Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому понедельнику я буду заносить материал новых лекций. Если у вас возникают какие-либо вопросы, то вы можете присылать их мне по электронной почте

volodinstudent@gmail.com

На ваши вопросы я буду отвечать вам reply’ем. В конце текста каждой лекции будут предложены задания, которые вам следует выполнить и выслать мне по почте (или, по крайней мере, сообщать, что вы “на проводе”). О том, как их выполнить я могу вам рассказать в Виртуальной Аудитории, если нажмете на слово Форум и напишите ваши вопросы.

Пока, в ближайшее время, студентам открыт доступ в университет, так что вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию для консультаций.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Лекция 4

Пуассоновские вероятностные модели

До сих пор мы изучали распределение конечного числа случайных величин $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$, заданных на едином вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, и вывод их совместного распределения сводился, по существу, к построению распределения вероятностей на произведении измеримых пространств значений этих величин (произведении борелевских прямых). Теперь мы приступаем к изучению распределений на бесконечном (возможно несчетном) произведении измеримых пространств. Допустим, что на пространстве элементарных исходов Ω задано семейство случайных величин $\{\xi_t,\, t \in T\},\ \xi_t = \xi_t(\omega)$, индексированных параметром t, который пробегает множество значений T (например, векторная случайная величина имеет $T = \{1, \ldots, n\}$). Пусть $(\mathcal{X}_t,\, \mathcal{B}_t),\ t \in T$ – измеримые пространства значений ξ_t, соответствующие каждому $t \in T$. В дальнейшем будем рассматривать только случай $\mathcal{X}_t = \mathrm{R}$ с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}_t$ подмножеств R, но для понимания конструкции распределений на бесконечномерных пространствах важно сохранить индекс t в обозначении пространств значений каждого представителя семейства $\{\xi_t,\, t \in T\}$. Это семейство называется *случайным процессом.*

Если зафиксировать некоторый элементарный исход ω_0, то получим функцию $x(t) = \xi_t(\omega_0)$ на множестве T со значениями при каждом фиксированном t в $\mathcal{X}_t$. Эта функция называется *траекторией* или реализацией процесса $\xi_t,\ t \in T$. В связи с этим понятием следует трактовать случайный процесс как случайную функцию $\xi_t = \xi(t)$, помня при этом, что вся “случайность” состоит в зависимости $\xi(t)$ от $\omega \in \Omega$, в то время как траектория $x(t)$ есть “значение” случайного процесса $\xi(t)$ при фиксированном ω. Приведем несколько примеров случайных процессов и опишем вид их траекторий.

П р и м е р 15.1 (*точечные процессы*). На телефонную станцию поступают заявки на междугородние разговоры, и при этом фиксируется время поступления заявки. В таких процессах с появлением определенных событий в случайные моменты времени обычно полагают $x(t)$ равной числу заявок, поступивших за промежуток времени $[\,0,\, t\,]$. Эти процессы служат хорошими математическими моделями при проектировании систем обслуживания (модели теории очередей), при анализе транспортных потоков на магистралях; они используются в ядерной физике, метеорной астрономии и т.п. Множество

T в данном случае – отрезок R_+ вида $[0, T]$ с возможным бесконечным значением T. Пространство $\mathfrak{X}_t$ значений случайного процесса при любом $t \in T$ совпадает с множеством неотрицательных целых чисел. Траектория имеет вид ступенчатой функции, возрастающей скачками в случайные моменты времени, и величина каждого скачка равна единице.

Пример 15.2 (*ветвящиеся процессы*). Наблюдается некоторая биологическая популяция, состоящая из особей, способных размножаться и гибнуть. Такие данные, как число потомков в определенном колене отдельной особи, численность популяции к фиксированному моменту времени t, количество погибших и новорожденных особей и т.п., составляют особый интерес для популяционной генетики, и трудно переоценить роль вероятностных моделей в изучении динамики развития биологической популяции. Аналогичные модели используются в физике элементарных частиц, особенно при изучении ядерных реакций. Пространства T и $\mathfrak{X}_t$ те же, что и в первом примере, траектории также имеют вид ступенчатых функций, но величины скачков – произвольные целые числа.

Пример 15.3 (*броуновское движение в капилляре*). Длинный тонкий капилляр наполняется жидкостью, и в середину капилляра помещается частица, диаметр которой не намного меньше диаметра капилляра. Под действием молекул жидкости частица совершает хаотические движения, и для наблюдения за ними вводится система координат: капилляр рассматривается как действительная ось R с нулем в середине капилляра. В каждый момент времени t (непрерывно) регистрируется расстояние $x(t)$ частицы от середины капилляра (естественно, $x(0) = 0$) с учетом знака (минус –слева от середины, плюс – справа). Если изобразить теперь траекторию движения частицы на плоскости в координатах $(t, x(t))$, то мы получим то, что физики называют траекторией одномерного броуновского движения. Вероятностные модели, определяющие распределения таких процессов, были предложены Винером, Эйнштейном и Смолуховским. В этом примере T – отрезок временной оси, $\mathfrak{X}_t = R$.

Пример 15.4 (*броуновское движение на плоскости.*) В центр кювета, наполненного тонким слоем жидкости, помещается частица некоторого вещества, которая, как и в предыдущем примере совершает броуновское движение, но не на прямой R, а на плоскости R^2 (центр кювета служит началом декартовой системы координат (x, y)). Траектория броуновского движения представляет собой некоторую кривую на плоскости, определяемую параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Естественно, T – отрезок времени, а $\mathfrak{X}_t = R^2$.

Пример 15.5 (*случайное поле.*) Отшлифованная поверхность металла обычно подвергается проверке на "шероховатость" , для чего она помещается под микроскоп и замеряются некоторые характеристики отклонения различных точек поверхности металла от плоского уровня. Такая шероховатая поверхность $x = x(u, v)$, где (u, v) – фиксированная система декартовых координат, трактуется как реализация *случайного поля* $\xi = \xi(u, v)$, пространство T соответствует части плоскости $R^2 = \{u, v\}$, занимаемой обрабатываемым объектом, $\mathfrak{X}_t = R$. Пример случайного поля, в котором кроме координат (u, v) пространство T включает временную ось R_+, – участок поверхности моря во время шторма.

Зададимся вопросом, какого рода события, связанные с рассмотренными случайными процессами $\xi(t)$, представляют наибольший интерес для их исследователей? В первую очередь следует обратить внимание на событие $\sup_{t\in T}\xi(t) \geqslant x_0$, а также на момент времени t, при котором процесс впервые достигнет уровня x_0. Но для того чтобы вычислять вероятности таких событий, следует ввести понятие распределения вероятностей на измеримом пространстве траекторий процесса.

Пространство траекторий трактуется как прямое произведение

$$\mathcal{X} = \prod_{t\in T} \mathcal{X}_t$$

пространств значений процесса в каждой точке $t \in T$. Подмножества этого пространства, определяемые ограничениями вида

$$a_1 < \xi(t_1) < b_1, \ldots, a_n < \xi(t_n) < b_n$$

при любом конечном n, называются *прямоугольниками.* Конечные объединения всевозможных непересекающихся прямоугольников
(изменяются как значения n, так и наборы точек $t_1, \ldots, t_n$ из T) образуют, очевидно, булеву алгебру $\mathcal{A}$. Наименьшая σ-алгебра $\mathcal{F}$, содержащая $\mathcal{A}$, является искомой σ-алгеброй на пространстве траекторий $\mathcal{X}$.

Таким образом, мы имеем измеримое пространство $(\mathcal{X},\ \mathcal{F})$, σ-алгебра $\mathcal{F}$ которого порождается полуалгеброй прямоугольников, и естественно ожидать, что задание совместных функций распределения

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n)$$

случайных величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ при любых $n = 1,\, 2, \ldots$ и любых наборах $t_1, \ldots, t_n$ однозначно определяет вероятность на σ-алгебре $\mathcal{F}$. То, что это действительно так, устанавливает знаменитая теорема А.Н. Колмогорова, положившая начало строгой математической теории случайных процессов. Заметим только, что в этой теореме накладывается естественное условие *согласованности* функций распределения: маргинальные функции распределения, соответствующие части $T_k = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}),\ k < n,$ набора индексов $t_1, \ldots, t_n$, должны совпадать с теми, что были построены для набора T_k. Впрочем, это условие соблюдается "автоматически," поскольку построение функций распределения производится при произвольных значениях ее аргументов.

Следующие два примера, играющие важную роль в практических применениях теории случайных процессов, иллюстрируют общую методологию и технические приемы, используемые при построении вероятностных моделей случайных процессов.

Пуассоновский процесс

На временной оси $T = \mathrm{R}_+$ в случайные моменты времени появляются некоторые события (см. пример 15.1), и наблюдается траектория $x(t)$ точечного случайного процесса $\xi(t)$, регистрирующая число событий, появившихся к моменту времени t. Следующие три постулата выделяют пуассоновский процесс из класса всевозможных точечных процессов.

(P1) *Однородность.* Распределение числа событий, появившихся во временном промежутке $[\,t_1,\, t_2\,]$, зависит только от длины $t_2 - t_1$ этого промежутка, то есть

$$P\left(\xi(t_2) - \xi(t_1) = x\right) = p_x(t_2 - t_1).$$

(P2) *Независимость приращений.* Для любого упорядоченного набора моментов времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины

$$\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}),\ k = 1, \ldots, n,$$

где $\xi(t_0) = X(0) = 0$, независимы в совокупности.

(P3) *Ординарность* или *разреженность.* Вероятность

$$p_x(\Delta t) = P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = x)$$

того, что за промежуток времени Δt произойдет ровно x $(= 0,\ 1, \ldots)$ событий допускает при $\Delta t \to 0$ асимптотическое представление

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t),\ p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t);\ p_x(\Delta t) = o(\Delta t),\ x \geqslant 2, .$$

В этом представлении $\lambda > 0$ – числовой параметр, называемый обычно *интенсивностью* пуассоновского потока событий (см. в связи с этим модель пуассоновского распределения в §5).

Используя постулаты (P1)–(P3), построим конечномерные распределения

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_n) = x_n)$$

пуассоновского процесса. Эти построения значительно облегчает

Лемма 15.1. *Функция* $p_x(t) = P(\xi(t) = x),\ \ t \geqslant 0,\ \ x = 0, 1, \ldots,$ *однозначно определяет все конечномерные распределения пуассоновского процесса.*

Доказательство.. Следующая цепочка равенств, в которой сначала используется постулат (P2), а потом – (P1), устанавливает соотношение между конечномерной плотностью процесса $f_{t_1,\ldots,t_n}$ и функцией $p_x(t)$:

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi(t_1) = x_1,$$

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) = x_2 - x_1, \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} P\left(\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}\right) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} P\left(\xi(t_k - t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}\right) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} p_{x_k - x_{k-1}}(t_k - t_{k-1}).$$

Естественно, все эти выкладки имеют смысл лишь при

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Вид функции $p_x(t)$, а вместе с ним и конечномерные распределения процесса Пуассона, устанавливает

Теорема 15.1. *Если справедливы постулаты* (P1)–(P3), *то*

$$p_x(t) = P(\xi(t) = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad t \geqslant 0, \ \ x = 0,\, 1, \ldots . \tag{1}$$

Доказательство. Покажем сначала, что (1) выполняется в случае $x = 0$, для чего исследуем асимптотику при $\Delta t \to 0$ функции $p_0(t + \Delta t) = P(\xi(t + \Delta t) = 0)$.

Событие $\xi(t + \Delta t) = 0$ эквивалентно одновременному осуществлению двух независимых (в силу постулата (P2)) событий: $\xi(t) = 0$ и $\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = 0$. Используя постулаты (P1) и (P3), находим, что

$$p_0(t + \Delta t) = P(\xi(t) = 0) \cdot P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = 0) =$$

$$p_0(t) \cdot p_0(\Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)).$$

Если полученное асимптотическое представление записать в виде

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + o(1)$$

и устремить Δt к нулю, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

с очевидным начальным условием $p_0(0) = 1$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решение которого с учетом начальных условий

$$p_0(t) = e^{-\lambda t},$$

что совпадает с (1) при $x = 0$.

Проведем аналогичные построения для произвольного целого $x \geqslant 1$, для чего представим событие $\xi(t + \Delta t) = x$ в виде объединения $x + 1$ несовместных событий

$$\{\xi(t) = x - k\} \bigcap \{\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = k\}, \ k = 0,\, 1, \ldots, x.$$

Используя, как и выше, постулаты (P1)–(P3), получаем

$$p_x(t + \Delta t) = P(\xi(t + \Delta t) = x) =$$

$$\sum_{k=0}^{x} P(\xi(t) = x - k, \ \xi(t + \Delta t) - \xi(t) = k) =$$

$$\sum_{k=0}^{x} P(\xi(t) = x - k) \cdot P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = k) =$$

$$\sum_{k=0}^{x} p_{x-k}(t) \cdot p_k(\Delta t) = p_x(t)(1-\lambda\Delta t) + p_{x-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Если представить полученное соотношение в виде

$$\frac{p_x(t+\Delta t) - p_x(t)}{\Delta t} = -\lambda \left(p_x(t) - p_{x-1}(t) \right) + o(1)$$

и устремить Δt к нулю, то получим рекурентную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -\lambda \left(p_x(t) - p_{x-1}(t) \right), \quad p_x(0) = 0, \quad x = 1,\, 2, \ldots$$

Поскольку выше мы определили $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, то для $p_1(t)$ имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda \left(p_1(t) - e^{-\lambda t} \right), \quad p_1(0) = 0,$$

решение которого стандартными методами дает

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t},$$

что опять совпадает с (1) при $x = 1$.

Дальнейшее построение модели осуществляется по индукции.
Предполагается, что (1) справедливо для некоторого $x \geqslant 2$, и решается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_{x+1}(t)}{dt} = -\lambda \left(p_{x+1}(t) - \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \right), \quad p_{x+1}(0) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что решение этого уравнения с учетом начального условия определяется формулой (1) с заменой x на $x+1$. Таким образом, построение вероятностной модели пуассоновского процесса завершено.

Интересно заметить, что формула (1) при $t = 1$ дает функцию плотности распределения Пуассона $\mathrm{P}(\lambda)$, так что (1) можно трактовать как обобщение теоремы сложения для распределения Пуассона на случай “дробного” числа слагаемых, по существу же происходит простое суммирование числа событий по всем t единицам времени.

Контрольные вопросы.

1. Эта лекция имела целью познакомить вас с новым классом вероятностный моделей, где наблюдаются не числовые случайные величины, а случайные функции – траектории случайных процессов. Задачи по статистической идентификации таких моделей в нашем специальном курсе рассматриваться не будут, для этого существует особый специальный курс, который вы можете посещать. В качестве контрольного вопроса я хотел бы предложить вам в некотором смысле “литературную” задачу: укажите новые реальные природные объекты типа тех, что приведены в Примерах 15.1-15.5.