§3. Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы.

Пусть $A: X \to Y$ – лин. оператор. Множ-во всех векторов y из пространства Y таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in X$, наз-ся областью значений или образом оператора и обозначается через $Im(A)$

Множ-во $Im(A)$ – лин. подпрос-во пространства Y. Размерность подпрос-ва $Im(A)$ наз-ся рангом оператора A и обозначается через $\mathrm{rank}\, A$

Множ-во всех век-ов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$, наз-ся ядром оператора A и обозначается через $\ker(A)$. Это множ-во – лин. подпрос-во пространства X. Размерность подпрос-ва $\ker(A)$ наз-ся дефектом оператора A и обозначается через $\mathrm{def}(A)$

Для любого линейного оператора $A: X_n \to Y_m$

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{def}(A) = n$$

Пусть в прос-ве X дана лин-ая сист. век-ов $\{a^i\}_{i=1}^{m}$. Будем считать что не все век-ры этой сист. нулевые. Тогда сист обязательно содержит лин. независимую подсистему век-ов. В частности, она сама может быть лин. независимой.

Подсист век-ов $\{a^{i_k}\}_{k=1}^{r} \subset \{a^i\}_{i=1}^{m}$ состоящая из лин. независимых век-ов, наз-ся максимальной, если добавление к ней любого нового век-а из $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ приводит к лин. зависимой сист.

Любые две макс. лин. независимые подсист данной сист содержат одно и то же кол-во век-ов

Рангом системы век-ов наз-ся кол-во век-ов ее максимальной лин. незав. подсистемы.

Пусть $A(m,n)$ - произвольная прямоугольная матр. Будем трактовать ее столбцы как сист. век-ов пространства C^m. Ранг этой сист. век-ов назовем рангом матр $A(m,n)$ - $\mathrm{rank}(A)$

Матр. $A(m,n)$ можно трактовать и как сист. строк из пространства C^n. Для любой матр $A(m,n)$ ранг этой сист. строк равен рангу сист. ее столбцов.

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} - матр оператора A относительно произвольных образом фиксированных базисов $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset X_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^{m} \subset Y_m$. Тогда $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_{eq})$

Ранг матр оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранг его матр-ы

Упражнение

№1.

Док-ть что $\ker(A)$ - лин. $\overset{под}{\text{прос-во}}$ прос-ва X для любого лин. оператора $A: X \to Y$

Согласно определению $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$

Пусть x, y - произв век-ры из $\mathrm{Ker}(A)$, α, β - любые числа, тогда

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$$, т.е. лин. комб $\alpha x + \beta y$ принадл $\ker(A)$

№2

Док-ть, что для $\forall$ прямоуг. матриц A, B справедливо рав-во:

$$\mathrm{rank}(A,B) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$$

Решение: Обозначим $C = AB$. Столбцы C лин. выраж. через столбцы матр A, которые лин. выраж. через макс подсист лин. незав. столбцов матр A.

Число столбцов в этой подсист равно $\mathrm{rank}(A)$. Назовем столбцы это подсист-мы базисными.

Можно сказать, что столбцы матр C принадлежат подпрос-ву, натянутому на базисные столбцы матр A. След-но, число лин. незав. столбцов матр C не может превышать $\mathrm{rank}(A)$. С другой строны, строки матр C лин. выраж-ся через строки матр B. Проводя аналог. рассужд., заключаем, что

$$\mathrm{rank}(C) \le \mathrm{rank}(B)$$

№3

Макс. лин. незав. подсист. из сист. век-ов прос-ва R^3

$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

~~Что можно~~ базис $\overset{под}{\text{прос-во}}$, нат. на a^1, a^2, a^3, a^4 - ?

__Реш__ a^1 и a^2 – лин. независ., образ макс. лин. независ. подмнож., т.к опр-ли составленные из компонент век-ов a^1, a^2, a^3 — $a^1, a^2, a^4 = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

След-но век-ва a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 лин. завис-ы

a^1, a^3 и a^1, a^4 – тоже лин. независ.

Любые из указанных пар лин. независ. век-ов образуют базис подпрос-ва, натянутого на век-ры a^1, a^2 и a^3, a^4

Ранг это сист. равен двум.

№5.

$\boxed{R^3}$ а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Im\, A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rank(A) = 1$$

$rank\, A + def(A) = 3$

$1 + def\, A = 3$

$def\, A = 2$

Отв а) $rank(A) = 1$. базис обр $= (1, 1, 1)$, $def(A) = 2$

б) $$Ax = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = 0 \text{ cист. лин. завис.}$$

$rank(A) = 2$, базис обр-а $= (2, 1, 1)(-1, -2, 1)$

$rank(A) = 2 \quad + def(A) = 3 \Rightarrow def(A) = 1$

с) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \cancel{-1+1+1-1+1-1} = 0$$

$rank(A) = 3 \quad def(A) = 1$

базис обр-а $(-1, 1, 1)(1, -1, 1)(1, 1, -1)$

№4.

Пусть $A: X_n \Rightarrow Y_m$ – лин. опер-р, $e^1 \dots e^n$ – базис прос-ва X_n, док-ть, что

$Im(A) = L(Ae^1 \dots Ae^n)$

где $L(Ae^1, \dots, Ae^n)$ – под-прос-ва, ~~натянутого на век a^1, a^2~~, Y_m натянутое на век-ы $Ae^1 \dots Ae^n$

Решение: Пусть $y \in Im(A)$, тогда $y = Ax$ $\forall x \in X_n$

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1, \dots, Ae^n)$$

С другой стороны, если $y \in L(Ae^1, \dots, Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax$$

где: $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е $y \in Im(A)$.

Значит, $Im(A) = L(Ae^1, \dots, Ae^n)$

№6

Опис-ть образ и ядро оператора дифференцирования D в прос-ве P_n полиномов степени не выше n с веществ. коэфф.

Реш. Каждому эл-ту прос-ва P_n опер-р D ставит в соответствие полином из P_{n-1}. Поэтому $Im(D) = P_{n-1}$ и можно считать, что $D: P \to P_{n-1}$.

Любой полином нулевой степени (вещ. ч.) опер-р D обращает в ноль.

Полиномы более высоких степеней в рез-те дифф-ия не могут обращ-ся в ф-цию, тождественно равную нулю. Поэтому $ker(D) = P_0$

№11

$rank(A)$ - ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+9+2-6-6-1=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+0-2+1-2+0=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rank(A) = 2$$

№12

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -111 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} =$$

1) из второй строки матр. вычтем первую $*2$
2) из третьей строки матр. вычтем первую $*3$
3) из последней строки матр. вычтем первую $*2$

$$= A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Вычтя 2-ую стр из 3, прибавив вторую стр к 4, получим

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ а } \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} (4) \begin{vmatrix} 19 & 36 & \ldots \\ 2 & 1 & \ldots \\ 0 & -4 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \end{vmatrix}$$

ранг строк

$rank = 3$

№13

а) $A \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ = помин-го порядка: 1) 0 2) 0 3) $4-7 \neq 0 \Rightarrow -3$

$\operatorname{rank}(A) = 2$

б) $A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = $ $-12+20=-8$ $\operatorname{rank}(A) = -2$

№14

Найти λ — ? с наим рангом

при $\lambda = 0$, имеем

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \det(A) = 0$

$\operatorname{rank}(A) = 2$, при $\lambda = 0$

при $\lambda \neq 0$ $\operatorname{rank}(A) = 3$

№15

$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot(-3)$

$= \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = $ $2\,0\,0$ $3\,2\,0$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$

$\det(A^{4\times4}) = 0$ $\operatorname{rank}(A) = 3$

в) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} (-1) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -28 & 17 & 0 & 11 \\ 0 & -37 & 24 & 0 & 13 \\ 0 & -7 & 25 & 0 & -18 \\ 0 & 12 & 31 & 0 & -43 \\ 0 & 13 & 42 & 0 & -55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(-1) (-1) (-1) $+$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 74 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 97 & 0 & -55 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 43 & -18 \end{vmatrix} = -108 - 473 \neq 0$

Все миноры 4-го пор-ка равны $0 \Rightarrow$

$\operatorname{rank}(A) = 2$

№16

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -1-6 \neq 0$

$1-45+10+10+6+3 = 0$ ~~-15~~ ~~10~~

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -63+20-1-3+35+12 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 18+7-105+21+45+14 = 0$

$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -1+147+36+28+3+63 = -128$

ранг $= 3$

б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -9+5=-4 \neq 0 \Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 45-2-45+9-25+18 = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -120$

$\det(G_1^{4\times4}) = 0 \quad \det(G_2^{4\times4}) = 0 \Rightarrow$ ранг 3

№17

чему равен при разных λ

$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \cancel{6\lambda}$

$= 6 + \lambda^2 - 20 - 1 + 12\lambda - 10\lambda = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 15 = 64 = 8^2$

$\lambda_1 = \frac{-2+8}{2} = 3$

$\lambda_2 = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 5 \\ 10 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50 + 12 - 20\lambda - 1 + 30\lambda$

$\lambda^2 + 10\lambda - 39$

$D = 100 + 156 = 256 = 16^2$

$\lambda_1 = \frac{-10+16}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$\lambda_2 = \frac{-10-16}{2} = \frac{-26}{2} = -13$

При $\lambda = 3$ ранг$(A) = 2$

При $\lambda \neq 3$ (-5 или -13) ранг$(A) = 3$

№18

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} =$$

(*3)

$$= \begin{pmatrix} 12 & -67 & 35 & 134 & 155 \\ 3 & 98 & 23 & -196 & 16 \\ 15 & -428 & 1 & 856 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -67 & 35 & 0 & 155 \\ 3 & 98 & 23 & 0 & 86 \\ 15 & -428 & 1 & 0 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -67 & 35 & 0 & 120 \\ 3 & 98 & 23 & 0 & 63 \\ 15 & -428 & 1 & 0 & 21 \end{pmatrix} =$$

$\det = 0$

$\Rightarrow 12 \cdot 96 - 67 \cdot 3 \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 12 & -67 & 35 \\ 3 & 98 & 23 \\ 15 & -428 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(−)
V

$\mathrm{rank}(A) = 3$

№7

Описать образ и ядро опер-ра отражения P прост-ва X на подпрос-во L_1 паралл-но подпрос-ву L_2

$x = x^1 + x^2$, $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$, $x \in X$

$P: X \to X \Rightarrow Px = x^1$

Отв: $Im(P) = L_1$, $Ker(P) = L_2$

№8

Описать образ и ядро оператора отражения R простр-ва X относительно подпрос-ва L_1 параллельно подпрос-ву L_2

$x = x^1 + x^2$, $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$

Причем век-ры x^1, x^2 однозначно опр x

$R: X \to X$, $Rx = x^1 - x^2$

Отв: $Im(R) = X$, $Ker(R) = \{0\}$

№9

Найти образ и ядро линейного опер-ра A, действующего в геометр. прос-ве V_3 по правилу $Ax = [x, a]$, где a – фикс. вектор.

Образ – множ-во $(x, a) = 0$, ядро – прямая $[x, a] = 0$.