§ 7.7 ИНТЕГРАЛ КАК ФУНКЦИЯ ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛА

Теорема 1. Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда определена и непрерывна на $[a, b]$ функция

$$F(x) = \int_a^b f(t)dt, \ a \leq x \leq b.$$

Доказательство. Пусть $K = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Тогда справедлива оценка $|F(x+h) - F(x)| = |\int\limits_x^{x+h} f(t)dt| \leq K|h|$. Так как $K|h| \to 0$ при $h \to 0$, то F будет непрерывна на $[a, b]$.

Заметим, что данное утверждение справедливо независимо от того, имеет или нет f разрывы; важно, что f интегрируема на $[a, b]$. ■

Рассмотрим теперь замечательное уточнение доказанной теоремы.

Теорема 2. Если f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \ a \leq x \leq b$ дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$. Если же f непрерывна на (a, b), то $F(x), \ a < x < b$, будет первообразной для $f(x), \ a < x < b$.

Доказательство. Докажем сначала вторую часть утверждения теоремы. Пусть $x \in [a, b]$. $F(x + h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(x)dt + \int\limits_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt = f(x) \cdot h + + \int\limits_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt. \qquad (*)$

Воспользуемся второй частью теоремы о среднем для преобразования интервала из правой части $(*)$. В результате получим $F(x + h) - F(x) = = f(x)h + (f(x + \theta h) - f(x))h$, где $0 < \theta < 1$. Так как $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in (a, b)$, то $f(x+\theta h) - f(x) \to 0$ при $h \to 0$ и, следовательно, $F(x + h) - F(x) = f(x)h + o(h), \ h \to 0$. $\Rightarrow$ $F(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in (a, b)$ и $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Перейдем к доказательству первой части теоремы. Равенство $(*)$ остается:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = f(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt.$$

Очевидно, справедливы неравенства

$$m(h) \cdot h \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(t_0))dt \leq M(h) \cdot h,$$

где

$$m(h) = \inf_{t \in [x_0, x_0+h]} (f(t) - f(x_0)),\ M(h) = \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} (f(t) - f(x_0)).$$

По теореме о среднем (1-я часть теоремы) имеем: $\inf\limits_{t \in [x_0, x_0+h]} (f(t) - f(x_0))dt = \lambda(h) \int\limits_{x_0}^{x_0+h} dt = \lambda(h)h$, где $m(h) \leq \lambda(h) \leq M(h)$. Покажем, что $\lambda(h) \to 0$ при $h \to 0$. Если мы докажем, что $M(h) \to 0$, $m(h) \to 0$ при $h \to 0$, то по "Свойству двух милиционеров" и $\lambda(h) \to 0$ при $h \to 0$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall t(|t - x_0| < 2\delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2)$. Если h такое, что $|h| = \delta$, то отсюда следует: $|M(h)| < \varepsilon . \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall h(|h| < \delta \Rightarrow |M(h)| < \varepsilon) \Rightarrow M(h) \to 0$ при $h \to 0$. Аналогично: $m(h) \to 0$ при $h \to 0$. $\blacksquare$

Замечание. Понятие первообразной можно распространить на случай, когда функция $f(x)$ определена на $[a, b]$.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, если $F'(x) = f(x)$ для любых $x \in [a, b]$ (в точках a и b рассматриваются соответственно левая и правая производные функции $F(x)$).

После сделанного доопределения, второй части теоремы 2 можно придать вид: "Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a, b]$." (доказательство теоремы при этом не изменяется).

Таким образом, мы доказали, что произвольная непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f имеет на этом отрезке первообразную, определенную равенством

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Этим доказано существование первообразной для всякой непрерывной на отрезке функции.