1. МКЭ для двумерных эллиптических задач

Метод конечных элементов решения краевой задачи состоит из 3-х этапов:

1. Формулировка задачи в обобщенном виде, определение форм a, f, множеств решений V и тестовых функций V^0;
2. Определение пространства конечных элементов S_h — аппроксимации пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и на его основе – аппроксимации множеств решений и тестовых функций;
3. Формирование и решение конечномерных задач.

Первые два этапа мы рассмотрели ранее. Рассмотрим третий этап на примере модельной задачи Дирихле в многоугольной области.

1. Исходная краевая задача. В многоугольной области $\Omega \subset R^2$ с границей Γ рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида

$$-\nabla \cdot (\, c\,\nabla u) + a\,u = f, \quad x \in \Omega. \tag{0.1}$$

Здесь скалярные функции c, a, f предполагаются заданными функциями переменной $x = (x_1, x_2)$; функция $u = u(x)$ — подлежит определению. Уравнение (0.1) дополним условием Дирихле

$$u(x) = u^D(x), \quad x \in \Gamma. \tag{0.2}$$

Будем предполагать, что коэффициенты исходного уравнения удовлетворяют следующим ограничениям при всех $x \in \overline{\Omega}$:

$$\alpha \leqslant c(x) \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant a(x) \leqslant \beta, \quad \alpha, \beta = \mathrm{const} > 0. \tag{0.3}$$

2. Обобщенное решение задачи. Стандартную норму в $H^1(\Omega)$ обозначим через $\|\cdot\|_1$:

$$\|u\|_1 = \Big(\int_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2) dx\Big)^{1/2}. \tag{0.4}$$

Определим следующие подмножества $H^1(\Omega)$:

$$V = \{u \in H^1(\Omega) :\, u(x) = u^D(x),\ x \in \Gamma\},$$

$$V^0 = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) :\ v(x) = 0,\ x \in \Gamma\}.$$

Отметим, что решение исходной задачи принадлежит множеству V, на пространстве V^0 следующая норма эквивалентна норме $\|\cdot\|_1$:

$$|u|_1 = \Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}. \tag{0.5}$$

Обобщенное решение краевой задачи (0.1), (0.2) определяется следующим образом (проверьте!): *найти функцию $u \in V$ такую, что*

$$a(u,v) = \int_\Omega (c\nabla u\cdot\nabla v + auv)\ dx = \int_\Omega fv\, dx = f(v) \quad \forall\, v \in V^0. \tag{0.6}$$

При условиях (0.3), с использованием неравенства Фридрихса, нами были установлены следующие свойства форм a и f:

$$a(v,v) \geqslant \alpha\, |v|_1^2, \quad \forall\, v \in V^0, \tag{0.7}$$

$$|a(u,v)| \leqslant \gamma\, \|u\|_1\, |v|_1, \quad \forall\, u \in H^1(\Omega), v \in V^0, \tag{0.8}$$

$$|f(v)| \leqslant C\, |v|_1, \quad \forall\, v \in V^0, \tag{0.9}$$

где γ, C — постоянные, зависящие лишь от α, β и области Ω.

Этих свойств достаточно для существования и единственности решения задачи (0.6) (это доказывается с использованием теоремы Лакса-Мильграма).

3. Пространство конечных элементов. Пусть задано достаточно малое $h > 0$. Определим разбиение области Ω на совокупность треугольников максимального диаметра h так, что два любых треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют общую сторону, либо — общую вершину. Треугольники разбиения будем называть *конечными элементами*, а их совокупность — *триангуляцией* области и обозначать через T_h (см. рис. 1). Поскольку область Ω многоугольная, то триангуляция является точной, т.е., если Ω_h есть объединение всех элементов из T_h, то $\Omega_h = \Omega$ (область целиком покрывается конечными элементами).

Под ω_h будем понимать множество всех вершин конечных элементов и называть сеткой узлов на $\overline{\Omega}$; под γ_h — множество узлов из ω_h, лежащих на Γ. На основе триангуляции T_h определим пространство конечных элементов (аппроксимацию $H^1(\Omega)$) следующим образом:

$$S_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) :\ v\big|_\tau \in P_1 \ \ \forall\, \tau \in T_h\},$$

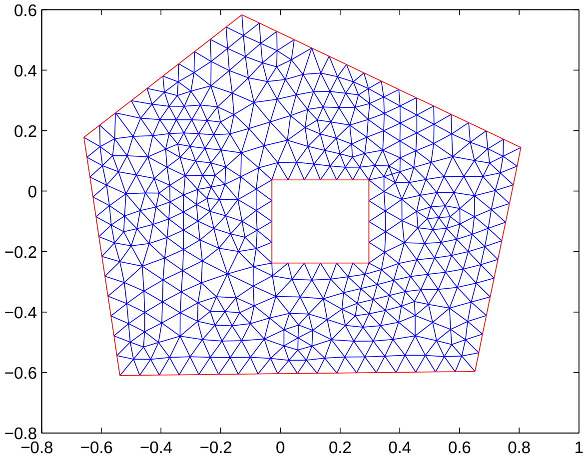

Рис. 1. Пример триангуляции многоугольной двусвязной области.

а также аппроксимации множества функций V и пространства V^0:

$$V_h = \{u_h \in S_h : u_h(x) = u^D(x),\ x \in \gamma_h\},$$
$$V_h^0 = \{v_h \in S_h : v_h(x) = 0,\ x \in \gamma_h\}.$$

Здесь $P_1 = \{p : p = c_1 + c_2x_1 + c_3x_2,\ c_i \in R\}$ — множество полиномов степени не выше первого.

Отметим, что функции из V_h^0 обращаются в нуль на Γ.

4. Схема МКЭ. *Приближенным решением задачи* (0.1), (0.2) *по методу конечных элементов называется функция* $u_h \in V_h$, *удовлетворяющая тождеству*

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h^0. \tag{0.10}$$

Теорема 1. *Решение задачи* (0.10) *существует и единственно.*

Доказательство. Задача (0.10) эквивалентна системе алгебраических уравнений. Поэтому существование ее решения следует из единственности решения, что доказывается от противного. Пусть имеется другое решения $\bar{u}_h$ задачи (0.10). Тогда разность $z_h = u_h - \bar{u}_h \in V_h^0$ удовлетворяет тождеству $a(z_h, v_h) = 0\ \forall\, v_h \in V_h^0$. Отсюда следует в силу (0.7): $\alpha\, \|z_h\|_1^2 \leqslant a(z_h, z_h) = 0$, т.е. $z_h = 0$ и $u_h = \bar{u}_h$. $\square$

5. Система алгебраических уравнений МКЭ. Для того, чтобы найти из тождества (0.10) решение u_h, необходимо выбрать базис в S_h.

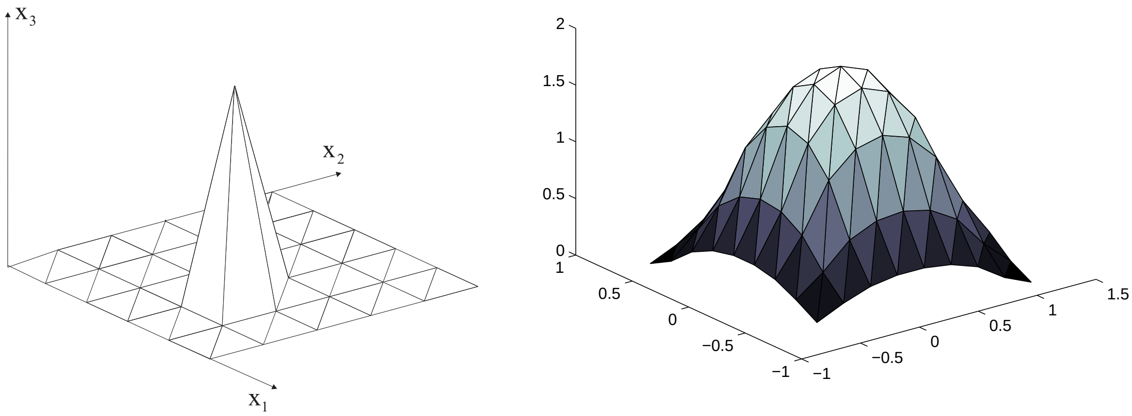

Рис. 2. Базисная функция Лагранжа (слева). Вид функции из S_h (справа).

В МКЭ принято выбирать в S_h так называемый базис Лагранжа. Он определяется следующим образом. Пусть N есть число узлов в ω_h. Пронумеруем все узлы ω_h от 1 до N каким-либо способом, и пусть a_i означает координату i-го узла. Каждому узлу $a_i \in \omega_h$ поставим в соответствие базисную функцию $\varphi_i \in S_h$ так, что $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij},\ j = 1, \dots, N$ (см. рис. 2).

Базис Лагранжа имеет два важных свойства: если a_i не принадлежит некоторому конечному элементу (стороне элемента), то φ_i тождественно равна нулю на этом элементе (на этой стороне) (почему?); т.о. диаметр области, на которой φ_i отлична от нуля, равен $2h$ (т.е. φ_i отлична от нуля в некотором круге радиуса h).

Значение произвольной функции $v_h \in S_h$ в узле $a_i \in \omega_h$ договоримся обозначать через v_i, а вектор-столбец $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ будем называть вектором узловых параметров v_h. Соответственно, $u_i = u_h(a_i)$, $u = (u_1, \dots, u_N)^T$ — вектор узловых параметров решения u_h. Тогда нетрудно видеть, что для любого $v_h \in S_h$ справедливо разложение

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N} v_i \varphi_i(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{0.11}$$

причем $v_i = v_h(a_i)$.

Разобьем множество индексов $I = \{1, 2, \dots, N\}$ на подмножества:

$$i_D = \{i \in I :\ a_i \in \gamma_h\}, \quad i_N = \{i \in I :\ a_i \in \omega_h \setminus \gamma_h\}. \tag{0.12}$$

В узлах a_i, $i \in i_D$, задано краевое условие Дирихле: $u_i = u_h(a_i) = u_i^D$, $u_i^D = u^D(a_i)$ и решение схемы МКЭ в них известно; необходимо определить значения u_h в узлах с индексами из i_N. Функция v_h в узлах Дирихле равна нулю: $v_i = v_h(a_i) = 0$, $i \in i_D$. Поэтому из (0.11) следует, что, в $\overline{\Omega}$ справедливы разложения

$$u_h(x) = \sum_{j \in i_N} u_j \varphi_j(x) + \sum_{j \in i_D} u_j^D \varphi_j(x), \quad v_h(x) = \sum_{i \in i_N} v_i \varphi_i(x), \tag{0.13}$$

для функций из V_h и V_h^0, соответственно.

Тождество (0.10) справедливо для любой функции $v_h \in V_h^0$. Поскольку функции φ_i, $i \in i_N$, принадлежат V_h^0, то из (0.10) получаем[2]

$$a(u_h, \varphi_i) = \int_\Omega (c \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i + a u_h \varphi_i)\, dx = \\ = \int_\Omega f \varphi_i \, dx = f(\varphi_i), \quad i \in i_N\,. \tag{0.14}$$

Подставляя сюда u_h из (0.13), придем к системе уравнений

$$\sum_{j \in i_N} a_{ij} u_j = F_i, \quad i \in i_N, \quad F_i = \phi_i - \sum_{j \in i_D} a_{ij} u_j^D, \tag{0.15}$$

где

$$a_{ij} = \int_\Omega (c \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i + a \varphi_j \varphi_i)\, dx, \tag{0.16}$$

$$\phi_i = \int_\Omega f\, \varphi_i \, dx. \tag{0.17}$$

Обозначим через A матрицу $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ и через Φ вектор $\{\phi_i\}_{i=1}^N$. Пусть также A_0 — матрица системы (0.15), а F_0 — вектор ее правой части. Тогда система (0.15) примет вид

$$A_0 u_0 = F_0. \tag{0.18}$$

Решая эту систему, находим неизвестные u_j, $j \in i_N$ (образующие вектор u_0), а решение схемы МКЭ — по первой формуле в (0.13).

Следующая последовательность операций определяет алгоритм формирования системы (0.18).

[2]система равенств (0.14) эквивалентна тождеству (0.10). Чтобы убедиться в этом достаточно умножить i-тое равенство в (0.14) на v_i и просуммировать по всем $i \in i_N$ и учесть (0.13).

1) Вычисляем матрицу A и вектор Φ.

2) Определяем вектор u, все элементы которого равны нулю, кроме элементов с номерами $i \in i_D$, которые полагаются равными u_i^D. Вычисляем $F = \Phi - Au$.

3) Получаем матрицу A_0 вычеркиванием у матрицы A строк и столбцов с номерами из i_D.

4) Получаем вектор F_0 вычеркиванием у вектора F компонент с номерами из i_D.

Шаг 1) является наиболее трудоемким. По традиции A называют *глобальной матрицей жесткости*, Φ — *глобальным вектором сил.*

6. Оценка точности решения МКЭ. Будем считать, что *триангуляция регулярна*, т.е. найдутся такие положительные постоянные c_0, c_1, c_2, c_3, не зависящие от h, что выполнены условия:

1) длины сторон элементов из T_h принадлежат отрезку $[c_0\, h, c_1\, h]$;
2) углы треугольников из T_h принадлежат отрезку $[c_2, \pi - c_3]$.

Эти условия не позволяют конечным элементам выполаживаться при $h \to 0$. Обозначим через $u_I(x)$ интерполянт решения $u(x)$ исходной задачи, т.е. такую функцию из V_h, которая в точках сетки ω_h совпадает с $u(x)$:

$$u_I(x) = \sum_{j=1}^{N} u(a_j)\varphi_j(x). \tag{0.19}$$

Теорема 2. *(без доказательства) Пусть T_h регулярная триангуляция, $u \in H^2(\Omega)$. Тогда $\|u - u_I\|_1 \leqslant C\, h$, где постоянная C зависит только от u и c_i, $i = 0 : 3$, но не зависит от h.*

Теорема 3. *Пусть T_h регулярная триангуляция, решение исходной задачи $u \in H^2(\Omega)$. Тогда $\|u - u_h\|_1 \leqslant C\, h$, где постоянная C не зависит от h.*

Доказательство. Заметим, что $z_h = u_h - u_I \in V_h^0$. Имеем по определению u и u_h:

$$\begin{aligned}\alpha |z_h|_1^2 \leqslant a(z_h, z_h) = a(u_h, z_h) - a(u_I, z_h) = f(z_h) - a(u_I, z_h) = \\ = a(u, z_h) - a(u_I, z_h) = a(u - u_I, z_h) \leqslant \gamma\, \|u - u_I\|_1 |z_h|_1.\end{aligned} \tag{0.20}$$

Отсюда следует оценка $|u_h - u_I|_1 \leqslant c\,\|u - u_I\|_1$, где $c = \gamma/\alpha$. Пользуясь неравенством треугольника и теоремой 2, получим искомую оценку:

$$|u - u_h|_1 \leqslant |u - u_I|_1 + |u_h - u_I|_1 \leqslant (1 + c)\,\|u - u_I\|_1 \leqslant C\,h. \tag{0.21}$$

Из этой теоремы следует, что при уменьшении размеров элементов, пропорционально уменьшается погрешность решения в норме $H^1(\Omega)$.