КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ

Г.Х. ТАЗМЕЕВ, Х.К. ТАЗМЕЕВ

# ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Учебно-методическое пособие

Набережные Челны
2022

**УДК 530 (077)**
**ББК 22.213.351я73**
**Т13**

*Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии отделения информационных технологий и энергетических систем Набережночелнинского института (филиала) Казанского (Приволжского) федерального университета (протокол № 2 от 25 апреля 2022г.)*

**Рецензенты:**
канд. техн. наук, доцент **Илюхин А.Н.;**
канд. техн. наук, доцент кафедры физики КЧИ КФУ **Рамазанов Ф.Ф.**

**Тазмеев Г.Х.**
**Т13** **Изучение собственных колебаний струны:** учебно-методическое пособие / Г.Х. Тазмеев, Х.К. Тазмеев. – Набережные Челны : Изд.-полигр. центр Набережночелнинский институт К(П)ФУ, 2022. – 15с.

Учебно-методическое пособие предназначено для выполнения лабораторных работ студентами направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» и других направлений, в рабочей программе которых предусмотрены часы для выполнения лабораторных занятий по волновой оптике в рамках курса общей физики.

**УДК 530 (077)**
**ББК 22.213.351я73**



**Цель работы**: Изучение колебаний струны

**Приборы и принадлежности**: Устройство для изучения собственных колебаний струны ФПВ ОЧМ.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется волновым процессом. Он является периодическим как во времени, так и в пространстве. При распространении волны частицы среды колеблются около своих положений равновесия, не двигаясь вместе с волной. Вместе с волной от частицы к частице среды передаётся состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому здесь происходит перенос энергии без переноса вещества. Среди разнообразных волн особое место занимают упругие волны.

Упругими (механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Они бывают продольные и поперечные. В первом случае частицы среды колеблются в направлении распространения волны, во втором – в плоскости, перпендикулярной направлению движения волны.

Упругая волна называется гармонической (синусоидальной или косинусоидальной), если колебания частиц среды происходят по закону синуса или косинуса.

На рис.1 приведена синусоидальная поперечная волна, распространяющаяся со скоростью $\vartheta$ вдоль оси x.

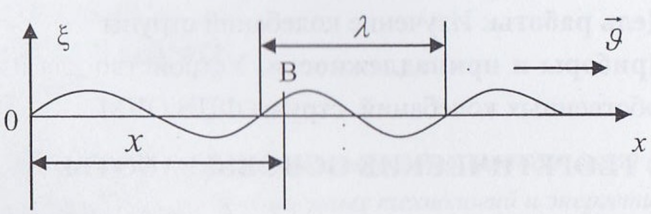


Рис. 1. График гармонической волны

Здесь ξ – смещение частиц среды от положения равновесия

x – расстояние этих частиц, например, точки B от источника колебаний.

Источник колебаний расположен в начале координат 0. График волны на рис. 1 даёт зависимость смещения ξ всех частиц среды, участвующих в волновом процессе, от их расстояния x до источника колебаний в некоторый фиксированный момент времени t

Волны, переносящие в пространстве энергию, называются бегущими. Уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся вдоль оси x вправо, имеет вид

$$\xi(x,t) = A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{\vartheta}\right)\right] \qquad (1)$$

Если плоская волна движется вдоль оси x влево, то

$$\xi(x,t) = A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{\vartheta}\right)\right] \qquad (2)$$

В общем случае уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x (вправо) в среде, не поглощающей энергию, записывается так:



$$\xi(x,t) = A \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{\vartheta}\right) + \varphi_0\right] \qquad (3)$$

Здесь: A – амплитуда волны

$\omega$ – циклическая (круговая) частота

$\varphi_0$ – начальная фаза плоской волны

$\vartheta$ – фазовая скорость волны

$\omega\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right) + \varphi_0$ – фаза плоской волны в момент времени t.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны $\lambda$. Определённая фаза колебаний за период T распространяется на расстояние, равное длине волны:

$$\lambda = \vartheta \cdot T \qquad (4)$$

Учитывая, что $T = \frac{1}{\nu}$, где $\nu$ - частота колебаний, получаем

$$\lambda \cdot \nu = \vartheta \qquad (5)$$

Для описания пространственной периодичности волны используют волновое число k, равное

$$k = \frac{\omega}{\vartheta} = \frac{2\pi\nu}{\vartheta} = \frac{2\pi}{\vartheta \cdot T} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (6)$$

Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\xi(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - k \cdot x + \varphi_0) \qquad (7)$$

В настоящей работе изучаются стоячие волны.

Стоячие волны – это волны, образующиеся при наложении двух бегущих синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг к другу с одинаковыми частотами $\omega_1 = \omega_2$ и амплитудами $A_1 = A_2$.

Пусть начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$; начало координат x = 0 выберем в точке, где обе волны имеют одинаковую фазу, а отсчёт времени t = 0 начнём с момента, когда фазы обеих волн равны нулю (в точке x = 0). Тогда

$$\xi_1 = A\cdot\sin(\omega t - kx); \quad (8)$$

$$\xi_2 = -A\cdot\sin(\omega t + kx); \quad (9)$$

Знак минус в (9) не обязателен. Польза от него выяснится позднее. Видно, что бегущая волна $\xi_1$ движется вправо, а волна $\xi_2$ (тоже бегущая) – влево вдоль оси x.

Рассмотрим результирующее волновое движение, составленное из двух бегущих волн (8) и (9):

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = -2A\cdot\sin(kx)\cdot\cos(\omega t) \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает стоячую волну: все точки колеблются в фазе, а их амплитуда А $_{\text{стоячая}} = -2A\cdot\sin(kx)$ зависит от координаты x по синусоидальному закону.

Форма, которую принимает струна, в любой момент времени представляет собой синусоиду. Она представлена на рис. 2. Размах этой синусоиды зависит от времени.

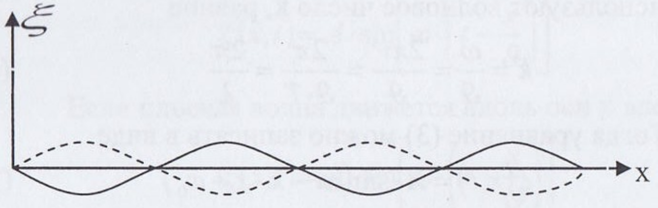


Рис. 2. Картина стоячей волны

В стоячей волне различают узлы и пучности колебаний.



Узлы – это точки, в которых смещение отсутствует (амплитуда стоячей волны равна нулю: А $_{\text{стоячая}} = 0$).

Из (10) для координат узлов получаем:

$\sin kx = 0$; $k\cdot x = n\cdot\pi$,

где n = 0,1,2,…– целое число.

Отсюда, заменяя $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, имеем:

$$x_{уз.} = n\cdot\frac{\lambda}{2} \quad (11)$$

У закреплённого левого конца струны всегда располагается узел стоячей волны. Этому узлу соответствует значение $n = 0$, т.е. $x_0 = 0$. Следующие узлы расположены через половину длины волны $\dfrac{\lambda}{2}$.

<u>Замечание:</u> если бы в формуле (9) у $\xi_2$ не был поставлен знак минус, то вместо $\sin(kx)$ мы получили бы $\cos(kx)$, что не соответствовало узлу $x = 0$ на левом закреплённом конце струны.

Пучности – это точки, в которых амплитуда колебаний максимальна и равна $|A_{cm.}| = 2A$.

Из (10) для координат пучностей получаем:

$$\sin(kx) = 1; kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \text{или}$$

$$x_{пучн.} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\lambda}{2}. \quad (12)$$

Последовательные пучности (как и узлы) отстоят друг от друга на $\frac{\lambda}{2}$ и расположены между узлами.

Так как в нашей установке концы струны жестко закреплены, то в этих точках мы имеем узлы стоячей волны. Эти узлы отстоят друг от друга на целое число полуволн. Это означает, что стоячие волны могут возбуждаться только на таких частотах, при которых на длине струны $\ell$ укладывается целое число полуволн:

$$\ell = m \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (m = 1,2,3,...) \tag{13}$$

Колебание, при котором на длине струны укладывается одна полуволна $(m=1)$, называется основным тоном. Все остальные стоячие волны (m>1) носят название обертонов. Примеры колебаний струны при различных m показаны на рис. 3.

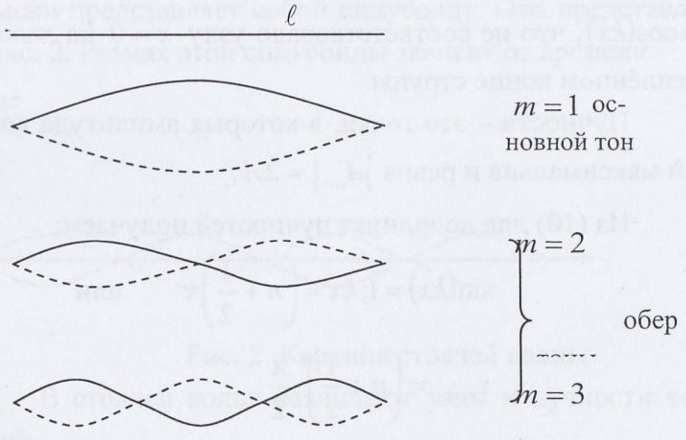


Рис. 3. Примеры стоячих волн



Как уже отметили выше, узлы колебаний неподвижны. Поэтому через них не может перетекать энергия. При колебаниях реальной струны всегда происходит потеря энергии (часть энергии теряется вследствие трения о воздух, другая часть уходит через концы струны и т.д.), которая компенсируется источником колебаний. Другими словами, в реальных условиях наряду со стоячей волной всегда присутствует бегущая волна, переносящая энергию от источника по всей колеблющейся струне. Если потери энергии за период малы по сравнению с запасом колебательной энергии в системе, то влияние бегущей волны невелико. Так как энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды, то это условие может быть написано в виде:

$$A^2_{бег} << A^2_{ст}. \tag{14}$$

где $A_{бег}$ – амплитуда бегущей волны (которую можно оценить по размеру узла),

$A_{ст}$ – амплитуда стоячей волны (в пучности).

При проведении эксперимента необходимо проверить условие (14). Если оно выполняется недостаточно хорошо, то следует уменьшить выходную мощность звукового генератора.

Рассмотрим зависимость длины стоячих волн от натяжения струны. Пусть при конкретных натяжении и частоте звукового генератора в струне возбудились стоячие волны. При изменении натяжения (частота ЗГ фиксирована) картина колебаний размывается. Для получения стоячей волны с прежним числом узлов нужно менять частоту ЗГ. Это означает, что частота стоячей волны зависит от натяжения струны. Строгий расчёт колебаний струны проводится в курсе математической физики и приводит к дифференциальному уравнению в частных производных [3]:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (15)$$

Здесь $\vartheta$ – скорость распространения колебаний вдоль струны. Она зависит от силы натяжения струны T и линейной плотности материала струны $\rho_л$:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{T}{\rho_л}}. \qquad (16)$$

Согласно (13), стоячие волны в струне возбуждаются только на таких частотах, когда $\ell = m \cdot \frac{\lambda}{2}$, так как $\lambda = \frac{\vartheta}{\nu}$, то отсюда получаем $\nu = \frac{m}{2\ell} \cdot \vartheta$ или с учётом (16):

$$\nu = \frac{m}{2\ell} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho_л}}. \qquad (17)$$

Таким образом, для теоретического расчёта собственных частот струны (17), необходимо знать длину струны (в этой работе она не меняется), силу натяжения струны T (снимается показание динамометра), линейную плотность струны $\rho_л$, количество полуволн m, укладывающихся на длине струны (см. рис. 3). С другой стороны, экспериментальные значения собственных частот $\nu$ отсчитываются по лимбу ЗГ при установившихся на струне стоячих волнах. Поэтому появляется возможность сравнения $\nu_{эксп.}$ с полученными из (17) расчётными значениями $\nu_{расч.}$.



## 2. СХЕМА УСТАНОВКИ И ПРИНЦИП ЕЁ РАБОТЫ

Принцип действия установки основан на возникновении сил, действующих на струну (проводник) с током в магнитном поле.

Конструктивно установка выполнена в настольном исполнении на едином основании с регулируемыми опорами.

Установка (рис. 4) состоит из штатива 1, на основании которого закреплён электронный блок 2. Над электронным блоком закреплен механизм натяжения струны 3. Механизм натяжения струны состоит из основания 4, на котором закреплен постоянный магнит 5 и планка 6.

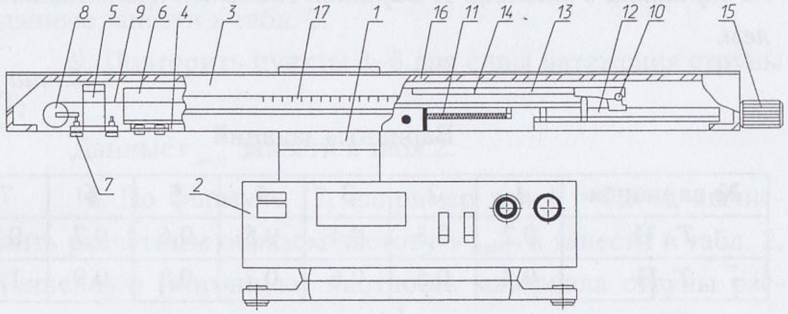


Рис. 4. Схема установки

Между полюсами магнита через блок 8 протянута струна 9. Один конец струны крепится к клемме 10, а другой к тарировочной пружине 11. Второй конец механически связан с винтовым механизмом 12, предназначенным для измерения силы натяжения струны.

Изменяя силу натяжения пружины (а затем и струны) при помощи ручки 15, измеряем силу натяжения струны по шкале 13 при помощи индекса 14.

Весь механизм закрыт кожухом 16, на передней поверхности которого нанесена шкала 17, предназначенная для измерения длины полуволн. Для улучшения видимости колеблющейся струны применяется подсветка. Для изменения точки приложения силы Ампера относительно струны, передвигают магнит, ослабив винты 7.

## 3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМАЕНТА

*Сила натяжения нити* ***T*** *устанавливается согласно № варианта в таблице 1. Вариант задается преподавателем.*

*Таблица 1*

Варианты заданий

| № варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_1$, Н | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |
| $T_2$, Н | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |

1. Подключить установку к сети 220В. Нажать кнопку «сеть». После этого должна загореться цифровая индикация электронного блока и лампа подсветки струны.

2. Дать электронному блоку в течение 1 – 2 минут войти в режим.



3. Установить нулевое значение шкалы частот генератора, повернув ручку «частота» в крайнее левое положение.

4. Ручкой 15 установить силу натяжения струны $T_1$ по варианту.

5. Ручку «выход» на лицевой панели электронного блока повернуть вправо до упора.

6. Изменяя частоту с помощью ручки «частота» получить одну хорошо различимую полуволну по всей длине струны. Отсчет частоты производить при максимальной амплитуде полуволны.

7. Полученное значение частоты $\nu_{эксп}$ занести в табл. 2.

8. Увеличивая частоту кратно полученной, получить различимые полуволны на других частотах. Полученные данные занести в табл. 2.

9. Повторить пункты 3–8 для силы натяжения струны $T_2$.

Данные $\nu_{эксп}$ занести в табл.2.

10. По формуле 17, например для $l$ = 0,6 м, вычислить расчётным образом частоту $\nu_{расч}$ и занести в табл. 2. (линейную (погонную) плотность материала струны рассчитать по формуле: $\rho_л = \rho\pi R^2$, где $\rho$ = 8930 кг/м$^3$; $R$ = 0,00011 м).

11. Сравнить полученные значения частот экспериментальной $\nu_{эксп}$ и расчетной $\nu_{расч}$, сделать выводы.

*Таблица 2*

Расчетные параметры

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_1$= *(значение по № варианта из таблицы 1)* | | | | | | | | | |
| m=1 | | m=2 | | m=3 | | m=4 | | m=5 | |
| $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ |
| | | | | | | | | | |
| $T_2$= *(значение по № варианта из таблицы 1)* | | | | | | | | | |
| m=1 | | m=2 | | m=3 | | m=4 | | m=5 | |
| $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ | $\nu_э$ | $\nu_р$ |
| | | | | | | | | | |

## 4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.Какие волны называются продольными, а какие поперечными?

2.Напишите уравнение плоской одномерной волны, распространяющейся влево вдоль оси x.

3.Какие волны называются стоячими, и чем они отличаются от бегущих?

4.Переносят ли стоячие волны энергию?

5.Напишите координаты для узлов и пучностей стоячей волны.

6.Назовите условие возбуждения стоячих волн в струне с закреплёнными концами.

7.Какая зависимость между собственной частотой и силой натяжения струны?



## ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. СПб.: «Лань», 2006г.

2. Трофимова Т.И. Курс физики, М.: «Высшая школа», 2000г.

3. Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие под ред.Л.Л. Гольдина. – М.: Наука, 1983г.