-collisionnel.

Au-delà du modèle des sphères dures, l'équation de Boltzmann est utilisée dans une gamme, bien plus large d'interactions et par ailleurs extensible en dimension *d* quelconque ; on écrira

$$Q(f,f)(t,x,v)= \int_{R^d}\int_{S^{d-1}} f(txv')f(t,x,v^{*}')- f(txv')f(t,x,v^{*}'))B^{*}((v-v^{*})\omega\ )dv^{*}d\omega$$

avec B^* fonction de $|v-v^*|$ et $|(v-v^*).\omega|$. Les formules de diffusion (scattering) faisant intervenir l'angle de déviation θ avant$(v-v^*)$/après$(v'-v'^*)$ sont dues à Maxwell. Lorsque le potentiel entre sphère est de type $\phi(r)$ ~$1/r$ on retrouve la formule de Rutherford pour la déviation coulombienne soit le noyau $B(|v-v^*|,\cos\theta)=1/((|v-v^*|^3\sin^4(\theta/2))$Si $\phi(r)\sim 1/r^{s-1}$ on trouve alors $B(|v-v^*|,\cos\theta)=|v-v^*|^{\gamma}.\ b(\cos\theta)$ avec $\gamma=(s-5)/(s-1)$ ou la fonction B est localement lisse avec une singularité pour θ limite en zéro ; cette singularité correspond un impact frontal sans déviation.

Dans le cas s=5 le noyau ne dépend plus des vitesses relatives mais seulement de l'angle de déviation on parle de particules maxwelliennes (par exemple, cas d'ions chargés et de particules neutres dans un plasma). Les potentiels sont dits : durs si s>5 et mous si s<5**.** On trouvera dans la référence le détail de l'analyse qui est ici réduite à sa substance afin de mettre en évidence les conditions de possibilité minimales permettant de trouver une solution fiable pour l'équation proposée. Comme le montre le texte original les questions ouvertes restent nombreuses et nonobstant les contenus physiques, les justifications mathématiques sont encore loin d'être acquises.

6.2. *Equation de Landau*

Du fait de la décroissance très lente du potentiel avec la distance, l'intégrale collisionnelle de Boltzmann pour des interactions coulombiennes perd son sens. En 1936, Landau établit une asympotique du noyau de Boltzmann (en collisions rasantes lorsque la neutralité du plasma est acquise) pour une distance d'écrantage électrique λ_p et une distance d'interaction caractéristique dite de collision r_0 due à l'énergie thermique. Il sort de ces données physiques un paramètre adimensionnel de plasma $\Lambda=2\lambda_p/r_0$. Dans la limite $\Lambda\to\infty$ on peut remplacer l'opérateur de Boltzmann équipé du potentiel coulombien écranté $Q_B(f,f)$ par un opérateur diffusif intégral $Q_L(f,f)$ appelé noyau de Landau

$$Q_B(f,f) \simeq (\log\Lambda\ /2\pi\Lambda)\ Q_L(f,f)$$

$$Q_L(f,f)= \nabla_v \left(\int_{R^3} a(v-v^*)\ [f(v^*)\ \nabla_v f(v^*)- f(v)\ \nabla_v f(v)]dv^* \right) \text{ et } a(v-v^*)=(L/\ |v-v^*|)H_{v-v^*}$$

et L constant et H un projecteur des vitesses relatives. On peut généraliser à $d>2$ et on peut changer le coefficient $L/|z|$ ci-dessus en $L/|z|^{\gamma+2}$ avec $\gamma=(s-5)/(s-1)$. Le cas $\gamma=-3$ en dimension 3 est le plus intéressant ($s=2$ alors en diffusion molle). Ce que l'on sait alors démontrer mathématiquement, à savoir (i) l'existence de solutions faibles pour le cas homogène, et (ii) des solutions fortes pour la perturbation de l'équilibre, laisse de nombreuses questions là aussi ouvertes.

Il faut attendre les équations de Balescu-Lenard pour que soit établies directement l'équation cinétique décrivant les interactions dans un plasma. C'est elle qui justifie aujourd'hui théoriquement l'approximation de Landau en particulier pour le traitement des fluctuations en temps long. Toutefois, comme on pouvait le prévoir, la précision se paye ici par une complexité accrue qui limite l'usage des équations de Balescu-Lenard situation qui ne remet cependant pas en cause l'importance théorique de de cette dernière.

7. Le théorème H

On s'intéressera aux propriétés les plus marquantes du théorème évidemment en lien avec le concept d'entropie.

7.1. *Modification des observables par collisions*

Les collisions qui affectent les particules de gaz entrainent une évolution des observables macroscopiques $\iint f(t,x,v).\varphi(x,v)dxdv$. La tendance est de penser à une « relaxation des écarts entre états» et l'habitude consiste à supposer cette relaxation exponentielle ; encore faut-il développer le calcul complètement pour montrer que $\iint f(t,x,v)dxdv$ est une constante (« fort heureusement » comme l'écrit Villani) et définir l'équation cinétique en suivant le raisonnement maxwellien prenant en compte toutes les contraintes telles que l'usage du jacobien unitaire, la micro réversibilité, les symétries pré-post collisionnelles, etc. Parmi les facteurs physiques importants on trouve en particulier la section efficace du transfert de quantité de mouvement qui maintient la problématique dans un cadre fini. L'analyse est améliorée par Maxwell en tenant compte des symétries équationnelles en particulier le fait que l'intégrale définie par $\iint f(t,x,v).\varphi(x,v)dxdv$ est conservée si, quels que soient ω, v et v*, φ(v')+φ(v'*)= φ(v)+φ(v*). L'invariant de collision φ ne fait alors intervenir que 1, v_j $(1 \leq j \leq d)$ et $|v|^2/2$, limitation ici simple reflet de la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie au niveau microscopique. On voit au long de l'analyse théorique développée par Villani comment les hypothèses associées aux notions physiques contraignent la statistique à rester dans le cadre raisonnable dans lequel les divergences éventuelles sont sous contrôle.

7.2. Le théorème H : visite des états les plus probables

Puisque f est une probabilité, c'est-à-dire une échelle de mesure particulière, le paradigme consistant à user (et abuser) de lois exponentielles, conduit assez naturellement, à écrire l'invariant de collision sous la forme $\varphi=log(f)$. Cette formulation revient à exprimer une loi d'échelle homogène en temps sur l'espace de phase. En supposant toutes les bonnes propriétés analytiques remplies, en particulier la validité de l'intégration par parties permettant de mener les calculs, on arrive à

$\iint f.v\ \nabla_x (log f)dxdv = \iint v\ \nabla_x [flog(f)-f]dxdv=0$ soit encore,

$$d/dt\ [\iint f.\ (log\ f)dxdv]=-1/4.\ \iiiint B(f'f'^*-f\,f^*).(logf'f'^*-logf\,f^*)dxdvdv^*d\omega$$

la fonction ci-dessus est presque partout négative et plus précisément strictement négative si $f'f'^*$ et différent de $f\,f^*$; donc le modèle de Boltzmann implique que l'entropie augmente avec le temps. Ce résultat est fondamental car il ressort certes d'une heuristique mais surtout d'une logique particulière. Il ne s'agit plus d'un postulat ou d'un principe tiré de l'expérience mais du résultat d'un calcul de statistique-mécanique conçue au niveau microscopique visant à déterminer des lois macroscopiques donc expérimentables par un observateur. Boltzmann met ainsi en évidence l'existence d'une flèche du temps fondamentale qui résulte du fait que la distribution est associée à une loi d'échelle hyperbolique donnant un rôle prépondérant aux corrélations entre échelles $1/\eta(v)\sim f$ dont on tire à contrario le statut intégral de la fonction logarithme[15]. Ainsi est-ce la conservation de l'espace de phase, c'est-à-dire la réversibilité microscopique, qui se trouve au cœur de l'irréversibilité alors mise en évidence.

Dans le cas où il y a présence de dissipation locale, comme par exemple dans les milieux granulaires, la dynamique macroscopique ne vérifie plus le théorème H, c'est-à-dire une évolution vers les états les plus probables. Néanmoins comme le démontre Villani, les états de grande entropie occupent un volume tellement plus grand en ordre de grandeur que les états de basse entropie, qu'il

[15] Remarque du rapporteur : Non seulement l'irréversibilité macroscopique n'est pas contradictoire avec la micro-réversibilité mais elle lui est intimement liée. Encore faut-il éviter les corrélations non linéaires entre échelles qui viendraient par exemple d'une distribution en loi de puissance $1/n(v)^a=f$ dont on verra dans les autres communications d'une part l'universalité par le truchement de la fonction zêta de Riemann et d'autre part le rôle dans la définition de nouvelles classes d'entropies.

serait inconcevable qu'un système naturel, non forcé, visite préférentiellement ces derniers. Toutefois la démonstration de ce fait est, comme il a été vu, indirect et complexe passant par la propagation du chaos et le déterminisme macroscopique. Elle est à ce jour incomplète.

7.3. Annulation de la production d'entropie

L'existence du théorème H conduit évidemment à s'interroger sur les états microscopiques qui annulent la production d'entropie. On a vu ci-dessus que spatialement la Production d'Entropie (PE) est donnée par $PE\ [\int f(x,.)dx]$ avec $PE(f)$ la fonctionnelle de production locale d'entropie donnée par l'intégrale triple en vitesse $dvdv^*dw$ caractérisée par la fonction B presque partout supérieure à zéro. Il s'en suit que l'annulation à lieu si $f'(v)f'(v^*)=f(v)f(v^*)$ pour presque toutes les distributions de vitesses y compris ω. On retrouve le fait que f doit être le logarithme d'un invariant de collision φ. f peut être développé sous la forme $f(v)=exp(a+bv+c|v|^2/2$ éventuellement réécrit sous la forme d'une gaussienne particulière avec matrice de covariance égale à l'identité : $f(v)=\rho.exp[|v-u|^2/2T]/(2\pi T)^{d/2}$. Cette fonction est dite Maxwellienne locale ou encore état hydrodynamique (pour des gaz parfaits c'est-à-dire des gaz caractérisés par une pression proportionnelle à ρT). Elle annule l'opérateur de collision $Q(f,f)=0$. Les facteurs $\rho(x)$, $u(x)$, d et $T(x)$ sont des constantes de champs locaux. On doit à Boltzmann la démonstration que les gaussiennes sont les seules solutions de l'équation $PE(f)=0$. La démonstration est reconsidérée dans le détail par Cédric Villani.

8. Convergence entropique : oubli à marche forcée

Dans son programme de travail Boltzmann souhaite démontrer comment la distribution gaussienne devient la limite asymptotique au temps long de l'équation cinétique. Ainsi vise-t-il l'objectif ambitieux de fonder le statut de l'équilibre (non dissipatif) sur des cinétiques fondamentalement dissipatives donc irréversibles. Ce type de programme reste un graal dans de nombreux domaines de la physique et Cédric Villani s'y est beaucoup attaché. Pour fixer les idées il suppose que la variable de position vit sur la surface d'un tore T^d autrement dit, il discrétise sa problématique à un d-volume fini.

8.1. Maxwellienne globale

Nous avons déjà rencontré les Maxwelliennes locales qui annulent l'opérateur de collision. Il s'agit maintenant d'annuler l'opérateur de transport, $v\,\nabla_x$ soit encore fixer des constantes de champs indépendantes de la position. Si M est la distribution maxwellienne qui représente l'équilibre pour l'équation de Boltzmann ; alors $(2\pi T)^{d/2}\,M = \rho\,exp(-|v-u|^2/2T)$. Sans perte de généralité on peut écrire $\rho=1$, $u=1$ et $T=1$ dans cette gaussienne. M est la distribution qui maximise l'entropie sous les contraintes de masse, de quantité de mouvement et d'énergie fixées. Cette distribution anticipe la mécanique statistique d'équilibre et les ensembles micro-canoniques de Gibbs.

8.2. Argument entropique

Boltzmann utilise le théorème H pour affirmer que (i) la maxwellienne augmente strictement sauf si elle traduit un état hydrodynamique ; par ailleurs, (ii) la maxwellienne globale, stationnaire, est la seule solution hydrodynamique isentropique. La dynamique déterminant l'évolution ne restera jamais bloquée sur une autre distribution que la distribution maxwellienne. Cette affirmation est vraie pour toutes les solutions suffisamment régulières de l'équation de Boltzmann. A ces affirmations Villani ajoute deux remarques.

La première est d'observer que la mesure de Lebesgue qui a été prise pour référence pour le calcul de l'entropie de Boltzmann peut être remplacée par la maxwellienne. En effet

$$H(f)-H(M)= [\iint f \log (f/M)\, dxdv\,]=H_M(f)$$

Cette formulation repose sur le fait que log(M) est un invariant de collision. La seconde remarque conduit à observer que, en vertu de l'inégalité : $H_M(f) \geq ||f\text{-}M||^2_L /2||M||_L$, inégalité de Csiszàr-Kullback- Pinsker, la différence d'entropie quantifie l'écart à la gaussienne d'équilibre. Il fallut, indique Villani, un siècle pour donner un statut formel à cette quantification et surtout pour lever l'apparente contradiction entre le théorème de récurrence de Poincaré et la convergence vers l'équilibre (traitement des problématiques en temps long de l'équation de Boltzmann).

Le théorème H étant général et pertinent, on peut en chercher des raffinements. Par exemple serait il possible de minorer la production d'entropie locale en fonction d'un écart à la gaussienne ; idéalement en utilisant un multiple de l'information $H_M(f)$: conjecture de Cercignani (1980). Après prise en charge de la question et développements impliquant de multiples hypothèses, Villani arrive à la conclusion selon laquelle la production d'entropie est donnée par

$$PE[\ f(v)] \geq K_\varepsilon(f)[H(f)\text{-}H(M^f)]^{1+\varepsilon}$$

Formule dans laquelle M^f est la maxwellienne attachée à la distribution f c'est-à-dire celle dont les paramètres ρ, u, T , sont la densité, la vitesse moyenne et la température de la distribution f. ; soit encore la meilleure approximation possible de f, dans une représentation hydrodynamique, nonobstant le fait que f ne peut rester trop longtemps sous le statut hydrodynamique en question car la différence entre les deux termes est instable à temps long. La production d'entropie PE ne dépend donc que de v et non de x car l'espace n'intervient pas dans cette modélisation. $K_\varepsilon(f)$ est une constante dépendante de la régularité de f, entre autres. La question d'un affaiblissement de toutes les hypothèses utilisées reste une question ouverte en particulier dès lors que l'on veut pouvoir considérer la vitesse de convergence de la distribution vers l'équilibre.

8.3. L'approche probabiliste de Mark Kac

Dans les années 50, oubliant entre autres les variables de positions et simplifiant le modèle de Boltzmann afin de le ramener à un modèle stochastique où aléatoire, Kac introduit des processus stochastiques dans les modalités d'interactions elles-mêmes ; lorsque deux particules interagissent on tire au hasard les paramètres de l'interaction. Ce programme se propose de contourner le théorème H et pour ce faire Kac souhaite expliquer la convergence à partir d'un raisonnement strictement probabiliste au niveau microscopique pour un ensemble de N particule ; évidemment la contrainte N fini, rend le programme particulièrement ambitieux. Kac formalise en pratique d'idée de propagation du chaos dans les équations de champ moyen. Cette conception aura un grand succès et sera reprise de multiples manières. Il existe en particulier une version entropique de ce programme microscopique, version liée au problème ergodique généralisé sous l'appellation de trou spectral en théorie des groupes. Le traitement de Kac sera repris et il sera confirmé qu'il est en lien avec l'équation de Boltzmann via le théorème central limite. La théorie porte entre autres sur des théorèmes de convergences (rapides où à contrario lentes) basés sur la combinatoire des interactions entre particules. Cependant du point de vue technique le traitement reste limité aux gaz homogènes et aux distributions maxwelliennes, -dans lesquelles $B(v\text{-}v^*,\omega)$ ne dépend que de l'angle $v\text{-}v^*$ et ω-,. Pour gagner en généralité et permettre le traitement des cas inhomogènes et non maxwelliens, la seule méthode robuste reste le théorème H.

8.4. Régime linéarisé

L'étude de la convergence vers l'équilibre induisant la maximisation de l'entropie, conduit à considérer la subtile nécessité d'adjonction entre l'opérateur de collision (non linéaire, dissipatif dégénéré) et l'opérateur de transport (linéaire et conservatif). C'est conjointement et non indépendamment que ces deux opérateurs permettent la convergence vers l'équilibre dynamique. Toutefois la vitesse de convergence vers l'équilibre ne peut être précisée qu'à partir des formes linéarisées. Pour autant ces formes ne se substituent pas aux expressions non linéaires puisque la linéarisation n'est valable que lorsque la distribution est proche de celle fixant l'équilibre. Or l'étude de la convergence linéarisée exige de surmonter 3 difficultés : (i) estimer le trou spectral de l'opérateur de collisions linéarisé, c'est-à-dire l'image spectrale des chocs entre atomes conduisant à des états thermodynamiques limites; (ii) mener l'étude spectrale dans un espace qui convienne à l'approximation de l'opérateur non linéaire afin de pouvoir effectuer le raccord linéaire / non linéaire ; (iii) prendre en compte la dégénérescence hydrodynamique, car celle-ci l'est tout autant pour les deux types d'équations. Toutes ces difficultés ont été surmontées récemment et c'est ainsi qu'un article cité par Villani établit une convergence conditionnelle en $O(e^{-\lambda t})$ en lieu et place de la convergence $O(t^{-\infty})$. Toutefois, contre l'intuition, la convergence exponentielle n'est alors pas une caractéristique des solutions de l'équation (on ne l'attend que pour les potentiels dures ou modérément mous). Si les potentiels sont trop mous ou en cas d'interactions coulombiennes (Landau) il n'y a plus de trou spectral (absence de choc) et on peut espérer au mieux une exponentielle de type $O((e^{-\lambda t})^{\beta})$ avec $0<\beta<1$[16] dite fractionnaire élémentaire.

8.5. Evolution qualitative de l'entropie

Un thème récurrent est ici une dégénérescence qui, liée aux états hydrodynamiques, gène la convergence vers l'équilibre. L'idée émise par Villani et ses collaborateurs est que cette dégénérescence se reflète dans les oscillations affectant la production d'entropie. Elles résultent de l'instabilité respective des distributions de Boltzmann et des distributions hydrodynamiques en fonction du temps. Ces oscillations sont confirmées en simulant l'évolution dynamique de l'équation de Boltzmann dans son évolution vers l'équilibre, dans une boite périodique monodimensionnelle. La référence est la relaxation en loi exponentielle. On peut séparer l'information hydrodynamique et l'information purement cinétique. Attendu ce qui précède on peut en effet écrire :

$$\iint f \log (f/M)\, dx dv = (\int \rho \log (\rho / T^{d/2})\, dx + \int f \log (f/M^{f})\, dv$$

L'équation de Boltzmann fait ici apparaitre un statut dual permettant, par le truchement des collisions, les transferts d'information vers l'opérateur de transport donc vers des organisations structurales. Comparé à une relaxation exponentielle, les simulations montrent que le second terme oscille conformément aux hypothèses d'instabilités hydrodynamiques. Ces oscillations mettent au jour des états plus favorablement hydrodynamiques marqués par un ralentissement de la production d'entropie avec une évolution vers des états plutôt homogènes. Le pingpong entre les deux types de comportement peut être contrôlé par les conditions aux limites en particulier par la taille de la boite considérée soit encore la taille de la boule maximale de mesure. En pratique les oscillations ne peuvent jamais être totalement annulées. Le régime hydrodynamique n'est donc pas un régime asymptotique. On est alors évidemment conduit à s'interroger sur la périodicité de ces oscillations en fonctions des régimes en question.

9. Relaxation entropique : s'accommoder de ses souvenirs

Considérons l'équation de Vlasov avec potentiel d'interaction W.

$$\partial f / \partial t + v \nabla_x f + [\ \nabla_x W * \int f dv\ ].\ \nabla_v f = 0$$

Contrairement à l'équation de Boltzmann cette équation n'impose pas de flèche du temps et reste inchangée sous l'action d'un renversement temporel. Dès lors la constance de l'entropie correspond à une conservation de l'information microscopique. L'expérience de pensée consistant à renverser le champ de vitesse pour retrouver un état initial semble pertinente. En outre alors que l'équation de Boltzmann n'admet qu'un petit nombre d'équilibres associés aux lois de conservation, l'équation de Vlasov en admet un très grand nombre (par exemple toutes les distributions homogènes sont stationnaires). Pourtant comme Landau l'a montré, il existe un comportement spécifique de l'équation

[16] On retrouvera sous une autre forme cette propriété illustrée au moyen de la fonction zêta en association avec la notion de site dynamique fractionnaire fibré par la puissance complexe de cette fonction.

en temps long suggérant même dans ce cas particulier, la présence d'une flèche du temps. On se met alors à soupçonner que la relaxation vers l'équilibre n'est pas nécessairement liée à une augmentation d'entropie (relaxation isentropique).

9.1. Relaxation linéarisée

Villani propose d'étudier l'équation de Vlasov près de l'équilibre dynamique homogène. Pour ce faire il pose $f(t,x,v)=f°(v)+h(t,x,v)$ soit avec $F[h](t,x) = -\iint. \nabla_x W(x-y).(h(t,y,v)\, dv)$ la force induite par la distribution h, en négligeant le terme quadratique $F[h]\ \nabla_v(h)$, l'équation devient :

$$d_t h+v\ \nabla_x(h) +F[h]\ \ \nabla_v(f°) + F[h]\ \ \nabla_v(h) = 0 \simeq d_t h+v\ \nabla_x(h) +F[h]\ \ \nabla_v(f°)$$

L'examen de cette équation conduit à montrer que la force $F[h]$ associée à une équation de Vlasov, linéarisée au voisinage d'un équilibre dynamique homogène et stable, relaxe de manière exponentiellement irréversible. Pour ce faire Villani considère tout d'abord le cas sans interaction (W=0) soit encore le transport libre : $d_t f+v.\ \nabla_x(f)=0$. Cette équation se résout dans l'espace de Fourier relatif à l'espace avec ${}_{TF}f(t,k,\eta)={}_{TF}f_i(k,\eta\text{-}kt)$, ou f_i correspond à la distribution initiale. Dès que k>0 les modes spatiaux tendent vers zéro si $t \rightarrow \infty$ avec une vitesse qui dépend de la régularité de f_i par rapport à la variable vitesse. Le système tend alors à une homogénéisation sous l'effet du transport libre. De façon plus général l'analyse de Landau repose sur la démonstration du découplage des modes spatiaux. Ainsi peut-on écrire une équation de Volterra permettant la convolution temporelle pour chaque mode propre spatial. La stabilité de telles équations est un problème classique que Villani met en scène pour parvenir à montrer qu'il y a stabilité exponentielle pour la linéarisée : la force décroit exponentiellement de même que toute les inhomogénéités spatiales de la densité $\rho=\int hdv$. Le critère de stabilité est respecté dans de nombreux cas de distribution initiale et en particulier si celle-ci est gaussienne pour des interactions coulombiennes. Le cas d'interactions newtoniennes est plus complexe. Par exemple toujours pour une distribution gaussienne initiale, la stabilité dépend de la masse globale et de la température. Ceci se reflète dans l'instabilité dite de Jeans selon laquelle les solutions sont instables pour des longueurs caractéristiques supérieures à $L_J=(\pi T/G\rho°)^{1/2}$ ou G est la constante de gravitation agissant à la température T sur une masse sous distribution $f°$. Cette instabilité explique que des corps massifs aient tendance à se regrouper en clusters (galaxie, amas etc).

9.2. Amortissement de Landau non-linéaire

Selon la référence qui supporte cette analyse, Villani rapporte la critique et les controverses attachées à l'étude de la stabilité utilisant des réductions linéaires. Il montre comment il est cependant possible de confirmer la pertinence de celle-ci même dans des cas hautement non linéaires. Si le potentiel W n'est pas trop singulier et si $f°$ est un équilibre homogène vérifiant le critère de stabilité de Penrose (critère reposant sur des jeux de dualités) alors la stabilité non linéaire dynamique est assurée. L'amortissement linéaire implique l'amortissement non linéaire avec perte arbitrairement petite du facteur de convergence.

L'amortissement de l'équation de Vlasov repose en pratique sur le confinement et le mélange. Le confinement est indispensable car l'amortissement ne se produit pas dans tout l'espace. Il est ici acquis parce que l'espace de phase, réduit à un tore, est un espace euclidien discrétisé. Pour sa part le mélange a lieu par le truchement des différentielles de vitesses. Des particules qui ont des vitesses différentes sont attachées à des parties d'espaces de phases différentes. Il faut en outre considérer d'autres ingrédients pour traiter les équations non linéaires : (i) *une réinterprétation en termes de régularité*. On montre que $f(t,x,v)$ est aussi régulière que la solution uniforme du transport libre en temps; (ii) une *estimation des déflexions* : une particule placée dans un champ de force décroissant exponentiellement suit une trajectoire asymptotique au transport libre. Cette analogie peut être quantifiée précisément ; (iii) *un rôle stabilisant de la réponse avec retard*. Pour un plasma, quand un mode est perturbé la réaction des autres modes opère avec un retard, un écho. Cet écho contient des informations relatives à l'interaction local / global qui peuvent être décryptées ; (iv) *un schéma de Newton qui tire partie de ce que l'équation de Vlasov linéarisée est complètement intégrable*. Ce dernier point permet d'établir un lien avec la théorie de KAM et la perturbation de systèmes hamiltoniens sur le tore (stabilité quasi périodique). En quelque sorte l'équation de Vlasov non linéaire en régime perturbatif hérite des bonnes propriétés dues à l'intégrabilité de l'équation linéarisée.

Du point de vue de la physique l'information croit vers les petites échelles cinétiques : les oscillations de la fonction de distribution s'amplifient avec le temps et finissent par devenir invisibles au même titre que l'est un ensemble de pics de Dirac sur un support de mesure nulle. Comme le note Villani en substance, le résultat est une apparente irréversibilité car à la différence d'un phénomène radiatif dans lequel l'énergie émise à l'état macroscopique est transférée à l'infini, ici au contraire l'énergie disparait littéralement dans le néant (du support ?).

9.3. Régularité glissante

Considérons les modes spatiaux à l'instant $t=0$. Sous l'effet de l'opérateur de transport libre et conformément à la relation ${}_{TF}f(t,k,\eta)={}_{TF}f_i(k,\eta\text{-}kt)$ la localisation en fréquences k de ces modes ne change pas au cours du temps. Autrement dit dans le diagramme hybride (k,t) le temps t contribue seul à dilater la représentation (localisation de l'énergie dans l'espace de phase). Cette linéarité conduit à un mouvement d'ensemble vers les hautes fréquences cinétiques $-\eta$; ce mouvement est d'autant plus rapide que la fréquence spatiale est élevée. Plus précisément la fréquence spatiale de mode k oscille avec une « vitesse » caractéristique de période $O(1/|k|t)$. L'enjeu de l'amortissement de Landau est de contribuer à ce que la cascade d'énergie, bien que déformée par le temps, soit préservée dans sa hiérarchie et ce aux précisions des variables près. Cette conservation résulte de l'interaction des différents modes. Cependant les fortes oscillations en termes cinétiques excluent de cerner de façon précise des bornes uniformes en temps.

L'idée est alors de concentrer l'analyse sur les modes qui comptent le plus et dans l'espace de Fourier, de suivre la cascade des modes au cours du temps. Il se trouve que s'il y a une dégradation de la précision de la cascade en mode cinétique $-\eta$ celle-ci est compensée par une amélioration spatiale dès que l'on fait la moyenne en vitesse, le long de k. Il y a donc transfert de régularité de la variable vitesse à la variable localisation au cours du temps d'où le qualificatif d'une *régularité glissante*. Toute la question est alors de trouver la norme permettant de quantifier correctement le glissement de régularité qui isentropique, est alors à associer à l'amortissement de Landau. La norme mise au point par les experts montre que les fréquences élevées relaxent plus rapidement que les fréquences basses.

On verra dans le texte de référence comment cette question de régularité se manifeste dans les expériences d'échos dans les plasmas et comment des singularités se superposent à la régularité pour créer des instabilités.

9.4. Ouvertures conceptuelles

Même si l'amortissement de Landau n'est qu'un phénomène perturbatif son importance conceptuelle est considérable car c'est le seul ilot que nous parvenons à explorer dans l'océan des questions particulières ouvertes par la relaxation entropique ; le seul coin que les spécialistes sont parvenus à introduire dans la jonction intuitive que d'aucuns font entre l'entropie et la flèche du temps : relaxation sans irréversibilité ni augmentation d'entropie. Villani évoque à cet égard la relaxation des galaxies qui paraissent être dans un état quasi stationnaire alors que les temps caractéristiques des solutions de l'équation galactique sont supérieurs à l'âge de l'univers. Bien que l'idée d'une relaxation initiale rapide du champ de force soit acceptée par la majorité des astrophysiciens les mathématiciens n'ont à ce jour aucune théorie solide à proposer pour étayer rigoureusement leur point de vue. On voit là un défi qui une fois de plus montre que les experts sont encore loin de dominer le problème du lien micro-macro même dans les cas semble-t-il les plus simples.

Il est néanmoins possible de rechercher un modèle capable de se positionner entre le modèle de Boltzmann qui donne la priorité aux collisions et celui de Landau qui les néglige. C'est le cas du modèle de Fokker-Planck-Landau ou modèle de Landau à faible dissipation qui s'écrit :

$$d_t f + v.\, \nabla_x(f) + F[f]\ \nabla_v(f^\circ) = \varepsilon\, Q_L(f,f) \simeq 0$$

où Q_L est l'opérateur de Landau. Le coefficient ε est une fluctuation par rapport à la limite de champ moyen. Il est suggéré proportionnel au facteur $log(N)/N$. Dans ce cas on montre que les effets de collision modélisés par la production entropique se font sentir essentiellement à temps long $O(1/\varepsilon)$. A l'opposé les effets régularisant se font sentir à temps court. L'intérêt de l'étude de cette équation apparait alors multiple : (i) le modèle physique semble plus réaliste que celui qui est issue de l'équation de Vlasov pure, (ii) le facteur perturbatif ε permet de quantifier les vitesses relatives des processus d'homogénéisation (amortissement de Landau) et la convergence entropique ; (iii) le même facteur permet par ailleurs de contourner un obstacle de régularité (dite de Gevrey) auquel se heurte le modèle sans collisions. Partant de là il est possible de concevoir un programme de recherche que Villani explicite dans les grandes lignes de son exposé.

10. Métastatistiques

Les mathématiciens parlent de méta-statistiques en évoquant la statistique sur la fonction de distribution car celles-ci possèdent déjà intrinsèquement un contenu statistique. Si on admet qu'une incertitude microscopique peut être bi-partitionnée, on doit considérer outre un chaos associé à un profil macroscopique donné, une incertitude sur le profil macroscopique lui-même. Le choix du profil μ dispose d'une probabilité Π sur l'ensemble $P(Y)$ sur l'espace de mesures probabilistes, soit encore $\mu^\infty = \int \mu^{\otimes\infty}\Pi(d\mu)$. La question qui se pose est alors la suivante : y a-t-il un profil naturel sur l'espace des profils admissibles ? Idéalement la mesure serait invariante au regard de la dynamique. Dans le cas de l'équation de Boltzmann la question est résolue : seules restent en lice les mesures triviales portées par des équilibres maxwelliens. Par contre la conception de mesures invariantes non triviales pour les équations de Vlasov reste ouverte. De telles mesures devraient refléter la nature hamiltonienne de ces équations.

Un candidat assez sérieux serait la mesure entropique de Sturm de la forme $\mathcal{P}=exp(-\beta H_v)$ (issue de la théorie du transport optimal). Sa définition complexe a jusque-là suspendu la preuve de son invariance. S'il y a des opérations assez simples à mener comme l'ajout d'un terme d'énergie, la mesure de Sturm étant définie sur un espace compact, sans doute est il possible mais délicat d'en user dans un contexte dynamique où l'espace des vitesses est non borné. Au-delà, la pire des difficultés tient au caractère singulier des mesures typiques. On s'attend à ce que presque toute mesure de ce type, soit totalement étrangère à la mesure de Lebesgue utilisée dans l'analyse et qu'elle soit portée par un ensemble cantorien de co-dimension un. Cette situation semble fermer la porte à toute étude statistique de relaxation reposant sur la régularité. Certains experts ont tenté de bâtir une théorie statistique de l'équation de Vlasov adossée à l'entropie, en particulier en essayant de prédire l'état asymptotique probable de l'évolution dynamique (ici avec limite faible pour laquelle se pose une concurrence entre une inégalité ou une égalité sur les contraintes affectant les fonctionnelles de densités). L'approche statistique repose sur l'étude d'invariants : énergie, entropie et fonctionnelles de f. L'approche a remportée quelques succès mais reste controversée. En particulier la théorie ne tient presque pas compte de l'équation d'évolution sous-jacente postulant une certaine universalité relative pour l'interaction, équation à laquelle devraient venir s'ajouter les détails fins quant à la distribution initiale. Les objecteurs ont en particulier trouvé des contre-exemples (mais adossés à une régularité analytique donc éventuellement critiquables). A titre d'illustration on peut montrer que la transformation $f(xv) \rightarrow f(x,-v)$ modifie l'état asymptotique final alors qu'elle laisse inchangés tous les invariants connus de la dynamique ce qui, attendu ce qui précède, apparait paradoxale.

11. Conclusion

Les articles rassemblés dans les publications inscrites dans le cadre du projet Lîla-Entropie, tournent pour l'essentiel le dos aux travaux de Villani traitant *de l'irréversibilité et de l'entropie à partir de l'équation de Boltzmann*. Les approches proposées pourront être vues non comme des contre-pieds aux analyses qui précèdent mais, en substance, comme la volonté d'aborder la question de l'entropie par le truchement de ses duaux : la nég-entropie et l'anti-entropie en faisant de la stabilité des points fixes un problème d'adjonction catégorique. Ce faisant le projet Lîla Entropie s'inscrit dans les pas de Roger Penrose ou de Lee Smolin, lorsqu'ils affirment que la démarche analytique recèle un point aveugle qu'il faut aller interroger si on veut aborder les problèmes complexes. D'une certaine manière, en pointant le détail de difficultés que recèlent les équations de mécanique statistique, Villani ne dit pas autre chose, même s'il le dit de manière implicite. La difficulté du projet tient à l'équilibre a tenir entre la rigueur que doit assumer l'expertise et l'empirisme et le besoin prospectif que requiert toute démarche reposant sur de nouvelles représentations du monde. On opposera alors le caractère heuristique, infiniment plus incertains des nouvelles approches, à la rigueur des mathématiques mises en œuvre pour traiter avec la précision de Villani, le modèle de Boltzmann. On opposera aussi à l'occasion, des modèles proches des données expérimentales à des modèles formels dont la rusticité apparente et la capacités d'ajustements paramétriques sont limités à des buts pédagogiques à destination des étudiants de premier cycle. La forme qu'y acquiert l'entropie est désormais classique voire paradigmatique. L'irréversibilité du temps y est assimilée à une propagation que l'on sait désormais associer à une approximation de l'information selon l'ordre des échelles. Les conditions nécessaires à l'obtention de cette conclusion sont-elles aussi drastiques que le pense Villani : régularité, compacité, convergence, connexité, projectivité, ***et cætera***. D'infinies questions semblent y être attachées. Peut-on sortir de ce puit d'interrogations par la conception un trou de vers ? Tel est la tentative, peut-être excessivement ambitieuse qui est la notre dans le projet Lîla Entropie.

Au-delà sans doute faut-il lire la plume à la main, les autres travaux de Cédric Villani tout particulièrement ceux concernant le *transport optimal* et *le rôle des flux de Ricci* dans l'accès soit à des équilibres, soit à des états stationnaires, soit à des états métastables. On prendra cette recommandation d'autant plus au sérieux que le modèle de Boltzmann et ses déclinaisons primitives ont contribué à penser les fondements des *modèles multi-agents en interactions*, modèles dont on mesure l'importance dès lors que sont en jeu les comportements hautement connectés des systèmes complexes, y compris les plus simples. La question centrale est toujours celle de l'existence et de l'accès ou non à un équilibre dynamique global sous l'effet de corrélations à longues portées ; l'existence ou non d'un état stationnaire optimal si le système est dynamique et enfin l'existence ou non d'éventuelles fluctuations et d'ondes susceptibles de conduire à des états autoorganisés. Les auteurs y ajouteront la question de la présence ou non d'une extériorité c'est-à-dire de conditions aux limites déterminées par la dynamique interne elle-même : absence de séparation du sujet et de l'objet ; statut de la vérité et de l'historicité, etc.

En pratique, après quelques hésitations institutionnelles (la pertinence de l'atomicité fut contestée dans le monde physique tout au long de la seconde moitié du 19ème siècle et au début du 20ème), le modèle de Boltzmann a contribuer à notre sens, à construire de dangereux schémas mentaux ; des paradigmes dont le plus déterminant pour notre vie quotidienne est celui qui inspire l'ensemble du libéralisme économique au point que l'on peut même se demander si *la main invisible du marché* d'Adam Smith ou l'idée de *l'équilibre offre demande* de Jean Batiste Say n'ont pas grandement inspiré le physicien autrichien. La descendance des concepts

Boltzmanniens est visible jusque dans nos choix politiques et sociaux : « *toute situation d'équilibre d'une économie de marchés est une situation d'efficacité maximale et réciproquement toute situation d'efficacité maximale est une situation d'équilibre de marchés* affirment en cœur K Arrow, G. Debreu, M. Allais (mouture 1) » ou encore « *l'équilibre est atteint par tâtonnement* (P.A. Samuelson, M Allais) ». Etonnamment la pensée économique est une puissance source d'interrogations à propos du modèle de Boltzmann et ses limites. Les processus de créativité et les conditions de forcing sont là pour nous mettre en garde contre les démarches dont l'objectif est, *in fine*, la fermeture sur elle-même.

La question majeure est alors évidemment celle de savoir si les conditions d'ajustement mathématiques sont remplies et si l'efficacité économique et sociale (Leibniz) peut être mesurée au moyen d'un invariant entropique. Elle est de savoir si l'optimum à un sens en dehors de situations physiques simples et si le tâtonnement conduit à l'équilibre dynamique optimal ou, à contrario, à des situations de ségrégations et d'hétérogénéité par bifurcations catastrophiques (R.Thom). Peut-on en cette matière rester un Candide ? La question ne se pose évidemment pas seulement pour l'économiste mais pour toute la thermodynamique des systèmes complexes, le plus simple de ces derniers étant recélé par le célèbre champ de la mécanique quantique et son ajustement problématique aux principes de Noether. A cet égard, confirmant la beauté formelle des analyses de C. Villani, de multiples modèles de simulations numériques multi agents mettent clairement en évidence l'importance pratiques des questions que se posent les théoriciens (voisinage, régularité, connexité, fibration, dualité, conditions aux limites, etc mais au-delà séparabilité). La question du temps se perd alors dans des labyrinthes de conjectures et de paramétrisations qui brouillent les idées bien plus qu'elles ne les éclairent (Saint Augustin).

Bien loin du billard sur lequel agit l'homme rationnel éventuellement guidé par des champs moyens et des probabilités normées, nous sommes plus probablement plongés dans *un univers chiffonné* (Lachièze-Rey, S. Hantaï) tout autant que discrétisé, c'est pourquoi on ajoutera aux recommandations de la lecture de Villani, l'écoute attentive des conférences de Géométrie Algébrique d'Alain Connes et de ses collaborateurs. Elles nous permettront de comprendre d'où peuvent émerger les faisceaux d'invariants que, -guidé tout autant par sa volonté que par ses représentations-, l'homme d'action recherche pour déterminer ses choix. De multiples symétries donc d'ambiguïtés nous plongeront dans une perplexité, justifiant plus encore les pas de cotés cognitifs que propose la revue Entropie. Et puisqu'il convient même en science *de cultiver notre jardin*, cette entrée en matière formelle, vue ici comme une abstraite Villa d'Este, nous incitera peut-être à migrer vers Greystones *le jardin perdu* de Jorn de Percy qui, faisant place parmi l'ordre à un élan vital, pourrait être notre discret inspirateur. On replacera alors la multiplicité des questions laissées ouvertes par Villani et Connes dans un cadre plus général susceptible de déborder les axiomes de la seule théorie des ensembles et des logiques qui en sont issues, pour aller cultiver d'autres lieux que nos jardins immémoriaux à savoir des *Topos* autrement plus montagneux que nos simplistes plaines causales.

Référence unique

Villani C. *Irreversibilité et entropie*, Bulletin de l'Institut H. Poincaré Vol 15 , Le temps (2010) 17-75

Annexe

Remarques du Dr. Daniel Tondeur et Commentaires des éditeurs
Relatifs au concept d'Entropie de Boltzmann

Le contexte

Comme l'affirme Claude Bruter dans son ouvrage *The Principle of Stability within the Pantheon of Mothers Ideas* (Annexe I.9) : « *On appelle liberté ou entropie de l'objet O par rapport à la force f, la capacité de résistance de l'objet lorsqu'il est soumis à f* », et de poursuivre en rejoignant en cela Gaston Bachelard « *cette définition incomplète qu'on peut associer à cette forme restrictive de liberté (…) qui est la faculté de dire non, permettrait quand même de (formuler) trois énoncés dont voici le dernier : toute évolution va de pair avec un accroissement des libertés* ». Seule la présence d'une dissipation d'énergie permet d'obtenir de l'information, donc les degrés de liberté nécessaire à l'action. Sans doute peut-on illustrer la notion de liberté par l'image d'une arborescence. Claude Bruter donne implicitement ici sa signification profonde au qualificatif Lîla adjoint pour le projet au terme d'Entropie. A cet égard, les deux premiers volumes publiés du projet Lîla-Entropie commencent à dessiner la ligne de pensée qui a motivé le projet et son qualificatif issu du sanskrit. Le terme Lîla [Lîla] pointe l'importance et les interrogations attachées à la présence de mécanismes qualifiés de chaotiques mais qui, même ouverts, se révèlent auto-organisateurs voire finalistes. La liberté apparait alors en filigrane de nombreux processus dissipatifs donc entropiques. Distinguée de la néguentropie, cette information ouvre sur la créativité au moyen de ce que l'on appellera avec Guiseppe Longo *une anti-entropie* (organisation disruptive des systèmes vivants [CNM23], économiques, sociaux et/ou simplement cognitifs [LMA23]). Le lien entre Entropie, chaos est trivial pour les systèmes fermés ou ouverts-fermés [MOS11] comme les ordinateurs par contre l'origine d'auto-organisation est moins triviale, en particulier pour les systèmes stochastiques ou hybrides (ergodique ou non[17], optimal ou non, stables ou instables, etc.).

Contraints par le caractère extensif de l'entropie, l'auto-organisation naturelle des systèmes dynamiques fermés suscitent à contrario bien des interrogations lorsqu'ils sont ouverts donc duaux. La notion d'identité se trouve alors compromise car associée à la notion d'adjonction catégorique. Il faut alors être capable de définir formellement le statut de cette ouverture par exemple en termes d'indiscernabilité (Leibniz, principe des identiques). D'une certaine manière le théorème H de Boltzmann (1872) revivifie l'interrogation leibnizienne sur la profondeur de la notion identitaire.

Dopée par des paradoxes, la lignée d'interrogations attachée à la physique statistique reprend sa source historique dès l'énonciation du théorème H (1872) théorème associée à une approche combinatoire et optimale de la mécanique multi-corps. Reposant sur des caractéristiques d'optimalité, cette approche atomique est en par essence entropique. L'équilibre est associé à l'optimalité d'une fonction d'état tous les chemins menant à cet état relevant d'une même identité. C'est à cette articulation théorique que les difficultés deviennent explicites car le plus souvent l'ouverture opère dans un brouillard formel en mettant en jeu non pas seulement l'infini mais des classes le plus souvent distinctes d'infini (infiniment grands ou infiniment petits) donc des comportements non standards et des hyper-grandeurs [ROA85].

L'analyse contemporaine des travaux de Boltzmann, est détaillée dans les travaux de Cédric Villani [VIC10,12] résumés ci avant et portant le titre Introduction *au concept d'entropie à la lumière des travaux de Cédric Villani*. Si ceux-ci ne contredisent pas la conclusion connue de tous les étudiants de premier cycle : *tout système fermé évolue naturellement vers son état de « chaos (i.e. d'entropie) maximal »*, ils mettent cependant en exergue les subtilités mathématiques et les paradoxes que recèle,

[17] Il y a ergodicité si plusieurs analyses statistiques différentes et séparées sur un même sujet produisent des résultats suffisamment proches. À l'inverse, il n'y a pas d'ergodicité si les effets aléatoires s'expriment différemment d'une mesure statistique à une autre. La taille de l'échantillon, ou de la population, ou de la zone considérée dans le calcul peut amener à une absence d'ergodicité. Un exemple typique est donné par l'équivalence d'une moyenne sur l'espace et d'une moyenne dans le temps.

l'évolution vers l'équilibre [STI78] tant dans le modèle formel de Ludwig Boltzmann que dans ses avatars physiques (Boltzmann (1867), puis Landau (1936), Vlasov (1938), Balescu-Lenard (1960) …) Le raffinement mathématique développé par Villani pourrait paraitre, dans ses multiples circonvolutions, relever d'une casuistique scientifique digne d'un grand maitre de la penser nominaliste. Aucun péché pour autant ; la démarche mathématique ne consistent-elles pas généralement à mettre sous le même vocable des concepts préalablement pensés séparément ? A contrario, un même cadre de pensée donne assez facilement lieu à des modalités d'applications distinguées voire à une complexification volontaire facilement assimilée à une démarche scientifique. Avantage, celle-ci ouvre toujours la voie à des dissensus et des controverses qui font le sel de la « disputatio épistémologique ». Ainsi par exemple, si on compare l'analyse aigue et académique de Villani à celle élargie et relevant de l'ingénierie que l'on doit à Daniel Tondeur[18]. Non sans raison dans une note critique de la synthèse, ce dernier propose de distinguer Réversibilité et Inversibilité de l'action. Ce faisant D. Tondeur considère implicitement le paradoxe de Loschmidt également évoqué par Villani. Tondeur écrit :

> *« Considérons l'opération « scramble » qui consiste à envoyer une boule, disons rouge, sur un « paquet » de boules blanches groupées, à l'arrêt, au centre du billard. La séquence des entrechocs qui suit conduit à disperser toutes les boules dans toutes les directions. Supposons un processus idéal tel que l'énergie cinétique soit conservée (…). Il s'agit donc d'un processus non-dissipatif, athermique, que l'on peut qualifier de « réversible » au sens habituel, thermodynamique du terme. Examinons maintenant l'inversibilité (ou l'inversion) du processus, c'est-à-dire l'inversion de toutes les trajectoires, à partir d'un instant où toutes les boules ont été dispersées, donc alors qu'il n'y a plus d'entrechocs ; en quelque sorte, l'inversion de la flèche du temps. A quelles conditions un tel processus peut-il être l'inverse du processus direct décrit plus haut, c'est-à-dire conduire au final à la concentration de toutes les énergies cinétiques et les quantités de mouvement sur la seule boule rouge ? Une condition nécessaire est que, à l'issue des entrechocs, toutes les boules blanches arrivent à l'arrêt, alors que la seule boule rouge reparte munie de la somme des énergies et de la somme vectorielle quantités de mouvement. Les lois de la mécanique et l'inversion du temps n'interdisent pas cela, cependant la satisfaction de cette condition requiert (…) une précision infinie des conditions initiales de l'inversion. La moindre déviation de cette condition, même infinitésimale, conduirait à une divergence des trajectoires par rapport à l'inversion parfaite, et à ce que certaines boules continuent de se mouvoir, en l'absence de frottements. Cette inversion parfaite n'est pas théoriquement impossible, c'est sa **réalisation** qui est de fait impossible. Ceci constitue, à mon avis, l'origine de la non-inversibilité, une origine informationnelle, et non-dissipative ».*

On ne peut que souscrire à la dernière remarque et à son explication : de même que l'on peut distinguer facilement l'énergie et le travail à partir d'une arborescence bourgeonnant d'extensités (énergie) tout travail véhicule une restructuration de l'arborescence qui ne fait sens que topologiquement donc géométriquement. Or l'irréversibilité concerne le travail (la structure de l'arborescence : la géométrie) alors que l'inversibilité au sens de Loschmidt concerne l'énergie (au sens des distributions extensités sur l'arborescence en question, donc l'analyse). La difficulté conceptuelle relève du couplage éventuel des deux notions, donc de la géométrie algébrique. En s'attachant au rôle de l'expression formel du bilan d'énergie lors de l'interactions des particules, Villani pointe le contenu en « information » concevable de la structure du noyau de collision (des particules habillées par le champ de force local), autrement dit il évoque un couplage entre irréversibilité et inversibilité au sens de D. Tondeur ; celle d'un couplage entre l'arborescence et son contenu. Ce faisant Tondeur pointe le court-circuit cognitif que franchit Villani en considérant la

[18] Chacun connait l'expertise de Daniel Tondeur en thermodynamique et cinétique appliquées [TOD17], en particulier celle qui concerne le rôles des corrélations multi-échelles [TOD17][TOD11][TOD09] souvent exprimée dans le cadre « constructal ». Cette expertise a été sollicité par les auteurs de la synthèse des travaux de Villani à propos de l'entropie de Boltzmann.

brisure de symétries attaché aux concepts d'information pré et post collisionnel qui semble mixer irréversibilité (travail) et inversibilité (énergie). Ce contenu relève par ailleurs de notre représentation du passage des interactions locales à leurs intégrales globales. La question est bel et bien celle qui consiste à cerner l'information en jeu dans un opérateur de « mesure » et/ou de changement d'échelle énergétique auquel il est possible d'affecter plusieurs formes mathématiques donc plusieurs niveaux d'information distincte. Ce faisant Villani confirme à contrario le point de vue de Daniel Tondeur qui poursuit :

> *« J'ai écrit à dessein informationnelle et non pas statistique. La statistique a une place dans ce raisonnement pour qualifier la notion de réalisation évoquée. On peut dire, que parmi l'infinité de configurations possibles des entrechocs dans le processus « inverse » considéré, résultant de différences infinitésimales des conditions initiales, la configuration conduisant à la (re)concentration de toute l'énergie et la quantité de mouvement sur la seule boule rouge a une probabilité infinitésimale. Mais à mon sens, la statistique n'est qu'une façon commode et incomplète d'exprimer la non-inversibilité, mais n'en constitue pas le fondement, dans un processus qui reste d'essence déterministe ».*

Comment aborder dans le cas présent le lien entre l'antérieur (pré-collisionnel) et le postérieur (post collisionnel). Il s'agit bel et bien implicitement d'une question de temporalité. En s'appuyant sur le vers de Victor Hugo selon laquelle « *le chaos est l'époux lascif de l'infini* »[19], il convient de s'arrêter quelques instants sur la dichotomie, Déterminisme *versus* Statistique ou plus précisément, versus Chaos sachant que ce dernier peut être déterministe.

En relation avec le besoin d'action causale, le fonctionnement de notre cerveau nous conduit toujours à rêver d'histoires donc à rêver de temps (Alain Connes). Le passé est supposé donné. Le futur est *déterminé* par l'arbre de décisions contingentes. L'instant présent est un condensat du passé et de contingence éventuellement volontaire. Mais le passé nous est-il vraiment donné comme nous le croyons habituellement ? Quel est l'extension du présent dans le passé et le futur ? Quelle est la part réelle du hasard sur le futur ? Quelle est la part de notre représentation du passé sur ce même futur ? Quelle est la part de notre volonté à l'instant présent s'il existe ?

La Mécanique Quantique (MQ)[20] nous a habitué à distinguer (i) l'équation d'évolution de Schrodinger *déterministe* applicable à la fonction d'onde en l'absence *de tout changement d'échelle*[21] associer à une mesure, et (ii) *la réduction statistique* du paquet d'ondes initialement superposées basculant lors de la mesure vers l'état déterminé (coupure de von Neumann)[22]. Nombreux sont ceux qui pensent que l'incertitude relative au réel quantique tient à l'interaction perturbante qu'induit toute mesure volontariste sur le niveau de réalité considéré (H. Zwirn). On doit à Alain Connes l'analyse plus subtile selon laquelle il existe un aléa quantique fondamental excluant l'existence de tout état quantique « pur » et au-delà faisant émerger temporalité dont l'unité est βh ($\beta=1/T$ h constante de planck), formulation excluant donc à ces yeux tout déterminisme quantique . Relatifs à la seule MQ les arguments d'Alain Connes sont aussi solides que ses questionnements sont ouverts (par exemple ceux qui concernent l'intrication). Car la notion de variables (réelle ou discrète) n'est pas une notion si simple et malléable que le croient les étudiants. Les variables physiques sont en pratique des opérateurs autoadjoints applicables en sorte que les mesures $X\rightarrow \mathbb{R}$ ou $X\rightarrow \mathbb{N}$ ne puissent être indifféremment

---

[19] …sachant qu'« *Avant le Verbe, il a rugi, sifflé, henni…* » dans le chaos du cosmos primitif (Le satyre La légende des siècles). Voir à cet égard l'article de Faycal Ben Adda du volume deux du projet : Approximation des premières conditions de l'expansion de l'univers : génération d'entropie et gravité

[20] Dont la caractéristique est de pointer le paradoxe selon lequel un ensemble X mesuré dans $\mathbb{R}$ doit être considéré comme distinct du « même » ensemble X mesuré dans $\mathbb{N}$.

[21] Ce sont les auteurs qui insistent sur le changement d'échelle qu'induit la mesure. Habituellement seule la mesure est évoquée sans plus de précision.

[22] Dont on notera qu'elle ne se réduit pas à la décohérence quantique (suppression des effets de superposition d'états)

continues ou discrètes (on fera utilement le lien avec les grandeurs ordinales et cardinales ; avec les dualités extensités / intensités, produit/coproduit catégoriques, etc.). L'équivalence pratique entre X→ ℝ ou X→ ℕ est impossible du fait de la nature distincte des infinis. L'usage passe par des adjonctions alors que ces opérateurs s'expriment par le truchement de leurs spectres. Une caractéristique fondamentale aux dualités touchant à la notion d'observables tient à *l'absence presque sûr de commutativité* des opérateurs en question. Cette absence explicite le ratio connaissance partielle C du réel ici et ignorance de l'intrication avec tout l'ailleurs, l'environnement et évidemment l'observateur. Peut-on quantifier cette ailleurs au moyen de (1-C). Si telle est le cas l'analyse Co homologique [VIP10], [BAP15] conduit formellement à la relation S =k log C/(1-C) La constante nécessaire à l'identification de l'état d'équilibre prend alors une signification entropique évoquée ci-dessus, sous la formulation de la temporalité suivante : βh=1 (β=1/kT, h constante de Planck et k constante de Boltzmann, T grandeur absolue, est la température T∈ [0, ∞[). Le temps apparait alors comme une grandeur émergeante soit encore, selon Takezaki et Tomita [TAM70] l'unique paramètre d'automorphisme entre « états dits statistiques » (confondus en mécanique des matrices à une trace partielle de représentations nécessairement finies). Comme l'affirme Connes, d'origine thermique, l'unité de temps est ici analogue au tic/tac (unité) du métronome quantique qui battrait au temps de Planck le cycle d'une horloge élémentaire « exp(iθ) » [LMA23]. Connes appelle cela l'aléa du quantique. Toutefois cet aléa n'est pas aléatoire au sens probabiliste car le système n'est pas fermé mais fournit seulement le facteur d'intrication alors chaotique de l'infinité de tous les états purs possibles [TAM 70] [ARH78] [BAJ15] [COA17]. Il en résulte que d'une part les systèmes physiques ne sont pas adossés à une d'histoire prédéterminée (il la fabrique entre deux battements) d'autre part, nos mesures et encore moins notre conscience du réel ne sont les germes d'une réalité qui possède une autonomie propre d'origine néo-aléatoire dont on ne sait rien mais qui a à voir avec de subtiles ajustements de phases entre une infinité de cycles possibles; en cela il s'oppose à tout approche solipsiste ; la dualité est la base de toute réalité. Ces conclusions sont d'autant plus surprenantes qu'elles peuvent, tout en utilisant l'invariant énergie, apparaitre contradictoires aux regards des principes de Noether accordés sur l'espace-temps standard, sans origines ni mémoire. Connes fait donc de l'aléa quantique -qui ne relève pas d'une statistique mais explicitement de l'entropie de Boltzmann βhν=k donc d'une combinatoire et pour des raisons purement mathématiques [TAM70] - l'alpha et l'oméga de l'émergence d'une flèche du temps [COA18].

Réservé quant à une approche statistique, Daniel Tondeur qui connait parfaitement l'importance de l'approche « constructale » [BEA90] et est donc parfaitement au fait des conséquences des propriétés d'échelles en thermodynamiques et en cinétique, s'oppose donc implicitement à une représentation orientée d'un temps dont l'origine serait principalement thermique. Toujours en s'appuyant sur le modèle macroscopique de type Boltzmann lui servant de « ligne de vie », il écrit :

> Pour remonter un peu plus vers l'essence de la non-inversibilité, considérons le choc entre seulement deux boules. En effet, le phénomène ci-dessus est mécaniquement et mathématiquement équivalent à la succession d'un certain nombre d'entrechocs binaires (même si des boules sont initialement au contact). On considère donc qu'il y a une seule boule blanche, initialement immobile, et que la boule rouge est projetée dans une direction non-frontale (le centre de la boule blanche n'est pas sur la trajectoire initiale de la boule rouge). Après le choc, les deux boules poursuivent donc dans des directions différentes, et avec des énergies différentes. Considérons l'inversion de ce processus. L'argument développé ci-dessus reste parfaitement valable : le choc de retour des deux boules (qui n'est pas frontal) requiert l'arrêt total de la boule blanche et le transfert total de son énergie cinétique et de sa quantité de mouvement à la boule rouge, ce qui requiert une précision infinie des conditions initiales au moment de l'inversion, et entraîne donc la non-réalisation. [Est-ce que les mécaniciens savent formaliser les conditions d'un tel choc ?] La non-inversibilité « émerge » donc de cette situation à deux boules, et ne requiert donc pas un comportement collectif de boules, ni un changement d'échelle physique. Les considérations statistiques, conduisant à une probabilité infinitésimale, peuvent être faites mais ne sont pas

essentielles, et ne démontrent rien. Dans ce raisonnement, on illustre que la réversibilité et l'inversibilité ne se confondent pas, et il en est ainsi de leurs contraires, l'irréversibilité dissipative, et la non-inversibilité. L'entropie, la création d'entropie associées à ces deux types, doivent être définies séparément.

On ne peut qu'être d'accord avec la précision apportée tout en pointant la différence d'échelle qui distingue naturellement l'entropie (Global) de la production d'entropie, donc son flux, localement déterminé mais globalement évaluée. Comme le montre l'analyse de Villani, nous y revenons, c'est le noyau de l'interaction entre particule que Tondeur évoque implicitement. Ce noyau s'exprime, comme il est précisé dans l'article sur des travaux de Cédric Villani, par des formes intégrales et des produits de convolutions. Comme produit ses formes intégrales peuvent donner des résultats semblables tout en ayant des contenus différents. Toute distributions étant dépendantes d'une fonction test, on comprend alors facilement qu'il est algébriquement impossible de remonter de l'observable (particules habillées) au noyau de convolution (particule nues), et donc penser pouvoir remonter le cours du temps. Sous des formes triviales cette même idée préside à la distinction entre le sens des mots et le sens des phrases en fonction par exemple de l'ordonnancement des mots d'une langue. Tondeur poursuit :

Par ailleurs, on ne peut confondre incertitude et imprécision. Il suffit de raisonner simplement sur un seul choc entre deux boules. Mais il est vrai que l'on reste dans une vision de processus déterministes, régis par les lois de la mécanique classique. C'est d'ailleurs l'intérêt majeur de l'exercice : la non-inversibilité « émerge » d'un processus physique déterministe simple.

On peut avec les mêmes arguments affirmer que l'aléa du jeu de pile ou face est aussi un alea déterministe. Ce dernier exemple montre que la question est bel et bien celle de la réduction de représentations à un champ partielle de données dans une infinité d'interactions superposées non seulement inaccessibles à l'expérience mais relevant en outre d'une infinité de modèles équivalents. On confirmera dans le volume 3 que l'analyse spectrale de tout processus déterministe n'implique pas nécessairement une représentation temporelle, situation qui induit non seulement une imprécision dynamique mais encore un bouleversement de la hiérarchie habituelle antérieure/ postérieur telle qu'elle peut par exemple se manifester par le truchement d'une arborescence (distance non archimédienne). Nous retrouvons ici sous une autre forme la distinction entre énergie et travail. Si la remarque est simple à entendre lorsque l'analyse porte sur deux boules de billards elle est infiniment plus subtile à décortiquer lorsque l'on passe à un système à n-corps tous couplés entre eux par leur histoire mais aussi dans leurs interactions avec l'environnement dans leur communauté. L'analyse de Villani est démonstrative à cet égard.

Pour terminer laissons la parole à Daniel Tondeur après relecture des lignes qui précèdent

Tout d'abord, écrit-il c'est beaucoup trop d'honneur que vous faites à mes réflexions sur la dualité entre réversibilité et l'inversibilité. Merci d'un rapprochement académique que seul justifierait peut-être l'importance en ingénierie des méthodes « constructales » que j'ai pratiquées.

Le commentaire qui précède m'apparait d'une grand d'une grande complexité pour un lectorat d'ingénieurs. Sa compréhension nécessite sans doute d'avoir saisi au préalable le contenu des diverses contributions et leurs liens avec le modèle de Boltzmann. Seuls les éditeurs disposent de ce point de vue. Il y a trop de références à des résultats théoriques dont la signification ne m'est pas connue a priori.

Mes autres commentaires sont la prolongation des remarques que vous citez, i.e. le modèle du billard de Boltzmann. Je ne sais pas ce que les éditeurs pourraient en faire, et je ne serai pas fâché si vous n'en faites rien du tout. Mais j'aimerais quand même réfléchir à votre avis sur la cohérence du raisonnement, et sur la conclusion (le point 7 ci-dessous) concernant le rôle des corrélations entre niveaux d'échelles.

1. *Dans mon analyse, je n'ai pas assez insisté sur l'aspect « système sensible aux conditions initiales », qui est la traduction mathématique de la non inversibilité, au sens où je la décris avec l'exemple des boules.*
2. *L'aspect « informationnel » de cette non-inversibilité se combine avec l'irréversibilité thermodynamique, -sans se confondre avec elle-, pour constituer une irréversibilité globale.*
3. *Par irréversibilité thermodynamique, j'entends tout ce qui contribue à la « dégradation », la « dissipation » d'énergie mécanique, et qui fait que dans la configuration finale après inversion de la direction du phénomène, on ne retrouve pas toute l'énergie mécanique initiale. Il y a donc les « frottements » classiques (sur le sol, dans l'air) et la déformation des billes lors du choc.*
4. *Analysons ce dernier phénomène. Dans le processus de choc, il y a deux sources potentielles d'irréversibilité. L'un est la déformation plastique qui, du point de vue énergétique, peut être vue comme un stockage par le solide d'une énergie mécanique potentielle. L'autre réside dans l'aspect élastique du phénomène, impliquant le retour du solide dans l'état micro-géométrique précédent le choc, mais pas dans le même état thermodynamique. Du point de vue énergétique, cela signifie qu'une fraction de l'énergie incidente est « thermalisée ». C'est une façon de dire qu'un choc élastique au sens micro-géométrique, n'est pas pour autant ipso facto un phénomène réversible.*
5. *Je n'ai pas discuté les échanges d'énergie possibles entre différentes formes d'énergie mécanique, notamment avec la mise en jeu d'énergie de rotation (moment des boules de billard). Je suppose implicitement que ce type d'échange ne comporte pas d'irréversibilité thermodynamique. Par contre, il est parfaitement susceptible de contribuer à la sensibilité aux conditions initiales et à la non-inversibilité.*
6. *Revenons au choc irréversible, et au mécanisme de thermalisation dans le cas élastique. Ici, l'énergie mécanique macroscopique « dissipée » lors du choc est transformée en énergie de vibration des atomes du solide. On a au fond toujours une forme d'énergie mécanique, mais on est passé d'un support unique et macroscopique (la boule incidente) à des supports nombreux (les atomes des deux boules) à l'échelle microscopique.*
7. *Autrement dit, l'irréversibilité thermodynamique, liée à la dissipation d'énergie mécanique en « chaleur », correspondrait à changement d'échelle (de dimension et de nombre) dans la distribution de l'énergie, autrement dit à u la mise en œuvre d'un travail. Il me semble que cette analyse correspond en pratique aux fondements théoriques qui animent le projet.*
8. *Je me demande si ce type de raisonnement peut s'étendre à d'autres mécanismes de dissipation d'énergie « noble », par exemple l'énergie chimique ou électro-magnétique. Je ne me suis jamais essayé à cela.*

Daniel Tondeur

Mars 2024

Références

[ARH78] Araki H., In: C_-Algebras and Applications to Physics. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 650, Araki H., Kadison R.V. (Eds.), Springer, Berlin, Heidelberg, 1978, 66–84, doi:10.1007/BFb0067390.

[BAJ15] Badiali J.P., J. Phys. Conf. Ser., 2015, **604**, 012002, doi:10.1088/1742-6596/604/1/012002.

[BAP15] Baudot P and Bennequin D, *The homological nature of entropy*, 17 (2015) 3253-3318

[BEA90] Adrian Bejan — Wikipédia (wikipedia.org)

[CNM23] Chollat-Nami Mrie et Longo Guiseppe, Entropie, *Négentropie et anti-entropie, Le jeu des tensions pour penser le vivant*, Lîla-Entropy Project Entropie Vol1 (2023)

[COA17] Connes A., La Géométrie et le Quantique, Cours 2017, Collège de France, URL http://www.college-de-france.fr/site/alain-connes/course-2017-01-05-14h30.htm.

[Lila] Lila (Hinduism) - Wikipedia

[LMA23] Le Méhauté A., Gavrilut A. and Tayurskii D., *Outline about a Sheaf Approach of the "Arrow of Time" and Creativity:Fractional Operators, Topos and Grothendieck Schemes approach*, Hyperion International Journal of Econophysics and modern Economy Vol16 (2023) Bucarest Romania,

[MOS11] Morris Sydney, *Topology without tears* (2011) , topbook.pdf (biu.ac.il)

[RIP17] Philippe Riot and Alain Le Méhauté, *From the arrow of time in Badiali's quantum approach to the dynamic meaning of Riemann's hypothesis*, Condensed Matter Physics (2017) Vol. **20**, No 3, 33001: 1–13.

[RIP19] P. Riot,, A. Le Méhauté, D. Tayurskii, *Fractional Dynamics, Riemann Zeta Function and Self Similarity through Category Theory*, in Advances in Special Functions and Analysis of Differential Equations (Chapter 14) Agarwal Praveen, Agarwal Ravi P., Ruzhansky M. Editors. CRC Press Deleware, 2019

[ROA85] Robert A., Analyse non standard, Presses Polytechniques romandes (1985) Lausanne

[SML06] Smolin Lee, *Rien ne va plus en physique*, Ed. Dunod (2006) Paris

[TAM70] Takesaki M., Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebra and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[TOD17] Tondeur D., *Equirépartition de production d'entropie*, [Hal 00560251] Optimisation thermodynamique les techniques de l'ingénieur BE 8 017 1 (voir aussi HAL 00560257)

[TOD09b] Tondeur D.,Fan Y., et Luo L., *constructal optimization of arborescence structures with flow singularity* Chem. Eng. Sci. 64 (2009) 3968-3982

[TOD09a] Tondeur D., et Luo L., *Design and scaling laws of ramified fluid distributors by a constructal approach* Chem. Eng. Sci. 59 (2004) 1799-1813

[TOD11b] Tondeur D.,Fan Y., Comenge J.M., et Luo L., Flow and pressure distribution in "ladder -type" fluidic circuitChem. Eng. Sci. 66 (2011) 2566-2586 et 5301-5312

[TOD11a] Tondeur D., et Menetrieux C. *Channel Interlacing Geometrical concept for intensification and design of the internal structure of fluids contractors*. Chem. Eng. Sci. 66 (2011) 709-720

[VIC10] Villani C. *Irreversibilité et entropie*, Bulletin de l'Institut H. Poincaré Vol 15 , Le temps (2010) 17-75

[VIC12] Villani C. *Théorème vivant*, Ed. Grasset et Fasquelle 2012 Paris,, 288 p

[VJP10] Vigneaux Juan Pablo, *Coefficients multinomiaux Cohomologie . Entropie Faisceaux, Théorie des Information, Théorie de l' Statistique non-extensive Théorie des types topos* PhD Paris Sorbonne (2019)