Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется оформлять результаты решений в более пристойней форме, как это делает, скажем, ваша староста Ангелина (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

Пока, в ближайшее время, студентам открыт доступ в университет, так что вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию (во вторник 11h.50m.-13h.30m. и в пятницу 15h.40m.-17h.30m.) для консультаций по решению домашних задач.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 41

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ определена при любых $x \geq a$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любых $b > a$. Если существует

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

то этот предел называется *несобственным интегралом* от $f(x)$ на промежутке $[a, \infty)$ и обозначается

$$\int_a^\infty f(x)dx. \tag{1}$$

В этом случае говорят, что интеграл (1) *сходится*, а функция $f(\cdot)$ *интегрируема*.

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx. \tag{2}$$

Интеграл с бесконечными нижним и верхним пределами интегрирования определяются формулами (1) и (2) посредством разбиения пределов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Для этих интегралов справедливы формулы замена переменных и интегрирования по частям.

Сходимость интеграла можно, естественно, установить или опровергнуть, вычисляя соответствующий неопределенный интеграл. Например,

$$1. \quad \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}\bigg|_2^b =$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{b-1}{b+1} - \ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Таким образом, данный интеграл сходится.

$$2. \quad \int_{0}^{\infty} \cos 2x dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \cos 2x dx = \lim_{b\to\infty} \frac{\sin 2b}{2} =?$$

Предел, очевидно, не существует, так что этот интеграл расходится.

$$3. \quad \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Оба интеграла в правой части расходятся, если параметр $\alpha = 1$, поскольку соответствующий неопределенный интеграл равен $\ln x + C$. Если же $\alpha > 1$, то

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_0^1 = -\infty$$

(расходится "в нуле"), а при $\alpha < 1$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^\infty = +\infty$$

(расходится "на бесконечности"). Следовательно, интеграл

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

расходится при любом значении α.

Для решения задач о сходимости более сложных интегралов, неопределенные аналоги которых не вычисляются в явной форме через элементарные функции, используются специальные необходимые и достаточные признаки сходимости. В этом занятии будут использоваться только признаки для интегралов вида (1) от **неотрицательных** функций: $f(x) \geq 0$.

1. *Если интеграл*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

сходится, то $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Это *необходимый* признак сходимости: если предел не равен нулю или не существует, то интеграл расходится.

2. *Если на промежутке* $[a, \infty)$ *функция* $f(x)$ *мажорируется функцией* $g(x)$*, то есть* $f(x) \leq g(x)$*, то сходимость интеграла* $g(x)$ *влечет сходимость интеграла от* $f(x)$*. Если же на этом промежутке имеется функция* $g(x)$*, для которой* $f(x) \geq g(x)$ *и интеграл от* $g(x)$ *расходится, то расходится и интеграл от* $f(x)$*.*

Это достаточные *признаки сравнения* для сходимости или расходимости интегралов вида (1). Использование признаков требует особого подбора функции $g(\,\cdot\,)$, мажорирующей (соответственно, минорирующей) $f(x)$.

3. *Если для некоторой функции* $g(x)$ *существует конечный предел*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

то интегралы

$$\int_a^\infty f(x)dx, \qquad \int_a^\infty g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Это так называемый *асимптотический признак сравнения*, также требующий особого подбора функции $g(\,\cdot\,)$.

Приведем примеры на использование этих признаков.

1. Не вычисляя исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Этот интеграл расходится, поскольку подынтегральная функция не стремится к нулю при $x \to \infty$ (необходимый признак сходимости):

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

(при вычислении предела использовалась эквивалентность функций $\ln(1+x)$ и x, если $x \to 0$).

2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_2^\infty \frac{dx}{xcos^2x \cdot \ln x}.$$

Воспользуемся признаком сравнения в части расходимости интеграла. Так как $cos^2x \leq 1$, то положительная на промежутке $[2, \infty)$ подынтегральная функция

$$\frac{1}{xcos^2x \cdot \ln x} \geq \frac{1}{x \ln x}.$$

Но интеграл от миноранты расходится:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^\infty \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x|_2^\infty = \infty,$$

поэтому расходится и искомый интеграл.

3. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{sin^2x \cdot \ln x}{x^{1,01}} dx.$$

Опять воспользуемся признаком сравнения, но, на этот раз, в части сходимости интеграла:

$$\frac{sin^2x \cdot \ln x}{x^{0,01}} \leq \frac{\ln x}{x^{1,01}}.$$

Но интеграл от мажоранты

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{1,01}} dx$$

сходится, поскольку существует такое $x_0 \geq 1$, что при всех $x \geq x_0$ функция $\ln x \leq x^{0,005}$ и интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,005}} dx < \infty.$$

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{1 + 2\sqrt{x} + x^2} dx.$$

Воспользуемся асимптотическим признаком сравнения. Подынтегральная функция

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} \sim x^{-3/2},$$

когда $x \to \infty$, и интеграл

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx = -2\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_1^\infty = 2$$

сходится.

Задание 41

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий.

12.21. Вычислить интеграл

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

Исследовать на сходимость следующие интегралы.

2.70.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 3x}{\sqrt[3]{x^4+2}} dx,$$

12.75.

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx,$$

12.79.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\arctan\frac{x^3}{1+x^2}\right)^3 dx,$$

12.81.

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2\sin^2 x} dx.$$

12.84. При каком α сходится интеграл

$$12.84. \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha} dx?$$