НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$, неограничена в окрестности точки „b" и интегрируема на любом отрезке $[a,b']$, $b'<b$. Если существует конечный предел

$$\lim_{b'\to b-0}\int_a^{b'} f(x)\,dx\,; \qquad (1)$$

то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание 1. „b" называется особой точкой интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Замечание 2. Аналогично определяется несобственный интеграл с особенностью в точке „a" (в том случае $f(x)$ интегрируема на любом $[a',b]$ и неограничена в окрестности точки „a"), и, если существует конечный предел

$$\lim_{a'\to a+0}\int_{a'}^{b} f(x)\,dx\,, \qquad (2)$$

то этот предел называется несобственным интегралом функции $f(x)$ на $(a,b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$. В данном случае особой точкой интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ будет точка „a".

Замечание 3. Если существует предел (1) или (2), то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а $f(x)$ интегрируемой в несобственном смысле. Если пределы (1) и (2) не существуют или бесконечны, то говорят, что $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, а $f(x)$ неинтегрируема в несобственном смысле на $[a,b)$ или $(a,b]$.

Замечание 4. В обоих рассмотренных случаях мы помним, что $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет одну особую точку.

Вычисление несобственных интегралов с помощью определения.

① $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. — вычислить как несобственный.

Реш. „Особая точка" — 0. 1сл. $(\alpha \neq 1)$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_\varepsilon^1 \right) =$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \frac{1 - \varepsilon^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1. \\ +\infty, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$

2сл. $(\alpha = 1)$ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \left(\ln x \Big|_\varepsilon^1 \right) = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \ln \varepsilon = +\infty.$

Таким образом, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

② $I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$ — вычислить или установить расходимость.

Реш. $x+1 = y \Rightarrow dx = dy$. $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dy}{y^{4/3}} \Rightarrow$ (см. пр. ①) $\Rightarrow$ интеграл I_1 расходится, т.к. $\alpha = \frac{4}{3} > 1$.

③ $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + x} = I_2$ — вычислить или установить расходимость.

Реш. $\sqrt{x} = t \geq 0 \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt \Rightarrow I_2 = \int\limits_0^2 \frac{2t\,dt}{t + t^2} = 2\int\limits_0^2 \frac{dt}{1+t} =$

$= 2\ln(1+t) \Big|_0^2 = 2\ln 3.$

~~④ $\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = I_3$~~ — вычислить или установить расходимость.

~~Особая точка $x = 3$.~~

~~Реш. $I_3 = \int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}}$~~

④ $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx = I_3$. Особая точка $x = \frac{\pi}{2}$.

$I_3 = \lim\limits_{c \to \frac{\pi}{2}-0} \int\limits_0^c \operatorname{tg} x\,dx = \lim\limits_{c \to \frac{\pi}{2}-0} \int\limits_0^c \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\lim\limits_{c \to \frac{\pi}{2}-0} \int\limits_0^c \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\lim\limits_{c \to \frac{\pi}{2}-0} \ln|\cos x| \Big|_0^c =$

$= -\lim\limits_{c\to\frac{\pi}{2}-0}(\ln\cos c - \ln 1) = +\infty$. $\Rightarrow$ Интеграл I_3 расходится.

⑤ $\int\limits_0^e \frac{dx}{e^x-1} = I_4$. Вычислить или установить расходимость.

Реш. Особая точка $x=0$.

$$I_4 = \int\limits_0^e \frac{dx}{e^x(1-e^{-x})} = \int\limits_0^e \frac{e^{-x}dx}{1-e^{-x}} = -\int\limits_0^e \frac{de^{-x}}{1-e^{-x}} = \int\limits_0^e \frac{d(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^e \frac{d(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln|1-e^{-x}|\Big|_\varepsilon^e = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|1-e^{-e}| - \ln|1-e^{-\varepsilon}|\right) =$$

$= +\infty$. Таким образом, интеграл I_4 — расходится.

⑥ $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = I_5$. Вычислить или установить расходимость.

Реш. Особая точка $x=1$.

$$I_5 = \int\limits_0^1 \arcsin x \, d\arcsin x = \cancel{\tfrac{1}{2}(\arcsin^2 x)} = \lim_{c\to1-0}\int\limits_0^c \arcsin x \, d\arcsin x =$$

$$= \lim_{c\to1-0}\left\{\frac{1}{2}\arcsin^2 x\right\}\Big|_0^c = \lim_{c\to1-0}\frac{1}{2}\arcsin^2 c = \frac{\pi}{2}.$$

Задачи для самостоятельной работы.

Вычислить или установить расходимость следующих интегралов:

① $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.

② $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$.

③ $\int\limits_{-1}^0 e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}$ ④ $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}dx$

Литература: Кудрявцев Л.Д. и др., Сборник задач по М.А., т.2.
(N 3; 16; 13; 10).

Признаки сравнения несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Пусть $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b)$ и „b" особая точка для интегралов $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$, т.е. в окрестности точки „b" функции $f(x)$ и $g(x)$ неограничены. Тогда имеют место следующие признаки сравнения:

Признак сравнения I. Если $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$, то:

а) из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$;

б) из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Признак сравнения II. Если ~~существует~~ $g(x) > 0$ на $[a, b)$ и существует

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где $k \neq 0$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Исследование на сходимость несобственных интегралов с использованием признаков сравнения

① $\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + \sqrt[5]{x}} = I_1$ – исследовать на сходимость.

Реш. Особая точка для I_1 $x = 0$. $\frac{1}{x^4 + \sqrt[5]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{1}{x^{1/5}}$. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/5}}$ сходится, т.к. $\alpha = \frac{1}{5} < 1$ (см. пример ① из предыдущего раздела). Далее по признаку сравнения I получаем, что интеграл I_1 сходится.

② $\int_0^2 \sqrt{\frac{16 + x^4}{16 - x^4}}\,dx = I_2$ – исследовать на сходимость.

Реш. Особая точка интеграла I_2 $x=2$.

$I_2 = \int\limits_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}}\,dx$. Неограниченность подынтегральной функции возникает за счёт множителя $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$. Интегралы I_2 и $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ ведут себя одинаково согласно признаку II, т.к.

$$\lim_{x\to 2-0} \sqrt{\frac{16+x^4}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}} : \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 2-0} \sqrt{\frac{16+x^4}{(2+x)(4+x^2)}} = 2.$$

Покажем, что $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ сходится. Сделаем замену $2-x=y$.

$\Rightarrow dx=-dy$ и $\int\limits_2^0 \frac{-dy}{\sqrt{y}} = \int\limits_0^2 \frac{dy}{\sqrt{y}}$. Таким образом, $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ сходится.

По признаку сравнения II интегралы $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ и $\int I_2$ ведут себя одинаково. Поэтому интеграл I_2 сходится.

③ $\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1} = I_3$ — исследовать на сходимость.

Реш. Особой точкой для интеграла I_3 является $x=0$.

Функция $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, при $x\to 0+0$, т.к.

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}}{1} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится ($\alpha=\frac{1}{2}<0$), что доказано в пр.① предыдущего раздела. По признаку сравнения II интегралы I_3 и $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ведут себя одинаково и $\Rightarrow I_3$ — сходится.

④ $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x} = I_4$ — исследовать на сходимость.

Реш. Особой точкой для интеграла I_4 является $x=0$.

$\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x > 0$ $\forall x\in[0,1]$. Применим признак сравнения I

$\frac{1}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0;1)$. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, т.к. $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ (см. пример ① предыдущего раздела). Поэтому интеграл I_4 также сходится.

⑤ $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx = I_5$ – исследовать на сходимость.

<u>Реш.</u> Особой точкой для интеграла I_5 является $x=0$.

$\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x^2} : \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится, т.к. $\alpha = 1$ (см. пример ① предыдущего раздела. Далее, по признаку сравнения II, интеграл I_5 расходится.

<u>Задачи для самостоятельной работы</u>

Исследовать на сходимость следующие интегралы:

① $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^{10}}}$.

③ $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin x}}$.

② $\int\limits_1^2 \frac{(x-2)\,dx}{x^3-3x^2+4}$.

④ $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

<u>Литература:</u> ~~Сборник зад~~ Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по м.а., т.2 (N 59, 60, 62, 72).

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Опр. Пусть $f(x)$ определена для $\forall x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a; b]$. Если существует

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

то этот предел называется **несобственным интегралом** функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл **сходится**. Если же предел (1) не существует, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **расходится**.

Вычисление интегралов или установление их расходимости с помощью определения

① $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = I_1$. Особая точка интеграла "$+\infty$".

$$I_1 = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}.$$

1сл. $(\alpha \neq 1)$: $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 = \lim_{b \to +\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha-1}$, если $1-\alpha < 0$, т.е. $\alpha > 1$.

Если же $\alpha < 1$, то $I_1 = +\infty$.

2сл. $(\alpha = 1)$: $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b. \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = +\infty$.

Таким образом, интеграл I_1 сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

② $\int_1^{+\infty} e^{-3x}\,dx = I_2$. Особая точка интеграла "$+\infty$".

$$I_2 = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\lim_{b \to +\infty} \int_a^b e^{-3x}\,d(-3x) = \lim_{b \to +\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\Big|_a^b = \lim_{b \to +\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(e^{-3b} - e^{-3a}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-e^{-3a}\right) = \frac{1}{3}e^{-3a}.$$

③ $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x+1}{x^2+1}dx = I_3$. Особая точка интеграла I_3 "$-\infty$".

$I_3 = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{0}\frac{x+1}{x^2+1}dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\left(\int\limits_{b}^{0}\frac{x\,dx}{x^2+1} + \int\limits_{b}^{0}\frac{dx}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{b}^{0}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \operatorname{arctg}x\Big|_{b}^{0}\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to-\infty}\left(\ln(x^2+1)\Big|_{b}^{0}\right) + \lim\limits_{b\to-\infty}(-\operatorname{arctg}b) = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to-\infty}\left[\ln 1 - \ln(b^2+1)\right] + \frac{\pi}{2} = -\infty$. $\Rightarrow$ I_3 расходится.

~~④ $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = I_4$. Особая точка интеграла I_4 "$+\infty$" и $x\to0$~~

~~$I_4 = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}dx$~~

④ $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2x} = I_4$. Особая точка интеграла I_4 "$+\infty$".

$I_4 = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b}\frac{dx}{x\ln^2x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b}\frac{d\ln x}{\ln^2x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_{e}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln e}\right) = 1$.

Задачи для самостоятельной работы.

Вычислить интегралы или установить их расходимость.

① $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x+1}$. ② $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{2x+5}{x^2+3x-10}dx$ ③ $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ ④ $\int\limits_{0}^{+\infty}x\,e^{-x}dx$. ⑤ $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^n x}$.

Литература: Кудрявцев Л.Д. и др., Сборник задач по МА, т.2. (№5, 7, 9, 11).

Исследование интегралов на сходимость.

① $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^5+2}} = I_1$. Единственная особая точка у интеграла I_1 "$+\infty$".

$\frac{x}{\sqrt[3]{x^5+2}} \sim \frac{1}{x^{2/3}}$, т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^5+2}}}{\frac{1}{x^{2/3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}\cdot x}{x^{5/3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^5}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^5}}} = 1$. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2/3}}$ расходится, поэтому по признаку сравнения II, интеграл I_1 – расходится.

② $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} = I_2$. Единственная особая точка интеграла I_2 $x=+\infty$.

$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^8}} \sim \frac{1}{x^{5/3}}$ т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^8}}}{\frac{1}{x^{5/3}}} = \lim \frac{x^{8/3}}{x^{8/3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}+1}} = 1$. (*)

Интеграл I_2 и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}}$ ведут себя одинаково.

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/3}}$ сходится т.к. $\alpha = 5/3 > 1$. Из (*) $\to$ интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}}$ сходится (по признаку сравнения II) и следовательно интеграл I_2 сходится.

③ $\int_2^{+\infty}\left(\cos\frac{2}{x}-1\right)dx = I_3$. Единственная особая точка интеграла I_3 $x=+\infty$.

$\cos\frac{2}{x}-1 = -2\sin^2\frac{1}{x} \sim -\frac{2}{x^2}$ при $x\to+\infty$.

Интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{2}{x^2}dx$ – сходится, т.к. $\alpha = 2 > 1$. Поэтому интеграл I_3 сходится.

④ $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x^5+x^2}} = I_4$. Единственная особая точка интеграла I_4 $x=+\infty$.

$\frac{\ln x}{\sqrt{x^5+x^2}} \le \frac{\ln x}{x^{5/2}} \le \frac{C}{x^2}$, где C – const.

Интеграл $\int_2^{+\infty}\frac{C\,dx}{x^2}$ – сходится $\to$ (по признаку сравнения I)

$\to \int_2^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x^5+x^2}}$ тоже сходится.

Задачи для самостоятельной работы.

Исследовать на сходимость следующие интегралы.

① $\int_0^{+\infty}\frac{x^3+7}{x^5-x^2+2}dx$

② $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}\,dx$ ③ $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-1/x^2} - e^{-4/x^2}\right) dx$. ④ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}$,

Литература: Кудрявцев Л.Д. и др., Сборник задач по М.А, т.2 (№ 64, 67, 78, 71).

Абсолютная и условная сходимость интегралов

Опр1 Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$ и сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Опр2. Интеграл называется условно сходящимся, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty}$ расходится.

Замечание. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Достаточные признаки сходимости интегралов

Признак Дирихле. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится, если

а) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a; +\infty)$;

б) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a; +\infty)$, причём $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

① Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = I_1$.

Реш. Пусть $\alpha>1$. Очевидно справедливо неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}.$$

Из данного неравенства (по признаку сравнения I) $\Rightarrow$ интеграл I_1 сходится абсолютно.

Пусть $0<\alpha\le 1$. Используем признак Дирихле. Пусть $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. Условие а) признака Дирихле выполнено, т.к. $\sin x$ – непрерывная ф-ция и её первообразная $(-\cos x)$ и она ограничена $(|-\cos x| \le 1)$. Условие б) также выполняется т.к. $g'(x) = -\alpha\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}} < 0$, поэтому $g(x)$ убывает и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}} = 0$. Окончательно получаем: интеграл I_1 сходится. Докажем, что I_1 сходится, но не абсолютно:

$$\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}$$

Для доказательства расходимости $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,dx$ необходимы <u>критерий Коши</u>, который формулируют следующим образом: Интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ b = b(\varepsilon) \geqslant a$ такое, что

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

<u>Замечание</u>. Критерий Коши можно использовать для доказательства расходимости интегралов: интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для $\forall\ b \geqslant a$ существуют числа $b_1 > b$ и $b_2 > b$ такие, что

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Используя данное замечание докажем расходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,dx$ при $\alpha \leqslant 1$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\pi n > b$ и положим $b_1 = \pi n$, $b_2 = 2\pi n$. Тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,dx\right| = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,dx \geqslant \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Итак, существует $\varepsilon = \frac{1}{4}$ такое, что для $\forall\ b > 1$ существуют числа $b_1 = \pi n$ и $b_2 = 2\pi n > b$, для которых

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Следовательно при $\alpha \leq 1$ интеграл I_1 расходится.

©