8. Числовые ряды

Рассмотрим числовой ряд:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ — частная сумма ряда (1). Ряд (1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ его частных сумм, то есть существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$. Число $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ называется в этом случае суммой ряда (1); сумма ряда обозначается так же, как и сам ряд: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1 (сумма членов бесконечной геометрической прогрессии). Рассмотрим ряд

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots \tag{2}$$

Для него

$$S_k = 1 + a + \dots + a^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-a^k}{1-a} & \text{при } a \neq 1, \\ k & \text{при } a = 1. \end{cases}$$

Если $|a| < 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \dfrac{1}{1-a}$, то есть $1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \dfrac{1}{1-a}$. Если же $|a| \geq 1$, то последовательность $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ расходится, то есть расходится ряд (2).

Пример 2 (№ 2556). Для рассматриваемого ряда

$$S_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ нечетное}, \\ 0, & \text{если } k \text{ четное}. \end{cases}$$

Последовательность $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ не имеет предела, следовательно, рассматриваемый ряд расходится.

Для ряда (1) $a_n = S_n - S_{n-1}$, поэтому, если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S - S = 0$.

Из критерия Коши сходимости ряда выводится: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В этом случае говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно.*

Заметим, что на сходимость ряда не влияет отбрасывание, добавление или изменение конечного числа его членов, а также умножение всех членов ряда на некоторое ненулевое число. (Конечно, эти операции влияют на его сумму.)

Признаки сравнения. Признаки сравнения для рядов вполне аналогичны признакам сравнения для несобственных интегралов.

Простейший признак. Пусть $0 \le b_n \le a_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^2+1)}{2^n}$ сходится абсолютно, так как $\left|\dfrac{\sin(n^2+1)}{2^n}\right| \le \dfrac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится.

Предельный признак. Пусть $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$ при $n \ge m \in \mathbb{N}$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \alpha$. Тогда

а) если $0 < \alpha < \infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно; в частности, это так при $\alpha = 1$, то есть если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$;

б) если $\alpha = 0$, то сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ влечёт сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

в) если $\alpha = \infty$, то, наоборот, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ влечёт сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Отметим доказанное, как я почти уверен, на лекции утверждение: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ сходится в том и только в том случае, когда $s > 1$.

Пример 2 (№ 2607). Заметим, что $a_n > 0$ при достаточно больших значениях n. В прошлом семестре мы, фактически, доказывали, что $a_n \sim \dfrac{n^p}{n^q}$ $(= \dfrac{1}{n^{q-p}})$ при $n \to \infty$. Заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $q > p + 1$.