Элементы комбинаторики

Салимов Рустем Фаридович

КФУ — ИБ

2023

Комбинация 2 групп

Пусть имеется k_1 объектов $t_1, t_2, \ldots, t_{k1}$, принадлежащих к группе объектов T и k_2 объектов $s_1, s_2, \ldots, s_{k2}$, принадлежащих к группе объектов S. Комбинацией элементов из T и S называется произвольный набор объектов $(t_i, s_j), i = 1, \ldots, k_1, j = 1, \ldots, k_2$. Множество всех возможных комбинаций элементов из T и S визуально можно представить в виде таблицы:

$$\begin{array}{cccc}
(t_1, s_1), & (t_1, s_2), & \cdots & (t_1, s_{k2}) \\
(t_2, s_1), & (t_2, s_2), & \cdots & (t_2, s_{k2}) \\
 & & \cdots & \\
(t_{k1}, s_1), & (t_{k1}, s_2), & \cdots & (t_{k1}, s_{k2})
\end{array}$$

Таким образом, у нас есть k_1 строчек, в каждой из которой содержится k_2 комбинаций. Поэтому общее количество комбинаций элементов из групп T и S равно $k_1 \cdot k_2$.

Комбинация l групп

Пусть у нас имеются группы объектов $T_1, T_2, \ldots, T_l$, причем группа T_i содержит k_i элементов, $i = 1, \ldots, l$. Комбинацией элементов из групп $T_1, T_2, \ldots, T_l$ называется набор $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, где $a_1 \in T_1, \ldots, a_l \in T_l$.

Сколько различных комбинаций из l групп $T_1, T_2, \ldots, T_l$ мы можем составить?

Комбинация l групп

Пусть у нас имеются группы объектов $T_1, T_2, \ldots, T_l$, причем группа T_i содержит k_i элементов, $i = 1, \ldots, l$. Комбинацией элементов из групп $T_1, T_2, \ldots, T_l$ называется набор $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, где $a_1 \in T_1, \ldots, a_l \in T_l$.

Сколько различных комбинаций из l групп $T_1, T_2, \ldots, T_l$ мы можем составить?

Так как для случая $l = 2$ количество комбинаций равно $k_1 \cdot k_2$, то, используя математическую индукцию, легко показать, что количество комбинаций из l групп равно $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_l$.
Отсюда, в частности, следует, что если $T_1 = T_2 = \ldots = T_l$ и $|T_1| = |T_2| = \ldots = |T_l| = k$, то количество комбинаций из этих совпадающих групп равно k^l.

Пример

Задача. У короля есть 100 мешков с золотыми монетами, в каждом из которых находится ровно 100 монет. Королевский казначей взял из каждого мешка по одной монете, подложив вместо нее фальшивую монету. Король решил проверить состояние своих мешков и взял для проверки наугад из каждого мешка по одной монете. Какова вероятность того, что король обнаружит подмену?

Пример

Задача. У короля есть 100 мешков с золотыми монетами, в каждом из которых находится ровно 100 монет. Королевский казначей взял из каждого мешка по одной монете, подложив вместо нее фальшивую монету. Король решил проверить состояние своих мешков и взял для проверки наугад из каждого мешка по одной монете. Какова вероятность того, что король обнаружит подмену?

Решение: Случайный эксперимент состоит в том, что король выбирает наугад комбинацию монет из 100 мешков. Пространство элементарных событий $Omega$ состоит из всевозможных комбинаций монет. Так как в каждом мешке 100 монет, то количество исходов равно $n(\Omega) = 100^{100.}$

Пример

Продолжение решения: Обозначим через A событие, что хотя бы одна из монет в выбранной комбинации окажется фальшивой. Оказывается проще вычислить вероятность дополнительного события $\overline{A}$, состоящего в том, что в выбранной комбинации все монеты являются золотыми. Поскольку в каждом мешке 99 золотых монет, то количество исходов в $\overline{A}$ равно количеству комбинаций из золотых монет каждого мешка, т.е. $n(\overline{A}) = 99^{100}$.
Следовательно,

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{99^{100}}{100^{100}} = (\frac{99}{100})^{100} = (1 - \frac{1}{100})^{100} \approx e^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались замечательным пределом $\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{x}{m})^m = e^x$. Отсюда

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \approx 1 - \frac{1}{e} = 0.632.$$

Вероятность того, что король обнаружит подмену, достаточна велика.

Выбор с возвращением

Предположим теперь, что у нас есть группа различных предметов $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Мы выбираем случайным образом *последовательно* r предметов из этой группы, фиксируем результат выбора и возвращаем предметы обратно. Результат всего эксперимента (элементарный исход) может быть записан как комбинация (вектор) $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ r объектов из A.
Количество различных комбинаций (исходов этого эксперимента) равно n^r, поскольку мы каждый раз выбираем элементы из одной и той же группы A. Такой эксперимент называют **выбором с возвращением**.

Выбор без возвращения. Размещения

Теперь предположим, что случайно последовательно выбирается r предметов из группы A, но они не возвращаются обратно. Тогда результат эксперимента может быть записан как *упорядоченный* набор различных предметов $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$, причем 1-ый элемент мы выбираем n способами, 2-ой - $(n-1)$ способами, ..., r-ый — $(n-r+1)$ способами. Упорядоченный набор r предметов из группы A , $0 \leqslant r \leqslant n$, называется r-элементным размещением. Такой эксперимент называется выбором без возвращения. Количество r-элементных размещений из n предметов называется **числом размещений** из n элементов по r и обозначается A_n^r :

$$A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{1}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$.
Если $r = n$, то размещение называется перестановкой из n различных элементов. В этом случае число размещений A_n^n называется еще **числом перестановок** из n элементов: $A_n^n = n!$ (напомним, что $0! = 1$).

Пример

Задача. Трое друзей, заранее не договариваясь и не видя друг друга, садятся в одну и ту же электричку, состоящую из 10 вагонов. Каждый из друзей равновероятно может выбрать любой из 10-ти вагонов. Какова вероятность того, что хотя бы двое из друзей сядут в один и тот же вагон?

Пример

Задача. Трое друзей, заранее не договариваясь и не видя друг друга, садятся в одну и ту же электричку, состоящую из 10 вагонов. Каждый из друзей равновероятно может выбрать любой из 10-ти вагонов. Какова вероятность того, что хотя бы двое из друзей сядут в один и тот же вагон?

Решение. Исход данного случайного эксперимента можно записать как (i_1, i_2, i_3), где i_k — номер вагона, выбранного k-ым студентом, $k = 1, 2, 3$. Так как номера вагонов могут меняться в диапазоне от 1 до 10, то количество исходов равно 10^3. Пусть событие A означает, что хотя бы двое друзей встретятся в одном вагоне. Проще вычислить вероятность события $\overline{A}$, которое означает, что все друзья выбрали разные вагоны. Количество исходов в $\overline{A}$ равно $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$.
Тогда $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1000} = 0,72$. Следовательно, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 0,28$.

Предположим теперь, что нам нужно выбрать r предметов из n различных предметов, причем порядок не важен. Другими словами, мы выбираем какое-то подмножество из r элементов. Неупорядоченная выборка r из n различных элементов называется сочетанием r элементов из n, а количество различных неупорядоченных выборок r элементов из n называется числом сочетаний и обозначается C_n^r.

Предположим, что мы выбрали неупорядоченную группу из r элементов. Мы можем $r!$ способами расставить эти элементы по порядку. Таким образом, из одной неупорядоченной выборки мы можем получить $r!$ упорядоченных выборок. Следовательно, $A_n^r = r!C_n^r$. Отсюда

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}. \tag{2}$$

Пример

Задача. За один день предприятие изготавливает n изделий. Из этой партии случайным образом выбирается r изделий и, если все они проходят проверку отдела контроля качества, то вся партия из n изделий принимается. В противном случае вся партия отвергается. Известно, что в партии есть k бракованных изделий. Какова вероятность того, что партия будет принята?

Пример

Задача. За один день предприятие изготавливает n изделий. Из этой партии случайным образом выбирается r изделий и, если все они проходят проверку отдела контроля качества, то вся партия из n изделий принимается. В противном случае вся партия отвергается. Известно, что в партии есть k бракованных изделий. Какова вероятность того, что партия будет принята?

Решение. Количество исходов в этом эксперименте равно количеству r-элементных подмножеств, т.е. равно C_n^r. Для того, чтобы партия была принята, необходимо, чтобы в подгруппе выбранных для контроля элементов находились только качественные изделия. Число таких подгрупп равно C_{n-k}^r. Следовательно, вероятность того, что партия будет принята, равна

$$\frac{C_{n-k}^r}{C_n^r} = \frac{(n-k)!(n-r)!}{n!(n-k-r)!}.$$

Парадокс

Задача о днях рождения. Какова вероятность того, что в группе из n людей найдутся хотя бы два человека, родившихся в один и тот же день года?

Парадокс

Задача о днях рождения. Какова вероятность того, что в группе из n людей найдутся хотя бы два человека, родившихся в один и тот же день года?

Решение. Поскольку о данной группе людей ничего заранее не известно, естественно считать, что пространство элементарных событий Ω состоит из последовательностей $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, где i_j — день рождения j-го человека. Поскольку $i_1, i_2, \dots, i_n$ могут принимать любые значения от 1 до 365, то количество всех исходов равно $|\Omega| = 365^n$. Естественно считать, что все исходы равновероятны.

Пусть A — событие, состоящее в том, что в группе найдутся два человека, родившиеся в один и тот же день. Количество исходов в обратном событии $\overline{A}$

$$n(\overline{A}) = A_{365}^n = \frac{365!}{(365-n)!},$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}\frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

Численный счет показывает, что уже при $n = 23$ $\mathbb{P}(A) \approx 0,508 > 0,5$ и далее, при увеличении n вероятность $\mathbb{P}(A)$ только растет. При $n = 80$ $\mathbb{P}(A) > 0,999$.