КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра алгебры и математической логики

Н.Н. Корнеева

СТЕПЕНИ АСИНХРОННО АВТОМАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СВЕРХСЛОВ

Учебно–методическое пособие

Казань — 2014

Корнеева Н.Н.

Степени асинхронно автоматных преобразований сверхслов: Учебно–методическое пособие / Н.Н.Корнеева. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2014. – 24 с.

Рецензент:
кандидат физико–математических наук, доцент Ю.А. Альпин

Учебно–методическое пособие предназначено для студентов старших курсов Института математики и механики КФУ. Оно содержит дополнительный раздел курса дискретной математики, в котором изучается действие конечных автоматов на бесконечные последовательности символов конечного алфавита, и может быть использовано как основа для чтения специальных курсов.

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского КФУ
Протокол № 3 от 18 декабря 2013

Содержание

1 Асинхронно автоматные преобразования

Теория конечных автоматов – один из основных разделов, изучаемых в курсе дискретной математики. В основном курсе изучаются вопросы распознаваемости конечным автоматом некоторого языка, то есть множества конечных слов над конечным алфавитом, при этом автоматы рассматриваются обычно без выхода. В данном пособие будет рассмотрено действие автоматов с выходом на бесконечные слова.

Автоматы, которые при действии на них в каждом состоянии некоторым символом, выдают на выход только один символ, называются автоматами Мили. Их обобщением являются автоматы, которые в каждом состоянии при чтении некоторого символа дают на выходе конечное слово, возможно и пустое. Такие автоматы называют асинхронными, при этом автомат Мили иногда называют синхронным автоматом.

Далее в этом параграфе приведем строгое определение асинхронного автомата, его действие на бесконечной последовательности и степени асинхронно автоматных преобразований.

Алфавитом называется произвольное конечное множество. Будем обозначать алфавит символами Σ, $\Sigma', \ldots$ Элементы алфавита называют буквами или символами, конечную последовательность букв – словом или блоком. При этом отождествляют однобуквенные слова и буквы алфавита. Конечные слова будем обозначать большими или малыми буквами из начала латинского алфавита.

Множество всех слов над алфавитом Σ, включая пустое слово (слово нулевой длины) λ, обозначается через Σ^*, а множество всех непустых слов над алфавитом Σ – через Σ^+.

Длину слова A будем записывать $|A|$.

Рассмотрим функцию $x : \mathbb{N} \to \Sigma$, где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – множество натуральных чисел. Эта функция имеет лишь конечное множество значений, поскольку алфавит предполагаем конечным. Значения функции x можно записать в виде бесконечной последовательности $x = x(0)x(1)\ldots$, первый элемент которой – это значение функции x на нуле, второй – значении функции x на единице и т. д. Получим последовательность над алфавитом Σ. Ее называют бесконечным словом или *сверхсловом*. Сверхслова будем обозначать малыми буквами с конца латинского алфавита x, $y, \ldots$ Если необходимо будет указать элементы сверхслова, будем кратко записывать $x = \{x_i\}$.

Множество всех сверхслов над алфавитом Σ обозначается $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

Если $i \leq j$ натуральные числа, то через $x[i, j]$ обозначим отрезок слова или сверхслова x, начиная с i–ого символа и заканчивая j–ым, то есть $x(i)x(i+1)\ldots x(j)$. Подслова вида $x[0, i]$ называются префиксами x, последовательности вида $x(i)x(i+1)x(i+2)\ldots$ – суффиксами x (которые также можно обозначить $x[i, \infty)$).

Конечным асинхронным автоматом называется пятерка $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$, где S, Σ, Σ' – конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно; $\delta : S \times \Sigma \longrightarrow S$ – функция переходов; $\omega : S \times \Sigma \longrightarrow \Sigma'^*$ – функция выходов.

Если дополнительно выделено начальное состояние s_0, то автомат называется *инициальным.*

Если функция выхода автомата $\omega : S \times \Sigma \longrightarrow \Sigma'$, то есть на каждую входную букву автомат выдает в качестве значения одну выходную букву, то автомат называется *конечным автоматом Мили.*

Если входной и выходной алфавиты фиксированы, то для краткости будем обозначать автомат одной буквой S (по множеству его состояний), соответственно инициальный автомат будем обозначать (S, s_0), указывая дополнительно начальное состояние.

Функция выхода автомата определяет, как действует автомат в каждом состоянии на символы алфавита, но это действие можно естественным образом продолжить как на конечные слова, так и на сверхслова. Определим, каким образом автомат (S, s_0) перерабатывает входное бесконечное слово в выходное. Пусть $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Последовательность $(t_i)_{i=0}^{\infty}$ состояний автомата S называется *ходом автомата S на сверхслове x*, если $t_0 = s_0$ и $t_{i+1} = \delta(t_i, x(i))$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Бесконечное слово $S(x)$, которое получается на выходе автомата и называется *образом сверхслова x под действием автомата S*, имеет вид $\omega(t_0, x(0))\omega(t_1, x(1))\omega(t_2, x(2))\ldots$ То есть, автомат находясь в некотором состоянии под действием входной буквы переходит в следующее состояние, записав при этом на выход некоторое слово, после этого процедура повторяется. В результате работы автомат проходит некоторую последовательность состояний и записывает на выходе новое сверхслово.

Пусть x и y – сверхслова над конечными алфавитами Σ и Σ' соответственно. *Сверхслово y асинхронно автоматно сводится к сверхслову x*, если существуют конечный инициальный асинхронный автомат $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ такой, что $\omega_S(s_0, x) = y$.

Другими словами можно сказать, что y асинхронно автоматно сводится к x, если y получается на выходе некоторого асинхронного инициального автомата (S, s_0) при подаче на его вход сверхслова x.

Если рассматривать только конечные автоматы Мили, то получаем определение конечно–автоматной сводимости (см. [1,2,4]) с той разницей, что сверхслово на выходе может получаться с некоторой задержкой.

Сверхслово y конечно–автоматно сводится к сверхслову x, если существуют конечный инициальный автомат Мили $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ и блок $A \in \Sigma'^*_S$ (который определяет некоторую конечную задержку) такой, что $\omega_S(s_0, x) = Ay$.

В данном пособие будем рассматривать только асинхронно автоматную сводимость.

Если два сверхслова таковы, что первое асинхронно автоматно сводится ко второму, а второе – к первому, то такие слова естественно назвать эквивалентными, поскольку указанное отношение обладает всеми свойствами отношения эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).

Сверхслово x асинхронно автоматно эквивалентно сверхслову y, если существуют конечные инициальные асинхронные автоматы (S, s_0) и (T, t_0) такие, что $\omega_S(s_0, x) = y$ и $\omega_T(t_0, y) = x$.

Класс эквивалентности, который содержит сверхслово x, обозначается $[x]^*$ и называется *степенью асинхронно автоматных преобразований сверхслова x*.

На множестве степеней асинхронно автоматных преобразований, обозначаемом V^*, вводится частичный порядок.

Множество S называется *частично упорядоченным*, если на нем задано рефлексивное, антисимметричное, транзитивное бинарное отношение (которое обычно обозначают $\leq$), а именно отношение, для которого выполняются следующие свойства:

1. для любого $p \in S$ выполняется $p \leq p$ (рефлексивность),

2. для любых $p, q \in S$: если $p \leq q$ и $q \leq p$, то $p = q$ (симметричность),
3. для любых $p, q, r \in S$: если $p \leq q$ и $q \leq r$, то $p \leq r$ (транзитивность).

$[y]^* \leq^* [x]^*$ *($[y]^*$ сводится к $[x]^*$)*, если существует конечный асинхронный инициальный автомат (S, s_0) такой, что $\omega_S(s_0, x) = y$.

Очевидно, что отношение $[y]^* \leq^* [x]^*$ не зависит от выбора представителя из классов эквивалентности $[x]^*$ и $[y]^*$. Ясно также, что введенное отношение является отношением частичного порядка.

2 Существование наименьшего элемента и атомов

Наименьшим элементом частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ называется такой элемент p, что если $q \leq p$, то $q = p$.

Обозначим через $[0]^*$ степень асинхронно автоматных преобразований, содержащую нулевое сверхслово, то есть сверхслово, состоящее только из одного (нулевого) символа.

Определим, из каких последовательностей состоит указанная степень.

Последовательность x называется *заключительно периодической*, если существуют $T, K \in \mathbb{N}$ такие, что $x(i) = x(i+T)$ для любого натурального $i \geq K$. Иными словами, последовательность состоит из некоторого слова длины K (предпериода), за которым записано периодическое сверхслово с периодом длины T.

Предложение 1. *Класс $[0]^*$ состоит из заключительно периодических сверхслов. Для любого сверхслова x, $[x]^* \geq^* [0]^*$.*

Доказательство. Пусть x – заключительно периодическое сверхслово. Тогда легко построить автомат, который независимо от входного бесконечного слова на выходе будет выдавать сверхслово x. Поскольку мы рассматриваем асинхронные автоматы, то достаточно будет автомата с двумя состояниями: в первом состоянии автомат независимо от входа выдает на выход предпериод x и переходит во второе состояние, во втором состоянии автомат независимо от входа выдает на выход период x и остается в этом же состоянии. Можно было построить и автомат Мили, который на выходе выдает сверхслово x независимо от входа, но он будет иметь $K+T$ состояний (то есть число букв в предпериоде и периоде сверхслова x). Значит, $[y]^* \geq^* [x]^*$ для любой степени $[y]^* \in V^*$, в частности, $[0]^* \geq^* [x]^*$. Из постоянного (нулевого) сверхслова посредством конечных асинхронных автоматов можно получить лишь либо заключительно периодическое сверхслово, либо конечный блок (но этот случай мы не рассматриваем, поскольку нас интересуют преобразование автоматом бесконечных слов в бесконечные слова).

Обратно, для заключительно периодического сверхслова x выполняется $[x]^* \geq^* [0]^*$, поскольку автомат с одним состоянием, который каждый входной символ заменяет на ноль, преобразует любое бесконечное слово (в частности, x) в нулевое сверхслово. Следовательно, $[x]^* =^* [0]^*$.

Указанный автомат обеспечивает также выполнение для любой степени $[x]^* \in V^*$ неравенства $[x]^* \geq^* [0]^*$. $\square$

Таким образом, в предложении 1 доказано существование наименьшего элемента в множестве V^* – это степень асинхронно автоматных преобразований заключительно периодических сверхслов.

Наиболее близкими элементами к наименьшему элементу частично упорядоченного множества являются атомы.

Элемент p частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ называется *покрытием над элементом* q и обозначается $p \succ q$, если $p > q$ и не существует элемента r такого, что $p > r > q$. *Атомом* называется покрытие над наименьшим элементом.

Теорема 1. *Существует атом в* V^*.

Доказательство. Будем рассматривать сверхслова только над двухбуквенным алфавитом, поскольку каждая степень асинхронно автоматных преобразований содержит сверхслово над двухбуквенным алфавитом. Пусть $\Sigma = \Sigma' = \{0, 1\}$. Бесконечное слово x, класс эквивалентности которого будет атомом V^*, будем строить методом начальных сегментов.

Определим последовательность блоков I_i, где каждый блок I_i – собственный начальный сегмент (префикс) следующего блока I_{i+1}, и вспомогательные блоки A_i и B_i индукцией по i, удовлетворяя следующим условиям:
(1) Блок A_1 начинается с 0, B_1 – с 1.
(2) Каждый блок A_{i+1}, B_{i+1} представляет собой последовательность копий блоков A_i и/или B_i, начинающуюся с A_i и B_i соответственно. Они имеют длину, большую i. Ни A_i, ни B_i не являются частью никакого периодического сверхслова периода i.
(3) Блок I_{i+1} состоит из блока I_i и следующими за ним копиями блоков A_i и/или B_i.
(4) Перенумеруем конечные асинхронные инициальные автоматы (S, s_0). Если входной блок I_i переводит i–й автомат (S, s_0) в финальное состояние s, то, начиная работать в состоянии s, автомат S возвращается в состояние s как под действием входного блока A_i, так и под действием входного блока B_i.

Таким образом, в силу условия (1) построенные блоки A_i и B_i для любого i будут различны, в силу условий (2) и (3) построенное сверхслово не будет заключительно периодическим, то есть его степень будет больше наименьшей, в силу условия (4) любой автомат будет преобразовывать построенное сверхслово либо в заключительно периодическое, либо в асинхронно автоматно эквивалентное ему. Далее приведем строгое доказательство.

Сверхслово x определим как предел последовательности блоков I_i. Покажем, что таким образом построенное сверхслово x является атомом V^*.

Сверхслово x не является заключительно периодическим. Действительно, допустим, что x – заключительно периодическое, тогда x имеет конечный период i и, согласно построению, его можно рассматривать как начальный блок I_{i+1}, за которым следует последовательность копий блоков A_{i+1} и B_{i+1}. Но по свойству (2) ни A_{i+1}, ни B_{i+1} не являются частью никакого периодического сверхслова периода i. Пришли к противоречию, значит x – не заключительно периодическое сверхслово. То есть, $[x]^* >^* [0]^*$.

Теперь пусть y – такое сверхслово, что $[x]^* \geq^* [y]^* \geq^* [0]^*$. Тогда некоторый асинхронный инициальный автомат (S, s_0) выдает сверхслово y, если на его вход подано сверхслово x. Пусть i – номер этого автомата в выбранной нами нумерации асинхронных инициальных автоматов.

Сверхслово x можно рассматривать как содержащее начальный блок I_i, за которым следует последовательность копий блоков A_i и B_i. В силу свойства (4), S находится в одном и том же состоянии s, финальном состоянии для блока I_i, как при прочтении блока A_i, так и при прочтении блока B_i. Следовательно, выходное сверхслово y, после того как пройден начальный блок I_i входа, содержит последовательность копий только двух блоков: C (ответ на входной блок A_i, когда S начинает работать в состоянии s) и D (ответ на B_i).

Докажем, что либо $[x]^* =^* [y]^*$, либо $[y]^* =^* [0]^*$.

Рассмотрим все возможные случаи в зависимости от того, как связаны между собой слова C и D:

1. $|C| = |D|$. Если C и D совпадают, то сверхслово y – заключительно периодическое, следовательно, $[y]^* =^* [0]^*$. Если C и D не совпадают, то можно описать асинхронный инициальный автомат, который после прочтения слова длины $|C|$ пишет на выходе слово A_i, если исходное слово было C, и слово B_i, если исходное слово было D. Таким образом, асинхронный инициальный автомат заменяет C на A_i, D на B_i. Следовательно, x и y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

2. $|C| > |D|$. Распишем C и D следующим образом: $C = C_1C_2$, $D = D_1$, где $|C_1| = |D| = |D_1|$ и $|C_2| > 0$, то есть выделим в слове C префикс длины $|D|$.

Если C_1 и D_1 не совпадают, то можно описать асинхронный инициальный автомат, заменяющий C на A_i, D на B_i, как это делалось выше (в предыдущем пункте). Следовательно, x и y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

Если C_1 и D_1 совпадают, то выделим максимальное число вхождений слова D_1 в начало слова C: $C = D_1^{k_1}C_2'$, $D = D_1$, где C_2' такое, что D_1 не является префиксом C_2'. Чтобы не загромождать запись, будем опускать штрихи и писать $C = D_1^{k_1}C_2$, $D = D_1$.

В зависимости от C_2 возможно несколько случаев:

а) $C_2 = \lambda$ (пустое слово). Тогда y – заключительно периодическое сверхслово с периодом D_1 и $[y]^* =^* [0]^*$.

б) $|C_2| > |D_1|$. Значит, мы можем отличить слова C и D. Тогда можно описать асинхронный инициальный автомат, заменяющий C на A_i, D на B_i, как это уже делалось выше. Следовательно, $[x]^* =^* [y]^*$.

в) $|C_2| < |D_1|$. Снова распишем C и D: $C = D_1^{k_1}C_2$, $D = D_1 = D_2D_3$, где $|C_2| = |D_2|$ и $|D_3| > 0$. Теперь уже в D выделим префикс длины $|C_2|$.

Если C_2 и D_2 не совпадают, значит, мы можем различать слова C и D и можем построить асинхронный инициальный автомат, заменяющий C на A_i, D на B_i. Следовательно, x и y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

Если C_2 и D_2 совпадают, тогда $C = D_1^{k_1}D_2$, $D = D_2D_3$.

Возможны варианты в зависимости от вида слова D_3:

i) D_3 не является префиксом D_1 $(= D)$. Тогда слова C и D различимы, значит, x и y эквивалентны и $[x]^* =^* [y]^*$.

ii) D_3 – префикс D_1 $(= D)$. Выделим все вхождения D_2 в слово D. Тогда $C = D_1^{k_1}D_2$, $D = D_1 = D_2^{l_2}D_3'$, где $|D_3'| < |D_2|$ и D_3' – префикс D_2 (по построению). Снова чтобы не загромождать запись, будем опускать штрихи и писать $C = D_1^{k_1}D_2$, $D = D_2^{l_2}D_3$, причем $|D_3| < |D_2| < |D_1| < |C|$.

Если $D_3 = \lambda$, то y – заключительно периодическое сверхслово и $[y]^* =^* [0]^*$. В противном случае ($|D_3| > 0$), расписываем D_2: $D_2 = D_3D_4$, $|D_3| < |D_2|$, $|D_4| > 0$. Далее рассматриваем случаи i) и ii) для D_2 и D_4 и получаем представление для D_2: $D_2 = D_3^{l_3}D_4$, где $|D_4| < |D_3|$.

Продолжая таким образом далее, на каждом следующем шаге будем выделять подслово D_i, длина которого меньше длины подслова, рассматриваемого на предыдущем шаге. Значит, на некотором шаге процесс остановится и получим либо $[x]^* =^* [y]^*$, либо $[y]^* =^* [0]^*$ в зависимости от того, смогли мы отличить слова C и D или нет.

3. $|C| < |D|$. Доказывается также, как случай 2.

Таким образом, доказали, что если $[x]^* \geq^* [y]^* \geq^* [0]^*$, то либо $[x]^* =^* [y]^*$, либо $[y]^* =^* [0]^*$. Значит, бесконечное слово x является атомом V^*.

Для завершения доказательства осталось построить блоки I_i, A_i и B_i, удовлетворяющие условиям (1) – (4). Построение блоков осуществляется по индукции.

Шаг 0. Определим I_0 как пустой блок (длины ноль), A_0 как символ 0 и B_0 как символ 1.

Шаг $(i+1)$. К этому времени уже построены I_i, A_i и B_i. Пусть (S, s_0) – $(i+1)$–ый асинхронный инициальный автомат.

Обозначим через $\langle s \rangle$ множество всех финальных состояний автомата (S, s) при подаче входных блоков, являющихся последовательностями копий блоков A_i и/или B_i.

Пусть s_1 – финальное состояние автомата (S, s_0) для входного блока I_i. Выберем состояние $s_2 \in \langle s_1 \rangle$ так, чтобы мощность множества $\langle s_2 \rangle$ была минимальна и $s_2 \in \langle s_2 \rangle$. Это всегда можно сделать, сначала выбрав все состояния $s \in \langle s_1 \rangle$ такие, что $s \in \langle s \rangle$, затем выбрав среди них те, для которых мощность $\langle s \rangle$ минимальна. Определим блок I_{i+1} состоящим из блока I_i и следующей за ним последовательности копий блоков A_i и/или B_i такой, что s_2 – финальное состояние автомата (S, s_0) для входа I_{i+1}.

Далее строим блоки A_{i+1} и B_{i+1}. По предположению индукции A_i и B_i имеют длину не меньше i и отличаются первыми символами. Следовательно, либо A_iA_i, либо A_iB_i не образуют периодическое сверхслово периода i. Выберем тот блок, который не образует периодическое сверхслово. Обозначим его A_iX_i. Пусть s_A – финальное состояние автомата (S, s_2) для входного блока A_iX_i. Тогда $s_A \in \langle s_2 \rangle \subseteq \langle s_1 \rangle$ и, в силу минимальности $\langle s_2 \rangle$, $\langle s_A \rangle = \langle s_2 \rangle$. Поэтому $s_2 \in \langle s_A \rangle$. Обозначим через A_{i+1} последовательность копий блоков A_i и/или B_i, начинающуюся с A_iX_i и для которой финальное состояние автомата (S, s_2) есть s_2.

Аналогично строится B_{i+1}. Построенные блоки удовлетворяют условиям (1) – (4). Построение атома завершено. $\square$

Следствие 1. *Существует континуум атомов V^*.*

Доказательство. Используя способ построения атома из теоремы 1, покажем, как построить континуум атомов. Построение проведем по индукции.

Шаг 0. Положим $I_0 = \emptyset$, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$.

Шаг 1. Положим $A_0^1 = A_0A_0 = 00$, $B_0^1 = B_0A_0 = 10$. Строим слова I_1^1, A_1^1, B_1^1 из слов A_0^1, B_0^1, удовлетворяя условиям (1) – (4) с первым асинхронным инициальным автоматом $S_1 = (S, s_0)$ в выбранной в теореме 1 нумерации асинхронных автоматов.

Аналогично положим $A_0^2 = A_0B_0 = 01$, $B_0^2 = B_0B_0 = 11$. Строим слова I_1^2, A_1^2, B_1^2 из слов A_0^2, B_0^2, удовлетворяя условиям (1) – (4) с асинхронным автоматом $S_1 = (S, s_0)$.

Очевидно, что слово I_1^1 отличается от слова I_1^2, A_1^1 – от A_1^2, B_1^1 – от B_1^2.

Шаг n. К этому шагу уже построены I_{n-1}^i, A_{n-1}^i, B_{n-1}^i, $i = \overline{1, 2^{n-1}}$, причем по построению A_{n-1}^{2k-1} (B_{n-1}^{2k-1}) отличается от A_{n-1}^{2k} (B_{n-1}^{2k}) хотя бы в одной точке при $k = \overline{1, 2^{n-2}}$.

Для всех $i = \overline{1, 2^{n-1}}$ поступаем аналогично шагу 1. Положим

$$A_{n-1}^{i,1} = A_{n-1}^iA_{n-1}^i,\ B_{n-1}^{i,1} = B_{n-1}^iA_{n-1}^i \text{ и}$$

$$A_{n-1}^{i,2} = A_{n-1}^iB_{n-1}^i,\ B_{n-1}^{i,2} = B_{n-1}^iB_{n-1}^i.$$

Строим I_n^{2i-1} из слов I_{n-1}^i, $A_{n-1}^{i,1}$, $B_{n-1}^{i,1}$ и слова A_n^{2i-1}, B_n^{2i-1} из слов $A_{n-1}^{i,1}$, $B_{n-1}^{i,1}$, удовлетворяя условиям (1) – (4) с асинхронным автоматом $S_n = (S, s_0)$.

Затем строим слово I_n^{2i} из слов I_{n-1}^i, $A_{n-1}^{i,2}$, $B_{n-1}^{i,2}$ и слова A_n^{2i}, B_n^{2i} из слов $A_{n-1}^{i,2}$, $B_{n-1}^{i,2}$, удовлетворяя условиям (1) – (4) с асинхронным автоматом $S_n = (S, s_0)$.

Так как слова $A_{n-1}^{i,1}$ ($B_{n-1}^{i,1}$) отличаются от слов $A_{n-1}^{i,2}$ ($B_{n-1}^{i,2}$) хотя бы в одной точке, то построенные I_n^j, A_n^j, B_n^j ($j = \overline{1, 2^n}$) попарно отличаются друг от друга, то есть $I_n^j \neq I_n^k$, $A_n^j \neq A_n^k$, $B_n^j \neq B_n^k$ при $j \neq k$.

Шаг n завершен.

Сверхслова x_n определим как пределы последовательности блоков I_m^k ($m \to \infty$) при подходящих k. Степень каждого такого сверхслова является атомом по построению.

В ходе построения получаем 2^{χ_0} различных сверхслов. Но поскольку в каждом атоме (как в любой степени) не более счетного числа сверхслов, то получаем континуум атомов. □

3 Вложимость линейных порядков

Частично упорядоченное множество S называется *линейно упорядоченным*, если для любых $p, q \in S$ либо $p \le q$, либо $q \le p$.

Теорема 2. *Любое конечное линейно упорядоченное множество вложимо как начальный сегмент V^*.*

Обозначим через $\langle (A_1|A_2|\dots|A_n)^* \rangle$ множество конечных непустых слов, состоящих из копий блоков A_1 и/или A_2 и/или … и/или A_n.

Доказательство. Покажем, что для любого натурального числа n найдется $n+1$ сверхслово x_1, x_2, …, x_{n+1} такие, что

$$[x_1]^* \succ^* [x_2]^* \succ^* \dots \succ^* [x_n]^* \succ^* [x_{n+1}]^* =^* [0]^*.$$

Поскольку каждая степень асинхронно автоматных преобразований содержит сверхслово над двухбуквенным алфавитом, то достаточно рассматривать только такие сверхслова. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$.

Возьмем произвольное $k > \log_2(n+1)$ и выберем произвольно различные $n+1$ слова длины k в алфавите Σ. Это возможно сделать в силу выбора k. Обозначим выбранные слова через a_1, a_2, …, a_{n+1}.

Рассмотрим следующие инициальные автоматы $\overline{T}^i = (T_i, \Sigma, \Sigma, \delta_i, \omega_i, t_i)$ $(i = \overline{1, n-1})$, где T_i – конечное множество состояний, Σ – входной и выходной алфавит, t_i – начальное состояние автомата $\overline{T}^i$, δ_i и ω_i – соответственно функции переходов и выходов, определенные формулами:

$$\delta_i(t_i, a_j) = t_i^j, \quad \omega_i(t_i, a_j) = a_1 \quad (j = \overline{1, n+1}),$$

$$\delta_i(t_i^j, a_k) = t_i^k, \quad \omega_i(t_i^j, a_k) = \begin{cases} a_1, j = \overline{1, i+1} \\ a_j, j = \overline{i+2, n+1} \end{cases} \quad (k = \overline{1, n+1}).$$

Другими словами, i–ый автомат $\overline{T}^i$ склеивает с фиксированной задержкой слова $a_1, \dots, a_{i+1}$ в одно слово a_1, а остальные слова $a_{i+2}, \dots, a_{n+1}$ оставляет без изменения.

Определим последовательность блоков I_j, где каждый блок I_j – собственный начальный сегмент (префикс) следующего блока I_{j+1}, и вспомогательные блоки A_j^1, …, A_j^{n+1} индукцией по j, удовлетворяя следующим условиям:

(1) $A_0^i = a_i$ $(i = \overline{1, n+1})$.

(2) Каждый блок A^i_{j+1} $(i=\overline{2,n+1})$ представляет собой последовательность копий меньших блоков A^1_j и/или A^2_j и/или … и/или A^i_j, начинающуюся с A^i_j, а блок A^1_{j+1} состоит из блоков A^1_j и/или A^2_j и начинается с A^1_j.
(3) Блок I_{j+1} состоит из блока I_j и следующим за ним словом из множества $\langle(A^1_j|A^2_j|\dots|A^{n+1}_j)^*\rangle$.
(4) Перенумеруем асинхронные инициальные автоматы (T,t_0), исключая из рассмотрения $\overline{T}^i$ $(i=\overline{1,n-1})$. Пусть (T,t_0) – j–ый асинхронный инициальный автомат T_j в этой нумерации. Если вход I_j переводит T_j в финальное состояние t, то, начиная работать в состоянии t, T_j возвращается в финальное состояние t под действием входных блоков A^i_j $(i=\overline{1,n+1})$.
(5) Для всякого j, $T_j(0^\infty)\neq\overline{T}^i(I_j)$ $(i=\overline{1,n-1})$.
(6) Для всякого j, $T_j(\overline{T}^i(I_j))\neq\overline{T}^{i-1}(I_j)$ $(i=\overline{2,n-1})$ на той части, на которой они оба определены, или $T_j(\overline{T}^i(I_jB))$ определяет конечный блок для любого $B\in\langle(A^1_j|A^2_j|\dots|A^{n+1}_j)^*\rangle$.
(7) Для всякого j, T_j либо отображает все A^i_j $(i=\overline{1,n+1})$ в различные блоки, либо склеивает их в один блок, либо склеивает первые k блоков (то есть действует как автомат $\overline{T}^{k-1}$).

Таким образом, условия (1)–(7) обобщают условия (1)–(4) теоремы 1. Если некоторое сверхслово будет удовлетворять условиям (1)–(7), то степени сверхслов, полученнных при подаче этого сверхслова на вход автоматов $\overline{T}^i$ $(i=\overline{1,n-1})$, вместе с наименьшей степенью будут определять вложение линейно упорядоченного множества в качестве начального сегмента в V^*. Приведем формальное доказательство.

Построим последовательности, удовлетворяющие условиям (1) – (7).

Шаг 0. Положим $I_0=\emptyset, A^i_0=a_i$ $(i=\overline{1,n+1})$.

Шаг $j+1$. К этому времени уже построены $I_j,A^1_j,\dots,A^{n+1}_j$. Пусть (T,t_0) – $(j+1)$–ый асинхронный инициальный автомат в выбранной нумерации автоматов.

Обозначим через $\langle t\rangle^k$ множество финальных состояний автомата (T,t) при подаче входных блоков из множества $\langle(A^1_j|A^2_j|\dots|A^{k+1}_j)^*\rangle$.

Пусть $\bar{t}_0$ – финальное состояние автомата (T,t_0) для входного блока I_j. Найдем множество финальных состояний автомата $(T,\bar{t}_0)$ при подаче входных блоков из множества $\langle(A^1_j|A^2_j|\dots|A^{n+1}_j)^*\rangle$. Его, как указано выше, обозначают $\langle\bar{t}_0\rangle^n$. Выберем состояние $t_1\in\langle\bar{t}_0\rangle^n$ так, чтобы мощность множества $\langle t_1\rangle^n$ была минимальна и $t_1\in\langle t_1\rangle^n$. Это легко сделать, сначала выбрав все состояния $t \in \langle \bar{t}_0 \rangle^n$ такие, что $t \in \langle t \rangle^n$, затем выбрав среди них те, для которых мощность $\langle t \rangle^n$ минимальна.

Аналогично поступаем с автоматом (T, t_1) с той лишь разницей, что на его вход подаем слова из множества $\langle (A_j^1 | A_j^2 | \ldots | A_j^n)^* \rangle$. В результате выделяется состояние t_2.

Далее, аналогично, для каждого $i = \overline{n-2, 1}$ находим $\langle t_{n-i} \rangle^i$ и выбираем t_{n-i+1} так, чтобы мощность множества $\langle t_{n-i+1} \rangle^i$ была минимальной и $t_{n-i+1} \in \langle t_{n-i+1} \rangle^i$.

В итоге выделится некоторое состояние t_n. В силу построения очевидно, если $i \leq j$, то $t_j \in \langle t_i \rangle^{n-i+1}$.

Пусть I_{j+1}^1 состоит из I_j и следующего за ним такого блока из множества $\langle (A_j^1 | A_j^2 | \ldots | A_j^{n+1})^* \rangle$, что t_n – финальное состояние автомата (T, t_0) для входа I_{j+1}^1.

Пусть $t_{A_j^1}$ – финальное состояние автомата (T, t_n) для входного блока A_j^1. Очевидно, по построению слова A_j^1 и множества состояний $\langle t_n \rangle^1$, что $t_{A_j^1} \in \langle t_n \rangle^1$, и, в силу минимальности $\langle t_n^1 \rangle$, $\langle t_{A_j^1} \rangle^1 = \langle t_n \rangle^1$. Поэтому $t_n \in \langle t_{A_j^1} \rangle^1$. Обозначим через $A_{j+1,1}^1$ блок, состоящий из блока A_j^1 и следующего за ним такого блока из множества $\langle (A_j^1 | A_j^2)^* \rangle$, что финальное состояние автомата (T, t_n) для $A_{j+1,1}^1$ есть t_n.

Аналогично для $i = \overline{2, n+1}$ определяем блок $A_{j+1,1}^i$ как блок из множества $\langle (A_j^1 | \ldots | A_j^i)^* \rangle$, который начинается с A_j^i, такой, что финальное состояние автомата (T, t_n) при подаче $A_{j+1,1}^i$ есть t_n.

Далее следует n подшагов, удовлетворяющих условию (5).

Подшаг 0. Блок I_{j+1}^1 уже построен.

Подшаг l. Пусть построено I_{j+1}^l. Строим I_{j+1}^{l+1}. Рассмотрим автомат $(\overline{T}^l, t_l)$. Проверим выполняется ли равенство

$$T(t_0, 0^\infty) = \overline{T}^l(I_{j+1}^l), \qquad (1)$$

то есть может ли слово $\overline{T}^l(I_{j+1}^l)$ быть получено из нулевого сверхслова при действии на него автоматом (T, t_0).

На этом шаге необходимо построить I_{j+1}^{l+1} так, чтобы оно не могло быть получено из нулевого сверхслова при действии на него автоматом (T, t_0).

Если $|\omega_T(t_0, 0^\infty)| < |\omega_l(t_l, I_{j+1}^l)|$, то очевидно, что $T(t_0, 0^\infty) \neq \overline{T}^l(I_{j+1}^l)$ и полагаем $I_{j+1}^{l+1} = I_{j+1}^l$.

Если $|\omega_T(t_0, 0^\infty)| \geq |\omega_l(t_l, I^l_{j+1})|$, то возможны два случая, когда равенство (1) выполняется и когда оно не выполняется.

Если равенство (1) не выполняется, то полагаем $I^{l+1}_{j+1} = I^l_{j+1}$.

Если равенство (1) выполняется, то существует k $(1 \leq k \leq n+1)$ такое, что $T(t_0, 0^\infty) \neq \overline{T}^l(I^l_{j+1}A^k_{j+1,1})$. Действительно, автомат $\overline{T}^l$ склеивает только слова $a_1, \ldots, a_{l+1}$, а остальные слова $a_{l+2}, \ldots, a_{n+1}$ оставляет без изменения. Поэтому найдется слово среди $\overline{T}^l(I^l_{j+1}A^k_{j+1,1})$, которое не совпадет с выходом $T(t_0, 0^\infty)$. В этом случае полагаем $I^{l+1}_{j+1} = I^l_{j+1}A^k_{j+1,1}$.

После шага $n-1$ получим I^n_{j+1}.

Следующие $n-1$ подшагов удовлетворяют условию (6).

Подшаг $n-1$. Блок I^n_{j+1} уже построен.

Подшаг $l = m+n-2$ $(m = \overline{2, n-1})$. Пусть построено I^l_{j+1}. Строим I^{l+1}_{j+1}. Подадим на вход автомата $(\overline{T}^m, t_m)$ слово $I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}A^2_{j+1,1}\ldots A^{m+1}_{j+1,1}A^1_0$. На выходе имеем a_1B_lH, где $|B_l| = |I^l_{j+1}|$, $|H| = |A^1_{j+1,1}A^2_{j+1,1}\ldots A^{m+1}_{j+1,1}|$, причем H имеет вид $(A^1_0)^r$, поскольку $\overline{T}^m$ склеивает с фиксированной задержкой слова $a_1, \ldots, a_{m+1}$ в одно слово a_1 (или, что тоже самое, (A^1_0)), а слова $A^1_{j+1,1}, A^2_{j+1,1}, \ldots, A^{m+1}_{j+1,1}$ состоят только из указанных слов.

Подадим получившееся слово на вход автомата (T, t_0).

Проверим, выполняется ли равенство

$$\omega_T(t_0, a_1B_lH) = \omega_{m-1}(t_{m-1}, I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}A^2_{j+1,1}\ldots A^{m+1}_{j+1,1}A^1_0) \qquad (2)$$

на той части, на которой оба они определены, то есть можно ли при действии автомата (T, t_0) на слово $\overline{T}^m(I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}A^2_{j+1,1}\ldots A^{m+1}_{j+1,1}A^1_0)$ получить слово $\overline{T}^{m-1}(I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}A^2_{j+1,1}\ldots A^{m+1}_{j+1,1}A^1_0)$.

Необходимо так определить I^{l+1}_{j+1}, которое содержит в качестве префикса I^l_{j+1}, чтобы из слова $\overline{T}^m(I^{l+1}_{j+1})$ при действии на него автоматом (T, t_0) нельзя было получить слово $\overline{T}^{m-1}(I^{l+1}_{j+1})$. Для этого рассмотрим различные случаи в зависимости от того, выполняется ли равенство (2).

Если равенство (2) не выполняется, то положим $I^{l+1}_{j+1} = I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}\ldots A^{m+1}_{j+1,1}$.

Если равенство (2) выполнено на той части, на которой определены оба слова, то возможны следующии случаи:

1) Если $|\omega_T(t_0, a_1B_lH)| \geq |\omega_{m-1}(t_{m-1}, I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}A^2_{j+1,1}\ldots A^{m+1}_{j+1,1}A^1_0)|$, тогда полагаем $I^{l+1}_{j+1} = I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}\ldots A^{m-1}_{j+1,1}A^{m+1}_{j+1,1}A^m_{j+1,1}$. Действительно, слова $\overline{T}^m(I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}\ldots A^{m-1}_{j+1,1}A^{m+1}_{j+1,1}A^m_{j+1,1})$ и $\overline{T}^m(I^l_{j+1}A^1_{j+1,1}\ldots A^{m-1}_{j+1,1}A^m_{j+1,1}A^{m+1}_{j+1,1})$ будут совпадать и в левой части равенства (2) выходное слово не изменится.

Но поскольку автомат $\overline{T}^{m-1}$ по–разному преобразует слова $A^m_{j+1,1}$ и $A^{m+1}_{j+1,1}$, то выходное слово в правой части равенства (2) изменится и указанное равенство не будет выполнятся.
2) Если $|\omega_T(t_0, a_1 B_l H)| < |\omega_{m-1}(t_{m-1}, I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} A^2_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1} A^1_0)|$, то будем рассматривать все возможные слова вида $I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} A^2_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1} B$, где $B \in \langle (A^1_{j+1,1} | A^2_{j+1,1} | \ldots | A^{n+1}_{j+1,1})^* \rangle$.

Если существует B такое, что

$$|\omega_T(t_0, \omega_m(t_m, I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1} B))| \geq |\omega_{m-1}(t_{m-1}, I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1} A^1_0)|,$$

то либо полагаем $I^{l+1}_{j+1} = I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m-1}_{j+1,1} A^m_{j+1,1} A^{m+1}_{j+1,1} B$, либо полагаем $I^{l+1}_{j+1} = I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m-1}_{j+1,1} A^{m+1}_{j+1,1} A^m_{j+1,1} B$ в зависимости от того, для какого из них не будет выполнятся равенство (2). Поскольку, как было показано выше, в одном из случаев равенство (2) выполнятся не будет.

Если такого B не существует, то выполняется неравенство

$$|\omega_T(t_0, \omega_m(t_m, I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1} B))| \leq K$$

для любого блока $B \in \langle (A^1_{j+1,1} | A^2_{j+1,1} | \ldots | A^{n+1}_{j+1,1})^* \rangle$ и некоторого натурального K. Следовательно, последовательность $\omega_T(t_0, \omega_m(t_m, I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1} B))$ определяет конечный блок, тогда из нее невозможно получить сверхслово, степень которого не наименьшая, а в силу условия (5) мы строим $T^{m-1}(I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1} A^1_0)$ так, чтобы оно не определяло наименьшую степень. Поэтому в этом случае можно положить $I^{l+1}_{j+1} = I^l_{j+1} A^1_{j+1,1} \ldots A^{m+1}_{j+1,1}$.

После шага с номером $2n-3$ получим I^{2n-2}_{j+1}.

Положим $I_{j+1} = I^{2n-2}_{j+1}$. Очевидно, что I_{j+1} переводит автомат (T, t_0) из состояния t_0 состояние t_n.

Теперь будем строить блоки $A^1_{j+1}, \ldots, A^{n+1}_{j+1}$. Осталось удовлетворить лишь условию (7).

Подадим на вход автомата (T, t_n) блоки $A^i_{j+1,1}$ $(i = \overline{1, n+1})$ и проанализируем получившиеся выходы. Пусть длина выходного блока $\omega_T(t_n, A^i_{j+1,1})$ равна l_i $(i = \overline{1, n+1})$. Найдем L – наименьшее общее кратное чисел l_i $(i = \overline{1, n+1})$. Положим $A^i_{j+1,2} = (A^i_{j+1,1})^{L/l_i}$. Тогда длины всех выходных блоков $\omega_T(t_n, A^i_{j+1,2})$ равны L.

Для получившихся блоков возможны следующие 4 варианта:

1. $\omega_T(t_n, A^i_{j+1,2}) \neq \omega_T(t_n, A^k_{j+1,2})$ при $i \neq k$, то есть все они различны,

2. $\omega_T(t_n, A^i_{j+1,2}) = \omega_T(t_n, A^k_{j+1,2})$ для $i, k = \overline{1, n+1}$, то есть все они совпадают,

3. $\omega_T(t_n, A^1_{j+1,2}) = \ldots = \omega_T(t_n, A^k_{j+1,2})$ и $\omega_T(t_n, A^i_{j+1,2}) \neq \omega_T(t_n, A^l_{j+1,2})$ при $i \neq l$ $(i, l = \overline{k+1, n+1})$, то есть автомат T склеивает блоки с номерами $\overline{1, k}$ (как автомат $\overline{T}^{k-1}$),

4. автомат T склеивает блоки иначе, чем автоматы $\overline{T}^i$ $(i = \overline{1, n-1})$.

В случаях 1, 2, 3 положим $A^i_{j+1} = A^i_{j+1,2}$ $(i = \overline{1, n+1})$.

В четвертом случае будем изменять блоки $A^i_{j+1,2}$ $(i = \overline{1, n+1})$ так, чтобы получить один из первых трех случаев. Для того чтобы не изменились свойства (1) – (6), к каждому блоку можно добавлять только блоки с номерами, не большими, чем его собственный номер.

Разобьем индексы $1, 2, 3, \ldots, n+1$ на группы склеек $(i^1_1, \ldots, i^1_{k_1})$, $(i^2_1, \ldots, i^2_{k_2})$, $\ldots$, $(i^r_1, \ldots, i^r_{k_r})$. Сначала рассмотрим группу индексов, которая не содержит 1 или 2. Допустим это группа $(i^1_1, \ldots, i^1_{k_1})$. Так как $i^1_1 \neq 1$ или 2, то к $A^{i^1_1}_{j+1,2}$ можно добавить $A^1_{j+1,2}$. Получим $A^{i^1_1}_{j+1,2}A^1_{j+1,2}$, а все остальные блоки просто удвоим, не изменяя индексов. Поскольку $\omega_T(s_n, A^1_{j+1,2})$ не принадлежит данной группе склеек, то, следовательно, блок с номером i^1_1 отделился от других блоков с номерами из этой группы. Теперь i^1_1 не входит ни в какую группу склеек. (Если же $i^1_1 = 1$, то добавляем $A^2_{j+1,2}$ ко всем блокам, кроме первого, а первый удваиваем, а дальше аналогичные рассуждения.) Аналогично поступаем с другими номерами этой группы и с другими группами. В результате получаем первый случай, когда все выходные блоки различны.

Остался случай, когда группа склеек имеет вид $(1, 2, \ldots, k, i^\beta_{k+1}, \ldots, i^\beta_{k_\beta})$. Отделим сначала блоки с номерами $i^\beta_{k+1}, \ldots, i^\beta_{k_\beta}$, как это делалось выше. А оставшиеся блоки с номерами $1, 2, \ldots, k$ останутся склеенными. Получим третий случай, когда первые k выходных блоков склеены, а остальные различны.

Обозначим полученные в результате блоки через A^l_{j+1} $(l = \overline{1, n+1})$.

Очевидно, что построенные блоки I_{j+1} и A^l_{j+1} $(l = \overline{1, n+1})$ обладают свойствами (1) – (7).

Построение завершено, осталось определить сверхслова x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1}, существование которых утверждалось в начале доказательства.

Положим $x_1 = \lim\limits_{j\to\infty} I_j$, $x_{i+1} = \overline{T}^i(x_1)$ $(i = \overline{1, n-1})$, $x_{n+1} = (A^1_0)^\infty$ (то есть, x_{n+1} – периодическое сверхслово и, следовательно, $[x_{n+1}]^* =^* [0]^*$). По построению получаем $[x_1]^* \geq^* [x_i]^*$ $(i = \overline{2,n})$ и $[x_1]^* \geq^* [x_{n+1}]^*$. В силу свойств автоматов $\overline{T}^i$ имеем $[x_i]^* \geq^* [x_{i+1}]^*$ $(i = \overline{1,n})$.

Докажем, что все неравенства строгие. Допустим, существует асинхронный автомат T_p с номером p такой, что $T_p(x_{i+1}) = x_i$. Следовательно, $T_p(\overline{T}^i(x_1)) = \overline{T}^{i-1}(x_1)$. Но, по свойству (6), $T_p(\overline{T}^i(I_p)) \neq \overline{T}^{i-1}(I_p)$ в той части, где они оба определены, или $T_p(\overline{T}^i(x_1))$ определяет конечный блок. Получили противоречие: в первом случае – явное, во втором – со свойством (5). Следовательно, $[x_i]^* >^* [x_{i+1}]^*$.

Пусть теперь существует $[y]^*$ такой, что $[x_i]^* >^* [y]^* >^* [x_{i+1}]^*$. Значит существует асинхронный автомат T такой, что $T(x_i) = y$. Обозначим $T' = T \circ \overline{T}^{i-1}$ композицию автоматов $\overline{T}^{i-1}$ и T. Тогда для автомата T' получаем $T'(x_1) = T(\overline{T}^{i-1}(x_1)) = T(x_i) = y$. Пусть T' имеет номер k. На вход автомата T_k подадим сверхслово x_1, которое можно рассматривать как содержащее начальный блок I_k, за которым следует последовательность копий блоков $A_k^1, \ldots, A_k^{n+1}$. В силу свойства (7), $T_k(x_1)$ может лежать лишь в степенях $[x_1]^*, [x_i]^* (i = \overline{2,n}), [0]^*$. Следовательно, такого сверхслова y не существует и $[x_i]^* \succ^* [x_{i+1}]^*$ для любого $i = \overline{1,n}$.

Таким образом доказано, что для определенных выше сверхслов $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ выполнено $[x_1]^* \succ^* [x_2]^* \succ^* \ldots \succ^* [x_n]^* \succ^* [x_{n+1}]^* =^* [0]^*$, что показывает вложимость конечного линейно упорядоченного множества как начального сегмента в V^*. $\square$

4 Дополняемость вниз

В этом параграфе будет рассмотрен вопрос дополняемости степеней вверх и вниз. Вначале приведем необходимые определения.

Пусть S – произвольное частично упорядоченное множество. Элементы $p, q \in S$ называются *несравнимыми*, если не выполняется ни $p \leq q$, ни $q \leq p$. Если $p, q \in S$ несравнимы, то пишут $p|q$.

Верхней гранью элементов $p, q \in S$ называется элемент $r \in S$ такой, что $p \leq r$ и $q \leq r$. Верхняя грань r элементов p и q называется их *наименьшей верхней гранью*, если для любой другой верхней грани $s \in S$ элементов p и q выполняется $r \leq s$, то есть если $p \leq s$ и $q \leq s$, то $r \leq s$.

Аналогично вводится понятие нижней грани и наименьшей нижней грани двух элементов. *Нижней гранью* элементов $p, q \in S$ называется элемент $r \in S$ такой, что $r \leq p$ и $r \leq q$. Нижняя грань r элементов p и q называется их *наибольшей нижней гранью*, если для любой другой нижней грани $s \in S$ элементов p и q выполняется $s \leq r$, то есть если $s \leq p$ и $s \leq q$, то $s \leq r$.

В частично упорядоченном множестве S *элемент p сильно дополняем вверх до элемента q*, если существует элемент $r \in S$ такой, что q является наименьшей верхней гранью элементов p и r. Аналогично, *элемент p сильно дополняем вниз до элемента q*, если существует элемент $r \in S$ такой, что q является наибольшей нижней гранью p и r. Более слабый вариант указанных определений – понятия слабой дополняемости вверх и вниз. *Элемент p слабо дополняем вверх до элемента q*, если существует элемент $r \in S$ такой, что q является верхней гранью элементов p и r. *Элемент p слабо дополняем вниз до элемента q*, если существует элемент $r \in S$ такой, что q является нижней гранью элементов p и r. Элемент s – *слабое полное дополнение для элемента p относительно элементов q и r*, если q является нижней гранью p и s, r является верхней гранью p и s.

Из теоремы 2 третьего параграфа следует, что существуют степени $[x]^*$ и $[y]^*$ ($[x]^* >^* [y]^*$) такие, что $[y]^*$ слабо не дополняема вверх до $[x]^*$. Поэтому слабого полного дополнения для $[y]^*$ относительно указанной выше степени $[x]^*$ и любой степени $[z]^*$ ($[x]^* >^* [y]^* >^* [z]^*$) также не существует. Далее в следствии 3 получим положительный ответ на вопрос дополняемости вниз в множестве степеней асинхронно автоматных преобразований для любой пары степеней $[x]^*$ и $[y]^*$, где $[y]^* >^* [x]^*$.

Пусть $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ – сверхслова над конечными алфавитами Σ и Σ' соответственно. Обозначим через (x, y) – сверхслово над алфавитом $\Sigma \times \Sigma'$ такое, что его i–ый символ есть (x_i, y_i), то есть $(x, y) = \{(x_i, y_i)\}$.

Теорема 3. *Для любых сверхслов x и y таких, что $[0]^* <^* [x]^* <^* [y]^*$ существует сверхслово z такое, что $[z]^*|^*[x]^*$, $[z]^*|^*[y]^*$ и $[(x, z)]^*|^*[y]^*$.*

Доказательство. Поскольку каждая степень асинхронно автоматных преобразований содержит сверхслова над двухбуквенным алфавитом, то достаточно доказать теорему лишь для таких сверхслов. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Перенумеруем асинхронные инициальные автоматы (T, t_0) (с входным и выходным алфавитом Σ) и (S, s_0) (с входным алфавитом $\Sigma \times \Sigma$ и выходным алфавитом Σ).

Будем строить сверхслово z, удовлетворяя следующим требованиям:
(1) $T_i(x) \neq z$ для любого i,
(2) $T_i(z) \neq x$ для любого i,
(3) $T_i(y) \neq z$ для любого i,
(4) $S_i((x, z)) \neq y$ для любого i.

Пусть z_i – начальный сегмент сверхслова z, строящийся на i–ом шаге.

Шаг 0. $z_0 = \emptyset$.

Шаг $k + 1$. К этому шагу уже построено z_k. Пусть T_{k+1}, S_{k+1} – асинхронные инициальные автоматы с номером $k + 1$ в нашей нумерации.

Удовлетворим требованию (1) с автоматом T_{k+1}. Проверим выполнение равенства для z_k:

$$T_{k+1}(x) = z_k w,$$

где w – подходящее бесконечное (или конечное) слово.

Если $|T_{k+1}(x)| \leq |z_k|$, то полагаем $z'_{k+1} = z_k$. В противном случае, если равенство выполняется, то полагаем $z'_{k+1} = z_k a$, где a – символ, отличный от первого символа сверхслова w, если не выполняется, то $z'_{k+1} = z_k$.

Теперь удовлетворим требованию (2). Для этого проверим равенство для z'_{k+1}:

$$T_{k+1}(z'_{k+1}) = x_{k+1},$$

где x_{k+1} – префикс x подходящей длины.

Если равенство выполняется, тогда существует блок b_{k+1} некоторой длины такой, что $T_{k+1}(z'_{k+1} b_{k+1}) \neq x'_{k+1}$, где x'_{k+1} – префикс x нужной длины. Иначе, если такого b_{k+1} не существует, x – заключительно периодическое сверхслово, что противоречит условию. В этом случае полагаем $z''_{k+1} = z'_{k+1}b_{k+1}$. Если равенство не выполняется, то $z''_{k+1} = z'_{k+1}$.

Чтобы удовлетворить требованию (3), для z''_{k+1} проверяем равенство:

$$T_{k+1}(y) = z''_{k+1}w,$$

где w – подходящее бесконечное (или конечное) слово.

Если равенство выполняется, то полагаем $z'''_{k+1} = z''_{k+1}a$, где a – символ, отличный от первого символа сверхслова w. Если не выполняется, то $z'''_{k+1} = z''_{k+1}$.

Теперь удовлетворим требование (4) с автоматом S_{k+1}. Для этого для z'''_{k+1} проверяем равенство:

$$S_{k+1}((x'''_{k+1}, z'''_{k+1})) = y'''_{k+1},$$

где x'''_{k+1}, y'''_{k+1} – префиксы x и y подходящей длины, причем $|x'''_{k+1}| = |z'''_{k+1}|$.

Если равенство выполняется, тогда существует блок b_{k+1} некоторой длины такой, что $S_{k+1}(x''''_{k+1}, z'''_{k+1}b_{k+1}) \neq y''''_{k+1}$, где x''''_{k+1}, y''''_{k+1} – префиксы x, y нужной длины, причем $|x''''_{k+1}| = |z'''_{k+1}b_{k+1}|$. Иначе $[x]^* \geq^* [y]^*$, что противоречит условию. В этом случае полагаем $z_{k+1} = z'''_{k+1}b_{k+1}$. Если равенство не выполняется, то $z_{k+1} = z'''_{k+1}$.

Теперь переходим к следующему шагу.

В результате будет построено сверхслово z, асинхронно несравнимое с x в силу требований (1) и (2), асинхронно несравнимое с y, поскольку $[y]^* \not\geq^* [z]^*$ в силу (3) и $[z]^* \not\geq^* [y]^*$ (так как в противном случае, $[z]^* \geq^* [x]^*$, что невозможно). Условие $[(x,z)]^*|^*[y]^*$ выполняется в силу (4) и в силу соотношения $[y]^* \not\geq^* [(x,z)]^*$, поскольку в противном случае сверхслово z асинхронно сравнимо со сверхсловом y, что невозможно. □

Следующие два следствия теоремы 3 очевидны.

Следствие 2. *Для любого сверхслова x такого, что $[x]^* >^* [0]^*$ существует сверхслово y такое, что $[x]^*|^*[y]^*$.*

Доказательство. В качестве сверхслова y нужно взять сверхслово z из теоремы 3. □

Следствие 3. *Для любых сверхслов x и y таких, что $[x]^* <^* [y]^*$ существует сверхслово z такое, что $[z]^* >^* [x]^*$ и $[z]^*|^*[y]^*$.*

Доказательство. В качестве сверхслова z можно взять сверхслово (x,z) из теоремы 3 в случае $[x]^* > [0]^*$ или сверхслово y из следствия 2 в случае $[x]^* = [0]^*$. □

Литература

1. Байрашева В.Р. "Степени автоматных преобразований"// Вероятностные методы и кибернетика. – 1982. – № 18. – С. 17–25.

2. Байрашева В.Р. "Структурные свойства автоматных преобразований"// Известия вузов. Математика. – 1988. – № 7. – С. 34–39.

3. Корнеева Н.Н. "Степени асинхронно автоматных преобразований"// Известия вузов. Математика. – 2011. – № 3. – С. 30–40.

4. Рейна Г."Степени автоматных преобразований"// Кибернетический сборник. – 1977. – № 14. – С. 95–106.