ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ: РЕЗУЛЬТАТЫ ВТОРОГО ЭТАПА

А.А.ЗАГИДУЛЛИН [1], Н.К. ПЕТРОВА [1,2], В.С.УСАНИН [1], Ю.А .НЕФЕДЬЕВ [1], М.В.ГЛУШКОВ [1]

[1]Казанский Федеральный Университет , *arhtur.zagidullin@ya.ru*

[2]Казанский Государственный Энергетический Университет

1. Постановка задачи

Разрабатывается численный подход к решению задачи о физической либрации Луны. *Целями исследования являются:* **1.** Ввести параметры для описания положения тела Луны в пространстве. **2**. Получить динамические уравнения, описывающие факторы, вызывающие ФЛЛ. **3**. Получить выражения для потенциала Луны в рамках главной проблемы. **4**. Разработать численный интегратор для решения полученных уравнений **5**. Сравнить результаты с аналогичным аналитическим решением.

2. «Главная проблема Луны»

Физическая либрация Луны (далее ФЛЛ) – это малые колебания относительно равномерного вращения (по законам Кассини). Под главной проблемой задачи понимают следующие условия:

1. Орбита Луны задается теорией движения, разработанной в рамках теория Брауна – Шмидта [1], при этом орбитальная и вращательная задачи рассматриваются независимо друг от друга.

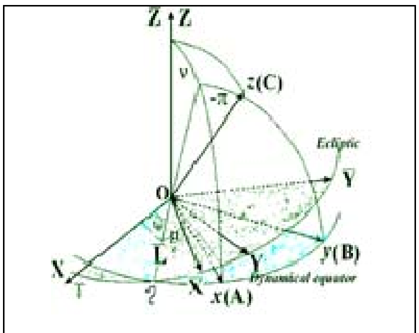


Рис 1. Показаны эклиптическая и динамическая СК, самолетные углы

2. Тело Луны представляет собой абсолютно твердое тело, описываемое в разложении потенциала 2-й и 3-й гармоникой.

3. В качестве возмущающих функций рассматриваются точечные Земля и Солнце.

3. Система уравнений Гамильтона для ФЛЛ

В качестве канонических углов для построения системы уравнений Гамильтона выбираются самолетные углы μ ν π, определяющие положение тела Луны относительно «инерциальной» системы отсчета. В нашем случае – это эклиптическая система эпохи J2000 (рис 1). Вращение луны рассматривается в динамической системе координат (ДКС) с началом в центре масс Луны и осями, сонаправленными с главными осями инерции (A<B<C). Задача – реализовать переход от инерциальной СК к динамической СК. Для этого нами были получены кинематические уравнения для углов либрации **μ ν π.** В качестве канонических углов мы берем: $q_1 = \mu,\ q_2 = \nu,\ q_3 = \pi$

$$\underset{DCS}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = R_x(-\pi)\cdot R_y(\nu)\cdot R_z(\mu + L)\underset{Ecliptic}{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}$$

$$\Omega_x = -\dot{\mu}\times\sin\nu - \dot{\pi}$$

$$\Omega_y = -\dot{\mu}\times\cos\nu\times\sin\pi + \dot{\nu}\times\cos\pi$$

$$\Omega_z = \dot{\mu}\times\cos\nu\times\cos\pi + \dot{\nu}\times\sin\pi$$

Тогда выражение для кинетической энергии системы можно записать в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2}\left[(1+k_2)\cdot p_3^2 + (1+k_1)\cdot\left(p_2\cdot Cos(q_3) - Sec(q_2)(n + p_1 - p_3\cdot Sin(q_2))\cdot Sin(q_3)\right)^2\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[p_2\cdot Sin(q_3) + Cos(q_3)\cdot\left((n+p_1)Sec(q_2) - p_3 Tan(q_2)\right)\right]^2$$

В силу аддитивности силовой функции, можно записать ее следующим образом: $U = U_{2\ earth} + U_{2\ sun} + U_{3\ earth} + \ldots$

Тогда уравнения Гамильтона: $\dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$ $\qquad H = T + U$

После некоторых выкладок можно получить полную нелинейную систему Гамильтона для углов физической либрации Луны:

$$\frac{dq_1}{dt}=n\cdot Tan^2(q_2)+\frac{Cos^2(q_3)\cdot p_1}{Cos^2(q_2)}-k_1\frac{p_2\cdot Cos(q_3)\cdot Sin(q_3)}{Cos(q_2)}+k_1\cdot n\frac{Sin^2(q_3)}{Cos^2(q_2)}+p_1\frac{Sin^2(q_3)}{Cos^2(q_2)}+k_1\cdot p_1\frac{Sin^2(q_3)}{Cos^2(q_3)}-$$
$$-p_3\frac{Cos^2(q_3)\cdot Tan(q_2)}{Cos(q_2)}-p_3\frac{Sin^2(q_3)\cdot Tan(q_2)}{Cos(q_2)}-k_1\cdot p_3\frac{Sin^2(q_3)\cdot Tan(q_2)}{Cos(q_2)}$$

$$\frac{dq_2}{dt}=(1+k_1)p_2Cos^2(q_3)-k_1Cos(q_3)Sec(q_2)(n+p_1-p_3Sin(q_2))Sin(q_3)+p_2Sin^2(q_3)$$

$$\frac{dq_3}{dt}=\frac{1}{2}\left(2(1+k_2)p_3+2(1+k_1)Sin(q_3)(p_2Cos(q_3)-Sec(q_2)[n+p_1-p_3Sin(q_2)]Sin(q_3))Tan(q_2)\right)-$$
$$-Cos(q_3)Tan(q_2)[p_2Sin(q_3)+Cos(q_3)((n+p_1)Sec(q_2)-p_3Tan(q_2))]$$

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{dU}{dq_1}$$

$$\frac{dp_2}{dt}=\frac{dU}{dq_2}-(1+k_1)Sec^2(q_2)(p_3-(n+p_1)Sin(q_2))Sin(q_3)(p_2Cos(q_3)-Sec(q_2)(n+p_1-p_3Sin(q_2))Sin(q_3))-$$
$$-Cos(q_3)Sec(q_2)(-p_3Sec(q_2)+(n+p_1)Tan(q_2))(p_2Sin(q_3)+Cos(q_3)((n+p_1)Sec(q_2)-p_3Tan(q_2)))$$

$$\frac{dp_3}{dt}=\frac{dU}{dq_3}+k_1(p_2Cos(q_3)-Sec(q_2)(n+p_1-p_3Sin(q_2))Sin(q_3))(p_2Sin(q_3)+Cos(q_3)((n+p_1)Sec(q_2)-p_3Tan(q_2)))$$

4. Потенциал. Сравнение гармоник

Для получения потенциала введем следующие обозначения для направляющих косинусов радиуса вектора Земли или Солнца. Используя рисунок 2, выразим направляющие косинусы через сферический треугольник АОВ ОА $=u_1$, ОВ$=u_3$, $u_2=\sqrt{1-u_1^2-u_3^2}$

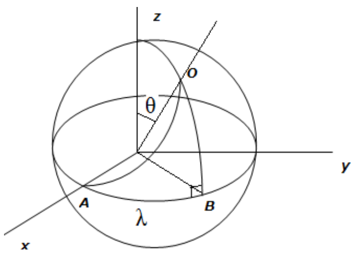


Рис 2 К выводу гармоник Луны

В результате громоздких вычислений получен окончательный вид для гармоник в разложении селенопоенциала в ряд по сферическим функциям:

$$U_2=\frac{3}{2}\frac{GM_e}{a^3{}_{L-E}}\left(\frac{a_{L-E}}{\rho}\right)^{3}\left[(C-A)u_1^2-(B-C)u_2^2\right] \qquad \tilde{n}_{20}=\frac{1}{Ma^2}\left(\frac{A+B}{2}-C\right)$$

$$U_{2sun}=\frac{3}{2}\frac{GM_e}{a^3{}_{L-S}}\left(\frac{a_{L-S}}{\rho}\right)^3\left[(C-A)u_1^2-(B-C)u_2^2\right] \qquad \tilde{n}_{22}=\frac{1}{4Ma^2}(B-A)$$

$$U_3=-\frac{3}{2}\frac{GM_e}{a^2{}_{L-E}}M_m a_{radius}\frac{a_{radius}}{a_{L-E}}\left(\frac{a_{L-E}}{\rho}\right)^4\left[\begin{array}{l} c_{31}u_1+s_{31}u_2+c_{30}u_3+10s_{33}u_2^3-\frac{5}{3}c_{30}u_3^3-10c_{33}u_1^3 \\ -5c_{31}u_1u_3^2-10c_{32}u_1^2u_3-20s_{32}u_1u_2u_3-5s_{31}u_2u_3^2+ \\ +30c_{33}u_1u_2^2-30s_{33}u_1^2u_2+10c_{32}u_2^2u_3 \end{array}\right]\frac{GM_e}{a^3}$$

Заметим, что величина вычисляется на основе уточненного третьего закона Кеплера

$$\frac{GM_e}{a^3} = n^2\left(1 + \frac{n'^2}{2n^2}\right)\frac{M_e}{M_e + M_m}$$

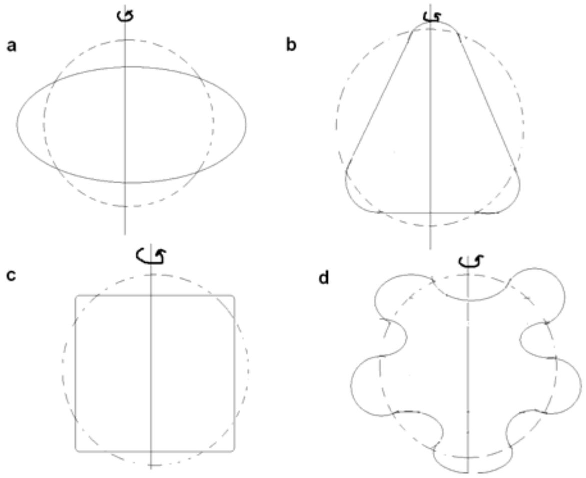


Рис 3. Зональные гармоники

Рассматривая гармоники разных степеней (рис 3, приведены только зональные компоненты), a – сжатие, b – грушевидность, c – квадратная, d – пятилепестковая, можно заметить на одну особенность.

Одним из первых, кто указал на особенность связанную с третьей гармоникой, был Хабибуллин Ш.Т [2]: Третья гармоника селенопотенциала вызывает постоянное смещение оси направленной на среднее положении Земли, и таким образом существенно влияет только в либрации в долготе. Приведем сравнение гармоник разной степени нормированную на 2-ю гармонику:

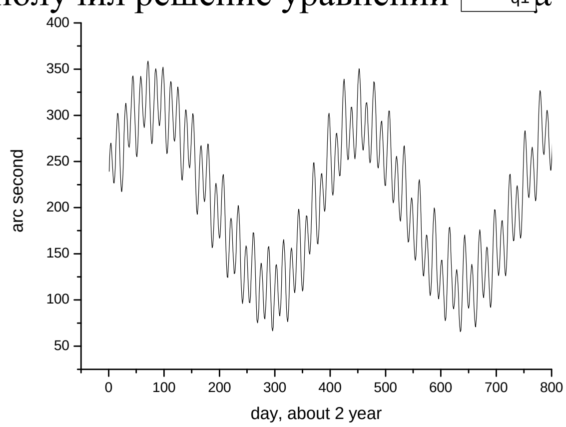
$$\frac{U_2^S}{U_2} \sim 6\cdot 10^{-3} \quad \frac{U_3^S}{U_2} \sim 4\cdot 10^{-9} \quad \frac{U_2^V}{U_2} \sim 6\cdot 10^{-7}$$

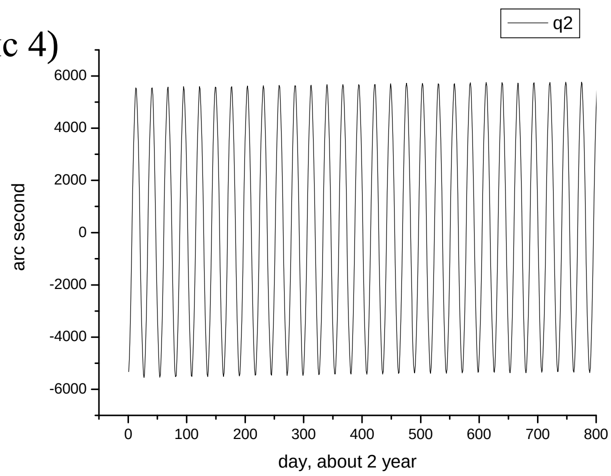
$$\frac{U_3}{U_2} \sim 3\cdot 10^{-4} \quad \frac{U_4}{U_2} \sim 3\cdot 10^{-6} \quad \frac{U_5}{U_2} \sim 2\cdot 10^{-8}$$

В соответствии с приведенными оценками, понятно, что в первую очередь (в рамках главной проблемы) необходимо учитывать взаимодействие Луны, описываемой второй и третьей гармоникой с Землей и Солнцем, которые рассматриваются как гравитационные точки. Этими условиями и определяются рамки главной проблемы.

5. Решение ФЛЛ (на 2 года)

Построив численный алгоритм на основе метода Рунге Кута 10 порядка [3], мы получил решение уравнений μ ν π (рис 4)





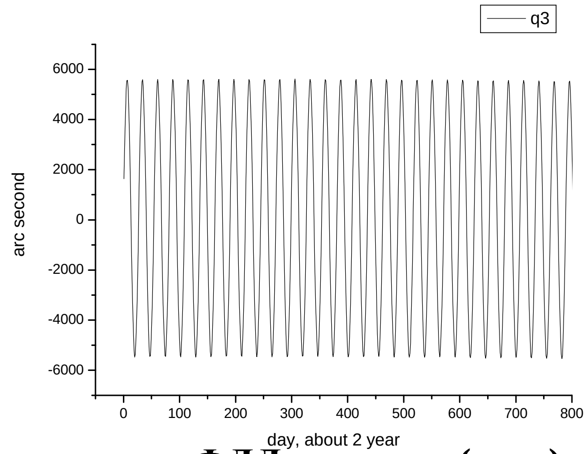
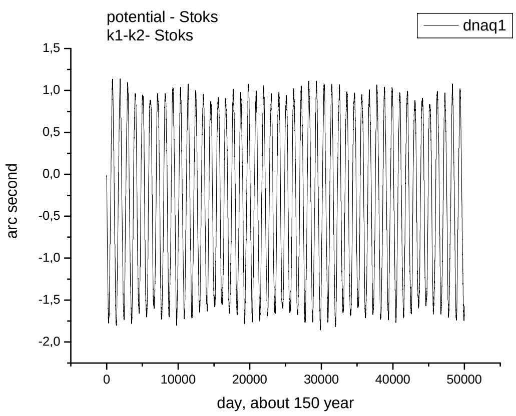


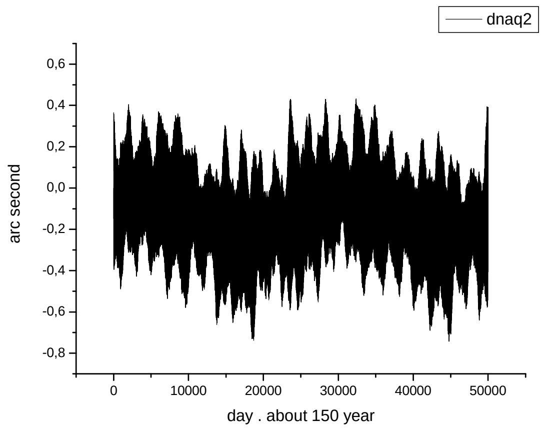
Рис 4. Приведено решение ФЛЛ в долготе (q_1, q_2) и широте (q_3)

Представленные графики показывают, что решение носит периодический характер, для q_1 имеется постоянный сдвиг вследствие действия U_3, имеется лидирующая частота F для q_2 и q_3 в соответствии с кинематикой движения.

6. Анализ результатов

Мы сравнили наши численные результаты с аналитической теорией Петровой (1996) [4], отличие только в том, что уравнения Гамильтона и компоненты селенопотенциала разложены до 4го порядка по малых углам в аналитической работе. А также сравнили направляющие косинусы полюса эклиптики с аналогичными из работы Рамбо и Вильямса [5] (2011год, теория основана на DE421, для выявления амплитуд и частот используется фитирование ЛЛЛ).





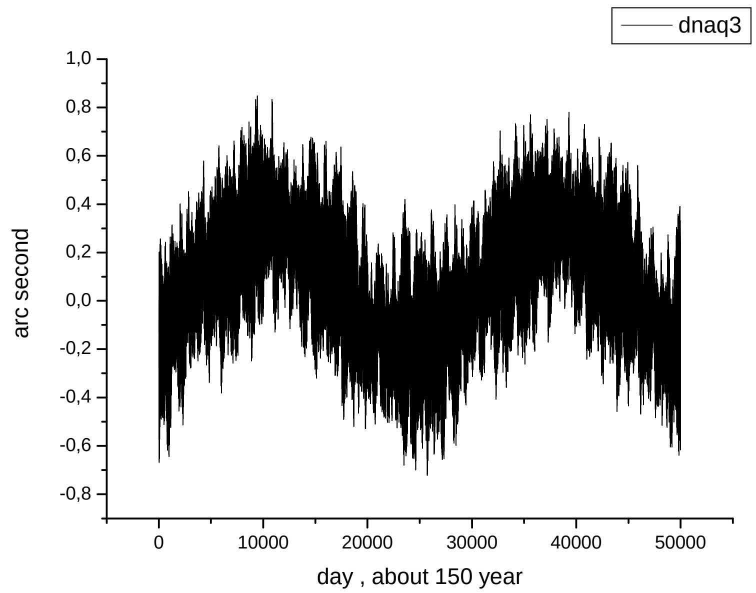


Рис 5. Остаточные разности (Численное минус аналитическое решение)

На рис 5, показаны остаточные разности решений на интервале около 150 лет по сравнению с аналитической работы Н.К. Петровой. Амплитуда в долготе ограничена по модулю величиной 1.7 угловой секунды, а амплитуда в широте 0.7 угловой секунды на всем интервале интегрирования. Полученные границы остаточной разностей намного больше величины самой большой компоненты в ФЛЛ. Для выявления причины столь большой амплитуды, рассмотрим периодограмму Шустера (рис 6). На периодограмме показаны следующие периоды около 3 лет для долготы, около месяца и 68 лет для широты. Полученные периоды являются резонансными. Наличие этих периодов вызывают малые делители при аналитическом решении. Таким образом, полученная амплитуда остаточных разностей зависит каким образом находилось решение для близких к резонансным частотам в аналитической работе Н.К. Петровой.

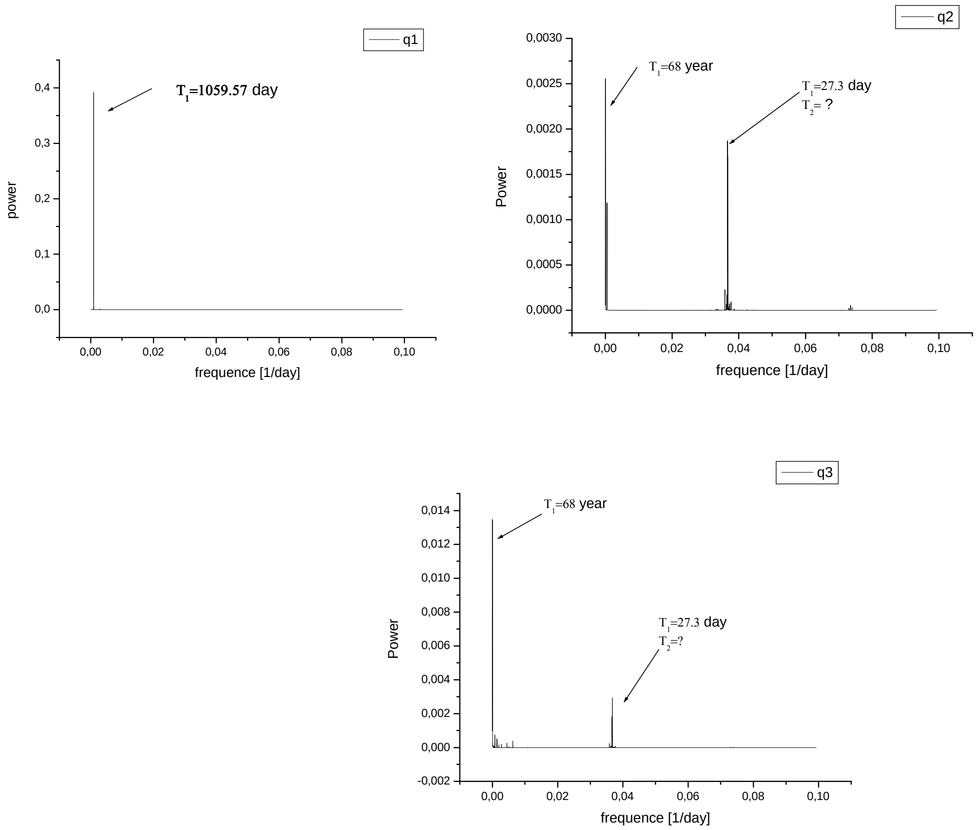


Рис 6. Периодограмма Шустера для остаточных разностей

Построив остаточные разности с рядами Рамбо и Вильямса, мы получаем величину амплитуды примерно в 10 раз больше, чем при сравнении с Данными Петровой. Столь большая амплитуда зависит от многих факторов: 1. Используемые постоянные 2. Большее количество гармоник 3. Внутренняя структура 4. Учет планет и другие факторы. Поэтому на данном этапе адекватное сравнение решения «главной проблемы» с данными Рамбо и Вильямса не может быть реализовано.

7 Выводы.

В представленной работе построено полное решение задачи физической либрации Луны в рамках «главной проблемы». Решение получено численным способом на основе метода Рунге Кутта 10 порядка. Внутренняя точность метода составляет 10^{-10} угловой секунды на интервале 27 лет. Сравнение с аналитическими рядами ФЛЛ Петровой показало различие на резонансных частотах, причина которого кроется, скорее всего, в нерешенных проблемах аналитического решения. В результате, амплитуда по модулю в долготе остаточных разностей составляет 1.7, а в широте 0.7 угловой секунды. Аналогичные выводу по поводу амплитуды остаточных разностей, делает Ерошкиным [6], что является независимым подтверждением правильности полученных нами результатов.

8 Литература

[1] Schmidt, D. S. The main problem of lunar theory solved by the method of Brown, 1980, Moon and the Planets, vol. 23, p. 135-164.

[2]Хабибуллин Ш.Т. Развитие теории физической либрации Луны и селеноцентрические системы координат, 1998, Кинематика и физика небесных тел т.4, N1, p 35-42

[3] Hairer E.: A Runge-Kutta Method of Order 10, 1978, J. Inst. Maths Applics 21, p 47-59

[4] Petrova N Analytical extension of lunar libration tables, 1996, Earth, Moon and planets v 73,p 71-99

[5] Rambaux N , Williams J. G. The Moon’s physical librations and determination of their free modes,2011, Celest Mech Dyn Astr , v109,p 85–100

[6] Eroshkin G.I Comparison of a Numerical Model of the Physical Libration of the moon with two Semi-Analytical ones, 1986, Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets.