§ 7.6 СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА, В КОТОРЫХ ФИГУРИРУЮТ НЕРАВЕНСТВА

1^0. Если f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \le g(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Из условия следует:

$$\sum_i f(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \le \sum_i g(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}), \qquad (1)$$

для любой последовательности разбиений $\Delta_k = \Delta_k(a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_n^{(k)} = b)$ такой, что $d(\Delta_k) \to 0$. Переходя в (1) к пределу при $d(\Delta_k) \to 0$, получим требуемое неравенство. ■

- **2^0**. Если f интегрируема на $[a,b]$, то

$$|\int\limits_a^b f(x)dx| \le \int\limits_a^b |f(x)|\, dx \le K(b-a),$$

где $K = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Доказательство. При любом $x \in [a,b]$:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$

Поэтому из свойства 1^0 следует

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx,$$

что равносильно неравенству

$$|\int\limits_a^b f(x)dx| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx. \qquad (2)$$

Для любых $x \in [a,b] : |f(x)| \le K$. $\int\limits_a^b K dx = K(b-a)$ (см. пример 1 из § 7.1), поэтому

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b K dx = K(b-a). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует 2^0. ▬

3^0. Если f интегрируема на $[a,b]$, $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$ и f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, причем $f(x_0) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

<u>Доказательство.</u> f непрерывна в x_0 и $f(x_0) > 0$. $\Rightarrow$ существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $f(x) \ge \lambda > 0$ для $x \in U(x_0)$. Пусть для определенности $x_0 \in (a,b)$. Тогда $U(x_0) = (c,d)$, $a < c < x_0 < d < b$, и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c + \int\limits_c^d + \int\limits_d^b \ge \int\limits_c^d f(x)dx \ge \int\limits_c^d \lambda dx = \lambda(d-c) > 0.$$ ▬

4^0. (Теорема о среднем). Пусть f, φ интегрируемы на $[a,b]$, $\varphi \ge 0$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \lambda \int\limits_a^b \varphi(x)dx,$$

где $m \le \lambda \le M$ ($m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$). Если, кроме того, f непрерывна, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

<u>Доказательство.</u> $\varphi(x) \ge 0$. $\Rightarrow$ $m\varphi(x) \le f(x)\varphi(x) \le M\varphi(x)$, $x \in [a,b]$. Интегрируя эти неравенства (см. свойство

1^0), имеем:

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0$, то в качестве λ можно взять любое число из отрезка $[m, M]$. Если же $\int\limits_a^b \varphi(x)dx > 0$, то

$$\lambda = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx / \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

Пусть f непрерывна на $[a, b]$. $\Rightarrow$ Существуют точки α и $\beta \in [a, b]$ такие, что $m = f(\alpha)$, $M = f(\beta)$. Отсюда (опять же в силу непрерывности f на $[a, b]$) $\Rightarrow$ существует точка $\xi \in [\alpha, \beta]$ (здесь мы допускаем для определенности, что $\alpha < \beta$), в которой функция f достигает промежуточного значения $\lambda (m \leq \lambda \leq M)$, т. е. $f(\xi) = \lambda$. ● ■

Литература

Дубровин, В. Т. Лекции по математическому анализу. Ч.I : учебное пособие / В. Т. Дубровин. — 3-е изд., перераб. и доп. — Казань : КФУ, 2012. — 180 с. — ISBN 978-5-905787-43-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/73545 (дата обращения: 27.03.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.