

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

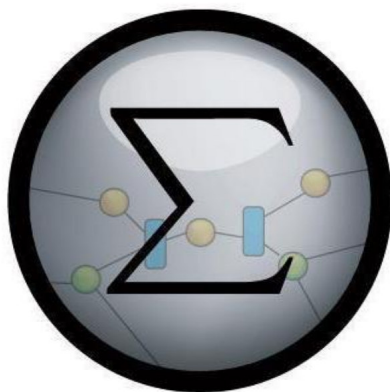
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2025»**

Том 2

г. Уфа, 1 октября – 5 октября 2025 г.



СЕКЦИИ:

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Уфа
Аэтерна
2025

УДК 517
ББК 22.1
У 88

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа.

Печатается по решению Ученого совета института информатики, математики и робототехники Уфимского университета науки и технологий.

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н. **З.Ю. Фазуллин** (отв. редактор);
д.ф.-м.н. **М.Г. Юмагулов**;
д.ф.-м.н. **Р.С. Юлмухаметов**;
д.ф.-м.н. **О.А. Кривошеева**;
А.С. Белова (отв. секретарь);
Р.И. Габдрахманов (отв. секретарь)

Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 1 октября – 5 октября 2025 г.). В 2 томах. Том 2 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа: Аэтерна, 2025. - 214 с.

В предоставленных материалах конференции детально обсуждаются новейшие результаты и открытые проблемы в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, в теории дифференциальных уравнений, математическом моделировании. Материалы сборника предназначены для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся указанными проблемами.

Организаторы конференции: Уфимский университет науки и технологий, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа), НОМЦ Приволжского федерального округа.

Благодарим компании, оказавшие поддержку проведению конференции.



ISBN 978-5-00249-360-9 т.2
ISBN 978-5-00249-361-6

© **Коллектив авторов, 2025**
© **УУНИТ, 2025**
© **Аэтерна, 2025**

Уфимский университет науки и технологий совместно с Институтом математики с ВЦ УФИЦ РАН ежегодно, начиная с 2012 г., проводит международные научные конференции, основные тематики которых связаны со спектральной теорией, с нелинейным и комплексным анализом, дифференциальными уравнениями и математическим моделированием. Выбор таких направлений определялся как активной работой в указанных областях многих математиков из Башкортостана, взаимопроникновением идей и методов спектральной теории, нелинейного и комплексного анализа при решении многих актуальных задач в указанных областях, так и сотрудничеством с коллегами из многих научных центров России и зарубежья.

В последние годы особенно активным стало сотрудничество в указанных областях математики с учеными из ряда научных и образовательных организаций Узбекистана, Казахстана и Таджикистана. Со многими организациями заключены соответствующие Договоры о научном сотрудничестве.

Начиная с 2019 г. конференция приобрела новый статус, преобразовавшись в "Уфимскую осеннюю математическую школу". Теперь, наряду с обсуждением новейших научных результатов и открытых проблем, важное место в работе конференции занимают обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

Научная программа конференции УОМШ-25 охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- дифференциальные уравнения и их приложения;
- математическое моделирование.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2025»

СЕКЦИЯ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

г. Уфа, 1 октября – 5 октября 2025 г.

PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS FOR LIMIT-CYCLE ANALYSIS IN NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH ABSOLUTE-VALUE NONLINEARITY

M.K. Arabov, MKArabov@kpfu.ru

УДК 517.927

Применяются физически-информированные нейронные сети (PINNs) для анализа нелинейных динамических систем второго порядка с модульной нелинейностью. Основное внимание уделено выявлению и количественной характеристике предельных циклов. Обучение сети производится методом L-BFGS. Результаты проверяются численными методами и анализируются с помощью спектрального анализа временных рядов (Дискретное преобразование Фурье, FFT), что позволяет оценивать амплитудные и частотные характеристики циклов.

Ключевые слова: физически информированные нейронные сети, нелинейные динамические системы, предельные циклы, модульная нелинейность

Physics-Informed Neural Networks for Limit-Cycle Analysis in Nonlinear Dynamical Systems with Absolute-Value Nonlinearity

We apply Physics-Informed Neural Networks (PINNs) to second-order nonlinear dynamical systems with an absolute-value nonlinearity. The focus is on detecting and quantitatively characterising limit cycles. The PINN is trained using the L-BFGS quasi-Newton optimiser. Results are validated against numerical solvers and further analysed via Fourier spectral analysis (FFT) of the time series, enabling the amplitude and frequency characteristics of the cycles to be assessed.

Keywords: physics-informed neural networks, nonlinear dynamical systems, limit cycles, absolute-value nonlinearity

Second-order nonlinear dynamical systems with absolute-value nonlinearity are described by the equation

$$x'' + a x' + b x + c |f(x, x')| = 0,$$

where $f(x, x')$ may take the form $x' - \phi(x, x')$, $\lambda - x$ or $\lambda - x'$. For numerical stability, the modulus is approximated by a smoothed function

$$|z| \approx \phi_\varepsilon(z) := \sqrt{z^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

Mullosharaf Kurbonovich Arabov, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Kazan Federal University (Kazan, Russia); Arabov Mullosharaf Kurbonovich (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

which removes gradient discontinuities without introducing a constant bias. The system in variables x and $y = x'$ takes the form:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -a y - b x - c \phi_\varepsilon(f(x, y)). \end{cases}$$

To approximate the solution $u(t) = [x(t), y(t)]^\top$, a neural network $u_{\text{NN}}(t; \theta)$ is used. The loss function consists of three components:

$$L(\theta) = L_{\text{PDE}} + L_{\text{IC}} + L_{\text{per}},$$

where

$$\begin{aligned} L_{\text{PDE}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[(x'_{\text{NN}}(t_i) - y_{\text{NN}}(t_i))^2 + (y'_{\text{NN}}(t_i) + a y_{\text{NN}}(t_i) + b x_{\text{NN}}(t_i) + \right. \\ &\quad \left. + c \phi_\varepsilon(f(x_{\text{NN}}, y_{\text{NN}})))^2 \right], \\ L_{\text{IC}} &= (x_{\text{NN}}(t_0) - x_0)^2 + (y_{\text{NN}}(t_0) - y_0)^2, \\ L_{\text{per}} &= (x_{\text{NN}}(t_0) - x_{\text{NN}}(t_0 + T))^2 + (y_{\text{NN}}(t_0) - y_{\text{NN}}(t_0 + T))^2, \end{aligned}$$

where T is the assumed cycle period.

Training parameters. The calculations employed a fully connected network with 4 hidden layers of 50 neurons each and tanh activation function. The value of ε was set to 10^{-3} . Training was carried out using L-BFGS until convergence, with a gradient norm threshold of 10^{-9} .

The method was tested for several parameter sets a, b, c, λ with different forms of $f(x, x')$. In cases where the system admits a limit cycle, the neural network correctly identifies it and reproduces the oscillation characteristics, as confirmed by phase portraits and spectral analysis (FFT). Comparison with numerical integration (ODEPACK [5]) shows high accuracy and stability of the solutions.

Note. The proposed approach extends the methods presented in [6,7] and demonstrates the effectiveness of PINNs for analysing oscillatory dynamics of systems with absolute-value nonlinearity.

References

1. *Strogatz, S. H.* Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. — 2nd ed. — Westview Press / CRC Press, 2018.
2. *Moon, F. C.* Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers. — John Wiley & Sons, 1992.
3. *Raissi, M.; Perdikaris, P.; Karniadakis, G. E.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. — *J. Comput. Phys.*, 378 (2019), 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.

4. Karniadakis, G. E.; Kevrekidis, I. G.; Lu, L.; Perdikaris, P.; Wang, S.; Yang, L. Physics-informed machine learning. — *Nat. Rev. Phys.*, 3(6) (2021), 422–440. DOI: 10.1038/s42254-021-00314-5.

5. Hindmarsh, A. C. ODEPACK: A Systematised Collection of ODE Solvers. — In: *Scientific Computing* (R. S. Stepleman et al., eds.), North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 55–64.

6. Arabov M. K. Application of Neural Networks for Solving Differential Equations and Their Analysis // Proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Dushanbe, 2024, pp. 7–11.

7. Arabov M. K.; Mukhamadiev E.; Nurov I. D.; Sobirov Kh. I. Signs of the Existence of Limit Cycles in Second-Order Differential Equations // Ufa Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 9, No. 4. — pp. 3–11.