

## Об изопериметрической монотонности функционалов для отрицательных значений параметра

Р.Г. Салахудинов

rsalakhud@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

### Аннотация

В статье рассматриваются физические и геометрические функционалы области, зависящие от свободного параметра. Эти функционалы построены с целью обобщения классических изопериметрических неравенств, доказанных Полия, Пейном и другими. Показано, что изопериметрическая монотонность некоторых функционалов по свободному параметру распространяется на отрицательный диапазон изменения.

*Ключевые слова:* жесткость кручения, изопериметрические неравенства, евклидовы моменты области относительно границы, экстремальные области.

Рассмотрим функционал

$$\mathbf{H}(G; p) := \frac{(p+1)(p+2)}{\rho(G)^p} \left( \mathbf{I}_p(G) - \frac{l(\rho(G))\rho(G)^{p+1}}{p+1} \right),$$

где  $\mathbf{I}_p(G)$  — Евклидовый момент инерции области  $G$  порядка  $p$ ,  $\rho(G)$  — супремум радиусов кругов целиком лежащих в области,  $l(\rho(G))$  — длина множества, лежащего на расстоянии  $\rho(G)$  от границы и  $p(> -1)$  — параметр.

Будем называть выпуклую область  $G$  растяжением выпуклой области  $G_0$ , если область  $G_0$  можно получить из  $G$  путем вырезания прямоугольного фрагмента и объединения оставшихся частей так, что  $\rho(G_0) = \rho(G)$ . Далее, обозначим через  $\Gamma$  подмножество выпуклых областей, содержащие описанные около некоторой окружности многоугольники, а также круговые многоугольники, получаемые из описанных многоугольников заменой некоторых сторон или их частей дугами вписанной окружности. Формирование множества  $\Gamma$  закончим добавлением областей, являющихся растяжением элементов из  $\Gamma$ .

**Теорема.** Пусть  $G$  — выпуклая область на плоскости ограниченной площади. Функционал  $\mathbf{H}(G; p)$  является монотонно возрастающей функцией от  $p$  если область  $G \notin \Gamma$  и  $-1 < p < 0$ . Для областей из множества  $\Gamma$  функционал  $\mathbf{H}(G; p)$  является постоянным.

Изопериметрическая монотонность функционала  $\mathbf{H}(G; p)$  при  $p \geq 0$  ранее была изучена автором совместно с Л.И. Гафиятуллиной.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 17-01-00282-а) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

## On isoperimetric monotonicity of functionals for negative values of the parameter

R.G. Salakhudinov

Physical and geometrical functionals of a domain that depend on a free parameter are discussed in the article. These functionals built with the aim to generalize the classical isoperimetric inequalities, proved by Polya, Payne and others. It is shown that the isoperimetric monotony of some functionals with respect to free parameter extends to the negative range of change.

*Keywords:* isoperimetric inequality, torsional rigidity, Euclidean moment of domain with respect to the boundary, extremal domain.