

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, А.Г. ФРОЛОВ

ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ И СЛАБО  
СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Монография

КАЗАНЬ

2018

УДК 517.958:621.372.8

ББК 22.172

Д21

*Печатается по рекомендации  
ученого совета Института вычислительной  
математики и информационных технологий  
(протокол № 5 от 11 января 2018 г.)*

**Научный редактор —**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
доцент кафедры прикладной математики КФУ **Д.Н. Тумаков**

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Пензенского государственного университета **Ю.Г. Смирнов;**

доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры вычислительной математики КФУ **Р.З. Даутов**

**Карчевский Е.М.**

**Д21 Двумерные сингулярные и слабо сингулярные интегральные уравнения в теории диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. — 204 с.**

На основе метода интегральных уравнений исследован широкий круг задач теории диэлектрических волноводов. Для научных работников в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики.

УДК 517.958:621.372.8

ББК 22.172

© Карчевский Е.М., Фролов А.Г., 2018

© Издательство Казанского университета, 2018

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>ГЛАВА 1. Основные уравнения теории диэлектрических волноводов</b> . .	14
§ 1. Уравнения для амплитуд собственных волн . . . . .	14
§ 2. Электромагнитные потенциалы . . . . .	18
§ 3. Условия на границах раздела сред . . . . .	23
§ 4. Поведение амплитуд собственных волн на бесконечности . . . . .	27
§ 5. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода . . . . .	35
§ 6. Собственные волны волноводов кругового поперечного сечения . . . . .	40
<b>ГЛАВА 2. Задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и слоистой среде</b> . . . . .	47
§ 1. Элементы спектральной теории оператор-функций . . . . .	47
§ 2. Постановки задач . . . . .	49
§ 3. Локализация собственных значений . . . . .	58
§ 4. Интегральные представления собственных функций. . . . .	62
§ 5. Дискретность характеристических множеств и зависимость характери- стических значений $\beta$ от параметра $\omega$ . . . . .	70
§ 6. Существование поверхностных волн . . . . .	77
<b>ГЛАВА 3. Метод коллокации решения спектральных задач для двумер- ных слабо сингулярных интегральных уравнений</b> . . . . .	93
§ 1. Метод коллокации решения линейных задач . . . . .	94
§ 2. Численное решение задач о поверхностных волнах . . . . .	98
§ 3. Метод коллокации решения нелинейных задач. . . . .	131
§ 4. Численное решение задач о вытекающих волнах . . . . .	134
Приложение . . . . .	150
<b>ГЛАВА 4. Векторные задачи о собственных волнах</b> . . . . .	164
§ 1. Задача о собственных волнах волновода с размытой границей . . . . .	164
§ 2. Элементы теории сингулярных интегральных уравнений . . . . .	173
§ 3. Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического вол- новода в слоистой среде . . . . .	176
§ 4. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора . . . . .	183
Приложение . . . . .	188
<b>Литература</b> . . . . .	192

## Введение

Для оптоэлектроники последние годы характерны изучением и техническим освоением миниатюрных интегральных оптических схем (при изготовлении которых используются нано-материалы [43]) вместо классических электрических [21] и бурным развитием оптических телекоммуникационных технологий передачи данных на большие расстояния [54]. В проектировании и анализе современных оптических волноводных структур важную роль играет математическое моделирование и применение средств вычислительной техники [98]. На этом пути возникают задачи теории диэлектрических (оптических) волноводов [56].

Задачи о собственных волнах диэлектрических волноводов являются задачами поиска частных решений уравнений Максвелла в виде бегущих волн в неограниченных областях, удовлетворяющих условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности [19], [55]. В монографии задачи о собственных волнах диэлектрических волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде, решаются в полной векторной постановке и в скалярном приближении слабонаправляющих волноводов [56]. Несмотря на относительную простоту, это приближение широко используется при математическом моделировании оптических волноводов (см., напр., [10], [19], [30], [35], [36], [56]).

Наиболее полная информация получена о решениях относительно простой задачи о собственных волнах волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной окружающей среде [56]. Хорошо изучены свойства поверхностных собственных волн такого волновода. Собственные функции задачи (амплитуды собственных волн) в этом случае отвечают конечному числу собственных значений (постоянных распространения), принадлежащих ограниченному интервалу вещественной оси. Отличительными особенностями поверхностных собственных волн являются экспоненциальное убывание

на бесконечности их амплитуд и симметричность соответствующего дифференциального оператора.

В работе Б.З. Каценеленбаума [34] на основе анализа характеристического уравнения, полученного методом разделения переменных, было доказано существование другого типа собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с постоянным вещественным показателем преломления. Они получили название вытекающих. Вытекающие собственные волны имеют экспоненциально возрастающие на бесконечности амплитуды. При рассмотрении задач о вытекающих собственных волнах возникают несамосопряженные дифференциальные операторы, а соответствующие постоянные распространения являются комплексными.

Важно отметить, что, как было доказано в работе [34], постоянные распространения собственных волн указанных двух типов непрерывно зависят от радиуса волновода, показателей преломления волновода и окружающей среды, частоты электромагнитных колебаний. С их изменением собственные волны могут трансформироваться из одного типа в другой.

Несколько десятилетий значительные усилия исследователей были направлены на построение алгоритмов расчета поверхностных собственных волн. Разработано большое количество методов, приспособленных для областей специальной формы. Так, для расчета диэлектрических волноводов неоднородного заполнения с поперечным сечением, близким к круговому, широкое применение нашли лучевой метод, метод нормальных волн и асимптотические методы [18], [56]. Известно точное решение задачи о собственных волнах однородного диэлектрического волновода эллиптического поперечного сечения, полученное методом разделения переменных [41].

Для расчета волноводов с произвольным контуром поперечного сечения применялся метод коллокации (в дифференциальной постановке) [93], [94], вариационные методы [5], [10], [11] и различные модификации метода частичных областей [5], [7], [16], [38], [60], [103], [110].

Для решения задач о поверхностных собственных волнах диэлектрических волноводов с неоднородным заполнением применялся метод ко-

нечных разностей [1], [22], [52], [53].

В работах [23], [42], [89] для расчета поверхностных собственных волн диэлектрических волноводов с постоянным показателем преломления применялись граничные интегральные уравнения, построенные на основе формулы Грина. Теоретического обоснования этого метода в указанных работах проведено не было.

Основное внимание исследователей прежде всего было направлено на построение алгоритмов, анализ и интерпретацию полученных численных результатов. Важные и сложные вопросы существования решений, сходимости применяемых численных методов либо не рассматривались, либо оставались исследованными недостаточно подробно.

Наибольшего прогресса при численном решении задач о поверхностных собственных волнах линейных изотропных волноводов в однородной окружающей среде, по-видимому, удалось достичь Р.З. Даутову и Е.М. Карчевскому на пути применения и обоснования метода точных нелокальных граничных условий [19]. Этот метод оказался чрезвычайно эффективным и при исследовании существования решений указанных задач.

В работах С.И. Соловьева [111], Е.М. Карчевского и С.И. Соловьева [58] предложен другой метод исследования разрешимости этих задач, основанный на специальных вариационных постановках на всей плоскости. Эти постановки позволили применить для анализа методы спектральной теории вполне непрерывных операторов. Благодаря работам Р.З. Даутова, Е.М. Карчевского [19], С.И. Соловьева [111], Е.М. Карчевского и С.И. Соловьева [58] можно утверждать, что теория разрешимости задач о поверхностных собственных волнах линейных изотропных волноводов в однородной окружающей среде построена с исчерпывающей полнотой.

Однако, многие важные для приложений вопросы, связанные с анизотропией, нелинейностью сред, распространением электромагнитных волн в неоднородных неограниченных областях, вытеканием энергии в окружающую среду остаются еще относительно слабо изученными.

Достаточно эффективные и универсальные алгоритмы решения задач дифракции в бесконечных областях основаны на переходе к интегральным уравнениям [104], [39], [37], [49]. Такой подход позволяет, в частности,

точно учесть поведение решений задач дифракции на бесконечности. Он применим для нелинейных и анизотропных сред. Разработке и обоснованию численных методов решения интегральных уравнений теории дифракции посвящено большое количество работ (см., напр., [4], [12]–[15], [24], [26], [27], [37], [40], [46], [47], [49], [72]).

Значительное внимание привлекают задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических структурах с размытой границей, то есть не имеющих четкой границы раздела сред (см., напр., [81], [49] и цитированную там литературу). В частности, при постановке спектральных задач теории диэлектрических волноводов, часто делается предположение о том, что характеристики волновода плавно переходят в характеристики окружающей среды (см., напр., [105], [92]). Эта модель наиболее адекватна для определения собственных волн естественных природных волноводов и искусственных волноводов, изготовленных методом диффузии. Метод граничных интегральных уравнений в этом случае применять не удается.

Метод сведения трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле с размытой границей к интегральному уравнению Фредгольма второго рода по области неоднородности был предложен в работе С. Muller [104], использован в работе D. Colton, R. Kress [81] при анализе существования и единственности решения задачи дифракции.

Применительно к спектральной теории диэлектрических волноводов метод интегральных уравнений значительное развитие получил в работах Ю.Г. Смирнова и его учеников (см. [55] и цитированную там литературу). Для задач о поверхностных собственных волнах нелинейных волноводов получены постановки в виде спектральных задач для нелинейных интегральных операторов. Доказано существование их решений методом сжимающих отображений и обоснованы итерационные методы приближенного решения.

В монографии Р.З. Даутова и Е.М. Карчевского [19] методом интегральных уравнений для ряда общих задач о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах линейных волноводов, получены результаты о качественных свойствах спектра, разработаны и обоснованы численные

алгоритмы решения спектральных задач для волноводов с постоянным показателем преломления, основанные на аппроксимации граничных интегральных уравнений методом Галеркина.

В этом контексте необходимо упомянуть и о близких спектральных задачах теории дифракции — задачах о собственных волнах щелевых и плосковых линий. В работах А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова, Ю.В. Шестопалова, Е.В. Чернокожина (см. [28], [108] и цитированную там литературу) указанные задачи формулируются как задачи поиска характеристических чисел фредгольмовых голоморфных оператор-функций, полученные на основе метода интегральных уравнений. В работах этих авторов анализируются качественные свойства характеристического множества: локализация, дискретность, существование характеристических чисел. Исследования опираются на общую теорию нелинейных спектральных задач, развитую в работах [17], [33]. Предлагаются и исследуются проекционные методы расчета волноведущих структур. При обосновании численных методов используются результаты [2], [3] о проекционных методах решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

Решения задач в указанных работах разыскивались в классах функций, удовлетворяющих на бесконечности парциальным условиям излучения. Парциальные условия излучения были введены А.Г. Свешниковым в работе [50]. Применение этих условий в задачах о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов позволяет разыскивать наряду с поверхностными и вытекающие собственные волны [19], [31], [87], [105].

Вытекающие собственные волны диэлектрических волноводов играют важную роль в анализе эффектов излучения и преобразования волн, возникающих в задачах о стыковке [102] и изгибе волноводов [116], а также в задачах излучения при анизотропии волноводов [109], [99].

В связи с этим в последнем десятилетии начали разрабатываться универсальные методы, предназначенные для расчета вытекающих волн. Так, в работе [79] для поиска вытекающих волн диэлектрических волноводов с постоянным показателем преломления применялся метод гранич-

ных интегральных уравнений. Интегральные представления решений, основанные на формуле Грина, в сочетании с методом конечных элементов использовались для расчета вытекающих собственных волн неоднородных диэлектрических волноводов в статье [82]. Доказательства сходимости предлагаемых методов в этих работах проведено не было.

При моделировании природных волноводов и интегрированных оптических схем, т.е. сочетающих цилиндрические и плоско-слоистые направляющие структуры (см., напр., [91]), возникает задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде. Такой характер окружающей среды существенно усложняет исследование задачи. В работе A.S. Bonnet-Ben Dhia и P. Joly [77] методами спектральной теории неограниченных самосопряженных операторов доказано существование решений задачи в частном случае волновода прямоугольной формы на бесконечной подложке.

Для численного решения этой задачи широко применяется двумерное сингулярное интегральное уравнение по области поперечного сечения волновода [74], [76], [97], [112]. В работе H.P. Urbach [115] установлена нетеровость соответствующего интегрального оператора в случае однородной окружающей среды, а также доказана непустота его спектра.

Ранее подход, основанный на сочетании метода конечных элементов и интегрального представления решений вне области поперечного сечения волновода с использованием соответствующей функции Грина, применялся в статье [78] для поиска поверхностных собственных волн слабонаправляющих волноводов в плоско-слоистой среде. Важно отметить, что в этой работе не было проведено исследования сходимости метода, однако, было доказано существование решения задачи и изучены свойства собственных волн.

Известна физическая постановка задачи о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде (состоящей из двух слоев) в предположении о том, что показатель преломления слоя, в котором находится волновод, сильно отличается в большую сторону от показателя преломления второго слоя [10]. Это предположение приводит к задаче о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупро-

странстве [10].

В работе Е.М. Карчевского и С.И. Соловьева [57] для исследования собственных волн неоднородных слабонаправляющих волноводов, удовлетворяющих парциальным условиям излучения, использовалось двумерное слабо сингулярное интегральное уравнение по области поперечного сечения волновода. В частном случае поверхностных волн соответствующий оператор самосопряженный. Это позволило доказать непустоту его спектра. Доказано, что характеристическое множество общей задачи о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах может состоять лишь из изолированных точек соответствующей оператор-функции, являющихся ее характеристическими значениями, непрерывно зависящими от несектральных параметров.

Построенное в [57] уравнение может быть использовано и для численного решения задачи, например, методом коллокации. Это один из наиболее эффективных с точки зрения экономии вычислительных ресурсов методов решения линейных и нелинейных спектральных задач для многомерных интегральных уравнений [114].

Подводя итог, можно утверждать, что наибольшего прогресса в задачах о собственных волнах неоднородных слабонаправляющих волноводов удалось достичь при анализе поверхностных волн волноводов в однородной среде (доказано существование поверхностных волн, изучены их свойства, теоретически обоснован численный метод их поиска [19], [58]). Теоретически обоснованные методы расчета вытекающих волн волноводов, находящихся в однородной среде, могут быть разработаны на основе известной нелинейной спектральной задачи для двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения [57]. Численные методы для задачи о поверхностных волнах волновода в плоско-слоистой среде развиты относительно слабо, однако вопросы существования и свойства ее решения хорошо изучены [78]. Для задачи о поверхностных волнах волновода в полупространстве известна лишь физическая постановка [10]. Постановка задачи о вытекающих собственных волнах волновода в полупространстве не известна, но эта задача может быть сформулирована аналогично задачам о собственных волнах щелевых и полосковых линий [28], [108].

Таким образом, проблемы исследования математических моделей спектральной теории слабонаправляющих диэлектрических волноводов являются весьма актуальными. Прежде всего, целью данной работы является получение новой формулировки задачи и исследование в рамках единой математической модели свойств поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода, находящегося в полупространстве. Актуальным является исследование вопросов существования решения этой задачи.

Актуальной является проблема разработки теоретически обоснованных общих методов вычисления собственных волн всех известных типов неоднородных слабонаправляющих диэлектрических волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде. Актуальной является проблема реализации этих методов в виде комплексов программ, тестирование и анализ эффективности методов.

Что касается задачи о собственных волнах цилиндрического волновода в плоско-слоистой среде, то свойства оператора двумерного сингулярного интегрального уравнения, к нелинейной спектральной задаче для которого она сводится, изучены слабо. Актуальной является проблема доказательства фредгольмовости этого оператора, что необходимо для обоснования численных методов решения указанной задачи.

В первой главе монографии формулируются основные уравнения спектральной теории диэлектрических уравнений; строятся электромагнитные потенциалы; выводятся условия на границах раздела сред; описывается поведение амплитуд собственных волн на бесконечности и описывается скалярное приближение слабонаправляющего волновода. Отдельный параграф посвящен решению задачи о собственных волнах волновода кругового сечения методом разделения переменных. Подготовленный читатель эту главу может пропустить.

Во второй главе сформулирована нелинейная спектральная задача для двумерного слабо сингулярного интегрального уравнения, удобная для теоретического исследования и численного решения общей задачи о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах неоднородного слабонаправляющего диэлектрического волновода, находящегося в полупро-

странстве. Установлена эквивалентность этой задачи исходной спектральной задаче для уравнения Гельмгольца. Исследованы вопросы локализации и дискретности спектра.

Задачи о поверхностных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде эквивалентным образом сведены к параметрическим линейным спектральным задачам для интегральных операторов с симметричными, положительными, слабо полярными ядрами. Доказано существование решения задачи о поверхностных волнах волновода в полупространстве, проанализированы его свойства.

В третьей главе монографии построен и теоретически обоснован метод коллокации численного решения спектральных задач для двумерных слабо сингулярных интегральных уравнений: линейных, эквивалентных задачам о поверхностных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде; и нелинейных, эквивалентных общим спектральным задачам о (поверхностных и вытекающих) собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде и полупространстве.

Решен ряд конкретных задач теории диэлектрических волноводов, проанализирована скорость сходимости и показана практическая эффективность предлагаемого метода путем сравнения решений с точными решениями и результатами, полученными другими авторами. Рассчитаны поверхностные и вытекающие собственные волны ряда неисследованных ранее волноводов в полупространстве и слоистой среде. Результаты второй и третьей глав опубликованы в [62]–[71], [83]–[85].

В четвертой главе решаются векторные задачи о собственных волнах в полной электродинамической постановке. Задача о собственных волнах волновода с размытой границе сводится к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции, изучаются свойства ее характеристического множества. Для задачи о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде доказывается фредгольмовость двумерного сингулярного интегрального оператора.

Вторая и третья главы написаны по результатам кандидатской диссертации А.Г. Фролова, выполненной под руководством Е.М. Карчевского [61]. Первая и четвертая главы написаны Е.М. Карчевским.

ГЛАВА 1  
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

§ 1. Уравнения для амплитуд собственных волн

Спектральная теория диэлектрических волноводов основывается на следующих однородных уравнениях Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения (используется декартова система координат):

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)^T, \quad \mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)^T$$

есть векторы напряженности электрического и магнитного поля с координатами

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

$x_1, x_2, x_3$  — пространственные переменные;  $t$  — время;  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  — диэлектрическая проницаемость;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $n$  — показатель преломления;  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Векторная операция  $\operatorname{rot}$  в декартовой системе координат определена равенством:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_2 - \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_3 \\ \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_3 - \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_1 \\ \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_1 - \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть цилиндрический диэлектрический волновод является бесконечно длинным и находится в неограниченном пространстве с постоянным показателем преломления  $n_\infty > 0$ . Будем считать, что образующая цилиндра параллельна оси  $Ox_3$ , показатель преломления  $n$  внутри цилиндра не зависит от  $x_3$  и является вещественной функцией пространственных

переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В дальнейшем символом  $x$  будем обозначать вектор с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

Мы будем изучать собственные волны, то есть решения системы уравнений Максвелла (1), имеющие вид

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix} (x, x_3, t) = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (x) \exp(i(\beta x_3 - \omega t)) \right). \quad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^T, \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$$

есть комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ ;  $\omega > 0$  — частота электромагнитных колебаний;  $\beta$  — комплексный параметр, который называется продольной постоянной распространения.

В задачах о собственных волнах диэлектрических волноводов нужно найти такие значения  $\omega$  и  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений Максвелла (1), имеющие вид (2), удовлетворяющие условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода.

Построим уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных волн. Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость поперечного сечения волновода  $\{x_3 = \text{const}\}$ . Пусть  $\Omega$  — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ее граница  $\Gamma$  — гладкая кривая;  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим следующее:  $n$  — гладкая вещественная функция в области  $\Omega$ ;  $n = n_\infty = \text{const}$  при  $x \in \Omega_\infty$ ;

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0;$$

функция  $n$  может иметь разрыв первого рода на контуре  $\Gamma$ . Схематическое изображение поперечного сечения волновода приведено на рисунке 1.

Подставляя векторы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  вида (2) в уравнения Максвелла (1), получим систему уравнений

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (3)$$

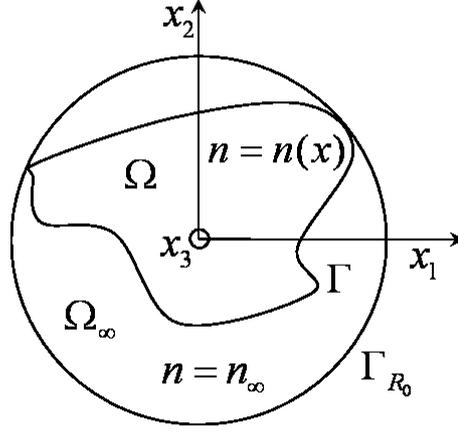


Рис. 1. Схематическое изображение поперечного сечения цилиндрического диэлектрического волновода в однородной окружающей среде

где векторная операция  $\text{rot}_{\beta}$  определена равенством

$$\text{rot}_{\beta}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \partial E_3/\partial x_2 - i\beta E_2 \\ i\beta E_1 - \partial E_3/\partial x_1 \\ \partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Пусть  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3, )^T(x)$  и  $u = u(x)$  — достаточно гладкие вектор-функция и скалярная функция соответственно. Введем дифференциальные операторы:

$$\text{div}_{\beta}\mathbf{F} = \partial F_1/\partial x_1 + \partial F_2/\partial x_2 + i\beta F_3,$$

$$\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2,$$

$$\text{grad}_{\beta}u = (\partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2, i\beta u)^T,$$

$$\text{gradu} = (\partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2, 0)^T.$$

Непосредственными вычислениями легко проверить справедливость следующих формул:

$$\text{div}_{\beta}(\text{grad}_{\beta}u) = \Delta u - \beta^2 u, \quad (5)$$

$$\text{div}_{\beta}(\text{rot}_{\beta}\mathbf{F}) = 0, \quad (6)$$

$$\text{div}_{\beta}(u\mathbf{F}) = u\text{div}_{\beta}\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \text{gradu}, \quad (7)$$

$$\text{rot}_{\beta}(\text{grad}_{\beta}u) = 0, \quad (8)$$

$$\text{rot}_{\beta}(\text{rot}_{\beta}\mathbf{F}) = -\Delta\mathbf{F} + \beta^2\mathbf{F} + \text{grad}_{\beta}(\text{div}_{\beta}\mathbf{F}), \quad (9)$$

$$\Delta(\text{div}_{\beta}\mathbf{F}) = \text{div}_{\beta}(\Delta\mathbf{F}). \quad (10)$$

Здесь и далее символом “ $\cdot$ ” обозначено скалярное произведение векторов.

**Утверждение 1.1.** Пусть  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — нетривиальное решение системы уравнений (3). Тогда для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E}) = k^2 n^2 \mathbf{E}, \quad (11)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (n^{-2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}) = k^2 \mathbf{H}, \quad (12)$$

$$\operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E}) = 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{div}_\beta \mathbf{H} = 0, \quad (14)$$

где  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Равенства (11) и (12) легко получить, применив операцию  $\operatorname{rot}_\beta$  к правым и левым частям уравнений (3). Для того чтобы получить равенства (13) и (14), надо применить к правым и левым частям уравнений (3) операцию  $\operatorname{div}_\beta$  и воспользоваться формулой (6).  $\square$

Вещественный параметр  $k$  называется продольным волновым числом.

**Утверждение 1.2.** Пусть  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — нетривиальное решение системы уравнений (3); показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ . Тогда в  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (16)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функция  $n$  принимает при  $x \in \Omega_\infty$  постоянное значение  $n_\infty > 0$ . По предположению в области  $\Omega$  функция  $n$  также принимает положительное постоянное значение  $n_+$ . Таким образом, применяя к уравнениям (11), (12) формулу (9), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{E}) &= k^2 n_+^2 \mathbf{E}, & x \in \Omega, \\ -\Delta \mathbf{H} + \beta^2 \mathbf{H} + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{H}) &= k^2 n_+^2 \mathbf{H}, & x \in \Omega, \\ -\Delta \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{E}) &= k^2 n_\infty^2 \mathbf{E}, & x \in \Omega_\infty, \\ -\Delta \mathbf{H} + \beta^2 \mathbf{H} + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{H}) &= k^2 n_\infty^2 \mathbf{H}, & x \in \Omega_\infty. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, равенства (14) и равенства

$$\operatorname{div}_{\beta} \mathbf{E} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

справедливого при сделанных предположениях относительно  $n$  в силу уравнения (13), получаем требуемое утверждение.  $\square$

## § 2. Электромагнитные потенциалы

Для определения комплексных амплитуд собственных волн на плоскости нужно найти нетривиальные решения системы уравнений (3), то есть определить шесть скалярных функций, являющихся компонентами векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Во многих случаях оказывается удобным ввести некоторые вспомогательные функции, называемые электромагнитными потенциалами, через которые определенным образом выражаются амплитуды собственных волн. Введем в рассмотрение электромагнитные потенциалы, следуя [25].

**Определение 1.1.** Вектор-функция  $\mathbf{A}(x)$  и скалярная функция  $\varphi(x)$  называются векторным потенциалом и скалярным потенциалом векторного поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , если справедливо представление

$$\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{A} - \operatorname{grad}_{\beta}\varphi, \quad (17)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}_{\beta}\mathbf{A}. \quad (18)$$

**Утверждение 1.3.** Для любых ненулевых векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющих системе уравнений (3), существует векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и скалярный потенциал  $\varphi$ . Если потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  связаны друг с другом условием Лоренца,

$$\operatorname{div}_{\beta}\mathbf{A} = i\omega\varepsilon_0 n_{\infty}^2 \varphi, \quad (19)$$

то они для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям:

$$[\Delta + (k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2)] \mathbf{A} = -\mathbf{J}, \quad (20)$$

$$[\Delta + (k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2)] \varphi = -\rho, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -i\omega\varepsilon_0(n^2 - n_\infty^2)\mathbf{E}, \\ \rho &= -\mathbf{E} \cdot (n^{-2}\text{grad}n^2). \end{aligned} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ненулевые векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют системе уравнений (3). Поскольку в силу утверждения 1.1

$$\text{div}_\beta \mathbf{H} = 0,$$

то существует такая вектор-функция  $\mathbf{A}$ , что имеет место представление (18). Подставим (18) в первое из уравнений (3) и получим равенство

$$\text{rot}_\beta(\mathbf{E} - i\omega\mu_0\mathbf{A}) = 0.$$

Следовательно, существует такая скалярная функция  $\varphi$ , что справедливо равенство (17). Таким образом, любое нетривиальное решение системы уравнений (3) может быть выражено через функции  $\mathbf{A}(x)$  и  $\varphi(x)$ .

Определим теперь, каким уравнениям удовлетворяют потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ . Подставим представления (18) и (17) во второе из уравнений (3). В результате получим равенство

$$\text{rot}_\beta(\text{rot}_\beta\mathbf{A}) - k^2n_\infty^2\mathbf{A} = i\omega\varepsilon_0n_\infty^2\text{grad}_\beta\varphi + \mathbf{J}, \quad (23)$$

где вектор-функция  $\mathbf{J}$  определена по формуле (22). Из уравнения

$$\text{div}_\beta(n^2\mathbf{E}) = 0,$$

формулы (7) и представления (17) получаем цепочку равенств:

$$0 = n^2\text{div}_\beta\mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \text{grad}n^2 = n^2\text{div}_\beta(i\omega\mu_0\mathbf{A} - \text{grad}_\beta\varphi) + \mathbf{E} \cdot \text{grad}n^2.$$

Отсюда и из формулы (5) следует, что

$$-i\omega\mu_0\text{div}_\beta\mathbf{A} + \Delta\varphi - \beta^2\varphi = \mathbf{E} \cdot (n^{-2}\text{grad}n^2). \quad (24)$$

Как известно [25], в силу неоднозначности определения потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  можно наложить на них дополнительное условие, которое позволит упростить уравнения (23) и (24). Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  удовлетворяют условию Лоренца (19). Тогда из (23) и (24) при помощи формулы (9) получим уравнения (20) и (21).  $\square$

**Определение 1.2.** Вектор-функция  $\Pi(x)$  называется вектором Герца или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , если справедливо представление

$$\mathbf{E} = (k^2 n_\infty^2 + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta) \Pi, \quad (25)$$

$$\mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 n_\infty^2 \operatorname{rot}_\beta \Pi. \quad (26)$$

**Утверждение 1.4.** Для любого нетривиального решения  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  системы уравнений (3) существует поляризационный потенциал  $\Pi$ . Потенциал  $\Pi$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{n_\infty^2} (n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}. \quad (27)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выразим потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  через один вектор  $\Pi$ . Пусть

$$\varphi = -\operatorname{div}_\beta \Pi.$$

Тогда из условия Лоренца (19) имеем

$$\mathbf{A} = -i\omega \varepsilon_0 n_\infty^2 \Pi.$$

Отсюда и из (20), (21) получим два уравнения для  $\Pi$ , а именно уравнение

$$-\operatorname{div}_\beta [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = \mathbf{E} \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2) \quad (28)$$

и уравнение (27).

Проверим, что уравнение (28) является следствием уравнения (27). С этой целью докажем сначала справедливость равенства

$$\operatorname{div}_\beta ((n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}) = n_\infty^2 \mathbf{E} \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2). \quad (29)$$

Действительно, в силу (7)

$$\operatorname{div}_\beta ((n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}) = (n^2 - n_\infty^2) \operatorname{div}_\beta \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} (n^2 - n_\infty^2).$$

Из (13) и (7) следует, что

$$-\operatorname{div}_\beta \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} n^2).$$

Используя два последних равенства, получим уравнение (29). Пусть справедливо равенство (27). Применим к обеим частям равенства (27) операцию  $\operatorname{div}_\beta$ . Учитывая (29), придем к (28). Наоборот, из (28) и (29) имеем

$$-\operatorname{div}_\beta [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{div}_\beta ((n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}),$$

откуда следует, что достаточно потребовать от вектора  $\Pi$ , чтобы выполнялось уравнение (27).

Выразим теперь векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  через  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0\mathbf{A} - \operatorname{grad}_\beta\varphi = i\omega\mu_0(-i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \Pi) + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta \Pi = \\ &= (k^2 n_\infty^2 + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta) \Pi, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot}_\beta \mathbf{A} = -i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \operatorname{rot}_\beta \Pi. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно определению 1.2, вектор  $\Pi$  является поляризационным потенциалом.  $\square$

**Определение 1.3.** Скалярные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  называются потенциальными, если справедливы представления

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{-i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{E}_3 = u,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\mathbf{H}_3 = v.$$

**Утверждение 1.5.** Пусть показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ , и выполняются следующие условия:

$$\beta \neq \pm kn_+, \quad \beta \neq \pm kn_\infty. \quad (32)$$

Тогда для любого нетривиального решения  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  системы уравнений (3) существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ . Потенциальные

функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (33)$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ненулевые векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют системе уравнений (3). Запишем систему уравнений (3) в скалярном виде:

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - i\beta E_2 = i\omega\mu_0 H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - i\beta H_2 = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E_1, \quad (35)$$

$$i\beta E_1 - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = i\omega\mu_0 H_2, \quad i\beta H_1 - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E_2, \quad (36)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = i\omega\mu_0 H_3, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E_3. \quad (37)$$

Пусть  $u = E_3$ ,  $v = H_3$ . Уравнения (35), (36) запишем в виде двух систем относительно неизвестных функций  $E_1$ ,  $H_2$  и  $H_1$ ,  $E_2$ :

$$-i\omega\varepsilon_0 n^2 E_1 + i\beta H_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad (38)$$

$$i\beta E_1 - i\omega\mu_0 H_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1};$$

$$i\omega\mu_0 H_1 + i\beta E_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad (39)$$

$$i\beta H_1 + i\omega\varepsilon_0 n^2 E_2 = \frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Если выполняются условия (32), то определители систем уравнений (38) и (39) отличны от нуля. Следовательно, эти системы однозначно разрешимы. Решим их и получим представления (30) и (31). Таким образом, при сделанных предположениях существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ .

То, что потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (33), (34), непосредственно следует из утверждения 1.2. Заметим, что уравнения (33), (34) также можно получить, если подставить представления (30), (31) в равенства (37).  $\square$

### § 3. Условия на границах раздела сред

Если в пространстве имеются области, на границах которых показатель преломления  $n$  претерпевает разрыв, то на этих поверхностях раздела сред векторы напряженностей электромагнитного поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  также теряют гладкость. На поверхностях разрыва должны быть заданы определенные условия сопряжения для векторов электромагнитного поля.

Обозначим символом  $\Sigma$  поверхность раздела сред. Пусть  $\nu$  — единичный вектор нормали, а  $\tau$  — единичный вектор касательной в точке  $x$  поверхности  $\Sigma$ . Условия сопряжения на гладкой поверхности разрыва  $\Sigma$  заключаются в том, что при переходе через эту границу касательные составляющие векторов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  должны быть непрерывны (см., например, [25]):

$$\nu \times \mathcal{E}^+ = \nu \times \mathcal{E}^-, \quad x \in \Sigma, \quad (40)$$

$$\nu \times \mathcal{H}^+ = \nu \times \mathcal{H}^-, \quad x \in \Sigma. \quad (41)$$

Здесь  $\mathcal{E}^+$  — предельное значение функции  $\mathcal{E}$  из той области, куда направлен вектор нормали  $\nu$ ,  $\mathcal{E}^-$  — предельное значение функции  $\mathcal{E}$  из области противоположной относительно поверхности  $\Sigma$ ;  $\nu \times \mathcal{E}$  — векторное произведение векторов, которое в декартовых координатах определяется следующим образом:

$$\nu \times \mathcal{E} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть  $E$ ,  $H$  — ненулевые комплексные амплитуды собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (2). Тогда согласно (40), (41) функции  $E$ ,  $H$  должны удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad x \in \Sigma, \quad (42)$$

$$\nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \Sigma. \quad (43)$$

Приступим к выводу условий (40), (41). Пусть  $S$  — некоторая поверхность в трехмерном пространстве, ограниченная достаточно гладким контуром  $L$ ; через  $\nu$  и  $\tau$  обозначим единичный вектор внешней по отношению

к поверхности  $S$  нормали и единичный касательный вектор в точке контура  $L$ . Наряду с дифференциальной формой записи системы уравнений Максвелла (1) используется интегральная форма (см., напр., [45]):

$$\int_L \mathcal{E} \cdot \tau dl = - \int_S \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \cdot \nu ds, \quad (44)$$

$$\int_L \mathcal{H} \cdot \tau dl = \int_S \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \cdot \nu ds. \quad (45)$$

Выберем произвольную точку  $x \in \Sigma$ . Рассечем поверхность раздела сред  $\Sigma$  плоскостью  $P$ , проходящей через точку  $x$ , так, чтобы  $\nu \in P$ . Пусть касательный вектор  $\tau$  также принадлежит плоскости  $P$ . Обозначим через  $\kappa$  единичный вектор с началом в точке  $x$ , перпендикулярный плоскости  $P$ , такой, что выполняется следующее условие:

$$\tau = \kappa \times \nu. \quad (46)$$

Пусть  $S$  — круг радиуса  $\rho$  с центром в точке  $x$ , лежащий в плоскости  $P$ , а  $L$  — граница этого круга:

$$S = \{x \in P : |x| < \rho\}, \quad L = \partial S.$$

Применим систему уравнений Максвелла в интегральной форме (44), (45) к выбранной области  $S$  и устремим радиус  $\rho$  круга  $S$  к нулю. В результате получим два равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+ \cdot \tau - \mathcal{E}^- \cdot \tau &= 0, & x \in \Sigma, \\ \mathcal{H}^+ \cdot \tau - \mathcal{H}^- \cdot \tau &= 0, & x \in \Sigma. \end{aligned}$$

Отсюда, используя условие (46) и известную формулу векторной алгебры

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \times \mathcal{C} = \mathcal{C} \times \mathcal{A} \cdot \mathcal{B},$$

справедливую для произвольных векторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , получим две цепочки равенств:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-) \cdot \tau &= (\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-) \cdot \kappa \times \nu = \\ &= \nu \times (\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-) \cdot \kappa = 0, & x \in \Sigma, \\ (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^-) \cdot \tau &= (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^-) \cdot \kappa \times \nu = \\ &= \nu \times (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^-) \cdot \kappa = 0, & x \in \Sigma. \end{aligned}$$

В силу того что направление касательной  $\tau$  было выбрано произвольно (плоскость  $P$  можно вращать относительно нормали  $\nu$ ), два последних равенства справедливы для произвольного вектора  $\kappa$ , удовлетворяющего условию (46). Следовательно, выполняются условия сопряжения (40), (41).

Сформулируем теперь условия сопряжения, которым должны удовлетворять потенциальные функции  $u(x)$ ,  $v(x)$ , определяющие амплитуды собственных волн диэлектрического волновода с постоянным показателем преломления. В этом случае поверхность  $\Sigma$  параллельна оси  $Ox_3$ . Напомним, что  $\Gamma$  — гладкий контур, ограничивающий область  $\Omega$  на плоскости поперечного сечения волновода  $\{x_3 = \text{const}\}$ .

**Утверждение 1.6.** Пусть показатель преломления  $n$  принимает в области  $\Omega$  постоянное значение  $n_+$ , и выполняются условия

$$\beta \neq \pm kn_+, \quad \beta \neq \pm kn_\infty. \quad (47)$$

Тогда потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , определяющие по формулам (30), (31) любые ненулевые комплексные амплитуды  $E$  и  $H$  собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (2), удовлетворяют условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u^+ &= u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x \in \Gamma, \\ \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) &= \\ = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma, & \quad (48) \\ \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) &= \\ = \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \Gamma. & \end{aligned}$$

Здесь  $u^+(u^-)$  — предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ ,  $\partial u / \partial \nu$  — производная по внешней нормали к контуру  $\Gamma$ , а  $\partial u / \partial \tau$  — производная по касательной к контуру  $\Gamma$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $E$ ,  $H$  — ненулевые комплексные амплитуды собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (2). В рассматриваемом случае вектор

нормали  $\nu$  к любой точке  $x \in \Sigma$  перпендикулярен оси  $0x_3$ . Поэтому условия (42), (43) в координатной форме можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ E_1^+ & E_2^+ & E_3^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ E_1^- & E_2^- & E_3^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma, \quad (49)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ H_1^+ & H_2^+ & H_3^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ H_1^- & H_2^- & H_3^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma. \quad (50)$$

Следовательно, справедливы следующие условия на поверхности  $\Sigma$ :

$$x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^+ & E_2^+ \end{vmatrix} + E_3^+ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = \quad (51)$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^- & E_2^- \end{vmatrix} + E_3^- \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma,$$

$$x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^+ & H_2^+ \end{vmatrix} + H_3^+ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = \quad (52)$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^- & H_2^- \end{vmatrix} + H_3^- \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad x \in \Sigma.$$

Плоскость  $\mathbb{R}^2$  пересекает ось  $0x_3$  в произвольной точке  $x_3$ . Поэтому из условий сопряжения (51), (52) на поверхности  $\Sigma$  вытекают следующие условия на контуре  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} E_3^+ &= E_3^-, \quad H_3^+ = H_3^-, \quad x \in \Gamma, \\ \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^+ & E_2^+ \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ E_1^- & E_2^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Gamma, \\ \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^+ & H_2^+ \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ H_1^- & H_2^- \end{vmatrix}, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (53)$$

При сделанных предположениях, согласно утверждению 1.5, существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , для которых справедливы представления (30), (31). Следовательно, первые два условия (48) вытекают из (53) очевидным образом. Проверим справедливость последних

двух условий (48). Подставим представления (30), (31) в последние два равенства (53) и получим условия относительно функций  $u(x)$  и  $v(x)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left| \begin{array}{cc} \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u^+}{\partial x_1} & -\mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u^+}{\partial x_2} \end{array} \right| = \\
& = \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left| \begin{array}{cc} \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u^-}{\partial x_1} & -\mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u^-}{\partial x_2} \end{array} \right|, \quad x \in \Gamma, \\
& \frac{1}{k^2 n_\infty^2 - \beta^2} \left| \begin{array}{cc} \nu_1 & \nu_2 \\ \beta \frac{\partial v^+}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial x_2} & \beta \frac{\partial v^+}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n_\infty^2 \omega \frac{\partial u^+}{\partial x_1} \end{array} \right| = \\
& = \frac{1}{k^2 n_+^2 - \beta^2} \left| \begin{array}{cc} \nu_1 & \nu_2 \\ \beta \frac{\partial v^-}{\partial x_1} - \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial x_2} & \beta \frac{\partial v^-}{\partial x_2} + \varepsilon_0 n_+^2 \omega \frac{\partial u^-}{\partial x_1} \end{array} \right|, \quad x \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Из этих условий и равенств

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_2, \quad (54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \tau_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \tau_2 = -\frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \nu_1 \quad (55)$$

получим последние два из условий сопряжения (48).  $\square$

#### § 4. Поведение амплитуд собственных волн на бесконечности

Область  $\Omega_\infty$  является неограниченной; следовательно, для того чтобы полностью сформулировать задачу о собственных волнах диэлектрического волновода, необходимо задать поведение комплексных амплитуд собственных волн  $E$  и  $H$  на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода  $\mathbb{R}^2$ . Это можно сделать разными способами, что определит разные решения задачи.

Первым классом собственных волн, который был исследован для цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения с вещественным постоянным показателем преломления, были *поверхностные* собственные волны, соответствующие вещественным постоянным распространения (см., напр., [56]). Амплитуды поверхностных собственных волн экспоненциально убывают на бесконечности в плоскости

поперечного сечения волновода и, следовательно, принадлежат пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . Соответствующие задачи на собственные значения являются самосопряженными. Позже было установлено [34], что поверхностные собственные волны волноводов кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления могут трансформироваться в *вытекающие собственные волны*, постоянные распространения которых находятся на “нефизическом” листе римановой поверхности квадратного корня. Эта трансформация происходит тогда, когда постоянные распространения мигрируют с вещественной оси “физического” листа на “нефизический” лист вследствие изменений неспектральных параметров, то есть геометрических, материальных параметров структуры или частоты электромагнитных колебаний. В [34] было замечено, что вытекающие собственные волны могут быть исследованы как решения более общей спектральной задачи без требования экспоненциального затухания их амплитуд. Более того, было указано, что амплитуды вытекающих собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов экспоненциально возрастают в плоскости поперечного сечения.

Несмотря на то что постоянные распространения вытекающих собственных волн лежат на листе римановой поверхности, который называется “нефизическим”, они играют очень важную роль с физической точки зрения при рассмотрении задач возбуждения электромагнитных волн. В частности, известно, что электромагнитные поля, которые могут быть возбуждены в диэлектрическом волноводе, имеют представление в виде конечной суммы поверхностных собственных волн, отвечающих вещественным постоянным распространения, лежащим на “физическом” листе, и интеграла от так называемых “волн излучения” (амплитуды которых лишь ограничены на бесконечности, и физический смысл которых до сих пор дискутируется, см., напр., [56]). Хотя вытекающие собственные волны сами не являются частью “правильного” спектрального представления поля, во многих случаях интеграл от волн излучения можно аппроксимировать бесконечной суммой вытекающих волн, представляющих ближнее поле, возбужденное в цилиндре. Часто сумма вытекающих волн может быть заменена всего одним слагаемым, обеспечивающим про-

стое аналитическое представление поля излучения в ближней зоне. Более того, различные особенности поведения поля излучения в дальней зоне, возбужденного источником в диэлектрическом волноводе конечной длины с вещественным показателем преломления, могут быть интерпретированы в терминах возбуждения вытекающих волн. Вытекающие собственные волны бесконечно длинных волноводов играют важную роль в анализе эффектов излучения и преобразования волн, возникающих в задачах о стыковке и изгибе волноводов, а также в задачах излучения при анизотропии волноводов. Некоторые свойства вытекающих собственных волн диэлектрических волноводов представлены в [56], [34].

В дополнение к теории вытекающих собственных волн в работе [6] было показано, что на “физическом” листе, но вне вещественной оси, также существуют комплексные постоянные распространения собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения с вещественным постоянным показателем преломления. Эти собственные волны получили название *комплексных*. Аналогичные результаты были получены численно для волноводов с произвольным контуром поперечного сечения, показатель преломления которых является непрерывной вещественной функцией во всей плоскости поперечного сечения [92]. Комплексные волны играют важную роль при изучении поведения полей рассеяния в ближней зоне диэлектрических волноводов конечной длины.

Важно отметить, что, как было показано в [6], [92], все известные типы собственных волн могут трансформироваться друг в друга вследствие изменения формы волновода, показателей преломления волновода и окружающей среды, а также частоты электромагнитных колебаний. При этом задачи о поиске комплексных и вытекающих собственных волн, в отличие от задач о поиске поверхностных собственных волн, не являются самосопряженными. Амплитуды вытекающих собственных волн, естественно, не принадлежат пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , в отличие от амплитуд комплексных и поверхностных волн.

Все это привело к необходимости сформулировать для амплитуд собственных волн произвольного волновода наиболее общие условия излу-

чения, которым удовлетворяли бы все известные решения. Это позволило, в частности, поставить задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в наиболее общем виде. Амплитуды всех известных типов собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода (поверхностных, вытекающих и комплексных) удовлетворяют на бесконечности в плоскости поперечного сечения парциальным условиям излучения. На это было указано в работе А.И. Носича [105], посвященной изучению функций Грина задач о собственных волнах волноводов с компактным поперечным сечением.

Парциальные условия излучения были введены А.Г. Свешниковым в работе [50], сформулированы и обоснованы им для внешней задачи дифракции на регулярном волноводе в статье [51]. Аналогичные условия применялись для корректной постановки задачи дифракции в работе Х. Рейхарда [107].

Использование парциальных условий излучения в задаче о собственных волнах волновода позволяет рассматривать комплексные постоянные распространения, принадлежащие некоторой римановой поверхности. Для вещественных постоянных распространения, лежащих на главном (“физическом”) листе этой поверхности, такие условия эквивалентны либо классическому условию излучения Зоммерфельда, либо условию экспоненциального затухания на бесконечности. Таким образом, парциальные условия, которые в отличие от условия Зоммерфельда применимы для комплексных постоянных распространения, можно рассматривать как обобщение этого условия. Парциальные условия можно рассматривать и как аналитическое продолжение условия Зоммерфельда по комплексному параметру (постоянной распространения) с части вещественной оси на соответствующую поверхность Римана.

**Определение 1.4.** Обозначим символом  $\Omega_R$  открытый круг радиуса  $R$ :

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\},$$

пусть  $\Gamma_R$  — граница этого круга, а  $R_0$  — положительная константа, такая, что  $\Omega \subset \Omega_{R_0}$ . Будем говорить, что функции  $E$ ,  $H$ , являющиеся решениями уравнения Гельмгольца (16), удовлетворяют парциальным условиям

излучения, если эти функции для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  разлагаются в ряды следующего вида:

$$\begin{bmatrix} \text{E} \\ \text{H} \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (56)$$

Здесь  $H_l^{(1)}$  — функции Ханкеля первого рода индекса  $l$  (см., напр., [73]), через  $(r, \varphi)$  обозначены полярные координаты точки  $x$ ,

$$\chi_{\infty} = \sqrt{k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2}.$$

Для функций  $\text{E}$ ,  $\text{H}$ , являющихся решениями уравнения Гельмгольца (16), ряды (56) сходятся абсолютно и равномерно во всякой области вида  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанные ряды можно дифференцировать почленно до любого порядка [8].

Обозначим символом  $\Lambda$  поверхность Римана функции  $\ln \chi_{\infty}(\beta)$ . Будем разыскивать комплексные постоянные распространения  $\beta \in \Lambda$  собственных волн, амплитуды которых удовлетворяют парциальным условиям излучения (56). Для того чтобы более детально обсудить эти условия на бесконечности, мы проанализируем строение поверхности Римана  $\Lambda$  и рассмотрим различные типы собственных волн, отвечающие постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на разных листах этой поверхности.

**1. Поверхность Римана  $\Lambda$ .** Для всех целых значений  $l$  функции Ханкеля  $H_l^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta)r)$  представимы в виде

$$H_l^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta)r) = c_l^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta)r) \ln(\chi_{\infty}(\beta)r) + R_l^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta)r), \quad (57)$$

где  $c_l^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta)r)$  и  $R_l^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta)r)$  — однозначные аналитические функции комплексного аргумента  $\beta$  (см., напр., [73]). Будем рассматривать функции  $H_l^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta)r)$  как однозначные аналитические функции на римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_{\infty}(\beta)$ .

Поверхность Римана  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов и имеет две точки ветвления  $\beta = \pm kn_{\infty}$ . В силу того что функцию

$$\chi_{\infty}(\beta) = \sqrt{k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2}$$

саму следует рассматривать как однозначную на двулистной поверхности Римана, поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов римановой поверхности логарифма  $\Lambda_m$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots$ , каждый из которых делится на два листа римановой поверхности квадратного корня  $\chi_\infty(\beta)$ :  $\Lambda_m^{(1)}$  и  $\Lambda_m^{(2)}$ . Всюду далее будем предполагать, что точки ветвления не принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$ .

Обозначим символом  $\Lambda_0^{(1)}$  главный (“физический”) лист римановой поверхности  $\Lambda$ , который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}. \quad (58)$$

С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  соединяется лист  $\Lambda_0^{(2)}$ , который называется “нефизическим” и определяется следующим образом:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}. \quad (59)$$

Все другие пары листов  $\Lambda_{m \neq 0}^{(1),(2)}$  отличаются от  $\Lambda_0^{(1),(2)}$  сдвигом аргумента  $\arg \chi_\infty(\beta)$  на  $2\pi m$  и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} -\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \\ \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(1)}; \\ -\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \\ \text{Im}(\chi_\infty(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(2)}. \end{aligned} \quad (60)$$

Лист  $\Lambda_0^{(2)}$  соединен с листом  $\Lambda_0^{(1)}$  вдоль разреза, выбранного в соответствии с условием  $\text{Im}(\chi_\infty(\beta)) = 0$  на  $\Lambda_0^{(1)}$ , то есть проходящего по мнимой оси и интервалу  $(-kn_\infty, kn_\infty)$  вещественной оси. Листы  $\Lambda_{\pm 1}^{(2)}$  соединяются с листом  $\Lambda_0^{(2)}$  вдоль разреза, проходящего по вещественной оси так, что  $|\beta| > kn_\infty$ .

**2. Поверхностные, комплексные и вытекающие волны.** Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ , а листа  $\Lambda_0^{(2)}$  — символом  $\mathbb{R}_0^{(2)}$ . Пусть  $G$  — объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}. \quad (61)$$

Символом  $C_0^{(1)}$  обозначим множество

$$C_0^{(1)} = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Re}\beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)}. \quad (62)$$

Постоянные распространения  $\beta$  *поверхностных, комплексных и вытекающих* волн принадлежат множествам  $G \subset \Lambda_0^{(1)}$ ,  $C_0^{(1)} \subset \Lambda_0^{(1)}$  и  $\Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$  соответственно.

Функции Ханкеля первого рода при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  имеют следующую асимптотику (см., напр., [73]):

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_\infty r}} \exp \left[ i \left( \chi_\infty r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi_\infty r} \right) \right]. \quad (63)$$

Таким образом, если  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$ ,  $\text{Im}(\chi_\infty) \neq 0$ , и функции E, H удовлетворяют парциальным условиям излучения, то эти функции удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \exp(i\chi_\infty r) O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (64)$$

Нетрудно видеть, что для поверхностных и комплексных собственных волн  $\text{Im}(\chi_\infty) > 0$ . Следовательно, их амплитуды E, H экспоненциально убывают на бесконечности как  $\exp(-\text{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$ . Амплитуды E, H вытекающих собственных волн экспоненциально возрастают на бесконечности как  $\exp(-\text{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$ , потому что для них  $\text{Im}(\chi_\infty) < 0$ .

**3. Волны излучения.** Обозначим символом  $D$  множество

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Re}\beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty \right\}. \quad (65)$$

Спектр *волн излучения* принадлежит области  $D$ , и амплитуды каждой из волн излучения могут быть представлены в виде следующих сумм [100]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi) + \\ &+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} C_l \\ D_l \end{bmatrix} H_l^{(2)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  и  $H_l^{(2)}$  — функции Ханкеля второго рода индекса  $l$  (см., напр., [73]).

Функции Ханкеля второго рода при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  имеют следующую асимптотику (см., напр., [73]):

$$H_l^{(2)}(\chi_\infty r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_\infty r}} \exp \left[ -i \left( \chi_\infty r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi_\infty r} \right) \right]. \quad (66)$$

Нетрудно видеть, что для волн излучения  $\text{Im}(\chi_\infty) = 0$ . Таким образом, их амплитуды удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (67)$$

Парциальные условия излучения (56) для всех функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (16) при всех  $\beta \in D$ , эквивалентны условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\chi_\infty\right) \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (68)$$

Это было доказано в [8]. Там же было доказано, что условие (68) является более сильным, чем условие (67). Следовательно, амплитуды волн излучения не удовлетворяют парциальным условиям излучения (56). В дальнейшем мы докажем, что область  $D$  не может содержать собственных значений спектральных задач о собственных волнах, амплитуды которых удовлетворяют парциальным условиям излучения (56).

**4. Другие типы волн.** Из хорошо известного разложения (см., напр., [73]):

$$\begin{aligned} H_l^{(1)}(\chi_\infty \exp(i2\pi m)r) &= \alpha_l^{(m)} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) + \\ &+ \gamma_l^{(m)} H_l^{(2)}(\chi_\infty r), \quad \alpha_l^{(m)}, \gamma_l^{(m)} \neq 0, \end{aligned}$$

справедливого для всех  $m \neq 0$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и

$$\beta \in \bigcup_{m \neq 0} \left( \Lambda_m^{(1)} \cup \Lambda_m^{(2)} \right),$$

а также асимптотик (13), (66) следует, что постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на листах  $\Lambda_m^{(1)}$ ,  $\Lambda_m^{(2)}$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , отвечают собственные волны, амплитуды которых представляют собой суммы уходящих на бесконечность и приходящих из бесконечности цилиндрических волн.

Распределение постоянных распространения  $\beta \in \Lambda$  имеет симметрию, которая является следствием эквивалентности между положительным и отрицательным направлениями распространения собственных волн вдоль продольной оси  $Ox_3$ , а также положительным и отрицательным направлениями времени  $t$  (см., напр., [105]). А именно, если  $\beta$  — положительная

постоянная распространения, и  $E, H$  — амплитуды векторов электрической и магнитной напряженности соответствующей собственной волны, то  $-\beta$  также является постоянной распространения собственной волны с амплитудами  $-E, H$ . Далее, в силу того что  $\text{Im } \omega = 0$  и  $\text{Im } n = 0$ , комплексно-сопряженные числа  $\pm\bar{\beta}$  также являются постоянными распространения собственных волн с амплитудами  $[\mp\bar{E}, -\bar{H}]$ . Все эти факты могут быть легко проверены непосредственной подстановкой в дифференциальные уравнения (3), условия сопряжения (42), (43) и условия на бесконечности (56). Все упомянутые собственные волны называют *прямыми, обратными, сопряженными и обратно-сопряженными* волнами соответственно (см. [105]).

## § 5. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода

Сконструируем теперь уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных волн в приближении слабонаправляющего волновода [56], [10]. Это приближение широко применяется для исследования цилиндрических диэлектрических волноводов со слабо меняющимся в плоскости поперечного сечения показателем преломления.

**1. Представления для комплексных амплитуд собственных волн.** В случае волновода со слабо меняющимся показателем преломления  $n$  удобно воспользоваться выражением компонент комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  через составляющие  $H_1$  и  $H_2$ :

$$E_3 = \frac{1}{i\varepsilon\omega} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (69)$$

$$E_1 = \frac{\mu_0\omega}{\beta} H_2 - \frac{1}{\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (70)$$

$$E_2 = -\frac{\mu_0\omega}{\beta} H_1 - \frac{1}{\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (71)$$

$$H_3 = \frac{-1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right), \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (72)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  — диэлектрическая проницаемость. Эти представления легко получить из системы уравнений (3). Действительно, запишем уравнения (3) в декартовой системе координат в скалярном виде (35) – (37).

Представление (7) непосредственно следует из второго уравнения в (37). Подставим представление (7) во второе уравнение из (35) и второе уравнение из (36). Получим следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\omega\mu_0}{\beta}H_2 + \frac{1}{i\beta}\frac{\partial E_3}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\omega\mu_0}{\beta}H_2 - \frac{1}{\beta\omega}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{\omega\mu_0}{\beta}H_1 + \frac{1}{i\beta}\frac{\partial E_3}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{\omega\mu_0}{\beta}H_1 - \frac{1}{\beta\omega}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливы представления (5) и (6). Подставим теперь полученные выражения (5) и (6) для составляющих  $E_1$  и  $E_2$  в первое уравнение из (36). В результате получим

$$\begin{aligned} H_3 &= -\frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right) = \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0}\left\{-\frac{\omega\mu_0}{\beta}\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta\omega}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)\right]\right\} + \\ &+ \frac{1}{i\omega\mu_0}\left\{-\frac{\omega\mu_0}{\beta}\frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\beta\omega}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)\right]\right\} = \\ &= -\frac{1}{i\beta}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо представление (4).

**2. Дифференциальные уравнения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Из системы уравнений (3) вытекает, что составляющие  $H_1$  и  $H_2$  для всех  $x$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$[\Delta + (k^2n^2 - \beta^2)]H_1 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right), \quad (73)$$

$$[\Delta + (k^2n^2 - \beta^2)]H_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right). \quad (74)$$

Проверим сначала справедливость уравнения (74). Для этого подставим во второе уравнение из (35) полученные выражения (5) и (4) для компо-

нент  $E_1$  и  $H_3$ . В результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right) \right) - i\beta H_2 = \\ & = -i\omega\varepsilon \left( \frac{\omega\mu_0}{\beta} H_2 - \frac{1}{\beta\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Отсюда, после дифференцирования, получим равенство:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{i\beta} \left( \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_2^2} \right) - i\beta H_2 = \\ & = -i\omega\varepsilon \frac{\omega\mu_0}{\beta} H_2 + i\omega\varepsilon \frac{1}{\beta\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) + \\ & \quad + i\omega\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2} \right). \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части последнего равенства на  $i\beta$  и получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_2^2} + \beta^2 H_2 = \\ & = k^2 n^2 H_2 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из очевидного тождества

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}$$

следует, что уравнение (74) имеет место. Аналогичным образом, если подставить во второе уравнение из (36) выражения (6) и (4) для компонент  $E_2$  и  $H_3$ , можно получить уравнение (73).

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода показатель преломления мало меняется в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , правыми частями в системе (73), (74) можно пренебречь ([56], [10]). Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (75)$$

**3. Условия сопряжения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Построим теперь, следуя [56] и [10], условия, которым в приближении слабонаправляющего

волновода должны удовлетворять функции  $H_1, H_2$  на контуре  $\Gamma$ . Из условий сопряжения (42), (43) на границе  $\Gamma$  для касательных составляющих векторов комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  вытекают следующие условия сопряжения для компонент  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^-, \quad x \in \Gamma, \quad (76)$$

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} = \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Gamma, \quad (77)$$

$$\frac{\partial H_2^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_2^-}{\partial \nu} = -\nu_1 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Gamma. \quad (78)$$

Условия (76) непосредственно следуют из третьего условия сопряжения в (53). Проверим справедливость условия (77). Согласно определению производной по нормали, имеем

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} = \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} \nu_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \nu_1 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_2} \nu_2.$$

Прибавим и вычтем из правой части последнего равенства слагаемое

$$\frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} \nu_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \nu_1 - \\ &\quad - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_2} \nu_2 + \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2 - \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2. \end{aligned}$$

Из условия сопряжения (42) и представления (7) следует, что

$$\frac{\partial H_1^-}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right).$$

Объединим два последних равенства и получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} \nu_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \nu_1 - \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \nu_2 - \\ &\quad - \nu_2 \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Прибавим и вычтем из его правой части слагаемое

$$\frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \nu_2.$$

Учтем, что  $\nu_1 = \tau_2$ ,  $\nu_2 = -\tau_1$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} \tau_2 - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} \tau_2 + \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \tau_1 - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \tau_1 + \\ &+ \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Из второго условия сопряжения (53) и представления (4) следует, что

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^-}{\partial x_1} = \frac{\partial H_2^-}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_2}.$$

Из двух последних равенств получим следующее условие на контуре  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} &= \frac{\partial H_2^-}{\partial x_2} \tau_2 - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_2} \tau_2 + \frac{\partial H_2^-}{\partial x_1} \tau_1 - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \tau_1 + \\ &+ \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Запишем это условие, используя определение производной по касательной (55):

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} = \frac{\partial H_2^-}{\partial \tau} - \frac{\partial H_2^+}{\partial \tau} + \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right).$$

Так как справедливо условие (76), то есть предельные значения функции  $H_1$  изнутри и извне контура  $\Gamma$  совпадают, то предельные значения производной этой функции по касательной к контуру  $\Gamma$  также совпадают:

$$\frac{\partial H_2^-}{\partial \tau} = \frac{\partial H_2^+}{\partial \tau}.$$

Из двух последних равенств следует условие сопряжения (77). Аналогичным образом можно убедиться в справедливости условия сопряжения (78).

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода показатель преломления мало меняется в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , правые части в граничных условиях (77), (78) можно считать равными нулю (см., напр., [56], [10]). Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода функции  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют одним и тем же условиям сопряжения на контуре  $\Gamma$ :

$$H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^-, \quad x \in \Gamma, \quad (79)$$

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial H_2^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_2^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (80)$$

**4. Условия излучения для  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ .** Согласно результатам параграфа 4, функции  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  на бесконечности должны удовлетворять парциальным условиям излучения, а именно, для всех достаточно больших  $x$ , таких, что  $|x| \geq R_0$ , они должны разлагаться в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,l} \\ \mathbf{B}_{2,l} \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi). \quad (81)$$

Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода функции  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  удовлетворяют одному и тому же уравнению Гельмгольца (75), одинаковым условиям сопряжения (79), (80) и одинаковым условиям излучения (81) на бесконечности. Следовательно, в рассматриваемом приближении  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  являются решениями одной и той же задачи.

Подводя итог, еще раз подчеркнем, что скалярное приближение слабонаправляющего волновода заключается в том, что вместо того, чтобы разыскивать векторы комплексных амплитуд  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , ищется лишь одна скалярная функция  $u = \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (82)$$

$$u^+ = u^-, \quad x \in \Gamma, \quad (83)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (84)$$

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \quad (85)$$

Остальные компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяются затем по формулам (7) – (4).

## § 6. Собственные волны волноводов кругового поперечного сечения

Рассмотрим частный случай диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с функцией  $n$ , принимающей постоянные значения

внутри волновода и в окружающей среде. В этом случае исходные спектральные задачи (в полной электродинамической постановке и в приближении слабонаправляющего волновода) методом разделения переменных сводятся к семействам трансцендентных уравнений относительно  $\omega$  и  $\beta$  (см., напр., [56]).

**1. Векторная задача в полной электродинамической постановке.** Пусть  $R$  — радиус волновода,  $n_\infty > 0$  — показатель преломления окружающей среды и  $n_+ > n_\infty$  — показатель преломления волновода. Как было доказано в утверждении 1.5, для любой собственной волны существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , определяющие ее амплитуду. Потенциальные функции удовлетворяют следующим уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| > R.$$

где  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ . Применим для решения этих уравнений метод разделения переменных. Получим разложения

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} c_l \\ d_l \end{bmatrix} J_l(\chi_+ r) \exp(il\varphi), \quad |x| < R, \quad (86)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} a_l \\ b_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| > R. \quad (87)$$

Здесь  $\chi_+ = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$ ;  $J_n(\chi_+ r)$  — функции Бесселя порядка  $l$  [73]. В этих разложениях учтено, что искомые функции не должны иметь особенностей, и на бесконечности они удовлетворяют парциальным условиям излучения (56).

Из разложений (86), (87) и условий сопряжения (48) придем к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_l, b_l, c_l, d_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Коэффициенты матрицы этой системы нелинейно зависят от  $\omega$  и  $\beta$ . Матрица имеет такую

блочно-диагональную структуру, что исходная система распадается на бесконечное количество независимых систем из четырех уравнений. Если при некоторых  $\omega$  и  $\beta$  определитель какой-либо из этих систем обращается в нуль, то она имеет нетривиальное решение, определяющее собственную волну волновода. Из условия равенства нулю соответствующих определителей придем к семейству трансцендентных уравнений для определения параметров  $\omega$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} & \left( n_+^2 \chi_\infty \frac{J_l'(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} + n_\infty^2 \chi_+ \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) \times \\ & \times \left( \chi_\infty \frac{J_l'(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} + \chi_+ \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) = \\ & = \left( \frac{\beta k (n_+^2 - n_\infty^2) l}{\chi_\infty \chi_+ R^2} \right)^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (88)$$

Эти уравнения в теории волноводов носят название характеристических. Качественные свойства спектра могут быть изучены в данном случае на основе анализа характеристических уравнений методами теории функций комплексного переменного с использованием свойств функций Бесселя и Ханкеля.

Важные результаты относительно качественных свойств спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов кругового поперечного сечения были получены в [34] и [6]. В этих статьях было доказано что при  $\omega > 0$  у волноводов кругового сечения наряду с хорошо известными поверхностными собственными волнами (см., напр., [56]), отвечающими  $\beta \in G$ , существуют комплексные собственные волны [6], постоянные распространения  $\beta$  которых принадлежат  $C_0^{(1)}$ , и вытекающие собственные волны [34] с  $\beta \in \Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ .

На рисунке 2 показаны дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения — графики функций  $\beta = \beta(k)$ , где  $k > 0$ , а постоянные распространения  $\beta$  при каждом фиксированном  $k$  принадлежат интервалу  $G$ . Графики построены на основе поиска корней характеристических уравнений (88). Расчеты проведены для волновода единичного радиуса с показателем преломления  $n_+ = \sqrt{2}$ , находящегося в однородной

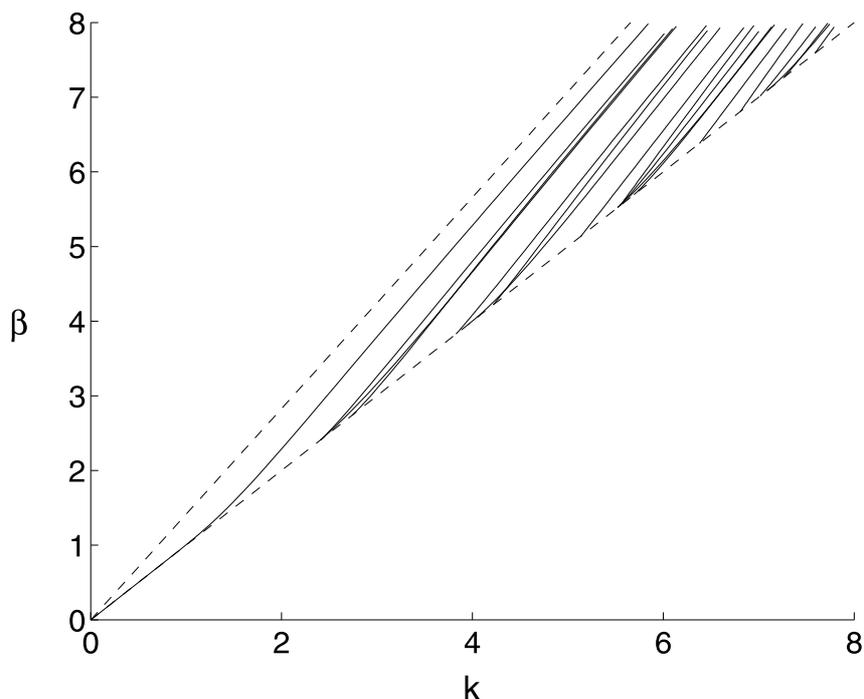


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения

окружающей среде с показателем преломления  $n_\infty = 1$ . Пунктирными линиями показаны границы области  $\{(k, \beta) : k > 0, \beta \in G\}$ .

Для любого сколь угодно малого значения  $k > 0$  существуют, по крайней мере, два линейно независимых решения задачи. Соответствующие собственные волны называются фундаментальными, или основными. Дисперсионная кривая для основных собственных волн кругового волновода одна, так как они для такого волновода являются вырожденными — одному значению постоянной распространения  $\beta$  соответствуют две волны с линейно независимыми амплитудами. При любом  $k > 0$  число решений задачи конечно и стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $\beta = kn_\infty$  называются критическими частотами, а соответствующие значения волновых чисел  $k$  — точками отсечки. Это точки, в которых начинаются дисперсионные кривые для не основных собственных волн. Дисперсионные кривые при  $k \rightarrow \infty$  имеют линейную асимптотику, а именно,  $\beta/k \rightarrow n_+$  при  $k \rightarrow \infty$ .

На рисунке 3 (заимствованном из статьи [6]) построены дисперсионные кривые для вытекающих и комплексных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения ра-

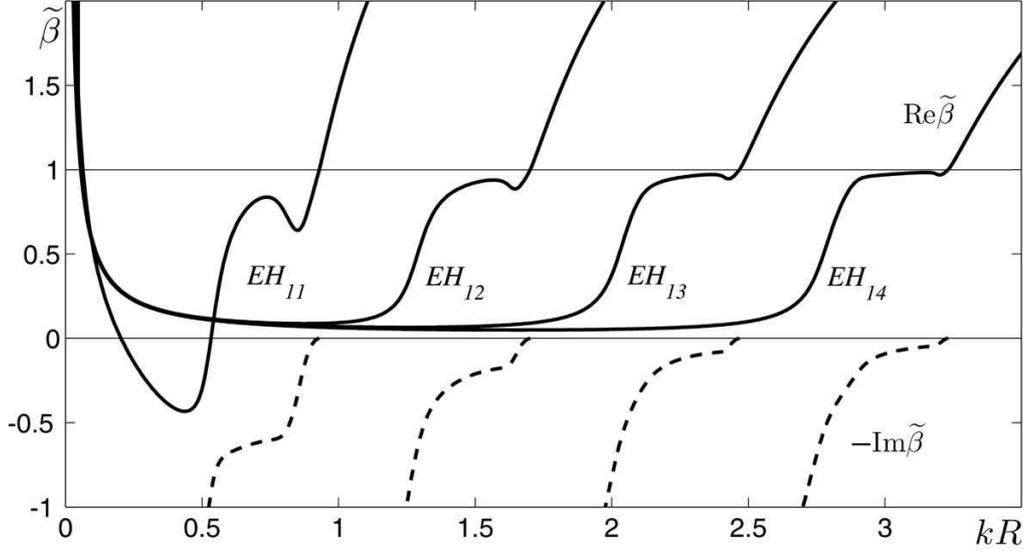


Рис. 3. Дисперсионные кривые для вытекающих и комплексных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения. Здесь  $\tilde{\beta} = \beta/(kn_\infty)$ ,  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1 + i\tilde{\beta}_2$ ,  $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $a$  — радиус волновода

диуса  $a$  — графики вещественных и мнимых частей функций  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(ka)$ , где  $\tilde{\beta} = \beta/(kn_\infty)$ . С уменьшением частоты колебаний  $\omega$ , при переходе через точки отсечки, поверхностные волны трансформируются в вытекающие с  $\beta \in \Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ . В рассмотренном случае при относительной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_+/\varepsilon_\infty = 18$  в ходе дальнейшего уменьшения  $\omega$  собственная волна  $EH_{11}$  трансформируется в комплексную, постоянная распространения  $\beta$  которой принадлежит  $C_0^{(1)}$ . Чем больше значение  $\tilde{\varepsilon}$ , тем большее количество вытекающих собственных волн преобразуются в комплексные с уменьшением  $\omega$ . Так, например, при  $\tilde{\varepsilon} > 50$  таких волн уже две:  $EH_{11}$  и  $EH_{12}$ , и так далее [6].

**2. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода.** Рассмотрим теперь задачу для волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянным показателем преломления  $n_+$ , настолько мало отличающимся от показателя преломления окружающей среды  $n_\infty < n_+$ , что может быть применено приближение слабонаправляющего волновода. Как было показано в параграфе 5, в этом случае необходимо определить функцию  $u = H_1 = H_2$ , удовлетворяющую внут-

ри круга и вне его уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n_+^2 - \beta^2)] u = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] u = 0, \quad |x| > R,$$

а на границе раздела сред условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial r} = \frac{\partial u^-}{\partial r}, \quad |x| = R.$$

Потребуем от функции  $u(x)$ , чтобы она удовлетворяла на бесконечности парциальным условиям излучения (85).

Поставленная задача может быть решена методом разделения переменных аналогично векторной задаче, рассмотренной в предыдущем пункте. В результате получим семейство характеристических уравнений для определения параметров  $\omega$  и  $\beta$ :

$$\chi_+ \frac{J_l'(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} = \chi_\infty \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (89)$$

Подробное изложение свойств различных типов собственных волн, отвечающих различным значениям  $\beta$ , можно найти, например, в книге [56]. Уравнение (89) имеет решения  $\beta$ , лежащие в области  $G$  “физического” листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ , которым отвечают поверхностные собственные волны, и решения  $\beta$ , лежащие на “нефизическом” листе  $\Lambda_0^{(2)}$ , которым отвечают вытекающие собственные волны. Однако, как показано в [56], уравнение (89) в отличие от уравнения (88) не имеет решений  $\beta$ , лежащих на “физическом” листе  $\Lambda_0^{(1)}$  вне вещественной оси. Другими словами, у слабонаправляющих волноводов кругового поперечного сечения не существует комплексных собственных волн.

На рисунке 4 (заимствованном из книги [56]) показаны дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения — графики функций  $U = U(V)$ , где  $U = kR \sqrt{\varepsilon_+ - (\beta/k)^2}$ , а  $V = kR \sqrt{\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty}$ . Дисперсионные кривые поверхностных волн лежат на рисунке правее прямой  $U = V$ , графики вещественных частей функции  $U = U(V)$  для вытекающих волн — левее этой прямой. Для любого

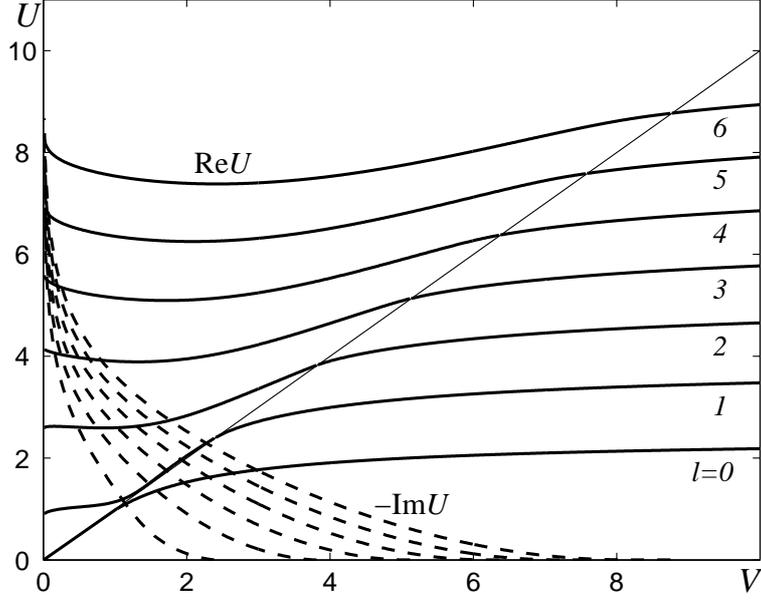


Рис. 4. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения. Здесь приняты следующие обозначения:  $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ ,  $U = kR\sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ .

сколь угодно малого значения  $k > 0$  существует, по крайней мере, одна поверхностная собственная волна. Она называется основной. При любом  $k > 0$  число поверхностных собственных волн конечно и стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Дисперсионные кривые поверхностных волн при  $V \rightarrow \infty$  имеют линейную асимптотику, а именно,  $U \rightarrow \text{const}$  при  $V \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $\beta = kn_\infty$ , называются критическими частотами, а соответствующие значения волновых чисел  $k$  — точками отсечки. В точках отсечки  $U = V$ . Это точки, в которых дисперсионные кривые поверхностных собственных волн с уменьшением  $\omega$  трансформируются в кривые вытекающих собственных волн. При любом  $k > 0$  число вытекающих собственных волн бесконечно.

## ГЛАВА 2

# ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ СЛАБОНАПРАВЛЯЮЩИХ ВОЛНОВОДОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ, ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ И СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

### § 1. Элементы спектральной теории оператор-функций

Дадим ряд определений и сформулируем необходимые нам результаты спектральной теории оператор-функций, изложенные в [17], [113]. Пусть  $\Lambda$  — открытая связная область комплексной плоскости  $\beta$ . Оператор-функцией на банаховом пространстве  $U$  называется функция  $A(\beta)$ , значениями которой являются линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства  $U$  в банахово пространство  $V$ , определенные при каждом  $\beta \in \Lambda$ .

Оператор-функция  $A(\beta)$  называется голоморфной в точке  $\beta_0 \in \Lambda$ , если существует такое  $p > 0$ , что при любом  $\beta$ ,  $|\beta - \beta_0| < p$ , оператор  $A(\beta)$  допускает разложение в сходящийся по норме операторов ряд

$$A(\beta) = A(\beta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta - \beta_0)^m A_m.$$

Обозначим  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : V \rightarrow U\}$  множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$ ,  $\sigma(A) = \Lambda \setminus \rho(A)$  — множество сингулярных точек оператора  $A(\beta)$  (это множество называют также характеристическим).

Линейный оператор  $A$  называется фредгольмовым, если он нормально разрешим и его индекс равен нулю, в частности, если он представим в виде суммы двух операторов, один из которых непрерывно обратим, а второй вполне непрерывен.

Ненулевая функция  $u \in U$  называется собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению

$\beta \in \Lambda$ , если

$$A(\beta)u = 0. \quad (1)$$

Справедлива следующая теорема [17].

**Теорема 2.1.** Пусть выполнены следующие условия.

- 1)  $\Lambda$  — область (открытое связное множество) в комплексной плоскости,  $A(\beta)$  — голоморфная на  $\Lambda$  оператор-функция.
- 2) При каждом фиксированном  $\beta \in \Lambda$  оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.
- 3) Множество  $\rho(A) \neq \emptyset$ , то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ .

Тогда множество  $\sigma(A)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ .

Пусть  $A(\beta, \omega)$  — оператор-функция двух параметров: комплексного параметра  $\beta \in \Lambda$  и  $\omega \in \mathbb{R}$ , где  $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел. Исследование зависимости характеристических значений  $\beta$  от несектрального параметра  $\omega$  может быть проведено с помощью следующей теоремы [113].

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены следующие условия.

- 1)  $\Lambda$  — область (открытое связное множество) в комплексной плоскости. При каждом фиксированном  $\omega \in \mathbb{R}$  оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta, \omega)$  непрерывна по  $(\beta, \omega) \in \Lambda \times \mathbb{R}$ .
- 2) При каждом фиксированном  $\beta \in \Lambda$  и  $\omega \in \mathbb{R}$  оператор  $A(\beta, \omega)$  представим в виде  $A(\beta, \omega) = I + B(\beta, \omega)$ , где  $I$  — единичный, а  $B(\beta, \omega)$  — вполне непрерывный оператор.
- 3) Для любого  $\omega \in \mathbb{R}$  множество  $\rho(A) \neq \emptyset$ , то есть  $\sigma(A) \neq \Lambda$ .

Тогда каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметра  $\omega \in \mathbb{R}$ . Кроме того, с изменением параметра  $\omega \in \mathbb{R}$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе области  $\Lambda$ .

Отметим, что эти утверждения носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  — не область комплексной плоскости, а риманова поверхность.

Таким образом, схема применения теорем 2.1 и 2.2 к изучению конкретной спектральной задачи может состоять из следующих этапов.

- 1) Дать корректное и наиболее общее определение ее решения.
- 2) Эквивалентным образом (например, используя технику интегральных уравнений) свести ее к задаче для некоторой оператор-функции.
- 3) Исследовать такие свойства этой оператор-функции, как голоморфность по спектральному параметру, непрерывность как функции спектрального и неспектральных параметров, фредгольмовость при фиксированных значениях параметров.
- 4) Доказать, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярное множество этой оператор-функции не пусто. Для этого нужно исследовать локализацию собственных значений исходной спектральной задачи и воспользоваться эквивалентностью этой задачи и задачи для оператор-функции.

## § 2. Постановки задач

**1. Волновод в однородной среде.** Пусть цилиндрический диэлектрический волновод является бесконечно длинным и находится в неограниченном пространстве с постоянным показателем преломления  $n_\infty$ . Будем считать, что образующая цилиндра параллельна оси  $x_3$ , показатель преломления  $n$  внутри цилиндра не зависит от переменной  $x_3$  и является вещественной функцией пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В дальнейшем символом  $x$  будем обозначать вектор с координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость  $\{x_3 = \text{const}\}$ . Пусть  $\Omega$  — область поперечного сечения волновода — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Обозначим символом  $\Gamma$  границу области  $\Omega$  (см. рис. 1).

Будем считать, что граница  $\Gamma$  принадлежит классу  $C^{1,\alpha}$ , т. е. выполнены следующие условия.

1. В каждой точке кривой  $\Gamma$  можно провести единственную касательную.

2. Существует такое число  $r_0 > 0$ , что для каждой точки  $x \in \Gamma$  окружность  $S(x, r_0)$  высекает из  $\Gamma$  кусок кривой  $\gamma(x, r_0)$  такой, что он может быть описан уравнением  $y_2 = \varphi(y_1)$  в так называемой местной декартовой системе координат, начало которой расположено в точке  $x$ , ось  $y_1$  направлена по касательной к кривой  $\Gamma$ .

3. Производная функции  $\varphi$  удовлетворяет условию Липшица с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ , т. е.

$$|\varphi'(y_1^1) - \varphi'(y_1^2)| \leq L|y_1^1 - y_1^2|^\alpha,$$

для любых  $y_1^1, y_1^2 \in \gamma'(x, r_0)$ , где  $\gamma'(x, r_0)$  — проекция  $\gamma(x, r_0)$  на ось  $y_1$ . Величины  $r_0, L, \alpha$  можно выбрать общими для всех точек кривой  $\Gamma$ .

Кривые с такими свойствами называются кривыми Ляпунова (см., напр., [9], с. 409).

Относительно показателя преломления  $n$  предположим следующее: функция  $n = n(x) > n_\infty > 0$ ,  $x \in \Omega$ , принадлежит множеству  $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ;  $n = n_\infty$ ,  $x \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ .

Дополнительно предположим, что показатель преломления волновода настолько слабо отличается от показателя преломления окружающей среды, что можно применить приближение слабонаправляющего волновода (см., напр., [10], [56]). В этом приближении исходная задача, сформулированная для системы уравнений Максвелла, сводится (см., напр., [19], с. 29) к скалярной: требуется найти такие значения частоты электромагнитных колебаний  $\omega > 0$  и комплексной постоянной распространения  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (2)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Здесь  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$  — волновое число,  $\varepsilon_0$  ( $\mu_0$ ) — электрическая (магнитная) постоянная;  $u^+(u^-)$  — предельное значение функции  $u$  извне (изнутри) контура  $\Gamma$ ,  $\partial u / \partial \nu$  — производная по внешней нормали.

Поясним физический смысл функции  $u$ , следуя [19], с. 29 (смотри также главу 1). Известно представление компонент комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  собственной волны, распространяющейся в волноводе при заданной частоте  $\omega$  и постоянной распространения  $\beta$ , через составляющие  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_3 = \frac{-1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right), \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (4)$$

$$E_1 = \frac{\mu_0\omega}{\beta} H_2 - \frac{1}{\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (5)$$

$$E_2 = -\frac{\mu_0\omega}{\beta} H_1 - \frac{1}{\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (6)$$

$$E_3 = \frac{1}{i\varepsilon\omega} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (7)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$  — диэлектрическая проницаемость. В приближении слабонаправляющего волновода компоненты  $H_1$  и  $H_2$  аппроксимируются одной и той же функцией  $u$ , удовлетворяющей уравнениям (2), (3).

Будем разыскивать нетривиальное решение уравнений (2), (3) в классе комплекснозначных функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Область  $\Omega_\infty$  является неограниченной, следовательно, для того, чтобы полностью сформулировать задачу, необходимо задать поведение функции  $u$  на бесконечности. В области  $\Omega_\infty$  она удовлетворяет уравнению Гельмгольца с коэффициентом  $\chi^2(\beta)$  где

$$\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}. \quad (8)$$

Следуя [19], с. 24, будем предполагать, что эта функция, кроме того, удовлетворяет парциальным условиям излучения.

Дадим соответствующее определение. Пусть  $\Lambda$  — поверхность Римана функции  $\ln \chi(\beta)$ ,  $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$  — открытый круг радиуса  $R$ , а  $R_0$  — положительная константа, такая что  $\Omega \subset \Omega_{R_0}$ . Обозначим  $H_l^{(1)}$  — функцию Ханкеля первого рода порядка  $l$  (см., напр., [73]),  $r, \varphi$  — полярные координаты точки  $x$ . Будем говорить, что функция  $u$ , являющаяся в  $\Omega_\infty$  решением уравнения Гельмгольца (2), где  $\beta \in \Lambda$ , удовлетворяет

парциальным условиям излучения, если эта функция для всех  $r > R_0$  разлагается в ряд

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \exp(il\varphi). \quad (9)$$

Заметим, что для любой функции  $u$ , являющейся в  $\Omega_\infty$  решением уравнения Гельмгольца (2), ряд (9) сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанный ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз [8].

Для всех целых значений  $l$  функции Ханкеля  $H_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  представимы в виде

$$H_l^{(1)}(\chi(\beta)r) = c_l^{(1)}(\chi(\beta)r) \ln(\chi(\beta)r) + R_l^{(1)}(\chi(\beta)r), \quad (10)$$

где  $c_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  и  $R_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  — однозначные аналитические функции комплексного аргумента  $\beta$  (см., напр., [73]). Следовательно, на римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $H_l^{(1)}(\chi(\beta)r)$  являются однозначными аналитическими функциями.

Описанное выше множество функций  $u$ , удовлетворяющих требуемым свойствам гладкости и парциальным условиям излучения (9), обозначим символом  $U_A$ .

**Определение 2.5.** Ненулевую функцию  $u \in U_A$  будем называть собственной функцией *общей* задачи о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (2), (3). Всюду далее эту задачу будем называть задачей (A).

При любом фиксированном значении  $\omega > 0$  функция из класса  $U_A$  может, как убывать, так и неограниченно возрастать на бесконечности. Это зависит от того, какой области римановой поверхности  $\Lambda$  принадлежит соответствующая постоянная распространения  $\beta$ .

Следуя [19], с. 24, опишем поверхность Римана  $\Lambda$  и приведем классификацию собственных функций задачи (A). Поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов и имеет две точки ветвления  $\beta = \pm kn_\infty$ . В силу того, что функцию  $\chi(\beta)$  саму следует рассматривать как однозначную

на двулистной поверхности Римана, поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов римановой поверхности логарифма  $\Lambda_m$ , где  $m = 0, \pm 1, \dots$ , каждый из которых делится на два листа римановой поверхности квадратного корня  $\chi(\beta)$ :  $\Lambda_m^{(1)}$  и  $\Lambda_m^{(2)}$ . Всюду далее будем предполагать, что точки ветвления не принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$ .

Обозначим символом  $\Lambda_0^{(1)}$  главный («физический») лист римановой поверхности  $\Lambda$ , который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}. \quad (11)$$

С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  соединяется лист  $\Lambda_0^{(2)}$ , который называется «нефизическим» и определяется следующим образом:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}. \quad (12)$$

Лист  $\Lambda_0^{(2)}$  соединен с листом  $\Lambda_0^{(1)}$  вдоль разреза, выбранного в соответствии с условием  $\text{Im}(\chi(\beta)) = 0$  на  $\Lambda_0^{(1)}$ , т. е. проходящего по мнимой оси и интервалу  $(-kn_\infty, kn_\infty)$  вещественной оси.

Теперь приведем классификацию собственных функций (собственных волн). В задачах о собственных функциях слабонаправляющих волноводов принято различать поверхностные и вытекающие собственные волны (см., [19], с. 26). Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ . Вещественным  $\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)}$  таким, что  $|\beta| > kn_\infty$  отвечают *поверхностные* волны.

Функции Ханкеля при  $-\pi/2 < \arg \chi < 3\pi/2$  и  $r \rightarrow \infty$  имеют следующую асимптотику (см., напр., [73]):

$$H_l^{(1)}(\chi r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi r}} \exp \left[ i \left( \chi r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi r} \right) \right]. \quad (13)$$

Таким образом, если  $-\pi/2 < \arg \chi < 3\pi/2$ ,  $\text{Im}(\chi) \neq 0$ , и функция  $u$  удовлетворяет парциальным условиям излучения (9), то эта функция удовлетворяет следующему условию на бесконечности:

$$u = \exp(i\chi r) O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Ясно, что для поверхностных волн  $\text{Re}(\chi) = 0$ , а  $\text{Im}(\chi) = \sigma > 0$ . Следовательно, амплитуда  $u$  любой поверхностной волны экспоненциально

убывает на бесконечности:

$$u = \exp(-\sigma r) O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \sigma > 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Известно [8], что все производные такой функции также удовлетворяют парциальным условиям излучения (9), и, как следствие, условию (15).

Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(2)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(2)}$ . Постоянные распространения  $\beta$  *вытекающих* волн принадлежат множеству  $\Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ . Амплитуды  $u$  вытекающих собственных волн экспоненциально возрастают на бесконечности, потому что для них  $\text{Im}(\chi) < 0$ .

Задаче (A), с. 52, удовлетворяют амплитуды, и поверхностных, и вытекающих собственных волн. Наряду с общей задачей (A) в монографии особое внимание уделяется ее частному случаю — задаче о поверхностных волнах. Дадим соответствующее определение.

Заметим, что при вещественных  $\beta$  коэффициент уравнения (2) вещественный. Поэтому будем разыскивать нетривиальное решение уравнений (2) и (3) в классе вещественных функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Кроме того потребуем, чтобы на бесконечности функция  $u$  удовлетворяла условию (15). Такое множество функций  $u$  обозначим символом  $U_B$ .

**Определение 2.6.** Ненулевую функцию  $u \in U_B$  будем называть собственной функцией задачи о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (2) и (3). Всюду далее эту задачу будем называть задачей (B).

**2. Пример.** Хорошо известно точное решение задачи (A), с. 52, в частном случае волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянным показателем преломления  $n_+$  (см. первую главу).

**3. Волновод в полупространстве.** Сформулируем теперь, следуя [10], задачу о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Постановка этой задачи возникает при поиске собственных волн волновода, находящегося в плоско-слоистой среде, состо-

ящей из двух полупространств. Причем, предполагается, что показатель преломления волновода слабо отличается от показателя преломления  $n_\infty = \text{const}$  того полупространства, в котором он целиком находится, а  $n_\infty$  в свою очередь намного больше постоянного показателя преломления  $n_b > 0$  второго полупространства.

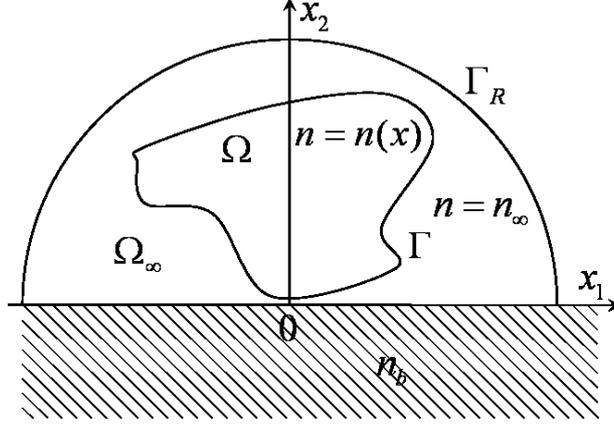


Рис. 1. Поперечное сечение волновода в полупространстве

Итак, пусть  $\Omega$  — ограниченная область, целиком лежащая в верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$  (см. рис. 1). Будем считать, что граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  принадлежит классу  $C^{1,\alpha}$ . Определим область  $\Omega_\infty = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{\Omega}$ . Обозначим символом  $\Omega_R^+$  открытый полукруг радиуса  $R$ :

$$\Omega_R^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R, x_2 > 0\}, \quad (16)$$

пусть  $\Gamma_R^+$  — граница этого полукруга, а  $R_0$  — положительная константа, такая что  $\Omega \subset \Omega_{R_0}^+$ .

Относительно показателя преломления  $n$  предположим также следующее: функция  $n = n(x) > n_\infty > 0$ ,  $x \in \Omega$ , принадлежит множеству  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ;  $n = n_\infty$ ,  $x \in \Omega_\infty$ .

В задаче о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве [10] требуется определить такие значения частоты  $\omega > 0$  и постоянной распространения  $\beta \in \Lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (17)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (18)$$

и граничному условию

$$u = 0, \quad x_2 = 0. \quad (19)$$

Будем разыскивать нетривиальные решения уравнений (17)–(19) в классе комплекснозначных функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Дополнительно предположим, что функция  $u$  удовлетворяет парциальным условиям излучения в полуплоскости [28], т. е. разлагается в ряд следующего вида:

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \sin(l\varphi), \quad r > R_0. \quad (20)$$

Для любой функции  $u$ , являющейся в  $\Omega_\infty$  решением уравнения (17) и удовлетворяющей равенству (19), ряд (20) сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанный ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз [28]. Обозначим символом  $U_C$  описанное множество функций.

**Определение 2.7.** Ненулевую функцию  $u \in U_C$  будем называть собственной функцией *общей* задачи о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям  $\beta \in \Lambda$ ,  $\omega > 0$ , если выполнены условия (17)–(19). В дальнейшем эту задачу будем называть задачей (C).

Классифицировать собственные функции задачи (C), будем также, как собственные функции задачи (A), с. 52. Задаче (C) удовлетворяют амплитуды, и поверхностных, и вытекающих собственных волн. Наряду с общей задачей (C) в монографии особое внимание уделяется ее частному случаю — задаче о поверхностных волнах волновода в полупространстве. Дадим соответствующее определение.

Заметим, что при вещественных  $\beta$  коэффициент уравнения (17) вещественный. Поэтому будем разыскивать нетривиальное решение уравне-

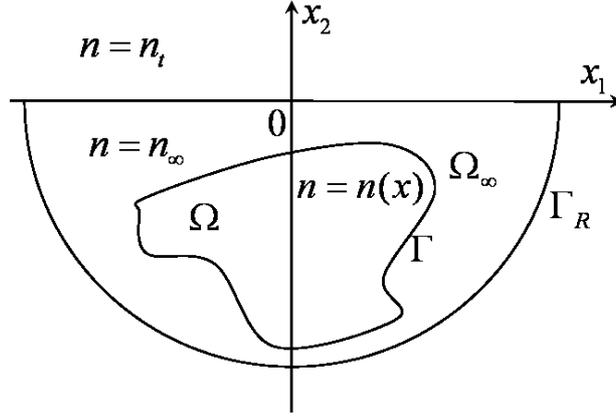


Рис. 2. Поперечное сечение волновода в слоистой среде

ний (17)–(19) в классе вещественных функций непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$ . Кроме того потребуем, чтобы на бесконечности функция  $u$  удовлетворяла условию (15). Такое множество функций  $u$  обозначим символом  $U_D$ .

**Определение 2.8.** Ненулевую функцию  $u \in U_D$  будем называть собственной функцией задачи о *поверхностных* собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (17)–(19). Всюду далее эту задачу будем называть задачей  $(D)$ .

**4. Волновод в слоистой среде.** Следуя [78] приведем постановку задачи о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода, находящегося в полупространстве, постоянный показатель преломления  $n_\infty$  которого незначительно отличается в большую сторону от показателя преломления  $n_t = \text{const} > 0$  второго полупространства.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область целиком лежащая в нижней полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0\}$  (см. рис. 2). Пусть  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$  — граница области  $\Omega$ . Определим область  $\Omega_\infty$  следующим образом:  $\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0\} \setminus \bar{\Omega}$ .

Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим также следующее. Функция  $n = n(x) > n_\infty$  при  $x \in \Omega$ , принадлежит множеству  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ;  $n = n_\infty$  при  $x \in \Omega_\infty$  и  $x_2 < 0$ ;  $n = n_t$  при  $x \in \Omega_\infty$  и  $x_2 > 0$ ; кроме того,  $n_\infty > n_t > 0$ .

Задача о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в слоистой среде заключается [78] в отыскании таких значений постоянной распространения  $\beta > 0$  и частоты электромагнитных колебаний  $\omega > 0$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_\infty, \quad (21)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma; \quad (22)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u^-}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0, \quad (23)$$

и условию на бесконечности:

$$|u| \leq c \exp(-\alpha r), \quad c, \alpha > 0, \quad r > R_0. \quad (24)$$

В условии сопряжения (23) через  $u^+(u^-)$  обозначено предельное значение функции  $u$  сверху (снизу) оси  $x_1$ .

Символом  $U_E$  обозначим множество вещественных, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_\infty$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$  и  $\Omega_\infty$  функций, удовлетворяющих условию (24). Известно [78], что ненулевые функции  $u \in U_E$  удовлетворяющие уравнениям (21)–(23) могут существовать лишь при условии  $\beta > kn_\infty$ . Поэтому в дальнейшем, решая эту задачу, мы будем предполагать это условие выполненным.

**Определение 2.9.** Ненулевую функцию  $u \in U_E$  будем называть собственной функцией задачи о *поверхностных* волнах слабонаправляющего волновода в слоистой среде, отвечающей собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ , если выполнены условия (21)–(23). Далее эту задачу будем обозначать  $(E)$ .

### § 3. Локализация собственных значений

**1. Волновод в однородной среде.** Сформулируем известный результат [57] о локализации собственных значений задачи  $(A)$ , с. 52. Обо-

значим  $G$  — объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G = \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}, \quad n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x). \quad (25)$$

Пусть  $\omega > 0$ . На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения  $\beta$  задачи (A), с. 52, могут принадлежать лишь множеству  $G$ .

Поясним, что при любой частоте электромагнитных колебаний  $\omega$  у общей задачи (A), с. 52, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде на физическом листе  $\Lambda_0^{(1)}$  не может находиться никаких иных собственных значений  $\beta$ , кроме постоянных распространения поверхностных волн. Кроме того, если поверхностные волны существуют, то их постоянные распространения обязательно принадлежат множеству  $G$ . Это утверждение обобщает известные результаты (см., напр., [56]) о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной среде, полученные на основе элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. п. 1, §2).

**2. Волновод в полупространстве.** Сформулируем и докажем теорему о локализации собственных значений задачи (C), с. 56.

**Теорема 2.3.** Пусть  $\omega > 0$ . На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения  $\beta$  задачи (C), с. 56, могут принадлежать лишь множеству  $G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$B = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| \geq kn_+ \right\},$$

$$D = \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| < kn_\infty \right\}.$$

Предположим, что  $u$  — собственная функция задачи (C), с. 56, отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Применим в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}$ , где  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  (здесь и далее  $\bar{u}$  означает функцию комплексносопряженную с  $u$ ) формулу Грина. Получим равенства

$$\int_{\Omega} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx = \int_{\Gamma} \left( u^- \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \nu} - \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) dl,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx &= - \int_{\Gamma} \left( u^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \nu} - \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right) dl + \\ &+ \int_{\Gamma_R^+} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl - \int_{L_R} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dl. \end{aligned}$$

Здесь  $L_R = \{x : x_1 \in (-R, R), x_2 = 0\}$ . При любом  $\beta \in D$  имеем  $k^2 n^2 - \beta^2 > 0$ , следовательно, левые части в двух последних равенствах обращаются в нуль. Сложим почленно эти равенства, используя условия сопряжения (18), с. 56, и равенство нулю функции  $u$  на  $L_R$ . Получим

$$\int_{\Gamma_R^+} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0.$$

Отсюда, используя условие (20), с. 56, и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$  получим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi R) H_l^{(2)'}(\chi R) - H_l^{(2)}(\chi R) H_l^{(1)'}(\chi R) \right] |a_l|^2 = 0,$$

где  $a_l$  — коэффициенты ряда (20), с. 56, в который разлагается функция  $u$ . Хорошо известно (см., напр., [73]), что

$$H_l^{(1)}(\chi R) H_l^{(2)'}(\chi R) - H_l^{(2)}(\chi R) H_l^{(1)'}(\chi R) = \frac{4}{i\pi\chi R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (20), с. 56, обращаются в нуль. Это значит, что  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . Уравнение (17), с. 55, имеет фундаментальное решение (см., напр., [25]). Обозначим его через  $\Phi(\beta; x, y)$ . Используя третью формулу Грина, можно записать:

$$u(x) = - \int_{\Gamma_{R_0}} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega_{R_0}.$$

Так как  $u = 0$  при  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega_{R_0}$ , то  $u = 0$  и  $\partial u / \partial \nu = 0$  при  $x \in \Gamma_{R_0}$ . Следовательно,  $u = 0$  при  $x \in \Omega_{R_0}$ . Таким образом, мы показали, что задача (C), с. 56, при  $\beta \in D$  имеет только тривиальное решение.

Предположим, что  $u$  — собственная функция задачи (C), с. 56, отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ . Применим в областях  $\Omega$  и  $\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}$ ,  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина. Получим равенства

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial u^-}{\partial \nu} dl,$$

$$\int_{\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R^+ \setminus \bar{\Omega}} \bar{u} \Delta u dx = - \int_{\Gamma} \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} dl + \int_{\Gamma_R^+} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl - \int_{L_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x_2} dl.$$

Здесь символом « $\cdot$ » обозначено скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^2$ . Сложим почленно эти равенства, учитывая условия (18) и (19), с. 56:

$$\int_{\Omega_R^+} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_R^+} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma_R^+} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl.$$

Устремим в этом равенстве  $R$  к бесконечности. При этом следует учесть (см. с. 54), что при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , функция  $u$ , ее производные, а, следовательно, и все подынтегральные выражения экспоненциально убывают на бесконечности. В результате получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_+^2} (\beta^2 - k^2 n^2) |u|^2 dx = 0. \quad (26)$$

При вещественных  $\beta \in B$ , равенству (26) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ . Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то из этого равенства сразу вытекает, что  $u = 0$  на всей полуплоскости. Если же  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то из него следует, что  $\nabla u = 0$  в  $\mathbb{R}_+^2$ , т. е.  $u$  принимает постоянное значение. Но из асимптотики (15), с. 54, вытекает, что на бесконечности  $u$  обращается в нуль. Значит  $u$  равняется нулю всюду, т. е. при  $\beta \in B$  задача (C), с. 56, имеет лишь тривиальное решение.

Возьмем мнимую часть от левой и правой части равенства (26). Получим

$$\operatorname{Im} \beta^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^2 dx = 0.$$

Следовательно, собственные значения  $\beta$  задачи (C), с. 56, на  $\Lambda_0^{(1)}$  не могут иметь одновременно мнимую и вещественную части отличными от нуля,

т. е. принадлежать множеству  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (B \cup D \cup G)$ . И так доказано, что на  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения  $\beta$  задачи (С), с. 56, могут принадлежать лишь множеству  $G$ .  $\square$

Эта теорема заключается в том, что при любой частоте электромагнитных колебаний  $\omega$  у общей задачи (С), с. 56, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве на физическом листе  $\Lambda_0^{(1)}$  не может находиться никаких иных собственных значений  $\beta$ , кроме постоянных распространения поверхностных волн. Кроме того, если поверхностные волны существуют, то их постоянные распространения обязательно принадлежат множеству  $G$ .

**3. Волновод в слоистой среде.** Относительно локализации собственных значений задачи (Е), с. 58, известно [78] следующее утверждение.

*Пусть  $\omega > 0$ . Собственные значения  $\beta$  задачи (Е), с. 58, должны удовлетворять условию  $\beta < kn_+$ .*

## § 4. Интегральные представления собственных функций.

**1. Волновод в однородной среде.** Введем в рассмотрение фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$G_A(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi |x - y|), \quad (27)$$

где  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, коэффициент  $\chi$  определен равенством (8), с. 51. Отметим, что функция  $G_A(x, y)$  при любом фиксированном  $y \in \mathbb{R}^2$  по  $x$  удовлетворяет парциальным условиям излучения (9), с. 52, (см., напр., [19], с. 44). Поэтому иногда функцию (27) также называют функцией Грина для уравнений Гельмгольца, удовлетворяющей на бесконечности парциальным условиям излучения.

Сформулируем известное [57] утверждение об интегральном представлении собственных функций общей задачи (А), с. 52, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде.

Если функция  $u$  есть собственная функция задачи (A), с. 52, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , то

$$u(x) = \int_{\Omega} G_A(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (28)$$

где

$$g^2(y) = k^2 n^2(y) - k^2 n_{\infty}^2. \quad (29)$$

**2. Волновод в полупространстве.** Построим интегральное представление собственных функций общей задачи (C), с. 56, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Для этого будем использовать соответствующую функцию Грина (см., напр., [28]).

**Определение 2.10.** Функцией Грина задачи Дирихле для верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$  называется функция  $G_C(x, y)$ ,  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ ,  $y \in \mathbb{R}_+^2$ , удовлетворяющая следующим свойствам.

1. При каждом  $y \in \mathbb{R}_+^2$  представляется в виде

$$G_C(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi |x - y|) + G(x, y),$$

где функция  $G(x, y)$  удовлетворяет по  $x$  уравнению

$$\Delta_x G(x, y) + \chi^2 G(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, \quad (30)$$

и является непрерывной по  $x$  в  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ .

2. При каждом  $y \in \mathbb{R}_+^2$  удовлетворяет по  $x$  граничному условию

$$G_C(x, y) = 0, \quad x_2 = 0.$$

3. При каждом  $y \in \mathbb{R}_+^2$  удовлетворяет по  $x$  парциальным условиям излучения (20), с. 56.

Известно явное представление функции Грина (см., напр., [28]):

$$G_C(x, y) = \frac{i}{4} \left( H_0^{(1)}(\chi |x - y|) - H_0^{(1)}(\chi |x - y^*|) \right), \quad (31)$$

где  $y^* = (y_1, -y_2)$ .

**Лемма 2.1.** Если функция  $u$  есть собственная функция задачи (С), с. 56, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , то

$$u(x) = \int_{\Omega} G_C(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}, \quad (32)$$

где функция  $g$  определена равенством (29).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Собственная функция задачи (С), с. 56, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ , удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \quad x \in \Omega_{\infty}. \quad (33)$$

В области  $\Omega$  она удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + (k^2 n^2(x) - \beta^2) u = 0, \quad x \in \Omega.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\Delta u + \chi^2 u = f, \quad x \in \Omega, \quad (34)$$

где  $f = -g^2 u$ . Используем в области  $\Omega$  третью формулу Грина:

$$w(x)u(x) = \int_{\Gamma} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} - u^-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu} \right) dl(y) - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x, y) dy, \quad (35)$$

где  $\Phi(x, y)$  — фундаментальное решение (27),

$$w(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 1/2, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Наша ближайшая цель — получить аналогичное представление вне области  $\Omega$ . Пусть  $\Omega_R^+$  — полукруг в верхней полуплоскости, целиком содержащий область  $\Omega$  (см. с. 55). Применим третью формулу Грина в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$ , ограниченной кусочно-гладким контуром. Получим интегральное

представление функции  $u$  в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$ :

$$\begin{aligned}
w_\infty(x)u(x) = & - \int_{\Gamma} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} - u^+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) + \\
& + \int_{\Gamma_R^+} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\
& - \int_{L_R} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y),
\end{aligned} \tag{36}$$

где  $\Gamma_R^+$  — граница полукруга  $\Omega_R^+$ ,  $L_R = \{x : x_1 \in (-R, R), x_2 = 0\}$ ,

$$w_\infty(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_R^+ \setminus \Omega, \\ 1/2, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Сложим почленно равенства (35) и (36). Функция  $u$  удовлетворяет условиям сопряжения (18), с. 56, поэтому интегралы по контуру  $\Gamma$  сокращаются. В результате получим интегральное представление, справедливое при любом  $x \in \overline{\Omega_R^+}$  для произвольного достаточно большого  $R$ :

$$\begin{aligned}
u(x) = & - \int_{\Omega} f(y) \Phi(x, y) dy + \\
& + \int_{\Gamma_R^+} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\
& - \int_{L_R} \left( \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y),
\end{aligned} \tag{37}$$

Отметим, что полученные представления не учитывают граничное условие (19), с. 56, и содержат фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, а не функцию Грина задачи Дирихле для полуплоскости.

Применим в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$  формулу Грина к функции  $u$  и функции  $G(x, y)$ , которая в данном случае рассматривается, как функция перемен-

ной  $y$  при фиксированном  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Получим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R^+ \setminus \Omega} (G(x, y)(\Delta_y + \chi^2)u(y) - u(y)(\Delta_y + \chi^2)G(x, y)) dy = \\
& = \int_{\Gamma_R^+} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\
& - \int_{L_R} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y) - \\
& - \int_{\Gamma} \left( G(x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} - u^+(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y).
\end{aligned}$$

Функция  $u$  в области  $\Omega_R^+ \setminus \Omega$  удовлетворяет уравнению (33). При каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2$  функция  $G(x, y)$  по  $x$  удовлетворяет уравнению (30). Эта функция симметрична по  $x$  и  $y$ . Следовательно, она удовлетворяет тому же уравнению по  $y$  при любом фиксированном  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Учитывая эти свойства функций  $G$  и  $u$ , получим, что левая часть последнего равенства равна нулю:

$$\int_{\Omega_R^+ \setminus \Omega} (G(x, y)(\Delta_y + \chi^2)u(y) - u(y)(\Delta_y + \chi^2)G(x, y)) dy = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned}
0 & = \int_{\Gamma_R^+} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\
& - \int_{L_R} \left( G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y) - \\
& - \int_{\Gamma} \left( G(x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} - u^+(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y).
\end{aligned} \tag{38}$$

Фиксируем  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$  и применим формулу Грина к функциям  $G(x, y)$  (по переменной  $y$ ) и  $u$  в области  $\Omega$ . В результате получим равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (G(x, y)(\Delta_y + \chi^2)u(y) - u(y)(\Delta_y + \chi^2)G(x, y)) dy = \\
& \int_{\Gamma} \left( G(x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} - u^-(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y).
\end{aligned} \tag{39}$$

Так как функция  $u$  удовлетворяет уравнению (34), а  $G(x, y)$  по переменной  $y$  — соответствующему однородному уравнению, то последнее равенство примет вид

$$0 = \int_{\Gamma} \left( G(\beta; x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} - u^-(y) \frac{\partial G(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \int_{\Omega} G(\beta; x, y) f(y) dy. \quad (40)$$

Сложим теперь почленно равенства (37), (38) и (40). При этом надо учесть условия сопряжения (18), с. 56. Для любого  $x \in \overline{\Omega_R^+}$  получим

$$u(x) = - \int_{\Omega} f(y) G_C(x, y) dy + \int_{\Gamma_R^+} \left( G_C(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G_C(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \int_{L_R} \left( G_C(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} - u(y) \frac{\partial G_C(x, y)}{\partial y_2} \right) dl(y), \quad (41)$$

Третье слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, так как функции  $u(y)$  и  $G_C(x, y)$  равны нулю при  $y \in L_R$ . Покажем, что второе слагаемое также равно нулю. Для этого воспользуемся тем, что функции  $u$  и  $G_C$  удовлетворяют парциальным условиям излучения. Имеем

$$I = \int_{\Gamma_R^+} \left( G_C(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial G_C(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) = \int_{\Gamma_R^+} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l H_l^{(1)}(\chi r) \sin(l\varphi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi H_k^{(1)'}(\chi r) \sin(k\varphi) \right) dl(y) - \int_{\Gamma_R^+} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \chi H_l^{(1)'}(\chi r) \sin(l\varphi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H_k^{(1)}(\chi r) \sin(k\varphi) \right) dl(y). \quad (42)$$

Ряды под интегралами равномерно сходятся, поэтому можно поменять местами порядок интегрирования и суммирования. Учитывая далее ортогональность тригонометрических функций, получаем, что выражение

для  $I$  принимает вид

$$I = \pi R \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l d_l \chi \left( H_l^{(1)}(\chi R) H_l^{(1)'}(\chi R) - H_l^{(1)'}(\chi R) H_l^{(1)}(\chi R) \right).$$

Очевидно, что  $I = 0$ .

Итак, мы получили, что для любого достаточно большого  $R$

$$u(x) = - \int_{\Omega} f(y) G_C(x, y) dy = \int_{\Omega} G_C(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \overline{\Omega_R^+}.$$

В силу произвольности  $R$  имеет место (32).  $\square$

**3. Волновод в слоистой среде.** Этот пункт посвящен построению интегрального представления собственных функций задачи  $(E)$ , с. 58,. При этом будет использована соответствующая функция Грина (см., напр., [78]).

Пусть во всей нижней полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2$  показатель преломления равен  $n_\infty$ . Область  $\Omega$  в задаче  $(E)$ , с. 58, целиком принадлежит этой полуплоскости. Поэтому, как обычно, определим параметр

$$\chi = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}.$$

В верхней полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  показатель преломления равен  $n_t$ , обозначим

$$\chi_t = \sqrt{k^2 n_t^2 - \beta^2}.$$

Напомним, что мы предполагаем, что  $0 < kn_t < kn_\infty < \beta$ . Всюду далее будем считать что  $\chi = i\sigma$ ,  $\chi_t = i\sigma_t$ , где

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2} > 0, \quad \sigma_t = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_t^2} > 0$$

и, следовательно,  $0 < \sigma < \sigma_t$ .

**Определение 2.11.** Функцией Грина задачи сопряжения называется функция  $G_E(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$ , удовлетворяющая следующим свойствам.

1. При  $x, y \in \mathbb{R}_-^2$  функция  $G_E(x, y)$  представляется в виде

$$G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma |x - y|) + G(x, y),$$

а при  $x, y \in \mathbb{R}_+^2$  — в виде

$$G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma_t |x - y|) + G(x, y),$$

кроме того, при  $x \in \mathbb{R}_-^2, y \in \mathbb{R}_+^2$ , или  $x \in \mathbb{R}_+^2, y \in \mathbb{R}_-^2$

$$G_E(x, y) = G(x, y),$$

где функция  $G(x, y)$  при каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$  удовлетворяет по  $x$  уравнениям

$$\Delta_x G(x, y) - \sigma_t^2 G(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, \quad (43)$$

$$\Delta_x G(x, y) - \sigma^2 G(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_-^2, \quad (44)$$

является непрерывной и непрерывно дифференцируемой по  $x$  в  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$  и  $\overline{\mathbb{R}_-^2}$ . Здесь  $K_0$  — функция Макдональда (см., напр., [73]).

2. При каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$  функция  $G_E(x, y)$  удовлетворяет по  $x$  условиям сопряжения:

$$G_E^+(x, y) = G_E^-(x, y), \quad \frac{\partial G_E^+(x, y)}{\partial x_2} = \frac{\partial G_E^-(x, y)}{\partial x_2}, \quad x_2 = 0. \quad (45)$$

3. При каждом фиксированном  $y \in \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$  функция  $G_E(x, y)$  удовлетворяет условию (24), с. 58.

Известно явное представление функции Грина  $G_E(x, y)$  (см., напр., [78]):

$$G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma |x - y|) - \quad (46)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp((x_2 + y_2)\gamma) \frac{\gamma_t - \gamma}{(\gamma_t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \mathbb{R}_-^2; \\ G_E(x, y) = \quad (47)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-x_2\gamma_t) \exp(y_2\gamma)}{\gamma_t + \gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, y \in \mathbb{R}_-^2; \\ G_E(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma_t |x - y|) - \quad (48)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp((-x_2 - y_2)\gamma_t) \frac{\gamma - \gamma_t}{(\gamma + \gamma_t)\gamma_t} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \mathbb{R}_+^2; \\ G_E(x, y) = \quad (49)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(x_2\gamma_t) \exp(-y_2\gamma)}{\gamma_t + \gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}_-^2, y \in \mathbb{R}_+^2.$$

Здесь  $\gamma = \sqrt{\theta^2 + \sigma^2}$ ,  $\gamma_t = \sqrt{\theta^2 + \sigma_t^2}$ .

**Лемма 2.2.** Пусть  $u$  — собственная функция задачи (E), с. 58, отвечающая собственным значениям  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ . Тогда

$$u(x) = \int_{\Omega} G_E(x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (50)$$

где функция  $g$  определена равенством (29).

Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.1. Отметим только, что интеграл вида (42), не будет равен нулю, но будет стремиться к нулю при  $R \rightarrow \infty$  (см. [78]). Используя интегральное представление (50), можно проверить, что первые производные функции  $u$  удовлетворяют условию (24), с. 58, экспоненциального убывания на бесконечности.

## § 5. Дискретность характеристических множеств и зависимость характеристических значений $\beta$ от параметра $\omega$ .

С уменьшением частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  постоянные распространения  $\beta$  волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной окружающей среде, могут перемещаться с физического листа римановой поверхности  $\Lambda$  на нефизический (см. с. 46). Другими словами, поверхностные собственные волны могут трансформироваться в вытекающие.

Такой же эффект наблюдается при расчете дисперсионных кривых различных волноводов, находящихся как в однородной среде, так и в полупространстве. Об этом будет подробно сказано в параграфе, посвященном описанию численных экспериментов. Поэтому для приложений важно теоретически изучить функции  $\beta = \beta(\omega)$ . Это будет сделано в настоящем параграфе с привлечением методов спектральной теории оператор-функций.

**1. Волновод в однородной среде.** В этом пункте излагаются известные результаты [57] и [19], с. 79. Общая задача (A), с. 52, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде сводится к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции и описываются свойства ее решений.

Равенство (28), с. 63, при  $x \in \Omega$  представляет собой интегральное уравнение со слабо полярным ядром (фундаментальное решение (27), с. 62, уравнения Гельмгольца имеет логарифмическую особенность при  $|x - y| \rightarrow 0$ ). Запишем это уравнение в виде

$$u(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} G_A(\omega, \beta; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (51)$$

где

$$p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_{\infty}^2}{n_+^2 - n_{\infty}^2} > 0, \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2) > 0, \quad (52)$$

$$G_A(\omega, \beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta) |x - y|),$$

$$\chi(\omega, \beta) = \sqrt{\omega^2 n_{\infty}^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2}. \quad (53)$$

Преобразуем (51) к уравнению с симметричным ядром. Непосредственно для применения результатов спектральной теории оператор-функций симметрии ядра не требуется, однако она будет использована в следующем параграфе при доказательстве существования поверхностных волн (тогда ядро получится вещественным и симметричным). Кроме того, во второй главе интегральные уравнения будут основой при построении численных методов поиска, как поверхностных, так и вытекающих собственных волн. Поэтому с целью единообразия построения расчетных схем и интерпретации численных результатов проведем симметризацию ядра уже на данном начальном этапе.

Обозначим  $v = pu$ ,

$$K_A(\omega, \beta; x, y) = G_A(\omega, \beta; x, y) p(x) p(y) \quad x, y \in \Omega. \quad (54)$$

Имеем

$$v(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} K_A(\omega, \beta; x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (55)$$

Пусть  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ . Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$(T_A(\omega, \beta)) v(x) = \int_{\Omega} K_A(\omega, \beta; x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (56)$$

Ядро  $K_A$  слабо полярно, поэтому оператор  $T_A(\omega, \beta)$  можно (см., напр., [9], с. 287) рассматривать как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных интегрируемых с квадратом функций  $L_2(\Omega)$ . Запишем уравнение (55) в виде:

$$v = \lambda(\omega)T_A(\omega, \beta)v. \quad (57)$$

Будем искать такие  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие уравнению (57).

Сформулируем известное [57] утверждение об эквивалентности задачи (A), с. 52, и задачи (57).

*Если  $u \in U_A$  является собственной функцией задачи (A), с. 52, отвечающей некоторым собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , то  $v = pu$  принадлежит пространству  $L_2(\Omega)$  и дает нетривиальное решение уравнения (57) при тех же самых значениях параметров  $\omega$  и  $\beta$ . Если при некоторых значениях  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$  уравнение (57) имеет нетривиальное решение  $v \in L_2(\Omega)$ , то  $u = v/p$  удовлетворяет равенству (51), принадлежит множеству  $U_A$  и является собственной функцией задачи (A), с. 52, отвечающей тем же самым собственным значениям  $\omega$  и  $\beta$ .*

Фиксируем некоторое значение  $\omega > 0$ . Положим

$$A(\omega, \beta) = I - \lambda(\omega)T_A(\omega, \beta), \quad (58)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $L_2(\Omega)$ , а оператор  $T_A(\omega, \beta)$  определен равенством (56). При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро интегрального оператора  $T_A(\omega, \beta)$  слабо полярно, следовательно, оператор  $T_A(\omega, \beta)$  вполне непрерывен, и оператор  $A(\omega, \beta)$  фредгольмов [9].

Ненулевая функция  $v \in L_2(\Omega)$  называется собственной функцией оператор-функции  $A(\omega, \beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение

$$A(\omega, \beta)v = 0. \quad (59)$$

Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  называется множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\omega, \beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $L_2(\Omega)$ . Это множество будем обозначать символом

$\sigma(A)$ . Обозначим множество регулярных точек оператора  $A(\omega, \beta)$  через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\omega, \beta)^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)\}$ .

Известно (см. [19], с. 79) следующее утверждение.

*Множество регулярных точек оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\omega, \beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  непрерывно зависит от параметра  $\omega > 0$ . Кроме того, с изменением  $\omega > 0$  характеристические значения оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\beta = \pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

Это утверждение обобщает известные результаты (см., напр., [56]) о зависимости постоянных распространения собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения с постоянным показателем преломления, находящегося в однородной среде, от частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

**2. Волновод в полупространстве.** Сведем теперь общую задачу (C), с. 56, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

Равенство (32), с. 64, при  $x \in \Omega$  представляет собой интегральное уравнение со слабо полярным ядром, которое запишем в виде

$$u(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} G_C(\omega, \beta; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (60)$$

где

$$G_C(\omega, \beta; x, y) = \frac{i}{4} \left( H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta)|x - y|) - H_0^{(1)}(\chi(\omega, \beta)|x - y^*|) \right),$$

функции  $p$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  определены равенствами (52), (53),  $y^* = (y_1, -y_2)$ . Убедимся, что для всех  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$  ядро  $G_C(x, y)p^2(y)$  слабо полярно. Действительно, если  $x = y$ , то  $x \neq y^*$ . Следовательно, при совпадении

аргументов ядро  $G_C(x, y)p^2(y)$  имеет такую же (логарифмическую) особенность, что и фундаментальное решение уравнения Гельмгольца.

Обозначим  $v = pu$ ,

$$K_C(\omega, \beta; x, y) = G_C(\omega, \beta; x, y)p(x)p(y), \quad x, y \in \Omega. \quad (61)$$

Тогда

$$v(x) = \lambda(\omega) \int_{\Omega} K_C(\omega, \beta; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (62)$$

Пусть  $\omega > 0$ ,  $\beta \in \Lambda$ . Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$(T_C(\omega, \beta))v(x) = \int_{\Omega} K_C(\omega, \beta; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (63)$$

Будем рассматривать оператор  $T_C(\omega, \beta)$  как оператор, действующий в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Запишем уравнение (62) в виде:

$$v = \lambda(\omega)T_C(\omega, \beta)v. \quad (64)$$

Будем искать такие  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , при которых существуют ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие уравнению (64).

Относительно эквивалентности задач (С), с. 56, и (64) справедлива следующая

**Теорема 2.4.** *Если  $u \in U_C$  является собственной функцией задачи (С), с. 56, отвечающей некоторым собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$ , то  $v = pu$  принадлежит пространству  $L_2(\Omega)$  и дает нетривиальное решение уравнения (64) при тех же самых значениях параметров  $\omega$  и  $\beta$ . Если при некоторых значениях  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda$  уравнение (64) имеет нетривиальное решение  $v \in L_2(\Omega)$ , то  $u = v/p$  удовлетворяет равенству (60), принадлежит множеству  $U_C$  и является собственной функцией задачи (С), с. 56, отвечающей тем же самым собственным значениям  $\omega$  и  $\beta$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 2.1. Докажем второе утверждение. Пусть при некоторых значениях  $\omega$  и  $\beta$  уравнение (64) имеет нетривиальное решение  $v \in L_2(\Omega)$ . Определим функцию  $u = v/p \in L_2(\Omega)$ . Ясно, что так определенная функция  $u$  удовлетворяет в  $L_2(\Omega)$  уравнению (60) со слабо полярным

ядром. Хорошо известно, что интегральный оператор со слабо полярным ядром переводит  $L_2(\Omega)$  в  $C(\overline{\Omega})$  и ограничен (см., напр., [9], с. 327). Следовательно, функция  $u$  непрерывна в  $\overline{\Omega}$ .

Интегральный оператор, определяемый правой частью равенства (60), представим в виде потенциала площади с плотностью  $up^2$  (определение и используемые ниже свойства потенциала площади см., напр., в [9], с. 463) и интегрального оператора с гладким ядром. По предположению функция  $n$ , а, следовательно, и  $p^2$  принадлежит классу  $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Если плотность потенциала площади принадлежит  $C(\overline{\Omega})$ , то сам потенциал принадлежит  $C^1(\mathbb{R}^2)$  и  $C^2(\Omega_\infty)$ . Значит функция  $u$  непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^2$  и дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega_\infty$ . Теперь мы можем заключить, что плотность потенциала площади принадлежит  $C^1(\Omega)$ . Такой потенциал принадлежит  $C^2(\Omega)$ , следовательно, и функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega$ . Итак мы доказали, что  $u$  удовлетворяет требуемым свойствам гладкости, а также, что условия сопряжения (18) выполнены.

По построению функции Грина для полупространства  $G_C$  функция  $u$ , определяемая равенством (60), удовлетворяет уравнению Гельмгольца (17) и граничному условию (19). Докажем теперь, что функция  $u$  удовлетворяют условию (20). Действительно, при каждом фиксированном  $y$  функция Грина удовлетворяет парциальным условиям излучения по  $x$ :

$$G_C(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l(y) H_l^{(1)}(\chi r(x)) \sin(l\varphi(x)).$$

Следовательно, в ряд такого же вида разлагается и функция  $u$ . Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно это представление подставить в равенство (60).  $\square$

Фиксируем некоторое значение  $\omega > 0$ . Положим

$$C(\omega, \beta) = I - \lambda T_C(\omega, \beta), \quad (65)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $L_2(\Omega)$ , а оператор  $T_C(\omega, \beta)$  определен равенством (63). При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро интегрального оператора  $T_C(\omega, \beta)$  слабо полярно, следовательно, оператор  $T_C(\omega, \beta)$  вполне непрерывен, а оператор  $C(\omega, \beta)$  фредгольмов [9]. Собственные функции  $v \in L_2(\Omega)$

оператор-функции  $C(\omega, \beta)$ , отвечающие характеристическим значениям  $\beta \in \Lambda$ , удовлетворяют уравнению

$$C(\omega, \beta)v = 0. \quad (66)$$

**Теорема 2.5.** *Множество регулярных точек оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(C)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $C(\omega, \beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  непрерывно зависит от параметра  $\omega > 0$ . Кроме того, с изменением  $\omega > 0$  характеристические значения оператор-функции  $C(\omega, \beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\beta = \pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично [33], с. 459, можно показать, что оператор-функция  $C(\omega, \beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция двух переменных  $\beta \in \Lambda$  и  $\omega > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $C(\omega, \beta)$ , теоремы 2.3 о локализации собственных значений задачи  $(C)$ , с. 56, и теоремы 2.4 об эквивалентности задач  $(C)$ , с. 56, и (64) оператор  $C(\omega, \beta)$  обратим для любых  $\omega > 0$  и  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus G$ . Таким образом, справедливость теоремы вытекает из теоремы [17] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $C(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы [113] о поведении характеристических значений  $\beta$  такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция  $C(\omega, \beta)$  является непрерывной функцией параметров  $\beta$  и  $\omega$ .  $\square$

Поясним, что с точки зрения физических приложений в теореме 2.5 говорится о том, что зависимость постоянных распространения  $\beta$  собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода, находящегося в полупространстве, от частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  имеет качественно такой же характер, что и для волновода в однородной среде.

## § 6. Существование поверхностных волн

Известно (см. [19], с. 168), что при любом  $\omega > 0$  у задачи  $(B)$ , с. 54, о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде существует конечное число собственных значений  $\beta \in (kn_\infty, kn_+)$ . Точно такой же результат известен [78] и для задачи  $(E)$ , с. 58, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде. Аналогичных результатов для задачи  $(D)$ , с. 57, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве не известно.

В этом параграфе используется новый метод доказательства существования поверхностных волн слабонаправляющих волноводов. Он основан на сочетании трех эквивалентных формулировок для каждой из трех задач  $((B), (D)$  и  $(E))$ : исходной классической постановки  $(I)$ , формулировки в виде спектральной задачи для интегрального оператора с симметричным слабо полярным ядром  $(II)$ , вариационной формулировки задачи на всей плоскости или полуплоскости  $(III)$ . Интегральные операторы с указанными свойствами являются самосопряженными и вполне непрерывными. Для доказательства положительной определенности этих операторов применяется формулировка  $(III)$  и эквивалентность постановок  $(I)$ – $(III)$  для каждой задачи. Анализ опирается на классические результаты теории интегральных операторов с симметричными полярными ядрами (см., напр., [9]), а также теории вполне непрерывных операторов (см., напр., [48]).

Такой подход конструктивен. Он позволяет свести каждую из трех задач  $(B)$ ,  $(D)$  и  $(E)$  к параметрической линейной спектральной задаче для вполне непрерывного, самосопряженного, положительно определенного интегрального оператора в ограниченной области поперечного сечения волновода. Во второй главе предлагаются и исследуются конечномерные приближения указанных операторов на основе метода коллокации с триангуляцией области интегрирования и кусочно-постоянной аппроксимацией собственных функций.

**1. Волновод в однородной среде.** Обратимся сначала к изучению задачи (B), с. 54, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде. Собственные функции отвечают собственным значениям  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$ . В этом случае вещественная часть числа  $\chi$  равна нулю, а мнимая часть положительна:  $\chi = i\sigma$ , где

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2} > 0. \quad (67)$$

Тогда ядро интегрального уравнения (55), с. 71, становится не только слабо полярным, но также вещественным, симметричным и положительным:

$$K_A(\omega, \beta; x, y) = G_A(\omega, \beta; x, y)p(x)p(y) > 0, \quad x, y \in \Omega,$$

$$G_A(\omega, \beta; x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma(\omega, \beta)|x - y|).$$

Действительно,

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(iz) = \frac{1}{2\pi} K_0(z), \quad z > 0, \quad (68)$$

а функция Макдональда  $K_0$  положительна на всей положительной полуоси (см., напр., [73]). Введем новые обозначения:

$$G_B(\sigma; x, y) = G_A(\omega, \beta; x, y), \quad K_B(\sigma; x, y) = K_A(\omega, \beta; x, y). \quad (69)$$

Интегральный оператор  $T_A(\omega, \beta)$ , определенный равенством (56), с. 71, целесообразно рассматривать, как оператор

$$(T_B(\sigma))v(x) = \int_{\Omega} K_B(\sigma; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (70)$$

действующий в пространстве вещественных функций  $L_2(\Omega)$ , а задачу (55), с. 71, — как спектральную задачу

$$v = \lambda T_B(\sigma)v, \quad (71)$$

где требуется найти  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и отвечающие им ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (71). При фиксированном  $\sigma > 0$  задача (71) есть линейная задача определения характеристических чисел  $\lambda$  и собственных функций  $v$  оператора  $T_B(\sigma)$ .

Отметим, что введенные нами параметры имеют отчетливый физический смысл (см., напр., [56], [60]). Функция  $p^2$  называется «профилем

волновода» (часто обозначается  $P$ ). Это основная характеристика среды, в которой распространяются собственные волны. Параметр  $\sqrt{\lambda}$  в физической литературе обычно обозначается  $V$ . Он называется «обобщенным параметром частоты». Чем больше  $V$ , тем больше поверхностных собственных волн может распространяться в волноводе. Параметр  $\sigma$  (часто обозначается  $k_t$ ) — «поперечное волновое число» — характеристика скорости затухания поверхностной волны на бесконечности. Чем меньше  $\sigma$ , тем меньше эта скорость (см. (15), с. 54).

Задачи (71) и (B), с. 54, эквивалентны, а именно справедлива

**Теорема 2.6.** *Если не равная нулю функция  $u \in U_B$  и параметры  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$  удовлетворяют условиям (B), с. 54, то*

$$v = pu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2), \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_\infty^2}$$

*удовлетворяют равенству (71). С другой стороны, если для ненулевой функции  $v \in L_2(\Omega)$  и некоторых значений  $\lambda > 0$ ,  $\sigma > 0$  выполняется равенство (71), то*

$$u = v/p, \quad \beta = \left( \sigma^2 + \lambda \frac{n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2)} \right)^{1/2}$$

*удовлетворяют уравнению (51), с. 71, функция  $u$  принадлежит множеству  $U_B$  и является собственной функцией задачи (B), с. 54, отвечающей собственным значениям  $\beta$  и  $\omega$ .*

Эта теорема с учетом сделанных в настоящем параграфе предположений, фактически, является частным случаем приведенного на с. 72 известного [57] утверждения об эквивалентности задачи (A), с. 52, и задачи (57).

Относительно существования решений задачи (71) справедлива

**Теорема 2.7.** *При любом  $\sigma > 0$  оператор  $T_B(\sigma)$ , определенный равенством (70), является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для него справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.*

2. Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ , где через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ .

3. Минимальное характеристическое число  $\lambda_1(\sigma)$  простое (его кратность равна единице), соответствующая собственная функция  $v_1(x)$  не меняет знака в области  $\Omega$ .

4.  $\lambda_1(\sigma) \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K_B(\sigma; x, y)$  вещественное, симметричное и слабо полярное, следовательно, оператор  $T_B(\sigma)$  вполне непрерывный и самосопряженный (см., напр., [9], с. 326). Докажем, что он положительно определенный.

Сформулируем вариационную постановку задачи (B), с. 54, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде. Обозначим  $H^1 = W_2^1(\mathbb{R}^2)$  пространство Соболева, образованное функциями из  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , у которых существуют обобщенные производные, и

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + u^2) dx < \infty, \quad u \in H^1.$$

Интеграл в левой части этой оценки примем за определение квадрата нормы в  $H^1$ .

Рассмотрим задачу: найти все  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$  при которых существуют ненулевые функции  $u \in H^1$ , удовлетворяющие для любой функции  $v \in H^1$  равенству:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} n^2 uv dx. \quad (72)$$

Задачи (B), с. 54, и (72) эквивалентны. Действительно, с одной стороны, пусть  $u$  — собственная функция задачи (B), с. 54. Такая функция принадлежит  $U_B$ , удовлетворяет условиям сопряжения (3), с. 50, а ее производная экспоненциально убывает на бесконечности (см. с. 54), следовательно,  $u \in H^1$ . Умножим уравнение (2), с. 50, на произвольную бесконечное число раз дифференцируемую, финитную функцию  $v$  (как обычно, пространство таких функций обозначим буквой  $\mathcal{D}$ ) и воспользуемся формулой интегрирования по частям. Получим тождество вида (72),

где интегралы берутся по носителю функции  $v$ . Пространство  $\mathcal{D}$  плотно в  $H^1$  (см., напр., [59], с. 342). Следовательно, тождество (72) справедливо для любой  $v \in H^1$ .

С другой стороны, выбирая в (72) в качестве  $v$  произвольную функцию из  $\mathcal{D}$  с носителем, содержащим  $\Omega$ , получаем, что функция  $u$  — обобщенное решение (из пространства Соболева) уравнения (2), с. 50, в произвольной области  $\Omega'$ , содержащей  $\Omega$ . В силу известных результатов о гладкости обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений (см., напр., [32], с. 114) уравнение (2), с. 50, выполняется в  $\Omega'$  в классическом смысле. При этом, поскольку  $u \in H^1(\Omega')$ , то выполняется первое условие сопряжения (3), с. 50. Применяя формулу интегрирования по частям и используя произвол в выборе функции  $v$ , нетрудно убедиться, что и второе условие сопряжения (3), с. 50, также выполняется. Далее, поскольку функция  $u$  при  $\beta > kn_\infty$  удовлетворяет уравнению (2), с. 50, в классическом смысле и убывает на бесконечности, то она удовлетворяет условию (15), с. 54 (см., напр., [8]).

Запишем тождество (72) в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = k^2 \int_{\Omega} n^2 uv dx + k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega_\infty} uv dx \quad \forall v \in H^1. \quad (73)$$

Добавим и вычтем из правой части этого тождества интеграл

$$k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} uv dx.$$

Получим тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx = & (74) \\ & = k^2 \int_{\Omega} n^2 uv dx + k^2 n_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^2} uv dx - k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} uv dx \quad \forall v \in H^1. \end{aligned}$$

Пусть параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с собственными значениями  $\omega$  и  $\beta$  задачи (B), с. 54, равенствами (52), с. 71, (67), с. 78, а функция  $p$  определена первым равенством в (52), с. 71, т. е.

$$p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2}, \quad \lambda = k^2 (n_+^2 - n_\infty^2), \quad \sigma^2 = \beta^2 - k^2 n_\infty^2.$$

Перепишем тождество (74) в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \sigma^2 uv) dx = \lambda \int_{\Omega} p^2 uv dx \quad \forall v \in H^1. \quad (75)$$

Запишем последнее тождество в виде

$$a(\sigma; u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in H^1, \quad (76)$$

где

$$a(\sigma; u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} uv dx, \quad u, v \in H^1,$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} p^2 uv dx, \quad u, v \in H^1.$$

Будем искать  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $u \in H^1$  такие, что выполняется (76). Задачи (72) и (76) эквивалентны в том смысле, что их собственные функции совпадают, а собственные значения связаны равенствами (52), с. 71, (67), с. 78,

Ясно, что при любом  $\sigma > 0$  оператор  $A(\sigma)$ , порождаемый билинейной формой  $a(\sigma; u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и положительно определенный, а оператор  $B$ , порождаемый билинейной формой  $b(u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и неотрицательный. Кроме того, оператор  $B$  компактный (см., напр., [32], с. 106).

Существование решений задачи вида (76) с операторами, обладающими указанными свойствами, известно (см., напр., [19], с. 129). При любом  $\sigma > 0$  у задачи (76) существует счетное множество положительных собственных значений  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности, а система собственных функций  $\{u_i\}$  может быть выбрана ортонормированной в смысле скалярного произведения в  $L_2(\Omega)$  с весом  $p^2$ .

Если параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с собственными значениями  $\omega$  и  $\beta$  задачи (B), с. 54, равенствами (52), с. 71, (67), с. 78, то каждое решение вариационной задачи (76) дает решение задачи (B), с. 54, и наоборот. Эта задача в свою очередь эквивалентна (см. теорему 2.6) задаче (71). Следовательно, каждое собственное значение  $\lambda_i(\sigma)$  задачи (76) является характеристическим числом оператора  $T_B(\sigma)$ , и наоборот, а соответствующие

собственные функции связаны равенством  $v_i = pu_i$ . Значит первые два утверждения теоремы справедливы. Кроме того, доказано, что оператор  $T_B(\sigma)$  является положительно определенным, так как все его характеристические числа положительны (см., напр., [9], с. 325).

При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K(\sigma; x, y)$  оператора  $T_B(\sigma)$  является симметричным, положительным и слабо полярным. Таким образом для этого оператора справедлива теорема Ентча (см., напр., [9], с. 329), т. е. имеет место и третье утверждение теоремы.

Утверждение 4 известно [57].  $\square$

Отметим, что утверждения 1 и 2 могут быть получены из результатов [19]. В этой монографии существование решений задачи о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в однородной среде доказано методом точных нелокальных граничных условий. В силу эквивалентности рассматриваемых задач утверждения 1 и 2 являются следствиями теоремы 7.32 [19]. Тем не менее, доказательства этих утверждений теоремы 2.7 мы приводим полностью, поскольку они основаны на специальной вариационной постановке задачи на всей плоскости. Такой подход будет использован в следующих двух пунктах и при исследовании разрешимости задач о поверхностных волнах волноводов в полупространстве и слоистой среде, для которых точные нелокальные граничные условия не известны.

Минимальное характеристическое число  $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$  и отвечающая ему собственная функция  $v_1$  при фиксированном  $\sigma > 0$  определяют собственную волну, которая в теории волноводов носит название основной (см. с. 46). Таким образом, в этой теореме, в частности, доказано, что у волновода, находящегося в однородной среде, при любой частоте  $\omega > 0$  существует в точности одна основная волна.

Проиллюстрируем только что доказанную теорему. Графики функций  $\lambda_i = \lambda_i(\sigma)$  в теории волноводов называются дисперсионными кривыми. На рис. 2, с. 101, изображены дисперсионные кривые волновода кругового поперечного сечения единичного радиуса с постоянным показателем преломления  $n = \sqrt{2}$ , находящегося в однородной окружающей среде с  $n_\infty = 1$ .

**2. Волновод в полупространстве.** Докажем теперь существование решений задачи (C), с. 56, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Ядро интегрального уравнения (62), с. 74, слабо полярно. При  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$  оно также становится вещественным и симметричным:

$$K_C(\omega, \beta; x, y) = G_C(\omega, \beta; x, y)p(x)p(y), \quad x, y \in \Omega,$$

$$G_C(\omega, \beta; x, y) = \frac{1}{2\pi} (K_0(\sigma(\omega, \beta)|x - y|) - K_0(\sigma(\omega, \beta)|x - y^*|)).$$

Здесь  $K_0$  — функция Макдональда, функции  $p$  и  $\sigma$  определены равенствами (52), с. 71, и (67), с. 78, соответственно,  $y^* = (y_1, -y_2)$ . Действительно, для любых  $x, y \in \Omega$  в силу очевидных равенств

$$|x - y| = |y - x|, \quad |x - y^*| = |y - x^*|$$

имеем  $K_C(x, y) = K_C(y, x)$ . Потребуем дополнительно, чтобы область  $\Omega$  не касалась оси  $x_1$ . Тогда ядро становится положительным:  $K_C(x, y) > 0$ . Действительно, функция Макдональда монотонно убывает на положительной полуоси (см., напр., [44]) а для любых  $x, y \in \Omega$  имеем  $|x - y| < |x - y^*|$ .

В этом случае интегральный оператор  $T_C(\omega, \sigma)$ , определенный равенством (63), с. 74, удобно рассматривать, как оператор

$$(T_D(\sigma))v(x) = \int_{\Omega} K_D(\sigma; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad (77)$$

$$K_D(\sigma; x, y) = G_D(\sigma; x, y)p(x)p(y), \quad (78)$$

$$G_D(\sigma; x, y) = \frac{1}{2\pi} (K_0(\sigma|x - y|) - K_0(\sigma|x - y^*|)),$$

действующий в пространстве вещественных функций  $L_2(\Omega)$ , а задачу (62), с. 74, — как спектральную задачу

$$v = \lambda T_D(\sigma)v, \quad (79)$$

где требуется найти значения  $\lambda > 0$ ,  $\sigma > 0$  и отвечающие им ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (79).

Задачи (79) и (D), с. 57, эквивалентны, а именно справедлива

**Теорема 2.8.** Если не равная нулю функция  $u \in U_D$  и параметры  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_\infty$  удовлетворяют условиям (D), с. 57, то

$$v = pu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2), \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_\infty^2}$$

удовлетворяют равенству (79). С другой стороны, если для ненулевой функции  $v \in L_2(\Omega)$  и некоторых значений  $\lambda > 0$ ,  $\sigma > 0$  выполняется равенство (79), то

$$u = v/p, \quad \beta = \left( \sigma^2 + \lambda \frac{n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2)} \right)^{1/2}$$

удовлетворяют уравнению (60), с. 73, функция  $u$  принадлежит множеству  $U_D$  и является собственной функцией задачи (D), с. 57, отвечающей собственным значениям  $\beta$  и  $\omega$ .

Эта теорема с учетом сделанных в настоящем параграфе предположений, фактически, является частным случаем теоремы 2.4.

Относительно существования решений задачи (79) справедлива

**Теорема 2.9.** При любом  $\sigma > 0$  оператор  $T_D(\sigma)$ , определенный равенством (77), является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для него справедливы следующие утверждения.

1. Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.

2. Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ .

3. Минимальное характеристическое число  $\lambda_1(\sigma)$  простое (его кратность равна единице), соответствующая собственная функция  $v_1(x)$  не меняет знака в области  $\Omega$ .

4. Существует такая константа  $c > 0$ , что  $\lambda_1(\sigma) \rightarrow c$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K_D(\sigma; x, y)$  вещественное, симметричное и слабо полярное, следовательно, оператор  $T_D(\sigma)$  вполне непрерывный и самосопряженный (см., напр., [9], с. 326). Докажем, что он положительно определенный.

Сформулируем вариационную постановку задачи  $(D)$ , с. 57, о поверхностных волнах слабонаправляющего волновода в полупространстве. Обозначим

$$H_0^1 = \{u \in W_2^1(\mathbb{R}_+^2) : u = 0, x_2 = 0\}.$$

Будем искать  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $u \in H_0^1$  такие, что

$$a(\sigma; u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in H_0^1, \quad (80)$$

где

$$a(\sigma; u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} uv dx, \quad u, v \in H_0^1,$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} p^2 uv dx, \quad u, v \in H_0^1,$$

функция  $p$  определена в (52), с. 71. Ясно, что при любом  $\sigma > 0$  оператор  $A(\sigma)$ , порождаемый билинейной формой  $a(\sigma; u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и положительно определенный, а оператор  $B$ , порождаемый билинейной формой  $b(u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и неотрицательный. Кроме того оператор  $B$  компактный (см., напр., [32], с. 106).

Существование решений задачи вида (80) с операторами, обладающими указанными свойствами, известно (см., напр., [19], с. 129). При любом  $\sigma > 0$  у задачи (80) существует счетное множество положительных собственных значений  $\lambda_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности, а система собственных функций  $\{u_i\}$  может быть выбрана ортонормированной в смысле скалярного произведения в  $L_2(\Omega)$  с весом  $p^2$ .

Если параметры  $\sigma$  и  $\lambda$  связаны с собственными значениями  $\omega$  и  $\beta$  задачи  $(D)$ , с. 57, равенствами (52), с. 71, и (67), с. 78, то каждому решению вариационной задачи (80) отвечает решение задачи  $(D)$ , с. 57, и наоборот (см. аналогичные рассуждения в ходе доказательства теоремы 2.7). Эта задача в свою очередь эквивалентна (см. теорему 2.8) задаче (79). Следовательно, каждое собственное значение  $\lambda_i(\sigma)$  задачи (80) является характеристическим числом оператора  $T_C(\sigma)$ , и наоборот, а соответству-

ющие собственные функции связаны равенством  $v_i = pu_i$ . Значит, первые два утверждения теоремы справедливы. Кроме того, доказано, что оператор  $T_D(\sigma)$  является положительно определенным, так как все его характеристические числа положительны (см., напр., [9], с. 325).

Докажем четвертое утверждение. При любом  $\sigma > 0$  для минимального собственного значения задачи (76) справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda_1(\sigma)} = \min_{u \in H_0^1, u \neq 0} \frac{b(u, u)}{a(\sigma; u, u)}.$$

Отсюда следует, что функция  $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$  монотонно не возрастает при  $\sigma \rightarrow 0$ . Кроме того, для минимального характеристического числа оператора  $T_D(\sigma)$  имеем (оценку нормы оператора см., напр., в [29], с. 428):

$$\frac{1}{\lambda_1(\sigma)} = \|T_D(\sigma)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} K_D^2(\sigma; x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Далее, справедливы равенства

$$K_0(\sigma|x - y|) = \ln \frac{1}{\sigma} + g(\sigma|x - y|), \quad K_0(\sigma|x - y^*|) = \ln \frac{1}{\sigma} + g^*(\sigma|x - y^*|),$$

где функции  $g$  и  $g^*$  не имеют особенности при  $\sigma \rightarrow 0$ . Значит функция

$$K_D^2(\sigma; x, y) = \frac{1}{4\pi^2} (g(\sigma|x - y|) - g^*(\sigma|x - y|))^2 p^2(x)p^2(y)$$

непрерывна по  $\sigma$  на отрезке  $[0, \sigma_0]$ , где  $\sigma_0$  — произвольное положительное число. Следовательно, норма  $\|T_D(\sigma)\|_{L_2(\Omega)}$  ограничена сверху равномерно по  $\sigma \in [0, \sigma_0]$ , а минимальное характеристическое число  $\lambda_1(\sigma)$  оператора  $T_D(\sigma)$  — снизу. Так как  $\lambda_1(\sigma)$  монотонно не возрастает, то стремится к положительному числу при  $\sigma \rightarrow 0$ . Таким образом, четвертое утверждение тоже выполняется.

При любом  $\sigma > 0$  ядро  $K_D(\sigma; x, y)$  оператора  $T_D(\sigma)$  является симметричным, положительным, слабо полярным. Таким образом для этого оператора справедлива теорема Ентча (см., напр., [9], с. 329), т. е. имеет место и третье утверждение теоремы.  $\square$

Утверждение 4 этой теоремы устанавливает, что у слабонаправляющего волновода в полупространстве при достаточно малых  $\omega$  не существует

поверхностных собственных волн. В этом заключается принципиальное отличие спектральных характеристик волновода в полупространстве от волновода в однородной окружающей среде, у которого при любой частоте  $\omega > 0$  существует, по крайней мере одна поверхностная собственная волна (основная).

Проиллюстрируем только что доказанную теорему. На рис. 17, с. 117, изображены дисперсионные кривые волновода, поперечное сечение которого представляет собой единичный полукруг с центром в начале координат, лежащий на оси  $x_1$ . Кусочно-постоянный показатель преломления этого волновода принимает следующие значения:  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $n(x) = n_\infty = 1$ ,  $x \in \Omega_\infty$ .

**3. Волновод в плоско-слоистой среде.** Обратимся теперь к задаче ( $E$ ), с. 58, о собственных волнах слабонаправляющего волновода в плоско-слоистой среде. Пусть  $\omega > 0$ ,  $\beta > kn_\infty$ ,  $n_\infty > n_t$ . Запишем равенство (50), с. 70, при  $x \in \Omega$  в виде интегрального уравнения со слабо полярным ядром:

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} G_E(\sigma, \lambda; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (81)$$

где

$$p^2(x) = \frac{n^2(x) - n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2}, \quad \lambda = k^2 (n_+^2 - n_\infty^2),$$

$$G_E(\sigma, \lambda; x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma|x - y|) - \quad (82)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp((x_2 + y_2)\gamma) \frac{\gamma_t - \gamma}{(\gamma_t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \Omega;$$

Здесь  $\gamma = \sqrt{\theta^2 + \sigma^2}$ ,  $\gamma_t = \sqrt{\theta^2 + \sigma_t^2}$ . Напомним, что  $\sigma^2 = \beta^2 - k^2 n_\infty^2$ , а  $\sigma_t^2 = \beta^2 - k^2 n_t^2$ , следовательно,  $\sigma_t^2 = \sigma^2 + \lambda(n_\infty^2 - n_t^2)/(n_+^2 - n_\infty^2)$ . Проверим, что ядро уравнения (81) действительно слабо полярное: второе слагаемое в (82) — гладкая по  $x, y \in \Omega$  функция, а первое (функция Макдональда) имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов.

Обозначим  $v = pu$ ,

$$K_E(\sigma, \lambda; x, y) = G_E(\sigma, \lambda; x, y) p(x) p(y) \quad x, y \in \Omega. \quad (83)$$

Имеем

$$v(x) = \lambda \int_{\Omega} K_E(\sigma, \lambda; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (84)$$

Пусть

$$(T_E(\sigma, \lambda))v(x) = \int_{\Omega} K_E(\sigma, \lambda; x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega. \quad (85)$$

Ясно, что при любых  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  ядро  $K_E(\sigma, \lambda; x, y)$ , определенное равенствами (82), (83), не только слабо полярное, но также вещественное и симметричное. Будем рассматривать оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$  как оператор, действующий в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Запишем уравнение (84) в виде

$$v = \lambda T_E(\sigma, \lambda)v. \quad (86)$$

Требуется найти  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (86).

Задачи (86) и (E), с. 58, эквивалентны, точнее справедлива

**Теорема 2.10.** *Если не равная нулю функция  $u \in U_E$  и параметры  $\omega > 0$  и  $\beta > kn_{\infty}$  удовлетворяют условиям (E), с. 58, то*

$$v = pu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2), \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_{\infty}^2}$$

*удовлетворяют равенству (86). С другой стороны, если для ненулевой функции  $v \in L_2(\Omega)$  и некоторых значений  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  выполняется равенство (86), то*

$$u = v/p, \quad \beta = \left( \sigma^2 + \lambda \frac{n_{\infty}^2}{n_+^2 - n_{\infty}^2} \right)^{1/2}, \quad \omega = \left( \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_{\infty}^2)} \right)^{1/2}$$

*удовлетворяют уравнению (81), функция  $u$  принадлежит множеству  $U_E$  и является собственной функцией задачи (E), с. 58, отвечающей собственным значениям  $\beta$  и  $\omega$ .*

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.4.

Задача (86) представляет собой спектральную задачу для интегрального оператора с симметричным слабо полярным ядром. Фиксируем  $\sigma > 0$ , и наряду с этой задачей рассмотрим следующую:

$$v = \gamma T_E(\sigma, \lambda)v. \quad (87)$$

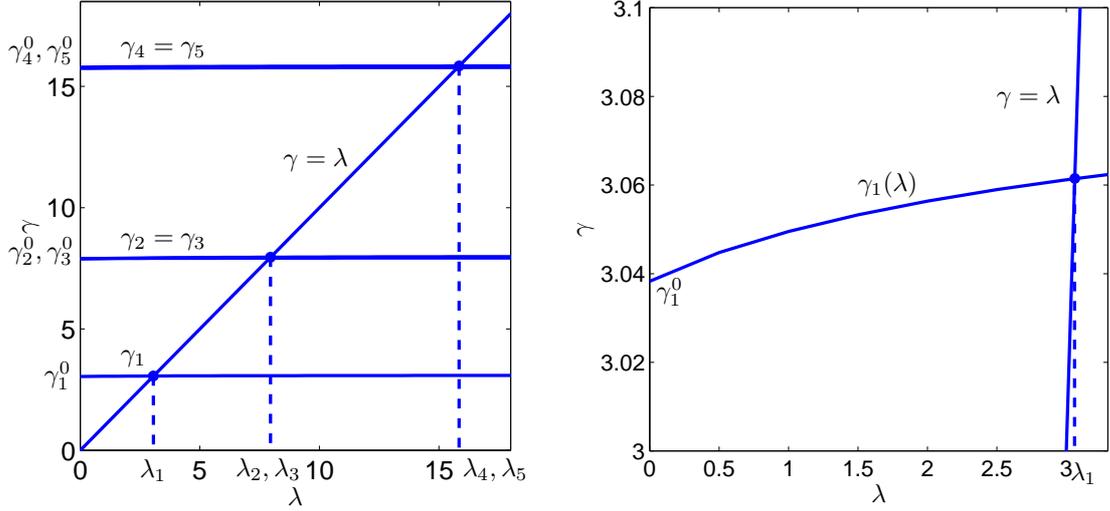


Рис. 3. Кривые  $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , полученные методом коллокации для волновода в слоистой среде (см. с. 124). Здесь  $\Omega$  — единичный круг с центром в точке  $(0, -2)$ , показатель преломления  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ .

Ясно, что если при некотором  $\lambda > 0$  существует значение  $\gamma = \lambda$  и ненулевая функция  $v \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющие равенству (87), то тройка  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $v$  есть решение задачи (86).

Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда второе слагаемое в (82) тоже равно нулю, и задача (82) совпадает с задачей о поверхностных волнах волновода в однородной среде (71), с. 78. Относительно существования решений этой задачи справедлива теорема 2.7. Обозначим соответствующие характеристические числа  $\gamma_i^0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Напомним, что все они положительны.

Пусть  $\lambda > 0$ . Тогда второе слагаемое в (82) не равно нулю, но ядро оператора  $T_E(\sigma, \lambda)$  остается симметричным и слабо полярным. Относительно существования решений задачи (87) при фиксированных  $\lambda > 0$ ,  $\sigma > 0$  справедлива

**Теорема 2.11.** *При любом  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$ , определенный равенством (85), является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным, и для него справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует счетное множество положительных характеристических чисел  $\gamma_i(\sigma, \lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности.*

2. Система собственных функций  $\{v_i\}$  может быть выбрана ортонормированной:  $(v_k, v_i) = \delta_{ki}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  ядро  $K_E(\sigma, \lambda; x, y)$  вещественное, симметричное и слабо полярное, следовательно, оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$  вполне непрерывный и самосопряженный (см., напр., [9], с. 326). Докажем, что утверждения 1, 2 выполняются и оператор  $T_E(\sigma, \lambda)$  положительно определен.

Сформулируем вариационную постановку задачи (E), с. 58: найти такие значения  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  и ненулевые функции  $u \in H^1 = W_2^1(\mathbb{R}^2)$ , что

$$a(\sigma, \lambda; u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in H^1, \quad (88)$$

где

$$a(\sigma, \lambda; u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^2} s(\sigma, \lambda) u v dx, \quad u, v \in H^1,$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} p^2 u v dx, \quad u, v \in H^1,$$

$$s(\sigma, \lambda) = \begin{cases} \sigma^2 + \lambda(n_\infty^2 - n_t^2)/(n_+^2 - n_\infty^2), & x_2 > 0, \\ \sigma^2, & x_2 < 0, \end{cases}$$

параметр  $\lambda$  и функция  $p^2 > 0$  определены равенствами (52), с. 71, параметр  $\sigma$  — равенством (67), с. 78;  $n_+ > n_\infty > n_t > 0$ . Фиксируем  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Наряду с задачей (88) рассмотрим задачу

$$a(\sigma, \lambda; u, v) = \gamma b(u, v) \quad \forall v \in H^1. \quad (89)$$

Оператор  $A(\sigma, \lambda)$ , порождаемый билинейной формой  $a(\sigma, \lambda; u, v)$ , ограниченный, самосопряженный и положительно определенный. Оператор  $B$ , порождаемый билинейной формой  $b(u, v)$ , ограниченный, самосопряженный, неотрицательный и компактный. Значит при любых  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  у задачи (89) существует счетное множество положительных собственных значений  $\gamma(\sigma, \lambda)_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , конечной кратности с единственной точкой накопления на бесконечности, а собственные функции могут быть выбраны ортонормированными. Задачи (87) и (89) эквивалентны. Следовательно, теорема справедлива.  $\square$

Фиксируем  $\sigma > 0$ . Введем в рассмотрение функции  $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$  параметра  $\lambda > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где через  $\gamma_i(\lambda)$  обозначены характеристические числа оператора  $T_E(\sigma, \lambda)$ . Приведем результаты расчетов, полученные методом коллокации (см. с. 124). В этом эксперименте область  $\Omega$  — единичный круг с центром в точке  $(0, -2)$ , показатель преломления  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ . На рис. 3 изображены кривые  $\gamma_i = \gamma_i(\lambda)$  для  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Они пересекают прямую  $\gamma = \lambda$ , практически горизонтальные (см. левый рис.), но монотонно возрастают (см. правый рис.). На рис. 21, с. 124, изображены дисперсионные кривые для этого волновода.

### ГЛАВА 3

## МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Спектральные задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде, полупространстве и слоистой среде сведены в первой главе к линейным (71), с. 78, (79), с. 84, (86), с. 89, и нелинейным (57), с. 72, (64), с. 74, задачам поиска характеристических чисел двумерных слабо сингулярных интегральных операторов. Одним из эффективных численных методов решения подобных задач является метод коллокации [55], [114].

В настоящей главе на основе метода коллокации с триангуляцией области интегрирования и кусочно-постоянной аппроксимацией собственных функций строятся приближения указанных задач. Для вычисления поверхностных и вытекающих собственных волн формулируются, соответственно, линейные и нелинейные алгебраические спектральные задачи. Исследуется сходимость метода, в частности, доказываемся, что метод коллокации решения линейных задач имеет второй порядок точности при вычислении простых характеристических чисел. Обсуждаются алгоритмы, применяющиеся для приближенного решения конечно-мерных задач.

Приводятся результаты численных экспериментов. Они сравниваются с известными точными решениями и результатами, полученными другими авторами. Рассчитываются поверхностные и вытекающие собственные волны ряда неисследованных ранее волноводов в полупространстве и слоистой среде. Оценивается реальная скорость сходимости метода коллокации. Во всех экспериментах при решении, как линейных, так и нелинейных задач, он всегда демонстрирует второй порядок точности.

## § 1. Метод коллокации решения линейных задач

Опишем метод коллокации приближенного решения линейных спектральных задач о поверхностных собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде (71), с. 78, полупространстве (79), с. 84, и слоистой среде (86), с. 89. Пусть  $\sigma > 0$  — фиксированный параметр. Задачи (71), с. 78, и (79), с. 84, имеют вид

$$u = \lambda T u, \quad (1)$$

а задача (86), с. 89, сведена к задаче

$$u = \gamma T(\lambda) u.$$

При фиксированном  $\lambda > 0$  эта задача тоже линейная и имеет вид (1).

Во всех этих задачах оператор  $T$  определяется одним из равенств: (70), с. 78, (77), с. 84, или (85), с. 89, вида

$$(Tu)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

где  $K$  — соответствующее слабо полярное ядро.

Обозначим через  $\mathbb{N}$  множество натуральных чисел. Проведем триангуляцию области  $\Omega$  замкнутыми треугольниками  $\Omega_{j,h}$  так, что вершины многоугольника

$$\Omega_h = \bigcup_{j=1}^N \Omega_{j,h} \subseteq \bar{\Omega},$$

аппроксимирующего  $\bar{\Omega}$ , лежат на контуре  $\Gamma$  и

$$\max_{1 \leq j \leq N} \text{diam}(\Omega_{j,h}) \leq h.$$

Здесь  $N = N_h \in \mathbb{N}$  — число элементов триангуляции  $\Omega_h$ . Предполагается, что эта триангуляция является правильной и регулярной (см., напр., [20]).

Обозначим символом  $\Xi_h = \{\xi_{j,h}\}_{j=1}^N$  сетку на области  $\Omega$ , образованную центрами масс  $\xi_{j,h}$  треугольников  $\Omega_{j,h}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Собственный вектор оператора  $T$  будем разыскивать в виде кусочно-постоянной функции

$$u^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^N u_h(\xi_{j,h}) \varphi_{j,h}, \quad (3)$$

где

$$\varphi_{j,h}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{j,h}, \\ 0, & x \notin \Omega_{j,h}. \end{cases}$$

Значения  $u_{j,h} = u_h(\xi_{j,h})$  будем определять из уравнений

$$u_{i,h} = \lambda \sum_{j=1}^N u_{j,h} \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Обозначим через  $\text{sp}(T)$  множество всех характеристических чисел оператора  $T$ . Приближением по методу коллокации к числу  $\lambda \in \text{sp}(T)$  будем называть число  $\lambda_h = 1/\mu_h$ , где  $\mu_h$  есть некоторое характеристическое число матрицы  $T_h$  с вещественными элементами

$$t_{ij} = \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Обозначим множество всех таких чисел  $\lambda_h$  через  $\text{sp}(T_h)$ . Метод коллокации приближенного решения задач (71), с. 78, (79), с. 84 и (86), с. 89, обосновывает следующая

**Теорема 3.12.** Пусть оператор  $T$  определен равенством (70), с. 78, или (77), с. 84, при фиксированном  $\sigma > 0$ , либо — равенством (85), с. 89, при фиксированных  $\lambda > 0$  и  $\sigma > 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$ , то существует семейство  $\lambda_h \in \text{sp}(T_h)$  такое, что  $\lambda_h \rightarrow \lambda_0$  при  $h \rightarrow 0$ .

2. Если семейство  $\lambda_h \in \text{sp}(T_h)$  такое, что  $\lambda_h \rightarrow \lambda_0 > 0$ ,  $h \rightarrow 0$ , то  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$ .

3. Если показатель преломления  $n \in C^2(\Omega)$ , а характеристическое число  $\lambda_0 \in \text{sp}(T)$  простое, то существует такое  $\bar{h} > 0$ , что

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leq ch^2, \quad h \in (0, \bar{h}).$$

При доказательстве этой теоремы будем опираться на общие результаты теории дискретной сходимости проекционных методов решения линейных спектральных задач для многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений [114]. Поэтому предварим доказательство некоторыми определениями [114] и известными результатами.

Ядро  $K$  оператора  $T$  слабо полярно,  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ , поэтому, если решение задачи (1) существует, то собственная функция  $u$  принадлежит (см., напр., [9], с. 327) пространству  $E = C(\bar{\Omega})$  с нормой

$$\|u\|_E = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|. \quad (5)$$

Будем рассматривать оператор  $T$  как оператор, действующий в пространстве  $E$ . Введем пространство  $E_h$  функций, заданных на сетке  $\Xi_h$ , с нормой

$$\|u_h\|_{E_h} = \max_{1 \leq j \leq N} |u_h(\xi_{j,h})|, \quad u_h \in E_h. \quad (6)$$

Введем оператор  $T_h$ , действующий в  $E_h$ :

$$(T_h u_h)(\xi_{i,h}) = \sum_{j=1}^N u_h(\xi_{j,h}) \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) dy. \quad (7)$$

Следуя [114], с. 52, введем оператор  $p_h : E \rightarrow E_h$  как оператор, определяющий сужение функции  $u \in E$  на сетку  $\Xi_h$ :  $p_h u \in E_h$  — сеточная функция со значениями

$$(p_h u)(\xi_{j,h}) = u(\xi_{j,h}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (8)$$

В [114], с. 52, доказано что оператор  $p_h$  принадлежит пространству линейных ограниченных операторов  $L(E, E_h)$ ,

$$\|p_h\|_{E \rightarrow E_h} = 1,$$

кроме того, оператор  $p_h$  удовлетворяет условию

$$\|p_h u\|_{E_h} \rightarrow \|u\|_E, \quad h \rightarrow 0, \quad \forall u \in E. \quad (9)$$

Семейство  $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  элементов  $u_h \in E_h$  (где  $\bar{h}$  — некоторое положительное число) называется дискретно сходящимся к элементу  $u \in E$ , если

$$\|u_h - p_h u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Дискретную сходимость будем обозначать так:  $u_h \dashrightarrow u$ . Последовательность элементов  $(u_{h_k})$ , где  $u_{h_k} \in E_{h_k}$  и  $h_k \rightarrow 0$  называется дискретно сходящейся к элементу  $u \in E$ , если

$$\|u_{h_k} - p_{h_k} u\|_{E_{h_k}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Семейство  $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  элементов  $u_h \in E_h$  называется дискретно компактным, если любая последовательность элементов  $u_{h_k}$ , для которой  $h_k \rightarrow 0$ , содержит дискретно сходящуюся подпоследовательность. Аналогично определяется дискретно компактная последовательность.

Семейство  $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  операторов  $T_h \in L(E_h, E_h)$  называется дискретно сходящимся к оператору  $T \in L(E, E)$ , если из  $u_h \dashrightarrow u$  следует, что  $T_h u_h \dashrightarrow Tu$ . Дискретную сходимость семейства операторов будем обозначать следующим образом:  $T_h \dashrightarrow T$ .

Говорят, что семейство  $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  операторов  $T_h \in L(E_h, E_h)$  сходится к оператору  $T \in L(E, E)$  дискретно компактно, если  $T_h \dashrightarrow T$ , и, кроме того, из  $\|u_h\|_{E_h} < \text{const}$ ,  $h \in (0, \bar{h})$ , следует, что семейство  $(T_h u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  дискретно компактно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** теоремы 3.12. Оператор  $T \in L(E, E)$  — вполне непрерывный (см., напр., [96] с. 24). Следовательно, по теореме 4.2 [114] достаточно показать, что семейство  $(T_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  операторов  $T_h \in L(E_h, E_h)$  сходится к оператору  $T \in L(E, E)$  дискретно компактно и для  $u_0 = \lambda_0 T u_0$  получить оценку

$$\|T_h p_h u_0 - p_h T u_0\|_{E_h} \leq ch^2, \quad h \in (0, \bar{h}). \quad (11)$$

Доказательство дискретной компактной сходимости проводится аналогично доказательству лемм 5.1 и 5.2 [114].

Для доказательства оценки (11) прежде всего заметим, что, если показатель преломления  $n \in C^2(\Omega)$ , то при фиксированном  $\sigma > 0$  ядра интегральных операторов, определенных равенствами (70), с. 78, и (77), с. 84, а также при фиксированных  $\lambda > 0$  и  $\sigma > 0$  — равенством (85), с. 89, представимы в виде

$$K(x, y) = a(x, y) \ln |x - y| + b(x, y),$$

где  $a(x, y)$  — дважды непрерывно дифференцируемая в  $\Omega \times \Omega$  функция, а  $b(x, y)$  — непрерывная и непрерывно дифференцируемая в  $\Omega \times \Omega$  функция. Следовательно, (см. [114], с. 24) любая собственная функция принадлежит пространству  $C^{2,0}(\Omega)$  с нормой

$$\|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \sup_{x \in \Omega} |\nabla u(x)| + \sup_{x \in \Omega} \frac{|D^2 u(x)|}{1 + \ln \rho(x)}, \quad (12)$$

где  $\rho(x) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$ . Далее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.3 [114].

В монографии [114] рассмотрен более общий случай многомерных интегральных операторов с полярными ядрами. В приложении к монографии леммы 5.1–5.3 [114] будут сформулированы применительно к рассматриваемому частному случаю, а их доказательства проведены более подробно.  $\square$

## § 2. Численное решение задач о поверхностных волнах

Опишем результаты численных экспериментов поиска поверхностных волн для волноводов, находящихся в однородной среде, полупространстве и плоско-слоистой среде.

### 1. Волновод в однородной среде.

**1.1. Вычисление элементов матрицы.** Приведем формулы для вычисления элементов

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_j} K_0(\sigma|\xi_i - y|)p(\xi_i)p(y)dy, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

матрицы  $A = T_h$ , возникающей при построении системы уравнений (4), с. 95, методом коллокации. Здесь  $\xi_i$  — центр тяжести треугольника  $\Omega_i$ . Сначала опишем способ вычисления диагональных элементов  $a_{ii}$ . Функция  $p$  непрерывна в области  $\Omega$ . Аппроксимируем ее кусочно-постоянной функцией:

$$a_{ii} \approx \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \int_{\Omega_i} K_0(\sigma|\xi_i - y|)dy.$$

Функция  $K_0$  имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Выделим эту особенность явно следующим образом:

$$a_{ii} \approx \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \int_{\Omega_i} \ln \frac{1}{|\xi_i - y|} dy + \int_{\Omega_i} \Phi_0(\sigma; |\xi_i - y|) dy \right) = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} (S_2 - S_1),$$

где

$$S_1 = \int_{\Omega_i} \ln |\xi_i - y| dy, \quad S_2 = \int_{\Omega_i} \Phi_0(\sigma; |\xi_i - y|) dy,$$

$$\Phi_0(\sigma; |\xi_i - y|) = K_0(\sigma |\xi_i - y|) - \ln \frac{1}{|\xi_i - y|}.$$

Функция  $\Phi_0$  не имеет особенностей. Вычислим интеграл  $S_1$ . Обозначим через  $B_{R_i}(\xi_i)$  круг радиуса  $R_i$  с центром в точке  $\xi_i$ , где  $R_i$  — расстояние от центра тяжести  $\xi_i$  до ближайшей стороны треугольника  $\Omega_i$ . Разделим область интегрирования в  $S_1$  на две (см. рис. 1):

$$\Omega_i = B_{R_i}(\xi_i) \cup (\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i)).$$

Интеграл по кругу  $B_{R_i}(\xi_i)$  вычислим точно. В интеграле по  $\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i)$  величину  $|\xi_i - y|$  положим равной  $R_i$ . Получим

$$S_1 \approx \int_{B_{R_i}(\xi_i)} \ln |\xi_i - y| dy + \int_{\Omega_i \setminus B_{R_i}(\xi_i)} \ln R_i dy = \ln R_i |\Omega_i| - \frac{\pi R_i^2}{2}.$$

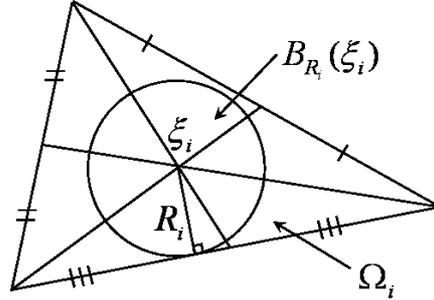


Рис. 1. К вычислению  $S_1$ .

Теперь вычислим интеграл  $S_2$ . Применим асимптотическую формулу для функции  $K_0(z)$  при  $z \rightarrow 0$ :

$$K_0(z) \approx \ln \frac{2}{\gamma z},$$

где  $\gamma = 0.5772156649\dots$  — константа Эйлера. Поэтому при  $|y - \xi_i| \rightarrow 0$

$$S_2 = \int_{\Omega_i} \left( K_0(\sigma |\xi_i - y|) - \ln \frac{1}{|\xi_i - y|} \right) dy \approx$$

$$\approx \int_{\Omega_i} \left( \ln \frac{2}{\sigma \gamma |\xi_i - y|} - \ln \frac{1}{|\xi_i - y|} \right) dy = - \ln \frac{\sigma \gamma}{2} |\Omega_i|.$$

Таким образом, при достаточно мелком разбиении элемент  $a_{ii}$  может быть вычислен по формуле

$$a_{ii} = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\sigma\gamma}{2} |\Omega_i| \right),$$

и именно этот способ применялся. Внедиагональные элементы вычислялись по формуле

$$a_{ij} = \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)|\Omega_j|}{2\pi} K_0(\sigma|\xi_i - \xi_j|).$$

Симметризуем матрицу  $A$ , умножив ее на матрицу

$$B = \text{diag}(|\Omega_1|, |\Omega_2|, \dots, |\Omega_N|)/|\Omega|^2,$$

где  $|\Omega| = \max_{i=1, \dots, N} |\Omega_i|$ . Положим  $\mu = 1/\lambda$ . Таким образом, мы свели задачу (4), с. 95, к обобщенной задаче на собственные значения

$$BA(\sigma)u = \mu Bu. \quad (13)$$

**1.2. Численный метод решения спектральной задачи.** Для численного решения алгебраической задачи (13) в системе Matlab использовалась процедура `eigs`, которая реализует модифицированный метод Арнольди [88]. Эта процедура дает возможность находить заданное количество собственных значений, упорядоченных по возрастанию.

**1.3. Особенности построения дисперсионных кривых.** Опишем алгоритм построения дисперсионных кривых. Напомним, что исходная задача состоит в определении собственных значений  $\beta$  и  $\omega$ , а также соответствующих им собственных функций  $u$ . Предположим, что нас интересуют все решения задачи в интервале частот  $(0, \omega_0)$ . Мы знаем, что собственные значения  $(\beta, \omega)$ , соответствующие поверхностным волнам лежат в области

$$\Psi = \{(\beta, \omega) : \omega n_\infty \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} < \beta < \omega n_+ \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \omega \in (0, \omega_0)\}.$$

С использованием предлагаемого нами метода эта задача решается следующим образом. Переформулируем задачу в терминах параметров  $\lambda$  и  $\sigma$ .

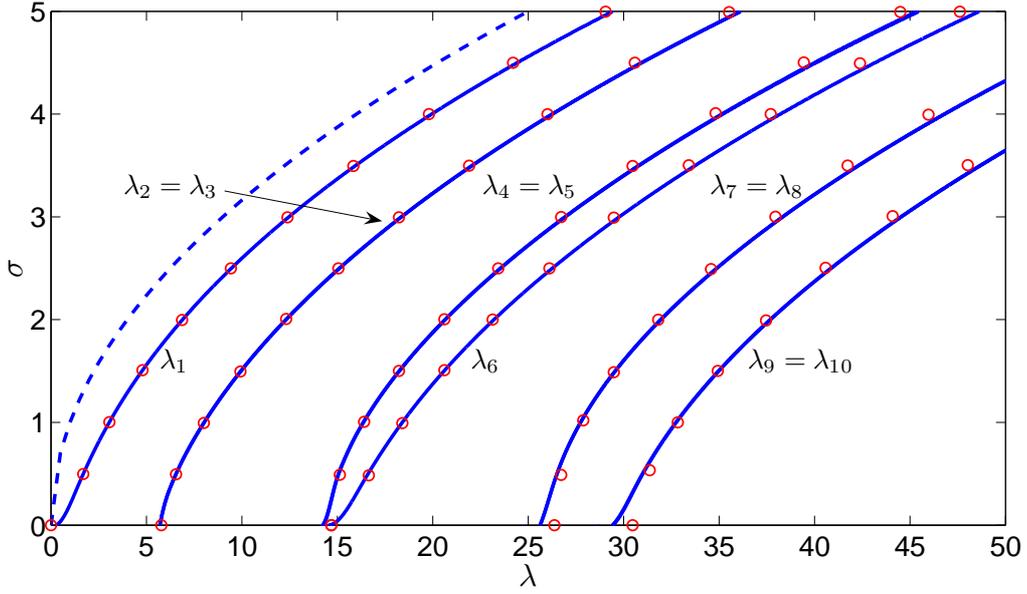


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 6528$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом коллокации. Кружочками обозначено точное решение

Дисперсионными кривыми называются графики функций  $\sigma = \sigma(\lambda)$ . Область  $\Psi$  взаимно однозначно соответствует область  $\Theta$  параметров  $(\lambda, \sigma)$ :

$$\Theta = \{(\lambda, \sigma) : \lambda \in (0, \lambda_0), \sigma \in (0, \sqrt{\lambda})\},$$

где  $\lambda_0 = \omega_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2)$ .

На интервале  $(0, \sqrt{\lambda_0})$  введем по  $\sigma$  равномерную сетку. В каждой точке  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, N_\sigma$  для дискретной задачи найдем все собственные числа  $\lambda_{l,j}$ ,  $l = 1, \dots, L$ , которые попали в интервал  $(0, \lambda_0)$ . Построим кривую по точкам  $(\lambda_{l,j}, \sigma_j)$ , где  $j = 1, \dots, N_\sigma$ . В результате получим дисперсионную кривую под номером  $l$ .

**1.4. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод кругового поперечного сечения с центром в начале координат единичного радиуса. Показатель преломления  $n(x)$  в  $\Omega$  принимает постоянное значение  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . Для волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления известно точное решение, полученное методом разделения переменных (см., напр., [19]). На рис. 2 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленные при  $N = 6528$ . Сплошными линиями показано приближенное решение, кружочками от-

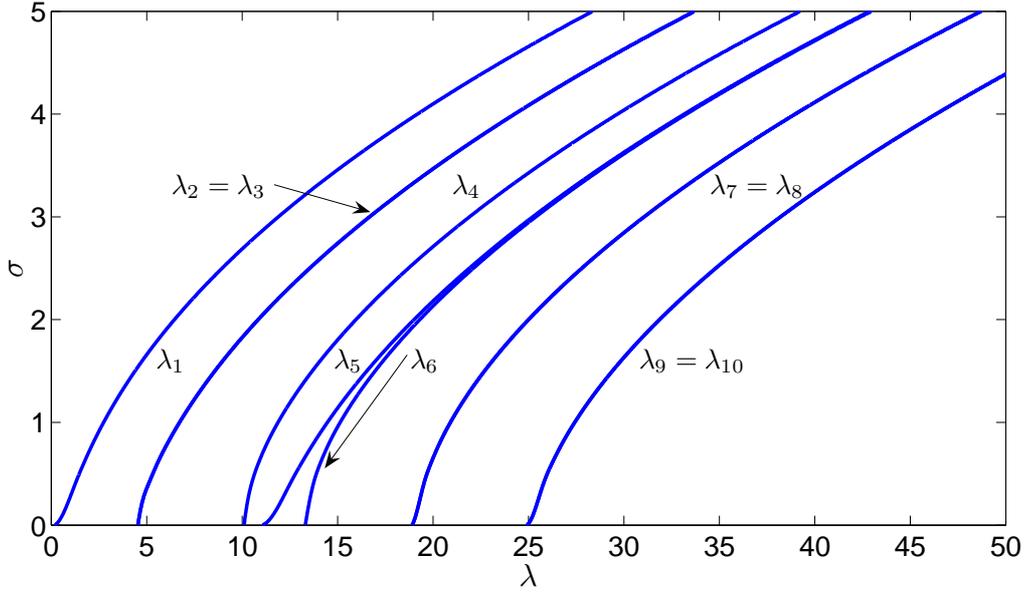


Рис. 3. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 7168$ .

мечено точное, штриховой линией построена кривая  $\sigma = \sqrt{\lambda}$ , определяющая часть границы области  $\Theta$ . Все дисперсионные кривые лежат ниже этой кривой. Имеются кратные характеристические числа:  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$ ,  $\lambda_7 = \lambda_8$  и  $\lambda_9 = \lambda_{10}$ .

На рисунках 7, 8 представлены линии уровня волновода кругового поперечного сечения, вычисленные при  $N = 6528$  и  $\sigma = 1$ .

В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ , из которой видно, что метод имеет второй порядок точности. Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при  $\sigma = 1$  и разным числе треугольников, сравнивались с точным значением  $\lambda_6 = 18.4326$ , полученным методом разделения переменных.

$N$	64	256	512	1032	2304	4128	6528
$h$	0.4856	0.2573	0.1551	0.1217	0.0800	0.0618	0.0491
$\tilde{\lambda}_6$	16.0095	17.7529	18.1083	18.2402	18.3337	18.3842	18.4020
$e$	0.5576	0.5572	0.7315	0.7041	0.8384	0.6868	0.6881
$\varepsilon$	0.1315	0.0369	0.0176	0.0104	0.0054	0.0026	0.0017

Опишем обозначения, которые использованы здесь и в других подобных таблицах, приведенных ниже. Предложенный численный метод исследовался на сходимость для волноводов, имеющих различные поперечные сечения и показатели преломления, следующим образом. При разных

значениях  $N$  и фиксированном параметре  $\sigma = 1$  вычислялось приближенное значение характеристического числа  $\tilde{\lambda}_j$  и сравнивалось с точным значением. Если для данного волновода точное решение неизвестно, то в этом случае исследовалась внутренняя сходимость метода, т. е. сравнение производилось со значением, вычисленным при максимально большом  $N$ . По полученным данным строилась таблица в которой отражены зависимости от  $N$  относительной ошибки  $\varepsilon = |\lambda_j - \tilde{\lambda}_j|/\lambda_j$  и величины  $e = \varepsilon/h^2$ , характеризующей скорость сходимости. Из всех полученных таблиц видно, что порядок сходимости метода не меньше двух, и с увеличением числа точек коллокации относительная погрешность  $\varepsilon$  убывает.

Рассмотрим однородный волновод квадратного поперечного сечения. Точка пересечения диагоналей квадрата расположена в начале координат. Стороны имеют единичную длину и параллельны осям координат. Показатель преломления  $n(x)$  в  $\Omega$  принимает постоянное значение  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 3 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленных при  $N = 7168$ . Сплошными линиями обозначено приближенное решение. Имеются кратные собственные числа:  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$  и  $\lambda_9 = \lambda_{10}$ . В случае квадратного волновода количество кратных собственных чисел по сравнению с круговым волноводом уменьшилось. На рисунках 9 и 10 представлены линии уровня волновода квадратного поперечного сечения, вычисленные при  $N = 7168$  и  $\sigma = 1$ .

Рассмотрим однородный волновод прямоугольного поперечного сечения. Точка пересечения диагоналей прямоугольника расположена в начале координат. Стороны имеют длины 2 и 1 и параллельны осям координат. Показатель преломления  $n(x) = n_+ = \sqrt{2}$ . Показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 4 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленных при  $N = 6656$ . Сплошными линиями обозначено приближенное решение, кружочки — данные из работы [89]. В случае прямоугольного волновода кратных собственных чисел не обнаружено. На рис. 11–12 представлены линии уровня волновода прямоугольного поперечного сечения, вычисленные при  $N = 6656$  и  $\sigma = 1$ .

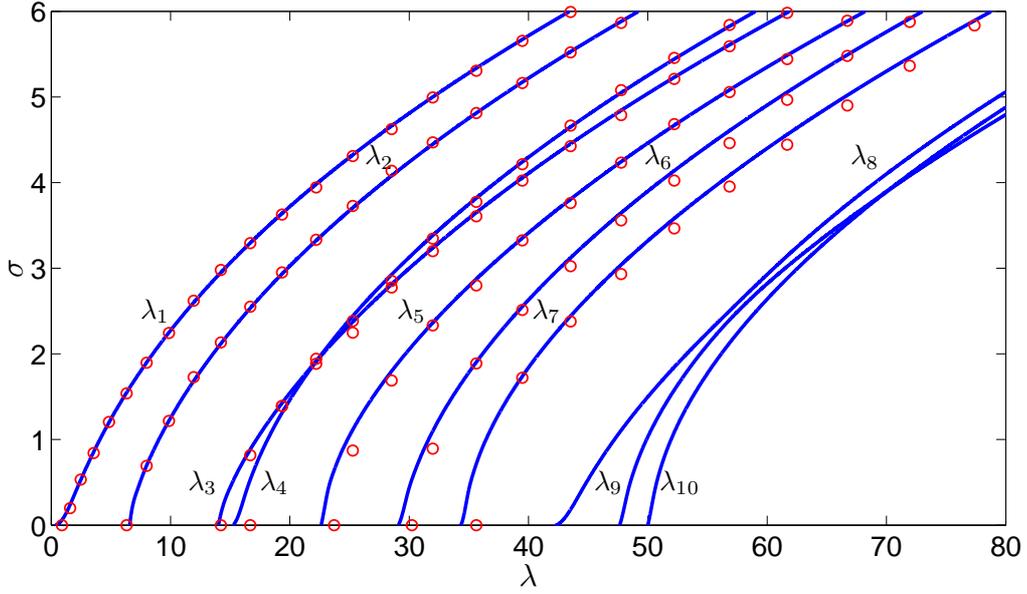


Рис. 4. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода прямоугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 6656$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом коллокации, кружочки — данные из работы [89]

Рассмотрим однородный волновод, поперечным сечением которого является равносторонний треугольник, вписанный в окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Одна из вершин треугольника лежит на оси  $x_2$ . Показатель преломления волновода  $n(x)$  равен константе  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 5 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , вычисленные при  $N = 6912$ . Сплошными линиями обозначены результаты расчетов методом коллокации, квадратиками — данные из работы [95], кружочками — из работы [94]. На рисунках 13, 14 представлены линии уровня волновода треугольного поперечного сечения, вычисленные при  $N = 6912$  и  $\sigma = 1$ .

Рассмотрим неоднородный волновод кругового поперечного сечения с центром в начале координат единичного радиуса. Показатель преломления в области  $\Omega$  изменяется по закону

$$n^2(r) = n_+^2 \left( 1 - \frac{n_+^2 - n_\infty^2}{n_+^2} r^4 \right). \quad (14)$$

Показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ .

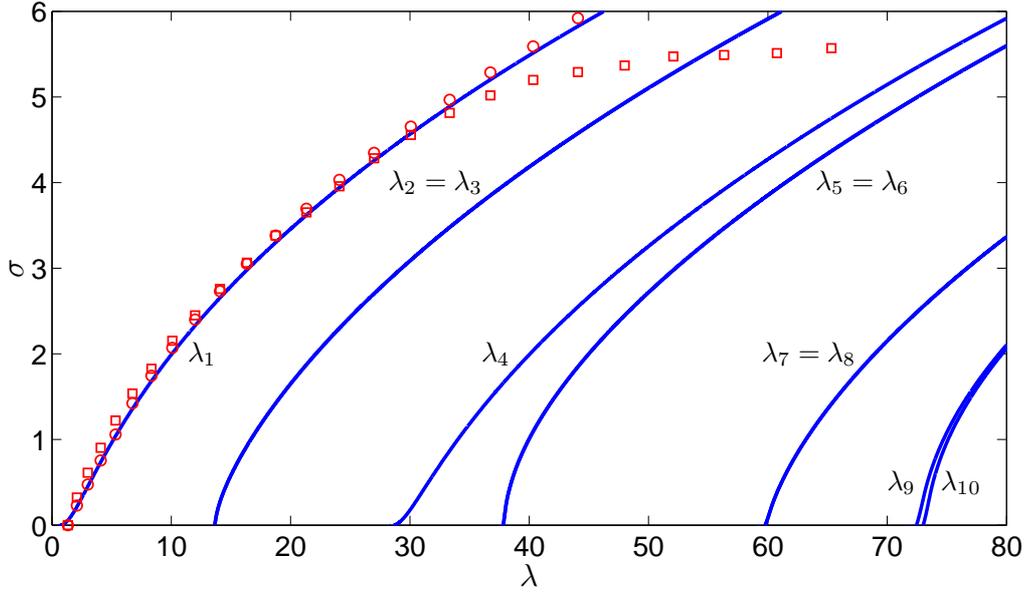


Рис. 5. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода треугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 6912$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом коллокации, квадратиками обозначены данные из работы [95], кружочки — данные из работы [94]

На рис. 6 изображены первые десять дисперсионных кривых, вычисленных при  $N = 1032$ . Сплошными линиями обозначено приближенное решение, кружочками — данные из работы [56]. Имеются кратные собственные числа, а именно,  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$ ,  $\lambda_7 = \lambda_8$  и  $\lambda_9 = \lambda_{10}$ . В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при  $\sigma = 1$  и разным числе элементов триангуляции сравнивались со значением  $\lambda_6 = 26.3557$ , подсчитанном при  $N = 6528$ .

$N$	64	256	512	1032	2304	4128
$h$	0.4856	0.2594	0.1551	0.1184	0.0875	0.0620
$\tilde{\lambda}_6$	22.1432	25.1968	25.8107	26.0432	26.2193	26.3192
$e$	0.6778	0.6523	0.8605	0.8455	0.6755	0.3593
$\varepsilon$	0.1598	0.0439	0.0207	0.0119	0.0052	0.0014

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 0.8h^2$ . На рисунках 15, 16 представлены линии уровня неоднородного волновода кругового поперечного сечения, вычисленные при  $N = 4128$  и  $\sigma = 1$ .

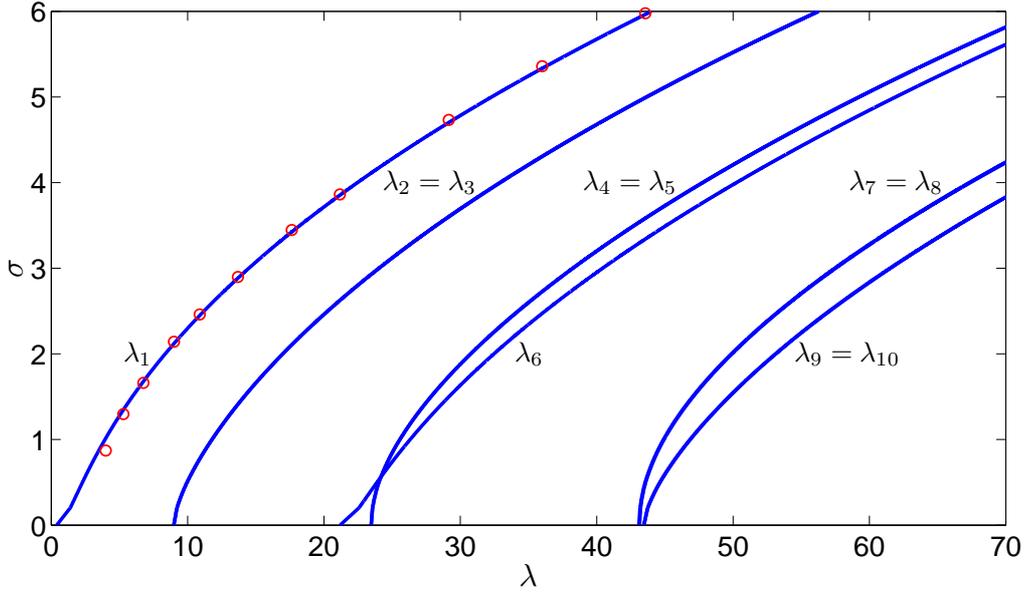


Рис. 6. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн неоднородного волновода кругового поперечного сечения,  $n(x)$ , изменяющемуся по закону (14), где  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 1032$ . Сплошные линии – результаты расчетов методом коллокации. Крестиками обозначены данные из работы [56]

## 2. Волновод в полупространстве.

**2.1. Особенности вычислений.** Как и в случае волновода, находящегося в однородной среде, ядро интегрального оператора имеет логарифмическую особенность. Формулы для вычисления диагональных элементов матрицы  $A$  получены способом, описанным в первом пункте, и имеют вид:

$$a_{ii} = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\sigma \gamma}{2} |\Omega_i| - K_0(2\sigma |\xi_2^i|) |\Omega_i| \right).$$

Внедиагональные элементы вычислялись по формуле

$$a_{ij} = \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)|\Omega_j|}{2\pi} (K_0(\sigma |\xi_i - \xi_j|) - K_0(\sigma |\xi_i - \xi_j^*|)).$$

Матрица  $A$  также симметризовывалась умножением на матрицу

$$B = \text{diag}(|\Omega_1|, |\Omega_2|, \dots, |\Omega_{N_h}|) / |\Omega|^2.$$

Таким образом, мы свели исходную задачу к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения

$$BA(\sigma)u = \mu Bu, \quad \mu = 1/\lambda. \quad (15)$$

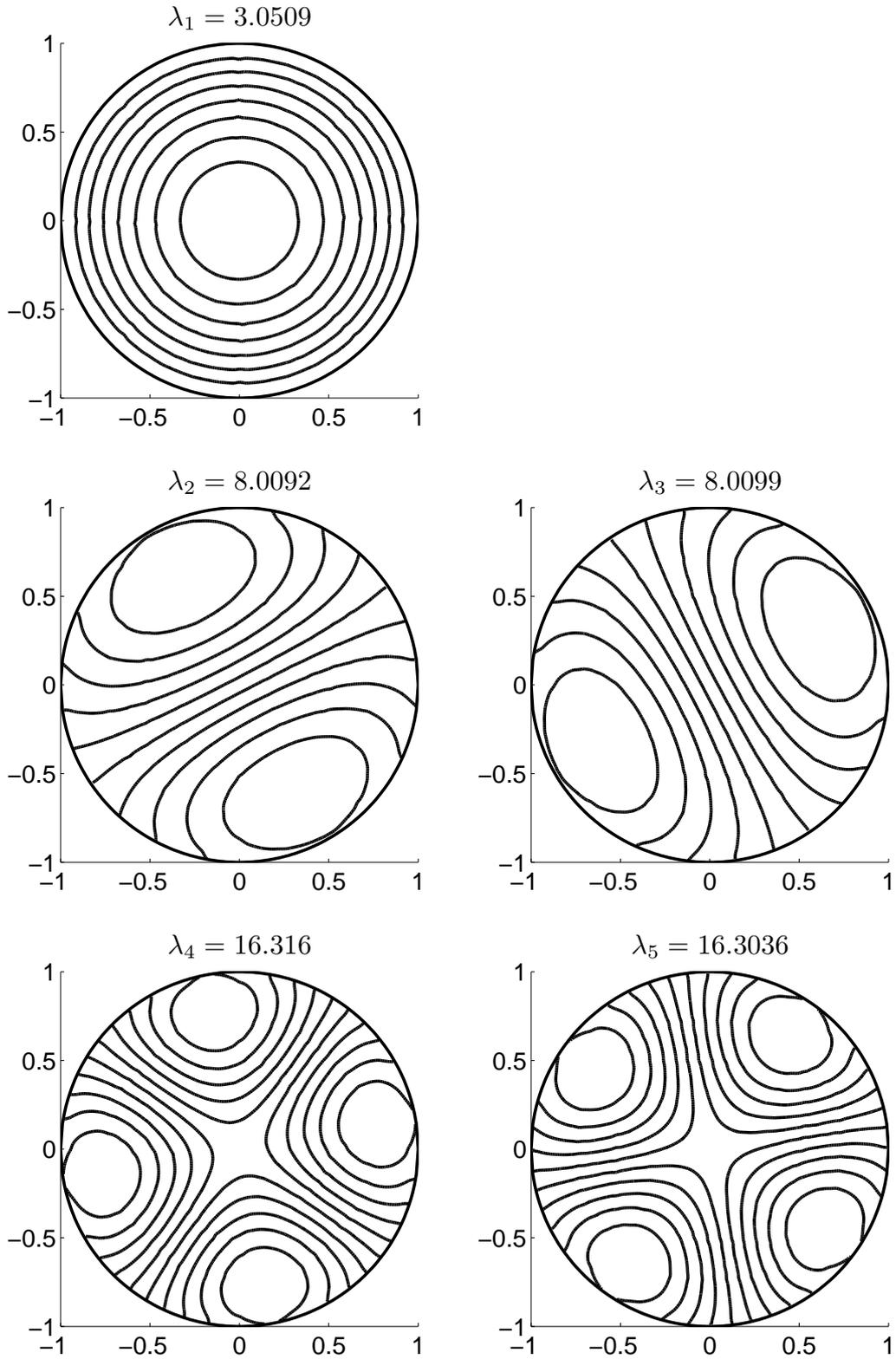


Рис. 7. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6528$ .

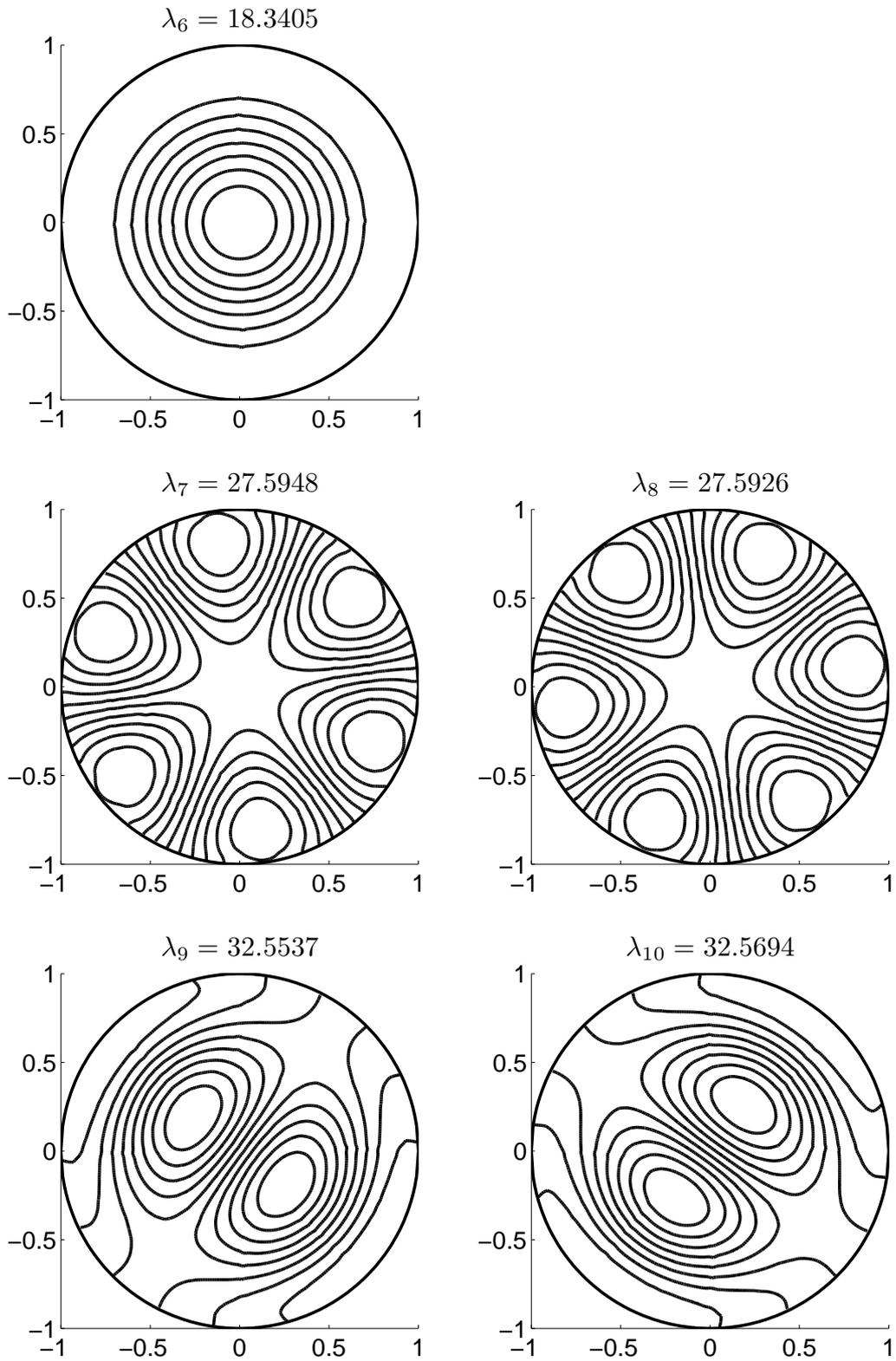


Рис. 8. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6528$ .

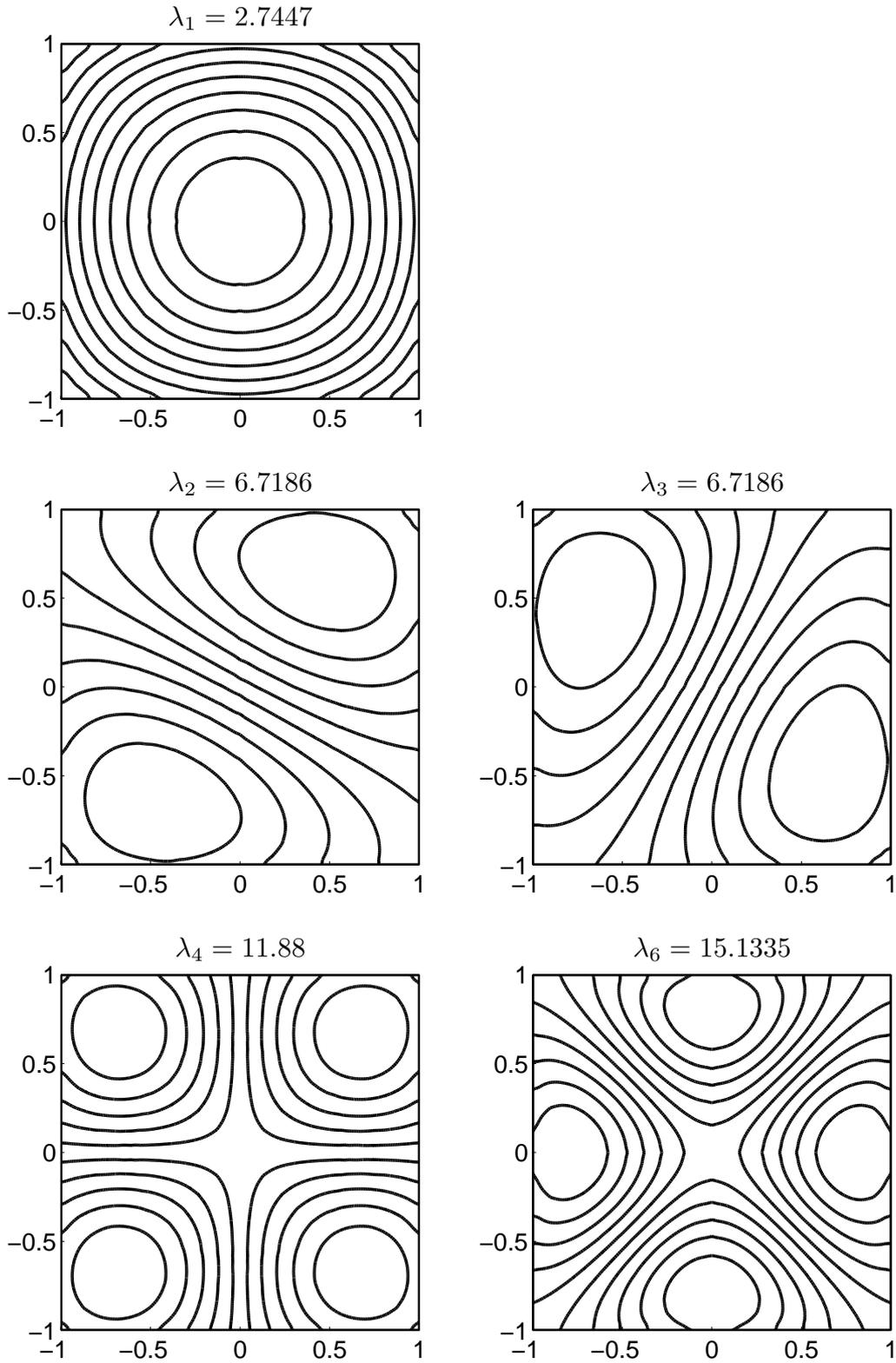


Рис. 9. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 7168$ .

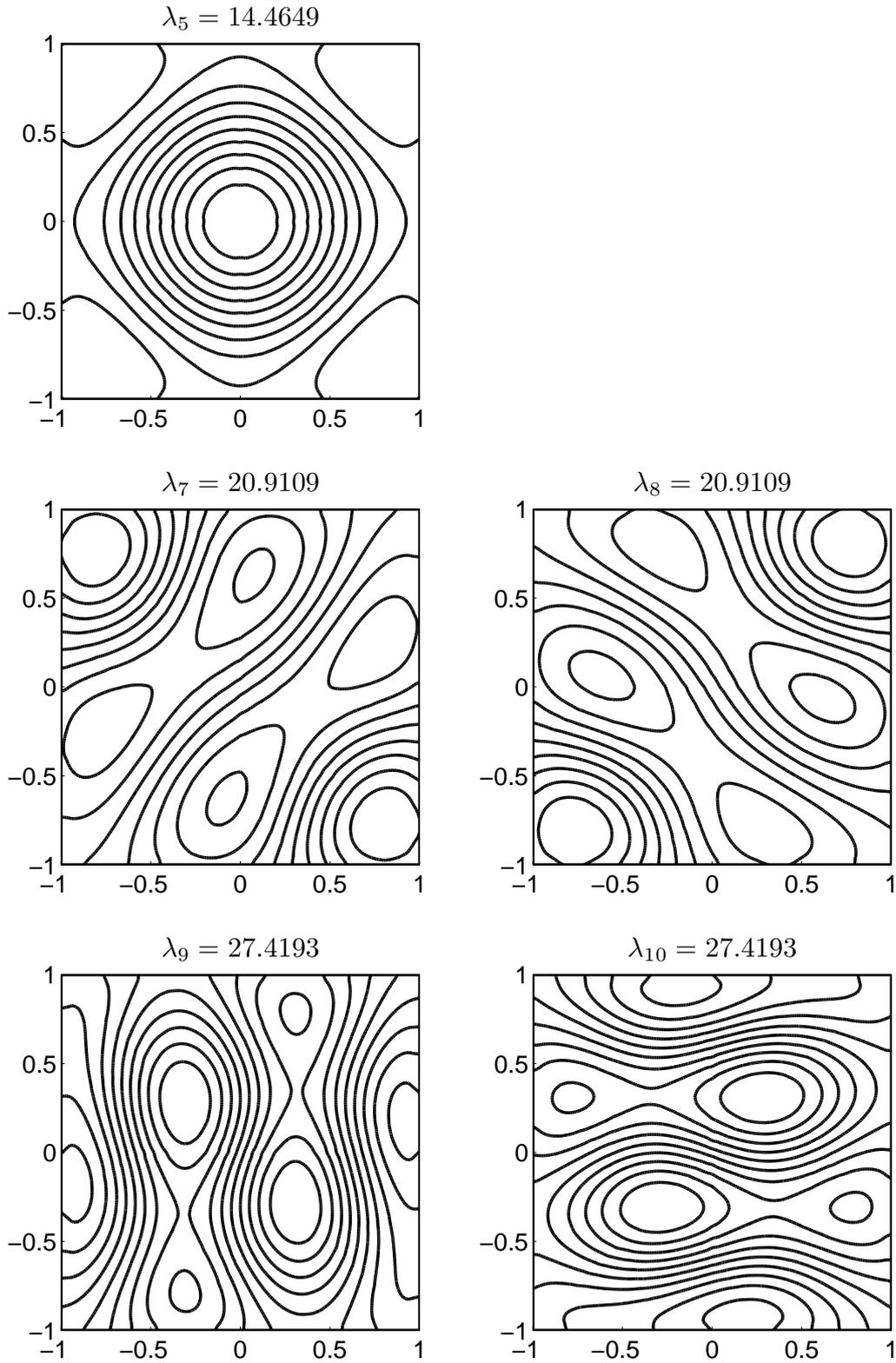


Рис. 10. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 7168$ .

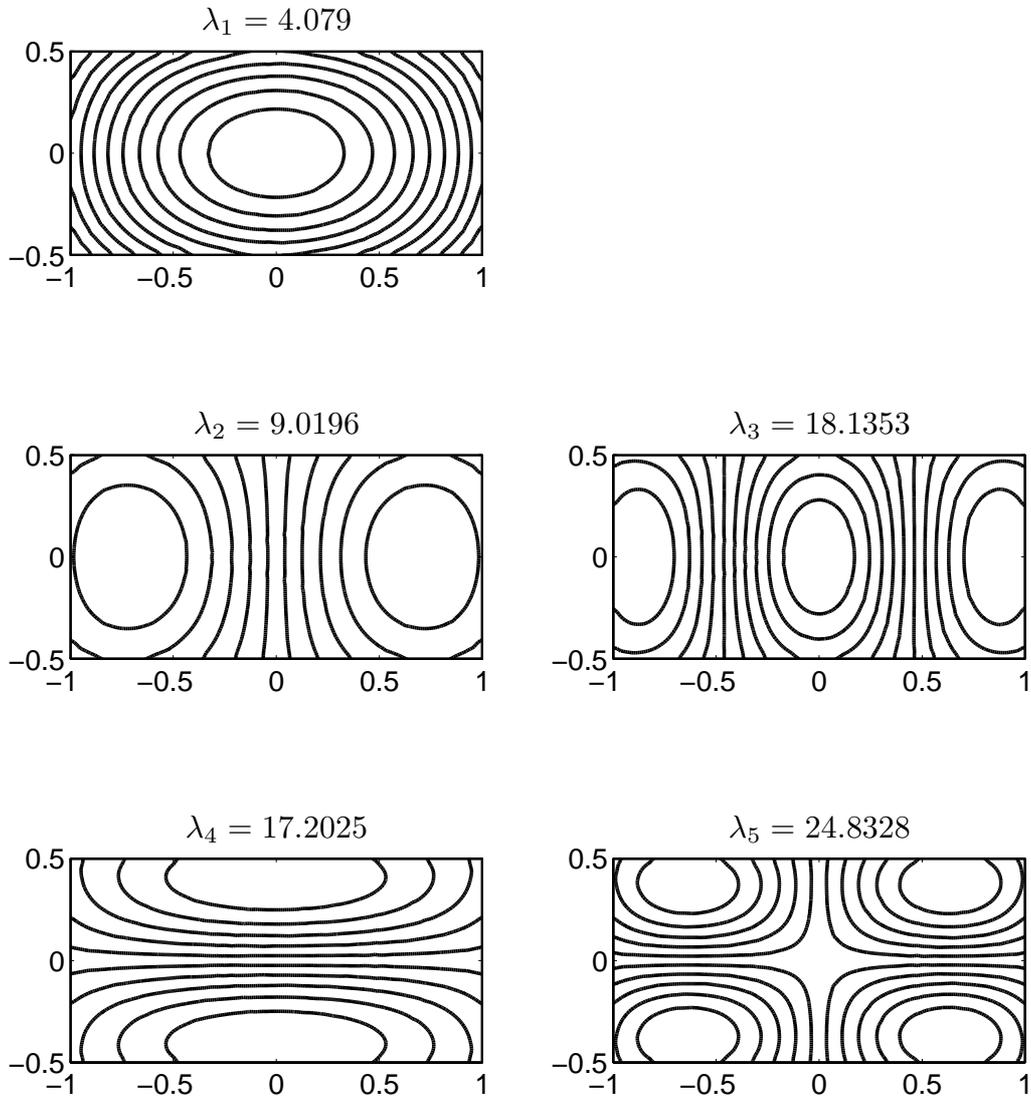


Рис. 11. Линии уровня функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6656$ .

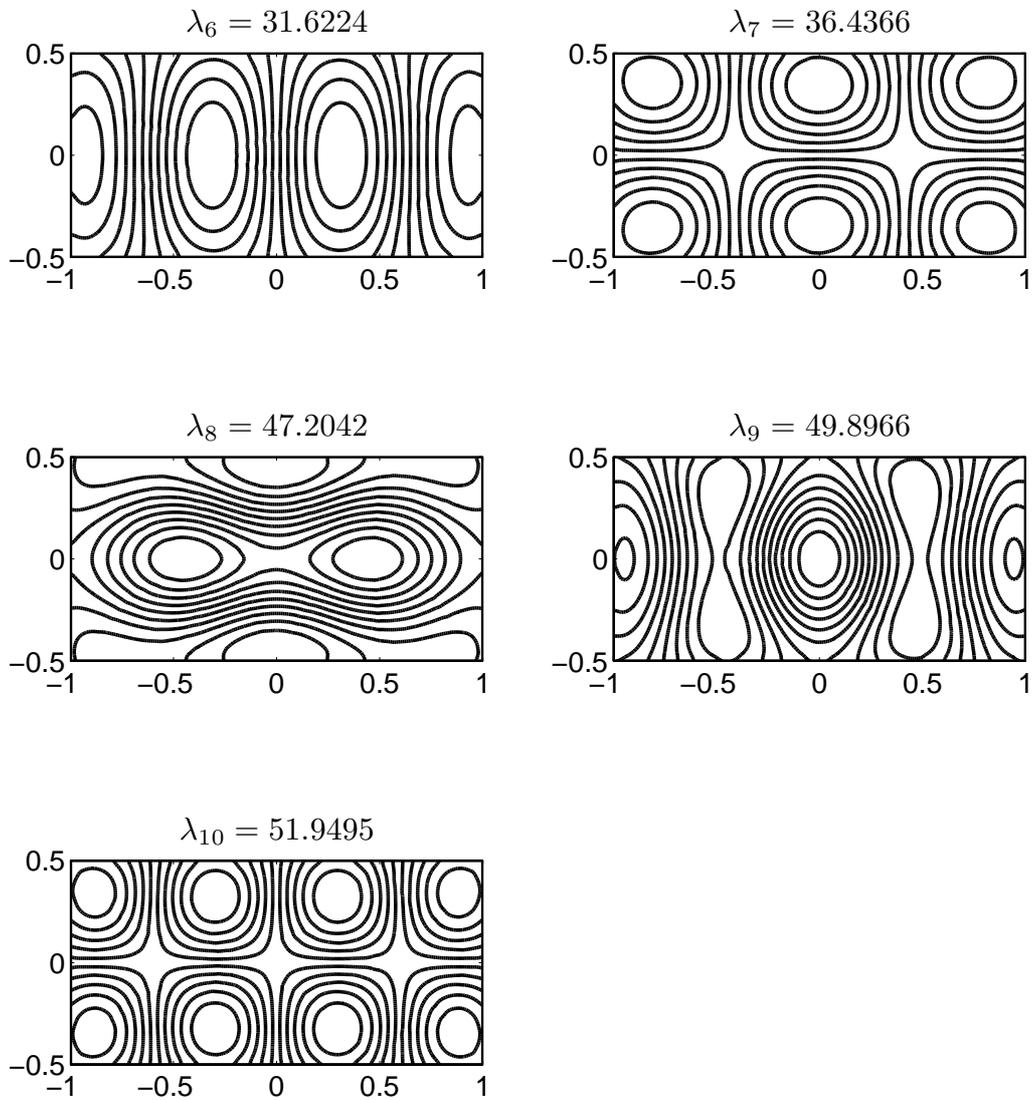


Рис. 12. Линии уровня функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6656$ .

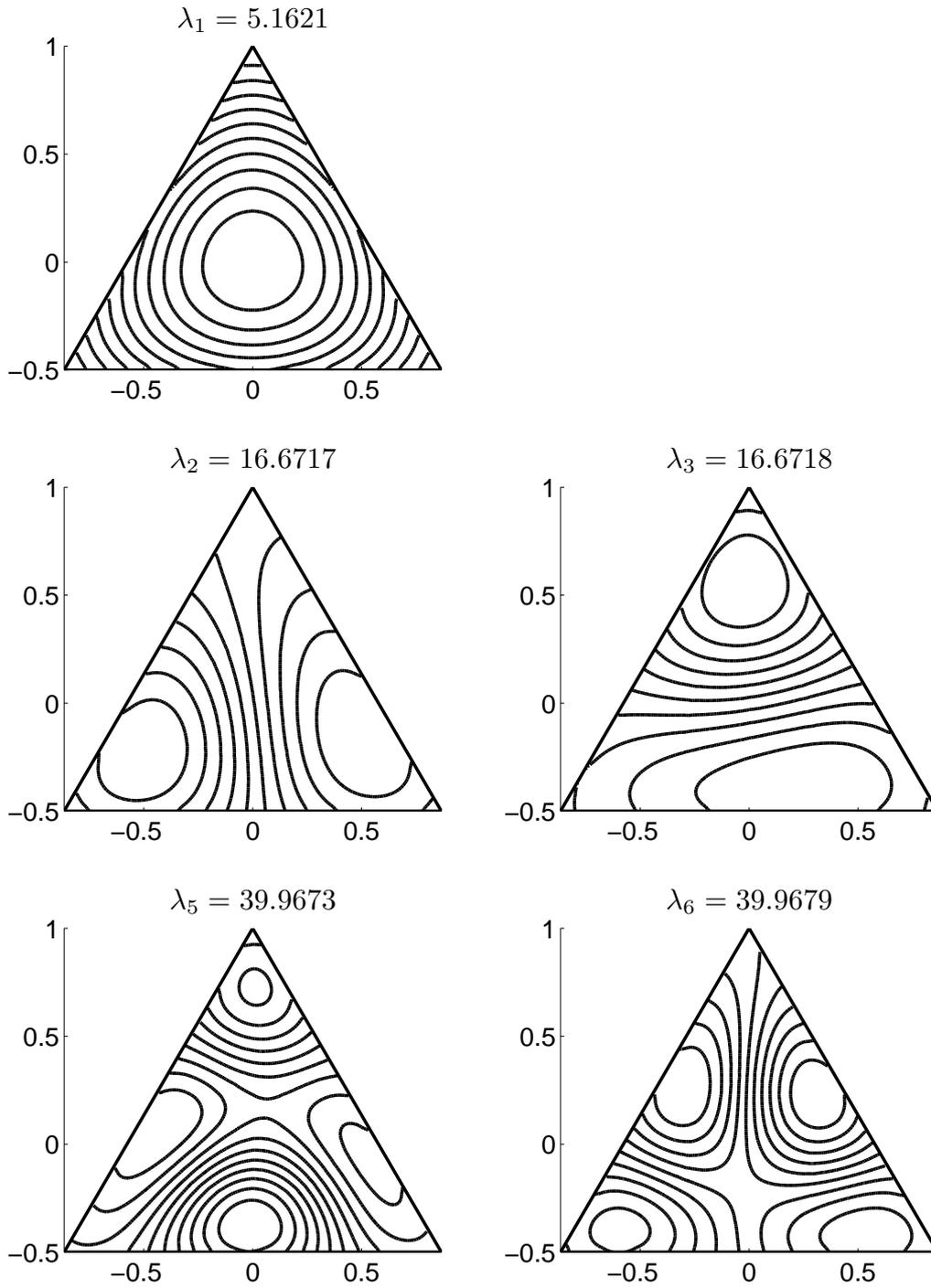


Рис. 13. Линии уровня функции  $u$  для волновода треугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6912$ .

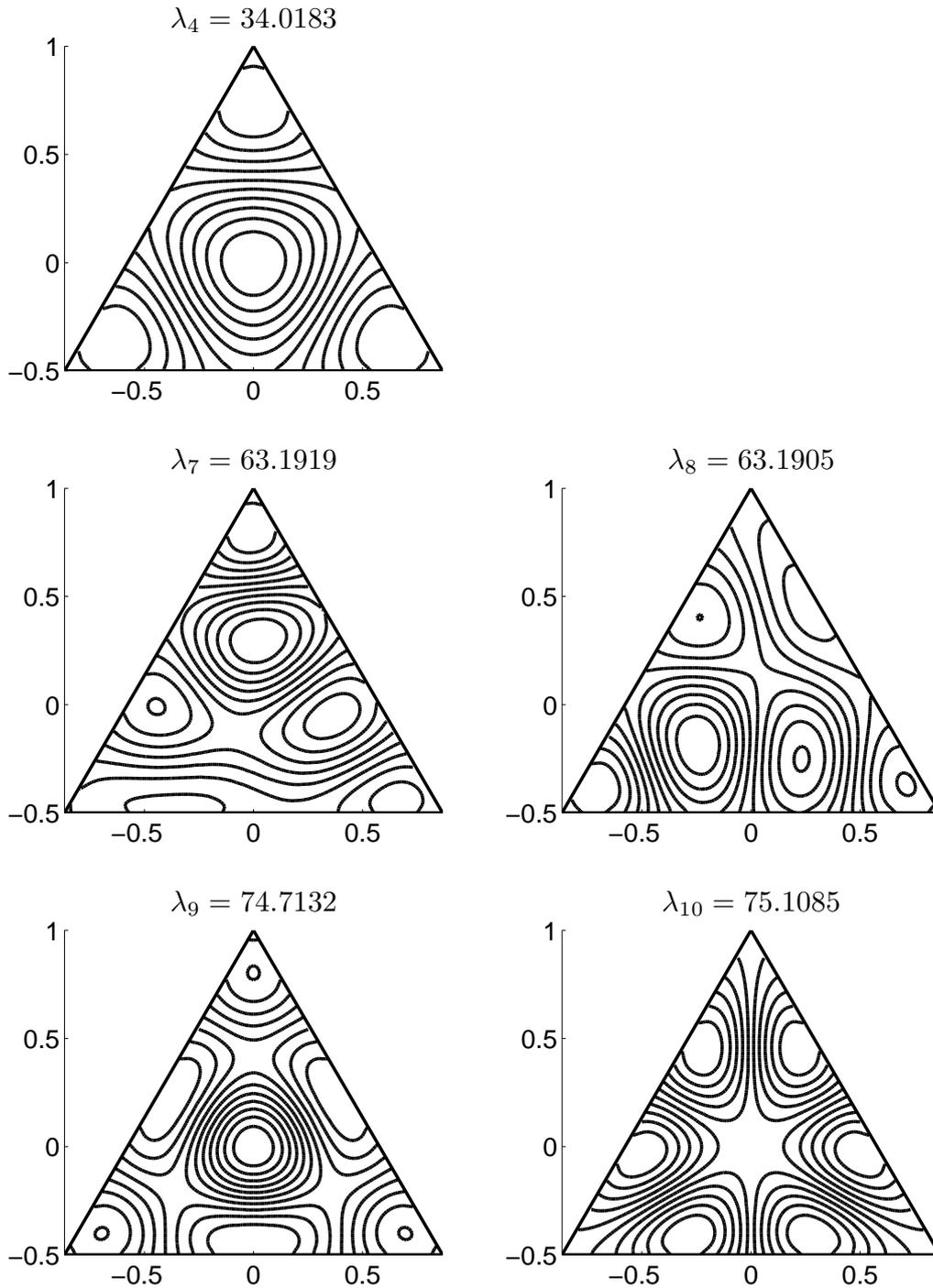


Рис. 14. Линии уровня функции  $u$  для волновода треугольного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 6912$

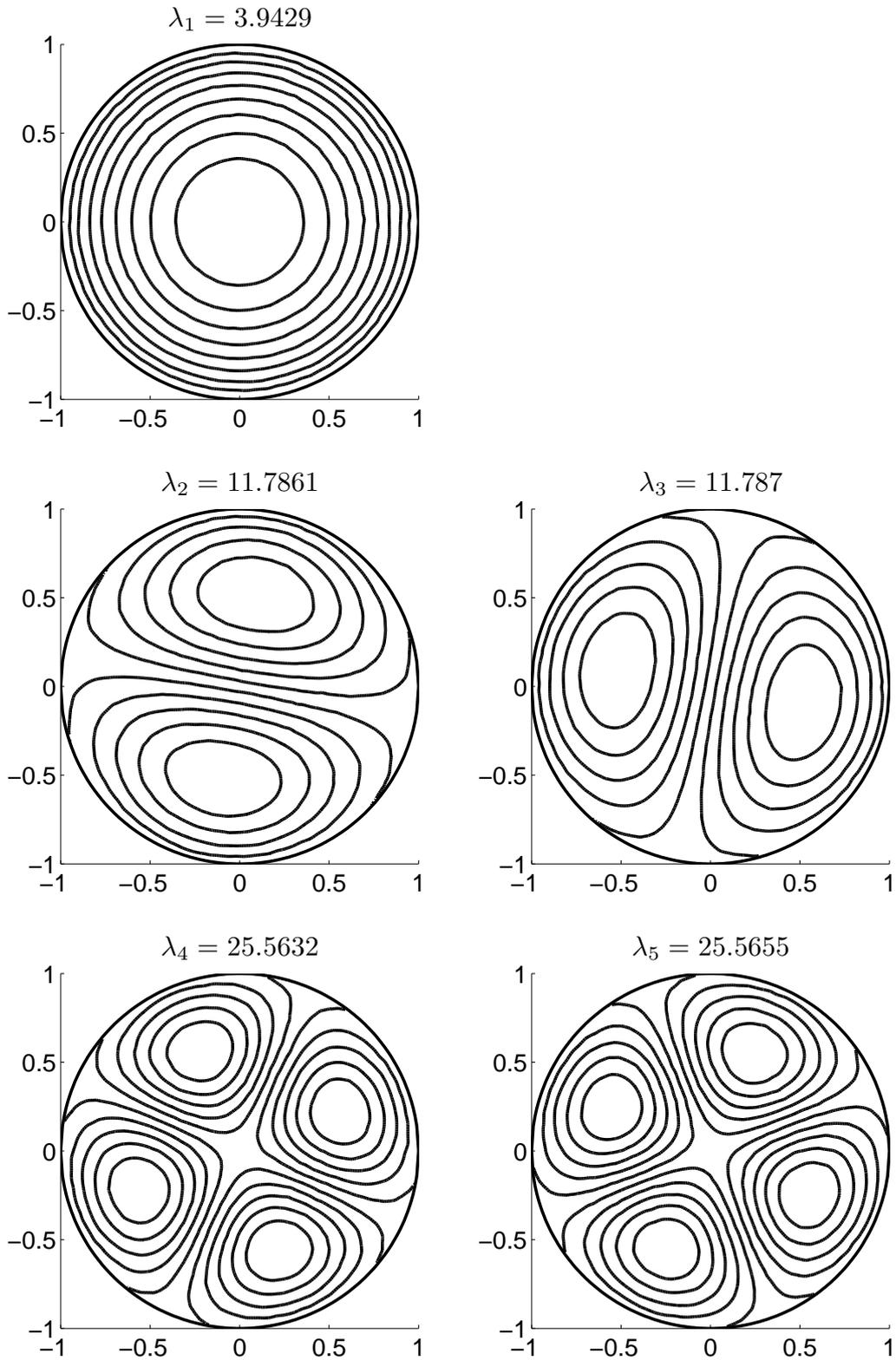


Рис. 15. Линии уровня функции  $u$  для неоднородного волновода кругового поперечного сечения с показателем преломления, изменяющимся по закону (14), построенные при  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 4128$

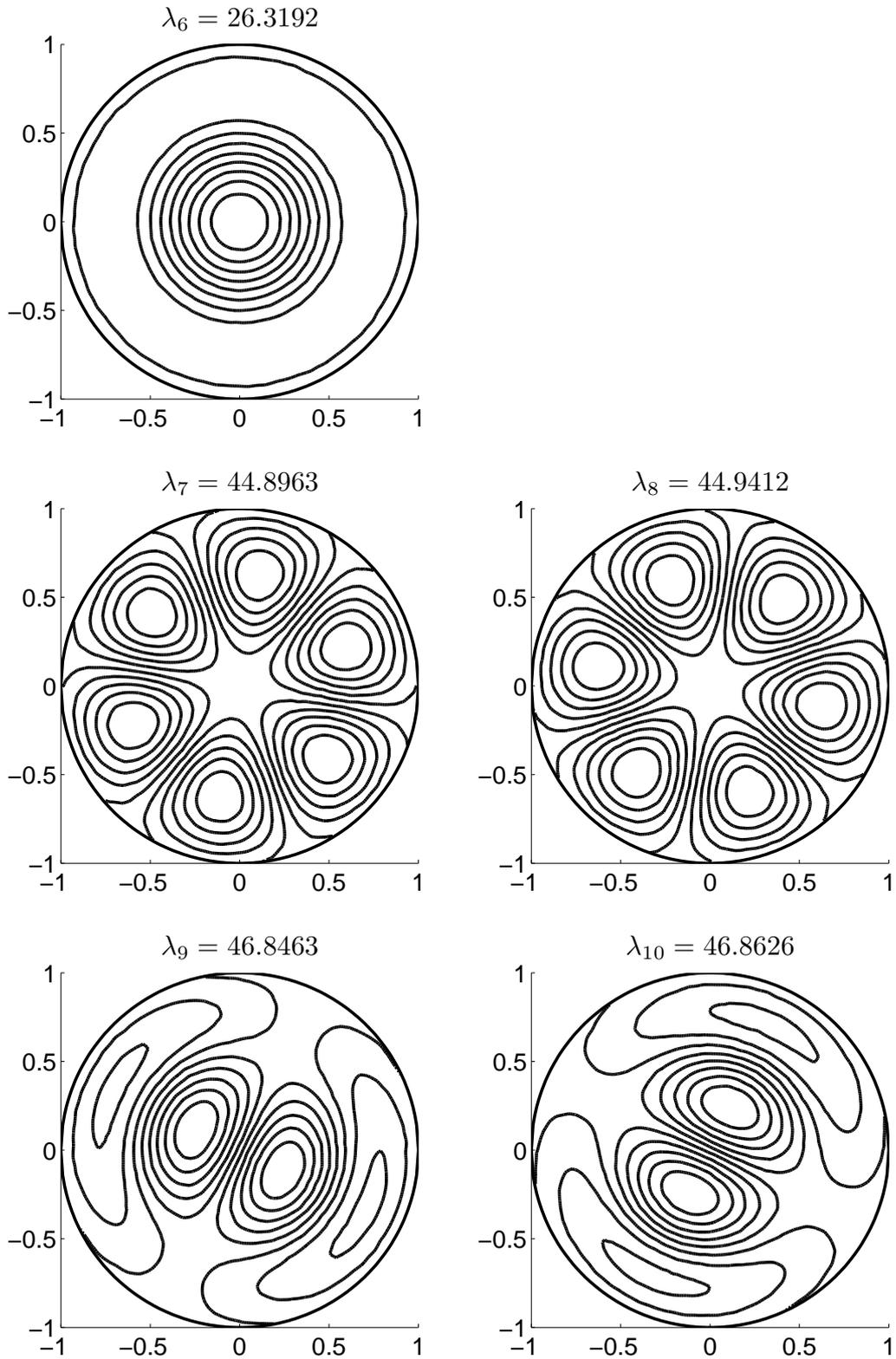


Рис. 16. Линии уровня функции  $u$  для неоднородного волновода кругового поперечного сечения с показателем преломления, изменяющимся по закону (14), построенные при  $n_+ = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 4128$

Для численного решения задачи (15) применялся метод, описанный в предыдущем пункте. Дисперсионные кривые также строились по алгоритму, описанному в предыдущем пункте.

**2.2. Результаты численных экспериментов.** Приведем результаты численных экспериментов для волноводов находящихся в полупространстве. Рассмотрим однородный волновод, поперечным сечением которого является полукруг единичного радиуса с центром в начале координат. Показатель преломления волновода равен  $n(x) = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды в верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 17 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , построенных при  $N = 2024$  и  $\sigma = 1$ . На рис. 19 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 2024$  и  $\sigma = 1$ .

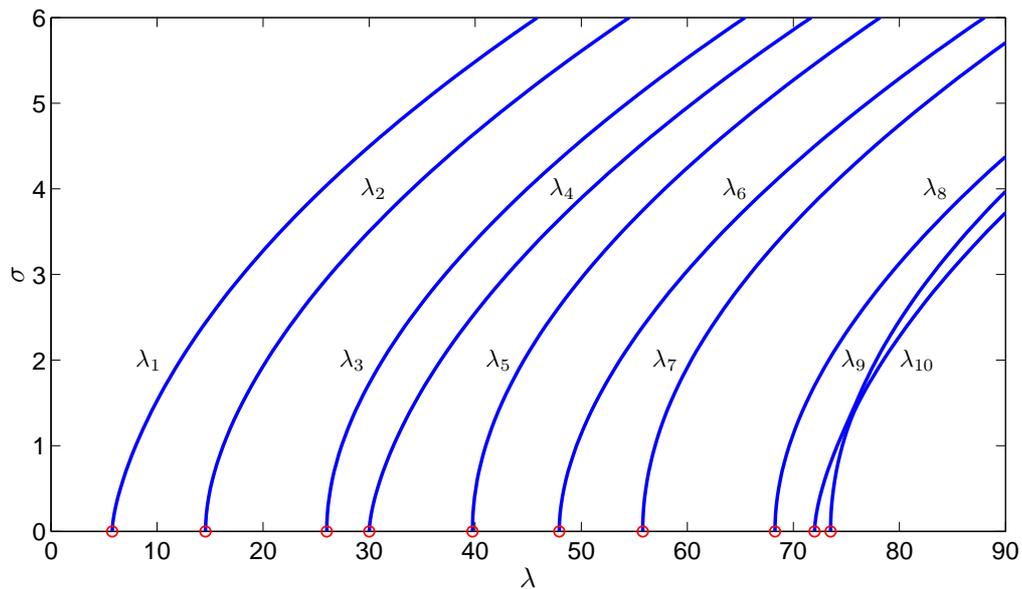


Рис. 17. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 2024$

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при  $\sigma = 1$  и разным числе треугольников, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 50.8596$ , подсчитанном при  $N = 8096$ .

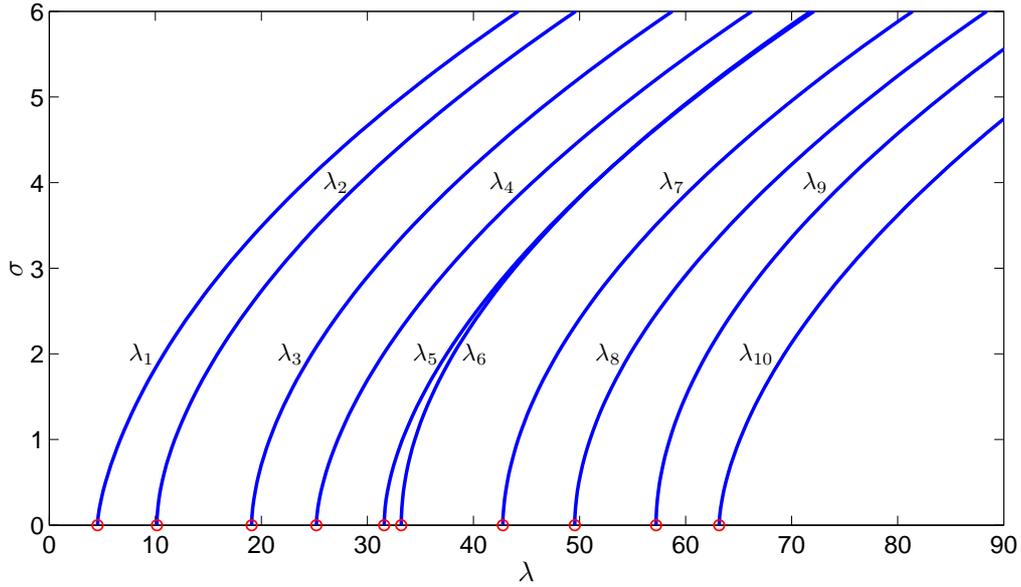


Рис. 18. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода прямоугольного поперечного сечения, находящегося в полупространстве, вычисленные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ , и  $N = 2556$

$N$	61	240	506	1059	2024	4236
$h$	0.3531	0.1693	0.1210	0.0863	0.0605	0.0432
$\tilde{\lambda}_6$	39.3336	48.0972	49.5528	50.2392	50.5952	50.7702
$e$	1.8172	1.8956	1.7561	1.6377	1.4209	0.9432
$\varepsilon$	0.2266	0.0543	0.0257	0.0122	0.0052	0.0018

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1059$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 1.6h^2$ .

Рассмотрим однородный волновод прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон, равным 2. Середина большей стороны совпадает с началом координат, а длина меньшей стороны равна единице. Показатель преломления волновода  $n(x) = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды в верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 18 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , построенных при  $N = 2556$ . На рис. 20 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 2556$  и  $\sigma = 1$ .

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 35.2225$ , вычисленном при  $N = 8032$  и  $\sigma = 1$ .

$N$	64	320	664	1280	2656	4800
$h$	0.3896	0.1598	0.1125	0.0799	0.0562	0.0454
$\tilde{\lambda}_6$	29.4901	33.6530	34.4707	34.8661	35.0785	35.1684
$e$	1.0720	1.7450	1.6866	1.5850	1.2929	0.7459
$\varepsilon$	0.1627	0.0446	0.0213	0.0101	0.0041	0.0015

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1280$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 1.6h^2$ .

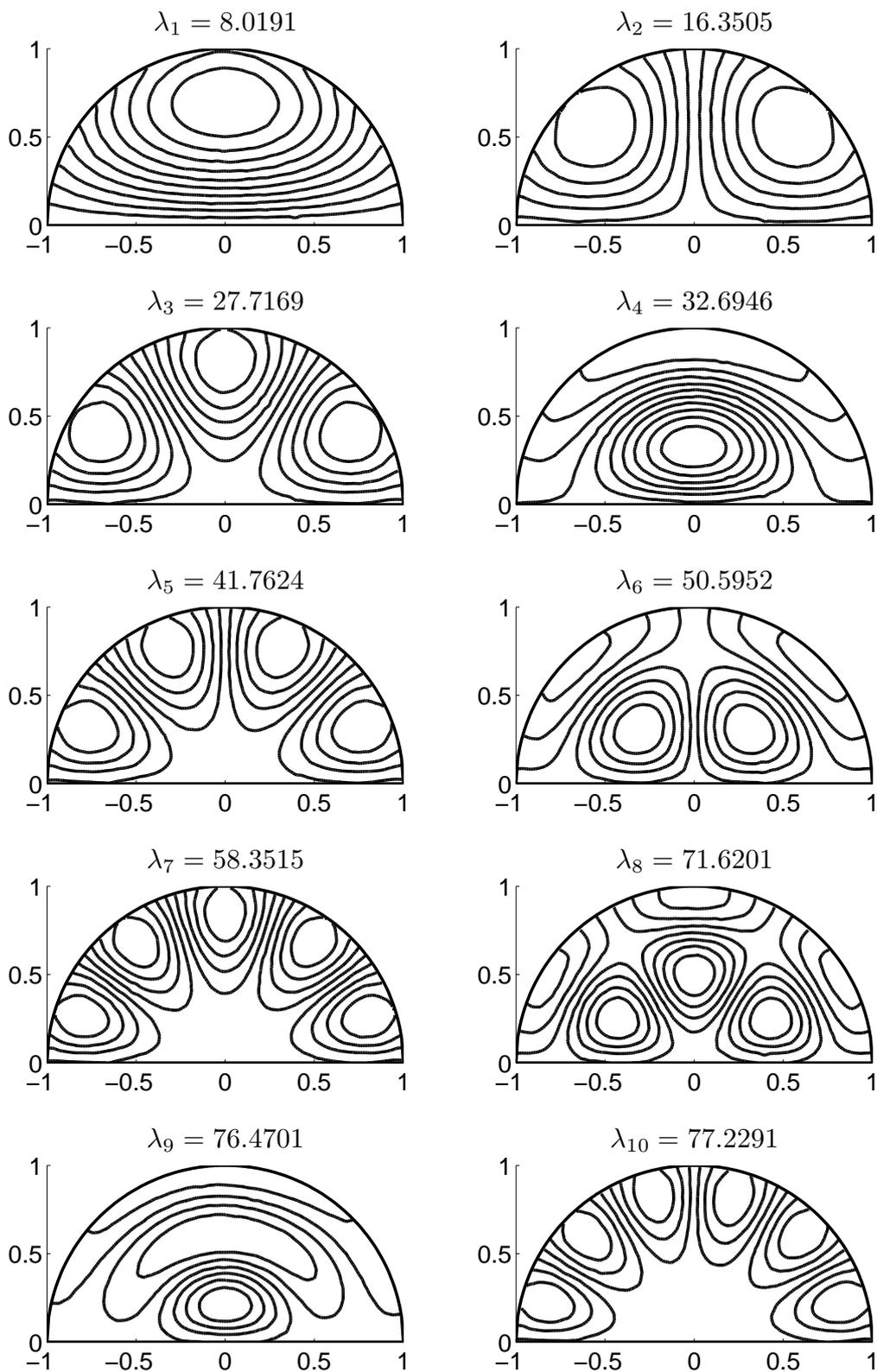


Рис. 19. Линии уровня функции  $u$  для волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 2024$ .

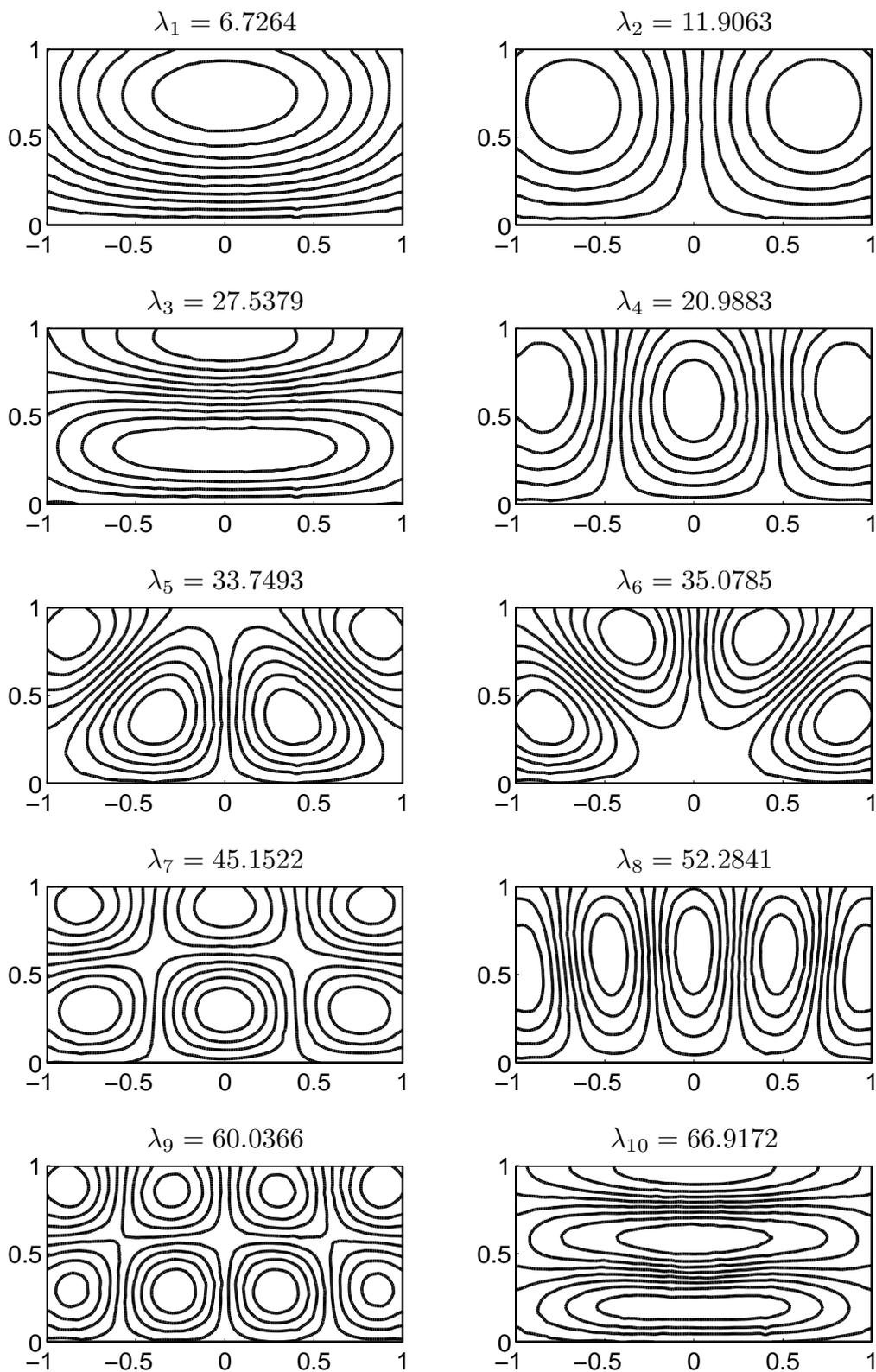


Рис. 20. Линии уровня функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 2556$ .

### 3. Волновод в слоистой среде.

**3.1. Вычисление элементов матрицы.** Функция Грина задачи сопряжения состоит из суммы двух слагаемых:

$$G_E = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma|x - y|) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{(x_2+y_2)\gamma} \frac{\gamma t - \gamma}{(\gamma t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(x_1 - y_1)) d\theta, \quad x, y \in \Omega.$$

Метод выделения логарифмической особенности в первом слагаемом описан в первом пункте этого параграфа. Второе слагаемое не имеет особенностей и представляет собой несобственный интеграл, зависящий от параметра  $\lambda$ . Заметим, что

$$\max_{x, y \in \Omega} |x_1 - y_1| = \text{diam } \Omega.$$

Так как на практике расчеты проводились для областей имеющих диаметр порядка единицы, то быстрых осцилляций у подынтегральной функции не возникало. Для вычисления несобственного интеграла использовалась процедура `quadgk` системы Matlab, которая реализует адаптивный квадратурный метод Гаусса — Кронрода. Приведем формулу для вычисления диагональных элементов:

$$a_{ii} = \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\sigma\gamma}{2} |\Omega_i| \right) - \frac{p^2(\xi_i) |\Omega_i|}{2\pi} \int_0^\infty e^{2\xi_2^i \gamma} \frac{\gamma t - \gamma}{(\gamma t + \gamma)\gamma} d\theta.$$

Остальные элементы матрицы  $A$  вычислялись по формуле:

$$a_{ij} = \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)}{2\pi} K_0(\sigma|\xi_i - \xi_j|) - \frac{p(\xi_i)p(\xi_j)}{2\pi} \int_0^\infty e^{(\xi_2^i + \xi_2^j)\gamma} \frac{\gamma t - \gamma}{(\gamma t + \gamma)\gamma} \cos(\theta(\xi_1^i - \xi_1^j)) d\theta.$$

Таким образом, мы приходим к алгебраической задаче вида

$$Bu = \lambda BA(\lambda, \sigma)u. \tag{16}$$

**3.2. Численный метод решения спектральной задачи.** Опишем метод численного решения задачи (16). Случай волновода в слоистой среде отличается от остальных тем, что при фиксированном значении параметра  $\sigma$  мы получаем подзадачу для поиска  $\lambda_j$ , которую нужно решать для каждого  $j$  в отдельности, что существенно увеличивает время вычислений. Для волноводов, находящихся в однородном пространстве или полупространстве, мы сразу получаем нужное количество характеристических чисел  $\lambda_j$ .

Подзадача для поиска собственного значения  $\lambda_j$  решается следующим образом. Пусть  $\sigma = \sigma_0$ . Получаем нелинейную задачу для поиска  $\lambda$ :

$$Bu = \lambda VA(\lambda, \sigma_0)u. \quad (17)$$

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу:

$$Bu = \gamma VA(\lambda, \sigma_0)u. \quad (18)$$

При каждом фиксированном  $\lambda > 0$  она является линейной по  $\gamma$ , что позволяет нам находить собственные значения  $1/\gamma_j$ , используя ту же процедуру, что и в случае волновода в однородной среде. Другими словами, мы можем построить функцию  $\gamma_j(\lambda)$ . Далее, остается найти решение уравнения

$$\gamma_j(\lambda) - \lambda = 0. \quad (19)$$

Для его решения использовалась функция `fsolve` системы Matlab. Одним из входных параметров функции `fsolve` является начальное приближение  $\lambda_0$ . Численное исследование функций  $\gamma_j = \gamma_j(\lambda)$  показывает (см., напр., рис. 3, с. 90), что функция  $\gamma_j$  очень медленно возрастает при увеличении  $\lambda$  и, фактически, близка к постоянной  $\gamma_j(0)$ . Следовательно, в качестве начального приближения можно выбрать  $\lambda_0 = \gamma_j(0)$ . Это также сокращает и время вычислений, так как при  $\lambda = 0$  несобственные интегралы, входящие в формулы для вычисления элементов матрицы, обращаются в нуль. Таким образом, решением исходной задачи является тройка  $\sigma_0$ ,  $\lambda_j$  и  $u_j$ .

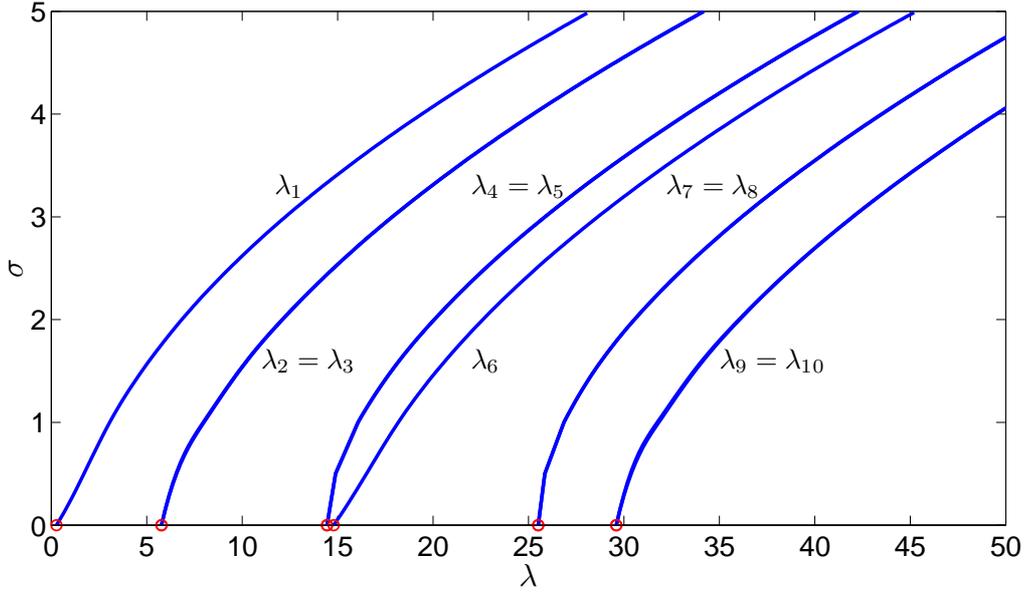


Рис. 21. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода кругового поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$  и  $N = 512$

**3.3. Особенности построения дисперсионных кривых.** Общий принцип построения дисперсионных кривых остается тем же, что и в случае волновода, находящегося в однородной среде. Основное отличие заключается в том, что при фиксированном  $\sigma$  нужно находить каждое собственное значение по алгоритму, описанному в предыдущем пункте.

**3.4. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод кругового поперечного сечения с центром в точке  $(0, -2)$  единичного радиуса, находящийся в плоско-слоистой среде. Показатель преломления волновода  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $x \in \Omega$ . Показатель преломления  $n_\infty$  нижнего полупространства, в котором находится волновод, равен  $\sqrt{2}$ . Показатель преломления  $n_t$  верхнего полупространства равен единице. На рис. 21 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , построенных при  $N = 512$ .

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 18.4730$ , вычисленном при  $N = 4236$  и  $\sigma = 1$ .

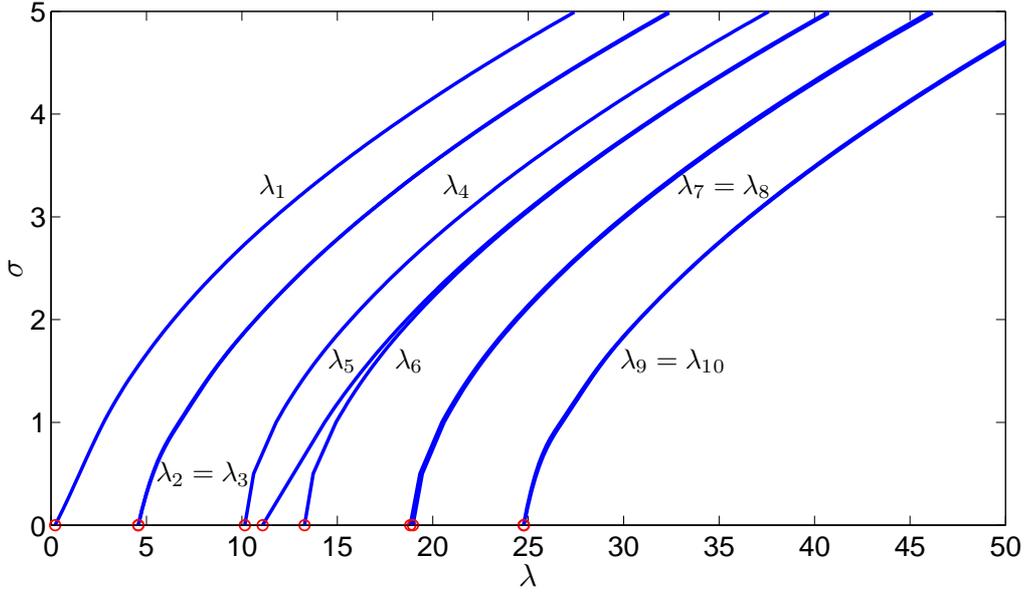


Рис. 22. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 592$

$N$	64	256	512	1032	2304
$h$	0.4856	0.2573	0.1551	0.0863	0.1217
$\tilde{\lambda}_6$	16.0566	17.8293	18.1924	18.3270	18.4221
$e$	0.5548	0.5265	0.6315	0.5332	0.4311
$\varepsilon$	0.1308	0.0348	0.0152	0.0079	0.0028

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$ , и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 0.5h^2$ .

На рисунках 23, 24 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 1032$ .

Рассмотрим однородный волновод квадратного поперечного сечения, диагонали которого пересекаются в точке  $(0, -2)$ . Стороны имеют единичную длину и параллельны осям координат. Показатель преломления волновода равен  $n(x) = \sqrt{3}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ . На рис. 22 изображены первые десять дисперсионных кривых  $\sigma = \sigma(\lambda)$ , построенные при  $N = 592$ .

В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\lambda_6$ . Значения  $\tilde{\lambda}_6$ , вычисленные при разном числе элементов триангуляции, сравнивались со значением  $\lambda_6 = 15.2213$ , вычисленном при  $N = 4440$  и  $\sigma = 1$ .

$N$	74	312	592	1080	2136
$h$	0.4635	0.2358	0.1788	0.1332	0.1053
$\tilde{\lambda}_6$	13.0516	14.6674	14.9262	15.0868	15.1746
$e$	0.6635	0.6546	0.6064	0.4982	0.2767
$\varepsilon$	0.1425	0.0364	0.0194	0.0088	0.0031

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1080$  и при этом  $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|/\lambda_6 \approx 0.5h^2$ .

На рисунках 25, 26 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 1080$ .

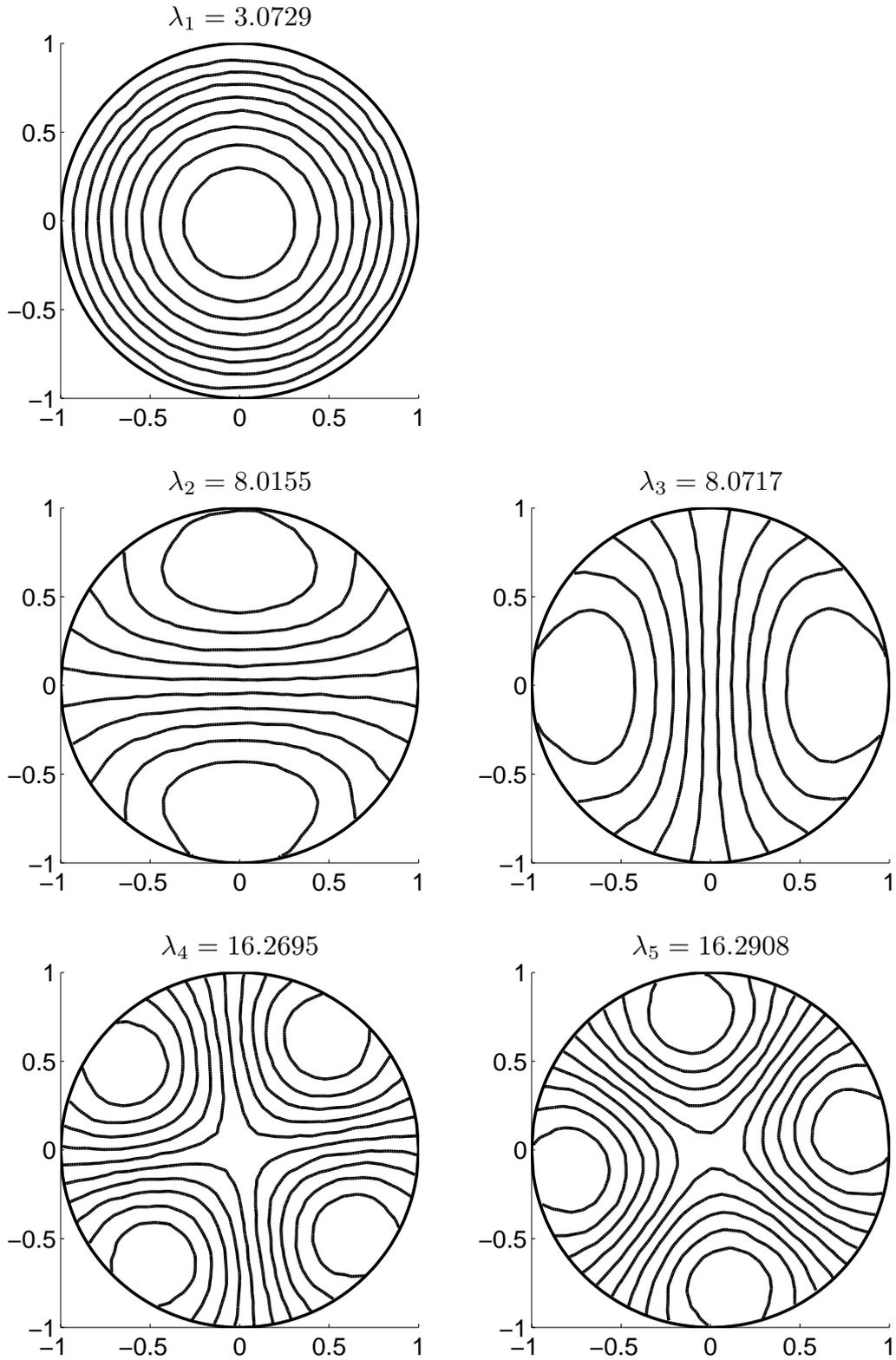


Рис. 23. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1032$

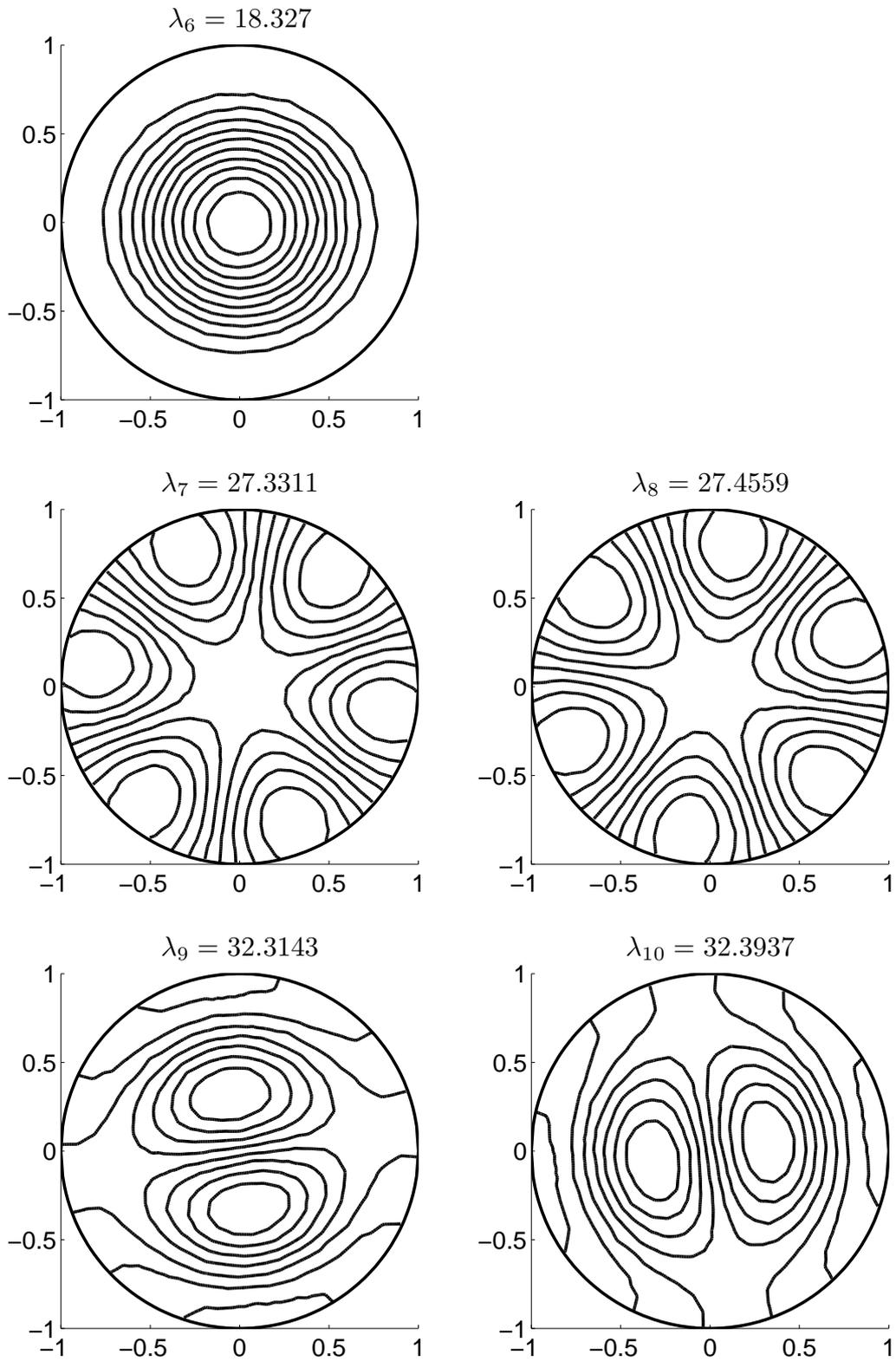


Рис. 24. Линии уровня функции  $u$  для волновода кругового поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{3}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1032$

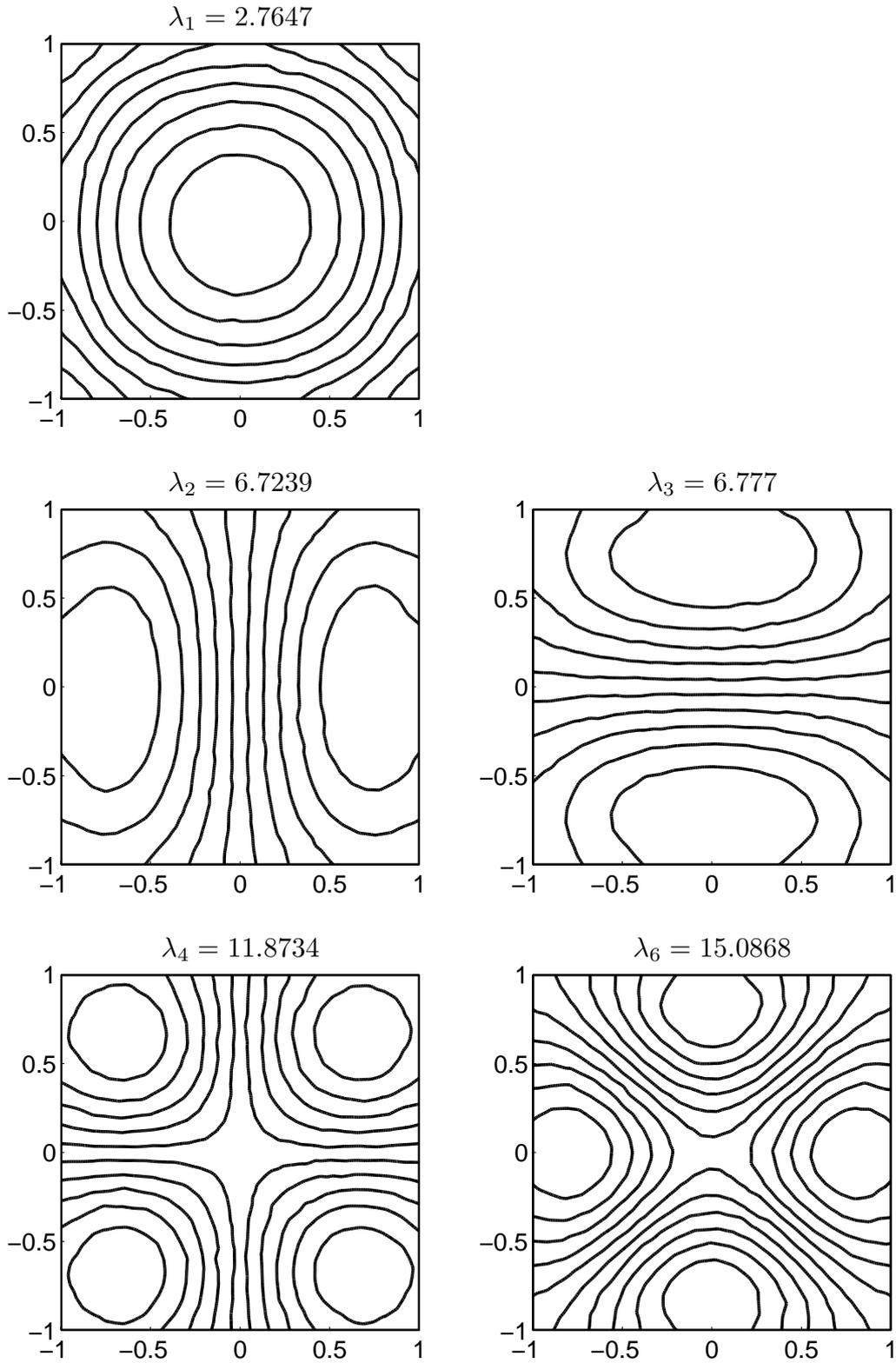


Рис. 25. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1080$ .

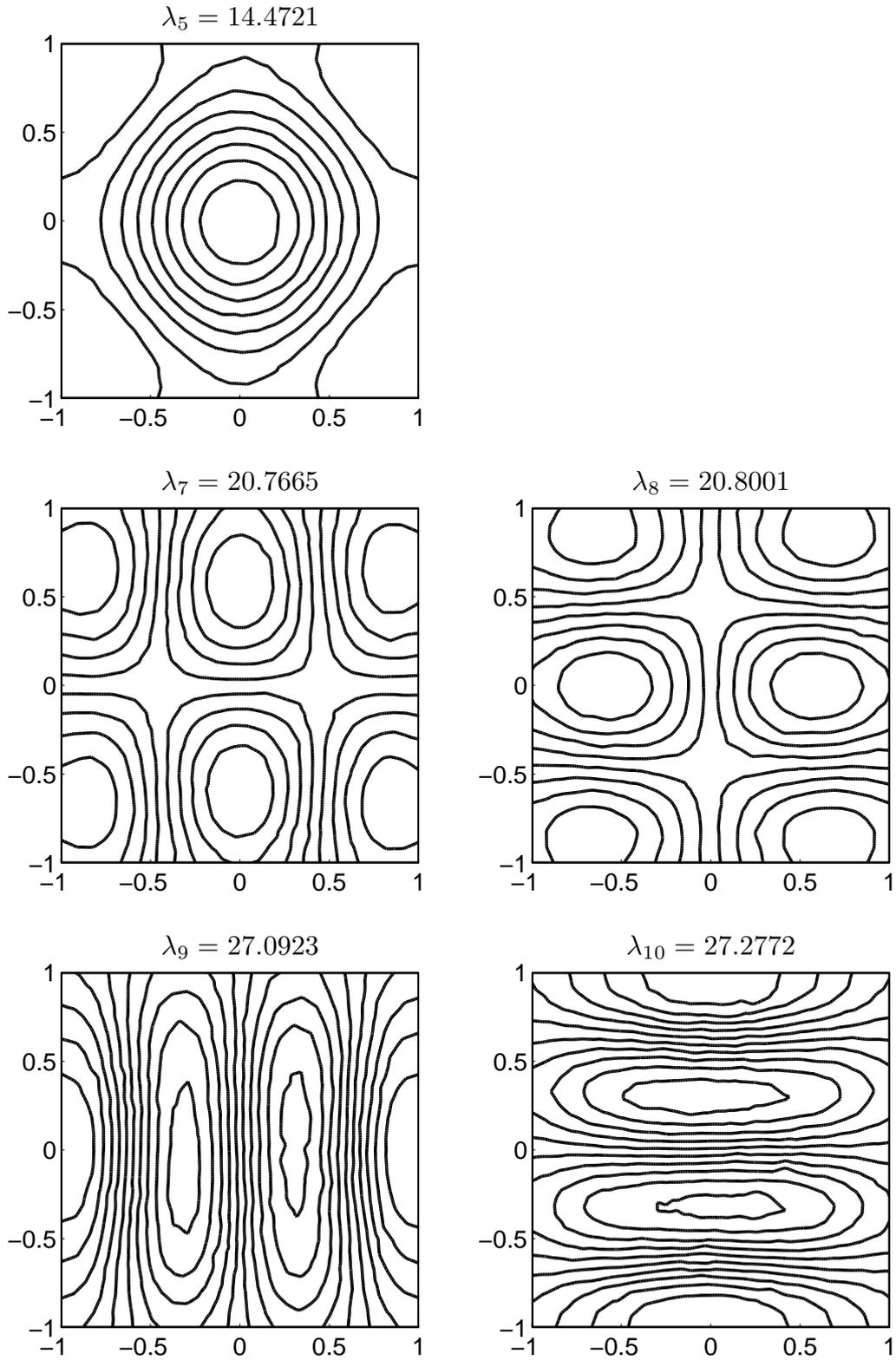


Рис. 26. Линии уровня функции  $u$  для волновода квадратного поперечного сечения в слоистой среде, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $n_t = 1$ ,  $\sigma = 1$  и  $N = 1080$ .

### § 3. Метод коллокации решения нелинейных задач.

Пусть частота  $\omega > 0$  фиксирована. Тогда общие задачи о собственных волнах слабонаправляющих волноводов в однородной среде (59), с. 72, и полупространстве (66), с. 76, имеют вид

$$A(\omega, \beta)u = (I - \lambda(\omega)T(\omega, \beta))u = 0, \quad (20)$$

где  $A$  — соответствующая фредгольмова, голоморфная по  $\beta \in \Lambda$  оператор-функция. Аппроксимируем оператор  $T$  точно также, как описано в первом параграфе этой главы. Приближением по методу коллокации к решению задачи (20) будем называть решение нелинейной алгебраической спектральной задачи

$$A_h(\omega, \beta)u_h = 0,$$

где  $A_h(\omega, \beta)$  — матрица с элементами, нелинейно зависящими от  $\beta$ :

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \lambda(\omega) \int_{\Omega_{j,h}} K(\omega, \beta; \xi_{i,h}, y) dy, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (21)$$

Напомним (см., с. 72), что характеристическое множество оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  обозначено символом  $\sigma(A)$ . Обозначим через  $\sigma(A_h)$  множество характеристических чисел  $\beta_h \in \Lambda$  матрицы  $A_h(\omega, \beta)$ .

**Теорема 3.13.** *Пусть частота  $\omega > 0$  фиксирована; оператор-функция  $T(\omega, \beta)$  параметра  $\beta \in \Lambda$  определена, либо равенством (56), с. 71, либо равенством (63), с. 74; оператор-функция  $A(\omega, \beta)$  параметра  $\beta \in \Lambda$  определена, соответственно, либо равенством (58), с. 72, либо равенством (65), с. 75. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , то существует такое семейство  $\beta_h \in \sigma(A_h)$ , что  $\beta_h \rightarrow \beta_0$  при  $h \rightarrow 0$ .*

2. *Если семейство чисел  $\beta_h \in \sigma(A_h)$  такое, что  $\beta_h \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ .*

3. *Пусть семейство  $\beta_h \in \Lambda$  и семейство  $u_h$  нормированных векторов такие, что  $\beta_h \in \sigma(A_h)$ ,  $A_h(\omega, \beta_h)u_h = 0$  и  $\beta_h \rightarrow \beta_0$ ,  $u_h \rightarrow u_0$  при  $h \rightarrow 0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\omega, \beta_0)u_0 = 0$ ,  $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$ .*

Напомним, что через  $E_h$  обозначено пространство сеточных функций с нормой (6), с. 96,  $p_h$  — проектор (8), с. 96.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро  $K$  оператора  $T$  слабо полярно, а контур  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ , значит, если решение задачи (20) существует, то любая собственная функции  $u$  принадлежит (см., напр., [9], с. 327) пространству  $E = C(\bar{\Omega})$  с нормой (5), с. 96. Поэтому уравнение (20) будем трактовать как уравнение в пространстве  $E$ . Введем в рассмотрение дискретные аналоги операторов  $T(\omega, \beta)$  и  $A(\omega, \beta)$  — операторы, действующие в  $E_h$ :

$$(T_h(\omega, \beta)u_h)(\xi_{i,h}) = \sum_{j=1}^N u_{j,h} \int_{\Omega_{j,h}} K(\omega, \beta, \xi_{i,h}, y) dy, \quad i = 1, \dots, N, \quad (22)$$

$$A_h(\omega, \beta) = I - \lambda T_h(\omega, \beta), \quad A_h(\omega, \beta) : E_h \rightarrow E_h, \quad (23)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $E_h$ .

Пусть  $\omega > 0$  фиксированный параметр. Дальнейшее доказательство теоремы заключается в проверке условий 1–6 теорем 1 и 2 статьи [3] в рассматриваемом случае.

1. Оператор  $p_h : E \rightarrow E_h$  линеен и обладает свойством (9), с. 96.
2. Оператор-функции  $A(\omega, \beta)$  и  $A_h(\omega, \beta)$  по  $\beta$  голоморфны на  $\Lambda$ . Это можно доказать, рассуждая аналогично [33], с. 459.
3. При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\omega, \beta)$  и  $A_h(\omega, \beta)$  фредгольмовы. Это непосредственно вытекает из полной непрерывности (см., напр., [96], с. 24) оператора  $T(\omega, \beta) : E \rightarrow E$  и конечномерности оператора  $T_h(\omega, \beta)$ .
4. Для любого  $\beta \in \Lambda$  семейство операторов  $(A_h(\omega, \beta))_{h \in (0, \bar{h})}$  собственно сходится к оператору  $A(\omega, \beta)$ . Согласно определению [3] семейство операторов  $(A_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  называется собственно сходящимся к оператору  $A$ , если выполнены следующие два условия:

а) из  $u_h \rightarrow u$  следует, что  $A_h u_h \rightarrow Au$  (здесь и ниже используются определения и обозначения, введенные на с. 96);

б) для любой равномерно ограниченной последовательности  $(u_{h_k})$  элементов семейства  $(u_h)_{h \in (0, \bar{h})}$  (т. е.  $\|u_{h_k}\|_{E_{h_k}} \leq \text{const}$ ,  $h_k \in (0, \bar{h})$ ), из того, что последовательность векторов  $(A_{h_k} u_{h_k})$  дискретно компактна, следует, что последовательность векторов  $(u_{h_k})$  дискретно компактна.

Покажем сначала, что выполняется условие а). Зависимость операторов от параметров  $\omega$  и  $\beta$  не всегда будем указывать для сокращения обозначений. Очевидно, что

$$\|A_h u_h - p_h A u\|_{E_h} \leq \|A_h u_h - A_h p_h u\|_{E_h} + \|A_h p_h u - p_h A u\|_{E_h}. \quad (24)$$

Для вектора  $p_h u \in E_h$  по формуле (3), с. 94, определим кусочно-постоянную функцию  $u^{(h)} \in L_\infty(\Omega)$ . Ясно, что тогда

$$A_h p_h u = p_h A u^{(h)},$$

где  $A : L_\infty(\Omega) \rightarrow E$ , следовательно,

$$\|A_h p_h u - p_h A u\|_{E_h} \leq \|p_h\|_{E \rightarrow E_h} \|A\|_{L_\infty \rightarrow E} \|u^{(h)} - u\|_{L_\infty}. \quad (25)$$

Объединяя неравенства (24) и (25), получаем оценку

$$\begin{aligned} & \|A_h u_h - p_h A u\|_{E_h} \leq \\ & \leq \|A_h\|_{E_h \rightarrow E_h} \|u_h - p_h u\|_{E_h} + \|p_h\|_{E \rightarrow E_h} \|A\|_{L_\infty \rightarrow E} \|u^{(h)} - u\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (26)$$

Напомним (см. с. 96), что

$$\|p_h\|_{E \rightarrow E_h} = 1. \quad (27)$$

Ясно, что

$$\|u^{(h)} - u\|_{L_\infty} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (28)$$

Кроме того, при фиксированном  $\omega > 0$  имеет место оценка

$$\|A(\omega, \beta)\|_{L_\infty \rightarrow E} \leq c(\beta), \quad \beta \in \Lambda, \quad (29)$$

где  $c(\beta)$  — непрерывная в области  $\Lambda$  функция:

$$c(\beta) = 1 + \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(\omega, \beta, x, y)| dy.$$

Из определения оператора  $A_h(\omega, \beta)$  вытекает, что

$$\|A_h(\omega, \beta)\|_{E_h \rightarrow E_h} \leq \|A(\omega, \beta)\|_{L_\infty \rightarrow E}, \quad \beta \in \Lambda. \quad (30)$$

Теперь можно заключить, что условие а) выполняется в силу оценок (26)–(30).

Проверим теперь условие b). Дискретная компактность последовательности векторов  $(A_{h_k} u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$  означает, что для любого подмножества  $\mathbb{N}'$  множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$  существует такое  $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$ , что последовательность элементов  $(A_{h_k} u_{h_k} = u_{h_k} + \lambda T_{h_k} u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}''}$  дискретно сходится к некоторому  $w \in E$ . Для вектора  $u_{h_k} \in E_{h_k}$  определим функцию  $u^{(h_k)} \in L_\infty(\Omega)$  по формуле (3), с. 94. Так как  $\|u_{h_k}\|_{E_{h_k}} \leq \text{const}$ , то  $\|u^{(h_k)}\|_{L_\infty} \leq \text{const}$  при  $k \in \mathbb{N}''$ . Интегральный оператор  $T : L_\infty(\Omega) \rightarrow E$  вполне непрерывен (см. [114], с. 14). Следовательно, множество  $(Tu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}''}$  относительно компактно. Значит, из любой последовательности  $(Tu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}''}$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $(Tu^{(h_k)})_{k \in \mathbb{N}'''}$ , т. е.

$$\|Tu^{(h_k)} - v\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{N}''', \quad v \in E.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\|T_{h_k} u_{h_k} - p_{h_k} v\|_{E_{h_k}} \leq \|p_{h_k}\|_{E \rightarrow E_{h_k}} \|Tu^{(h_k)} - v\|_E$$

и (27) следует, что последовательность  $(T_{h_k} u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}'''}$  дискретно сходится к вектору  $v \in E$ . Значит последовательность  $(u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}'''}$  дискретно сходится к вектору  $u = w - \lambda v \in E$ , и условие b) выполнено.

5. Нормы  $\|A_h(\omega, \beta)\|_{E_h \rightarrow E_h}$  ограничены равномерно по  $h$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из оценок (29) и (30).

6. Множество  $\rho(A)$  не пусто, т. е.  $\sigma(A) \neq \Lambda$ . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теоремы 2.5, с. 76, для задачи о собственных волнах волновода в полупространстве из соответствующего результата (см. с. 73) для задачи о собственных волнах волновода в однородной среде.  $\square$

#### § 4. Численное решение задач о вытекающих волнах

В этом параграфе будут описаны численные эксперименты поиска вытекающих собственных волн волноводов, находящихся в однородной среде и полупространстве, методом коллокации. Напомним, что вытекающие

волны отвечают комплексным постоянным распространения  $\beta$ , принадлежащим нефизическому листу  $\Lambda_0^{(2)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ .

## 1. Волновод в однородной среде.

**1.1 Вычисление элементов матрицы.** Алгоритм вычисления элементов матрицы метода коллокации (21), с. 131, при комплексных  $\beta$  аналогичен способу, описанному во втором параграфе этой главы. Отличие заключается лишь в том, что в данном случае элементы матрицы являются комплексными. Для диагональных элементов формула имеют вид:

$$a_{ii} = 1 - \lambda \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\chi\gamma}{2} |\Omega_i| \right).$$

Внедиагональные элементы вычислялись по формуле

$$a_{ij} = \frac{i}{4} \lambda p(\xi_i) p(\xi_j) |\Omega_j| H_0^{(1)}(\chi |\xi_i - \xi_j|).$$

**1.2. Метод обратных итераций с невязкой решения нелинейных конечномерных спектральных задач.** В предыдущем параграфе методом коллокации была построена конечномерная нелинейная спектральная задача вида

$$A(\beta)u = 0, \quad (31)$$

где  $A$  — матрица, элементы которой являются комплекснозначными функциями комплексного параметра  $\beta$ ,  $u$  — собственный вектор с комплексными компонентами. Для решения этой задачи использовался вариант метода обратных итераций с невязкой, предложенный в работе [106]. Опишем его, следуя [106].

Пусть известно некоторое приближение  $\sigma \in \Lambda$  (где  $\Lambda$  — область на комплексной плоскости) к искомому характеристическому значению  $\beta$  такое, что матрица  $A(\sigma)$  обратима. Обозначим  $e(u)$  вектор с единицей в позиции максимальной по модулю компоненты вектора  $u$ , остальные компоненты вектора  $e(u)$  — нули. Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Пусть  $l = 0$ . Выберем начальное приближение  $u^{(0)}$  к  $u$ . Положим  $\beta_0 = \sigma$ .

2. Вычислим очередное приближение  $\beta_{l+1}$  к характеристическому значению  $\beta$  как ближайший к значению  $\beta_l$  корень уравнения

$$\left( e(u^{(l)}), A^{-1}(\sigma)A(\beta_{l+1})u^{(l)} \right) = 0.$$

3. Вычислим невязку

$$r^{(l)} = A(\beta_{l+1})u^{(l)}.$$

4. Решим следующее уравнение

$$A(\sigma)\hat{u}^{(l)} = r^{(l)}.$$

Вычислим очередное приближение  $u^{(l+1)}$  к собственному вектору  $u$

$$\bar{u}^{(l+1)} = u^{(l)} - \hat{u}^{(l)}, \quad u^{(l+1)} = \bar{u}^{(l+1)} / \|\bar{u}^{(l+1)}\|.$$

5. Итерационный процесс останавливается, если относительная ошибка характеристического значения достигает заданной точности  $\varepsilon$ :

$$\frac{|\beta_{l+1} - \beta_l|}{|\beta_l|} \leq \varepsilon.$$

В противном случае увеличим  $l$  на единицу и вернемся к шагу 2.

В реальных вычислениях предварительно строится  $LU$  разложение матрицы  $A(\sigma)$ . Это разложение вычисляется один раз и затем используется на шагах 2 и 4 всех итераций.

**1.3. Особенности построения дисперсионных кривых.** Численные эксперименты показывают, что для различных волноводов, находящихся как в однородной среде, так и в полупространстве, постоянные распространения  $\beta$  с уменьшением частоты  $\omega$  переходят с физического листа римановой поверхности  $\Lambda$  на нефизический, т. е. поверхностные волны трансформируются в вытекающие. Этот эффект хорошо известен для волноводов кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления (см. с. 46). Значения частот  $\omega_{j,0}$ , при которых происходит такой переход, называются критическими.

Во втором параграфе этой главы для поверхностных волн был предложен метод построения дисперсионных кривых в терминах параметров  $\lambda > 0$  и  $\sigma = \text{Im } \chi$ . В этом случае  $\sigma > 0$ ,  $\text{Re } \chi = 0$ , но когда  $\omega$  принимает

критические значения,  $\sigma = 0$ . Обозначим точки, в которых дисперсионные кривые  $\sigma_j = \sigma_j(\lambda)$  пересекают ось  $\lambda$ , через  $\lambda_{j,0}$  и назовем их точками отсечки. При переходе через точки отсечки значения  $\lambda$  уменьшаются, вещественная часть  $\chi$  становится отличной от нуля, а  $\text{Im} \chi$  — отрицательной. Поэтому дисперсионными кривыми для вытекающих волн будем называть графики функций  $\text{Im} \chi_j = \text{Im} \chi_j(\lambda)$  и  $\text{Re} \chi_j = \text{Re} \chi_j(\lambda)$ .

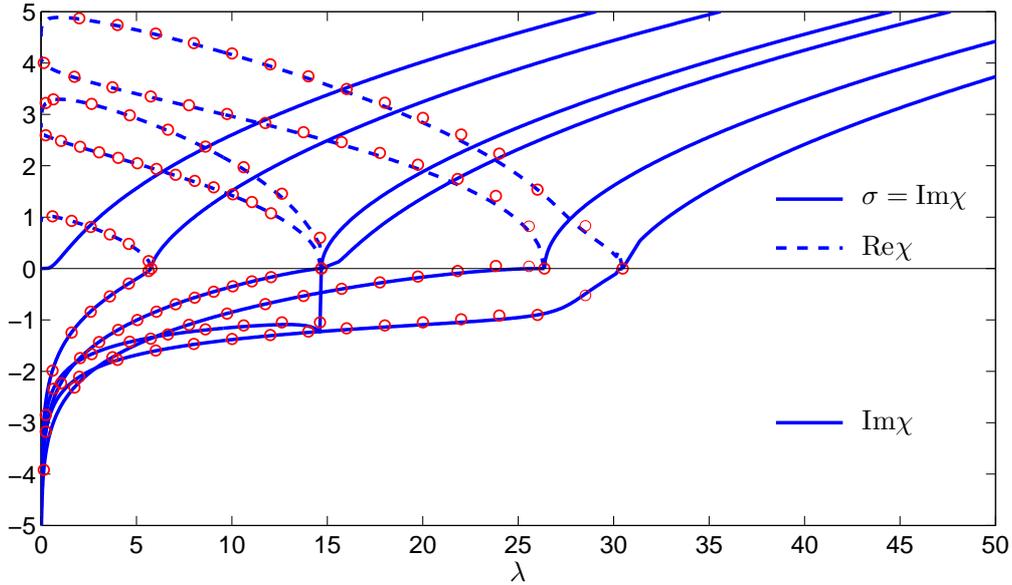


Рис. 27. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 1032$ . Сплошными и штриховыми линиями обозначено точное решение. Кружочки — результаты расчетов методом коллокации.

Пусть дана точка отсечки  $\lambda_{j,0}$ , где  $j$  — номер характеристического числа. Так как в точке отсечки  $\chi = 0$ , и функция Ханкеля в этом случае имеет особенность, то задавая начальное приближение  $(\lambda_1, \chi_1)$ , необходимо отступить от точки отсечки. Возьмем три малых положительных числа  $\varepsilon_\lambda$ ,  $\text{Re} \varepsilon_\chi$  и  $\text{Im} \varepsilon_\chi$ . Обозначим через  $s_\lambda$  шаг с которым будем двигаться по оси  $\lambda$ . Алгоритм построения дисперсионных кривых для вытекающих волн основан на применении метода обратных итераций с невязкой и состоит из следующих шагов.

1. Вычислим  $\lambda_1 = \lambda_{j,0} - \varepsilon_\lambda$  и  $\chi_1 = \text{Re} \varepsilon_\chi - i \text{Im} \varepsilon_\chi$ . В качестве начального приближения к характеристическому значению выберем  $\beta_1 = \beta(\lambda_1, \chi_1)$ , а к собственному вектору — вектор, состоящий из единиц.

2. Если при этом начальном приближении метод сходится, и в результате получается характеристическое число под нужным номером, что можно определить по характеру собственной функции, то приближение для второй точки кривой зададим по формулам

$$\operatorname{Re}\chi_2 = \operatorname{Re}\chi_1 \left( \frac{\varepsilon_\lambda + s_\lambda}{\varepsilon_\lambda} \right),$$

$$\operatorname{Im}\chi_2 = \operatorname{Im}\chi_1 \left( \frac{\varepsilon_\lambda + s_\lambda}{\varepsilon_\lambda} \right),$$

$$\lambda_2 = \varepsilon_\lambda + s_\lambda.$$

Иначе изменим значения  $\operatorname{Re}\varepsilon_\chi$  и  $\operatorname{Im}\varepsilon_\chi$  и вернемся к шагу 1.

3. Пусть построено  $q$  точек. Приближения для  $(q + 1)$ -ой точки зададим следующим образом

$$\operatorname{Re}\chi_{q+1} = \frac{\operatorname{Re}\chi_q - \operatorname{Re}\chi_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}} \lambda_{q+1} + \frac{\operatorname{Re}\chi_{q-1}\lambda_q - \operatorname{Re}\chi_q\lambda_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}},$$

$$\operatorname{Im}\chi_{q+1} = \frac{\operatorname{Im}\chi_q - \operatorname{Im}\chi_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}} \lambda_{q+1} + \frac{\operatorname{Im}\chi_{q-1}\lambda_q - \operatorname{Im}\chi_q\lambda_{q-1}}{\lambda_q - \lambda_{q-1}},$$

$$\lambda_{q+1} = \lambda_q - s_\lambda.$$

4. Процесс продолжается пока  $\lambda_{q+1} > 0$ . Для построения следующей дисперсионной кривой, нужно взять следующую точку отсечки в качестве начального приближения.

**1.4. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод кругового поперечного сечения единичного радиуса с показателем преломления  $n(x) = n_+ = \sqrt{2}$ . Показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . Для такого волновода известно точное решение (см. с. 46).

На рис. 27 изображены первые пять дисперсионных кривых, вычисленных при  $N = 1032$ . Сплошными линиями на этом рисунке показано точное решение, кружочками отмечено приближенное. Анализ точности вычислений в зависимости от  $N$  проводился также, как было описано во втором параграфе этой главы. В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ . Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при  $\lambda = 10.02$  и разным числе треугольников сравнивались

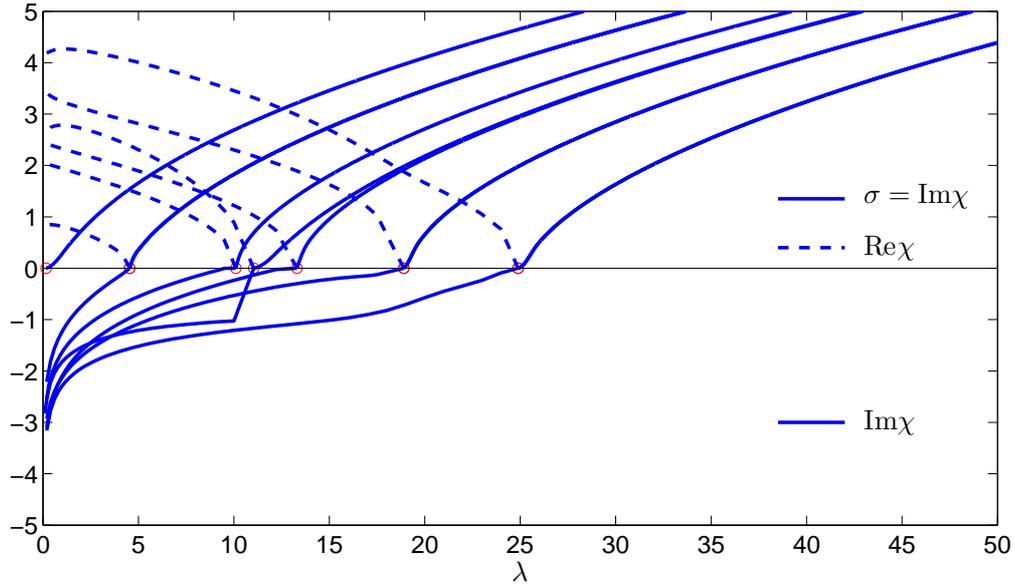


Рис. 28. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные методом коллокации при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 1248$

с точным значением  $\chi_4 = 2.9657 - 0.8469i$ , полученным методом разделения переменных.

N	512	1032	2304	4128
$h$	0.1551	0.1217	0.0800	0.0618
$\tilde{\chi}_4$	2.9984 - 0.8477i	2.9835 - 0.8511i	2.9696 - 0.8495i	2.9666 - 0.8488i
$e$	0.5186	0.5235	0.5048	0.5841
$\varepsilon$	0.0125	0.0078	0.0032	0.0022

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$  и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 0.5h^2$ . На рисунках 30, 31 изображены линии уровня вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

Рассмотрим однородный волновод квадратного поперечного сечения. Точка пересечения диагоналей квадрата расположена в начале координат. Стороны имеют единичную длину и параллельны осям координат. Показатель преломления  $n(x)$  принимает постоянное значение  $n_+ = \sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды  $n_\infty = 1$ . На рис. 28 изображены первые шесть дисперсионных кривых, вычисленных при  $N = 1248$ .

На рисунках 32, 33 изображены линии уровня вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при

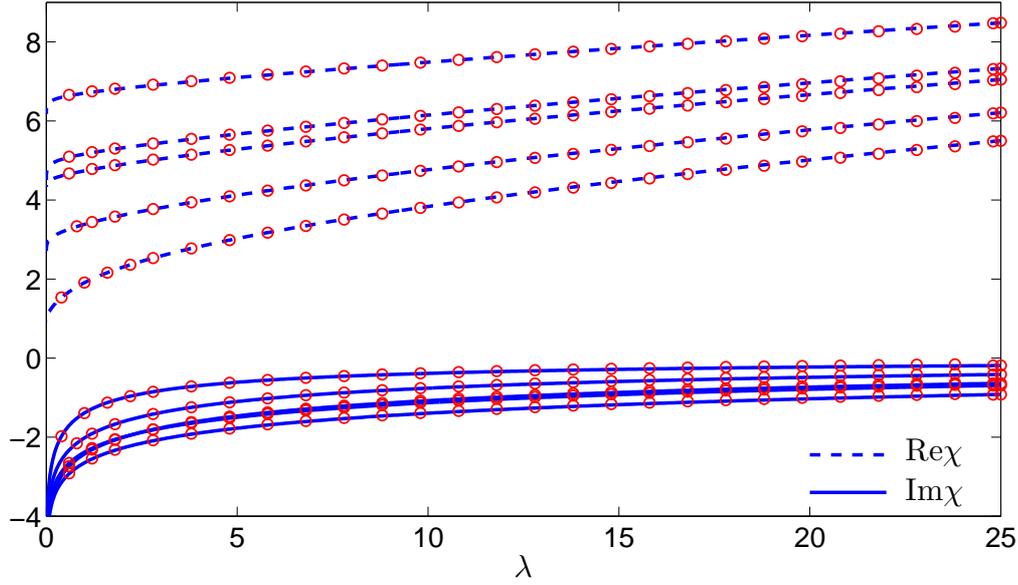


Рис. 29. Дисперсионные кривые для вытекающих собственных волн канального волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = 1$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$  и  $N = 1032$ . Сплошными и штриховыми линиями обозначено точное решение. Кружочки — результаты расчетов методом коллокации.

$N = 4992$  и соответствующих  $\lambda$ . В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ . Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при  $\lambda = 6$  и разным числе треугольников сравнивались со значением  $\chi_4 = 1.7744 - 0.7294i$ , полученном при  $N = 4992$ .

$N$	312	592	1248	2368
$h$	0.2358	0.1788	0.1179	0.0894
$\tilde{\chi}_4$	1.7882 - 0.7006i	1.7808 - 0.7149i	1.7771 - 0.7238i	1.7753 - 0.7273i
$e$	0.2993	0.2589	0.2344	0.1542
$\varepsilon$	0.0166	0.0083	0.0033	0.0012

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1248$  и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 0.2h^2$ .

Рассмотрим так называемый канальный волновод [82] кругового поперечного сечения с центром в начале координат и единичным радиусом. Основное его отличие заключается в том, что показатель преломления в области  $\Omega$  меньше показателя преломления окружающей среды. В нашем случае  $n(x) = n_+ = 1$ , а  $n_\infty = \sqrt{2}$ . Для такого волновода известно точное решение метода разделения переменных [82]. В канальном волноводе рабочими модами могут быть только вытекающие. На рис. 29 изображены

первые пять дисперсионных кривых  $\chi = \chi(\tilde{\lambda})$ , где  $\tilde{\lambda} = \lambda/i$  и  $\tilde{\lambda} > 0$ , вычисленные при  $N = 1032$ . Сплошными линиями показано точное решение, кружочками отмечено приближенное. В следующей таблице приведено исследование сходимости для характеристического числа  $\chi_3$ . Значения  $\tilde{\chi}_3$ , вычисленные при  $\lambda = 10.05$  и разным числе треугольников сравнивались с точным значением  $\chi_3 = 5.8008 - 1.0778i$ .

$N$	512	1032	2304	4128
$h$	0.1551	0.1217	0.0800	0.0618
$\tilde{\chi}_3$	5.8018 - 1.0489i	5.8030 - 1.0655i	5.8047 - 1.0702i	5.8050 - 1.0726i
$e$	0.1859	0.1124	0.1300	0.1099
$\varepsilon$	0.0045	0.0017	0.0008	0.0004

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1032$  и при этом  $|\chi_3 - \tilde{\chi}_3|/|\chi_3| \approx 0.1h^2$ . На рисунках 34, 35 изображены линии уровня вытекающих собственных волн канального волновода, построенные при  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

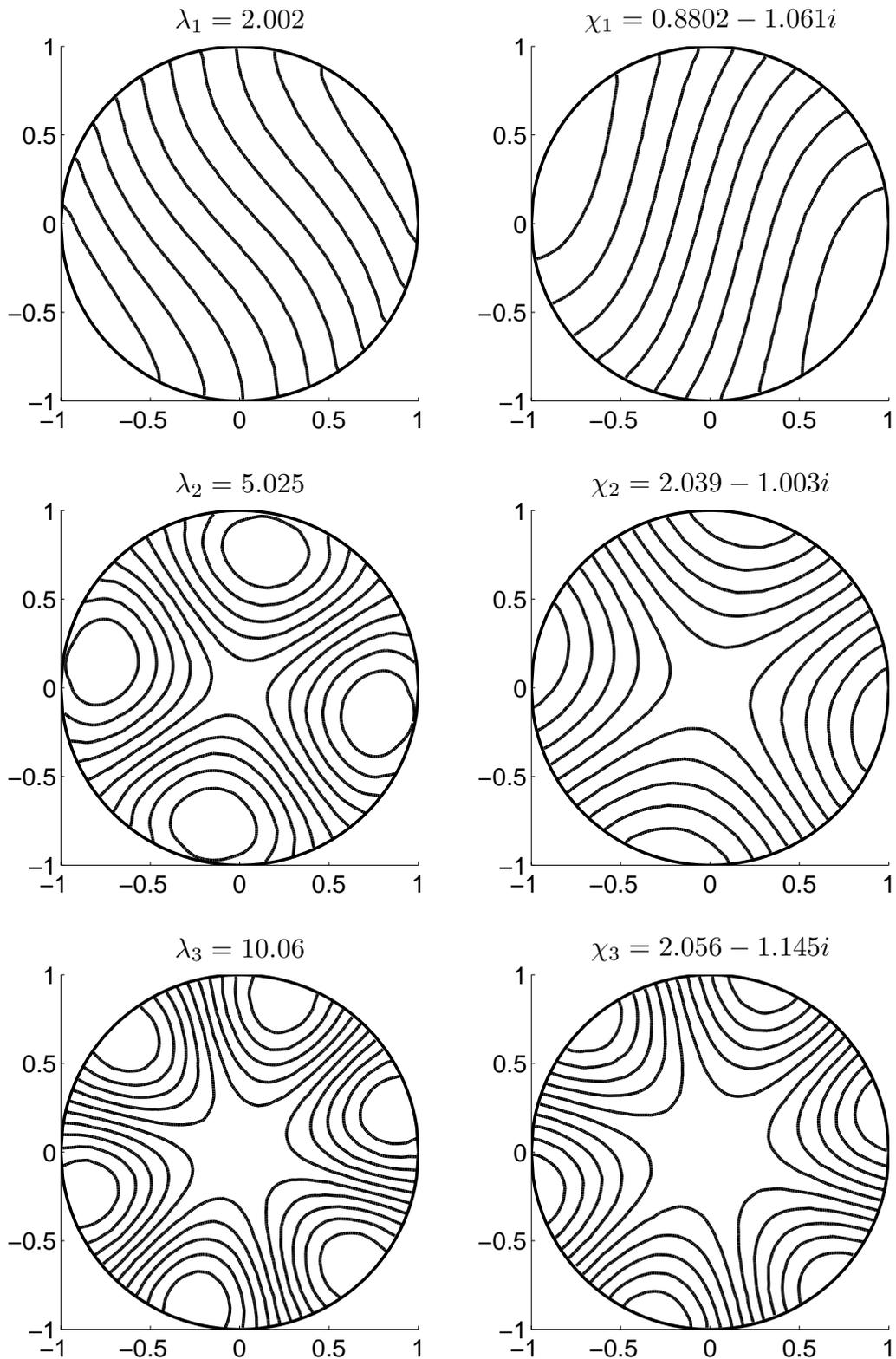


Рис. 30. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

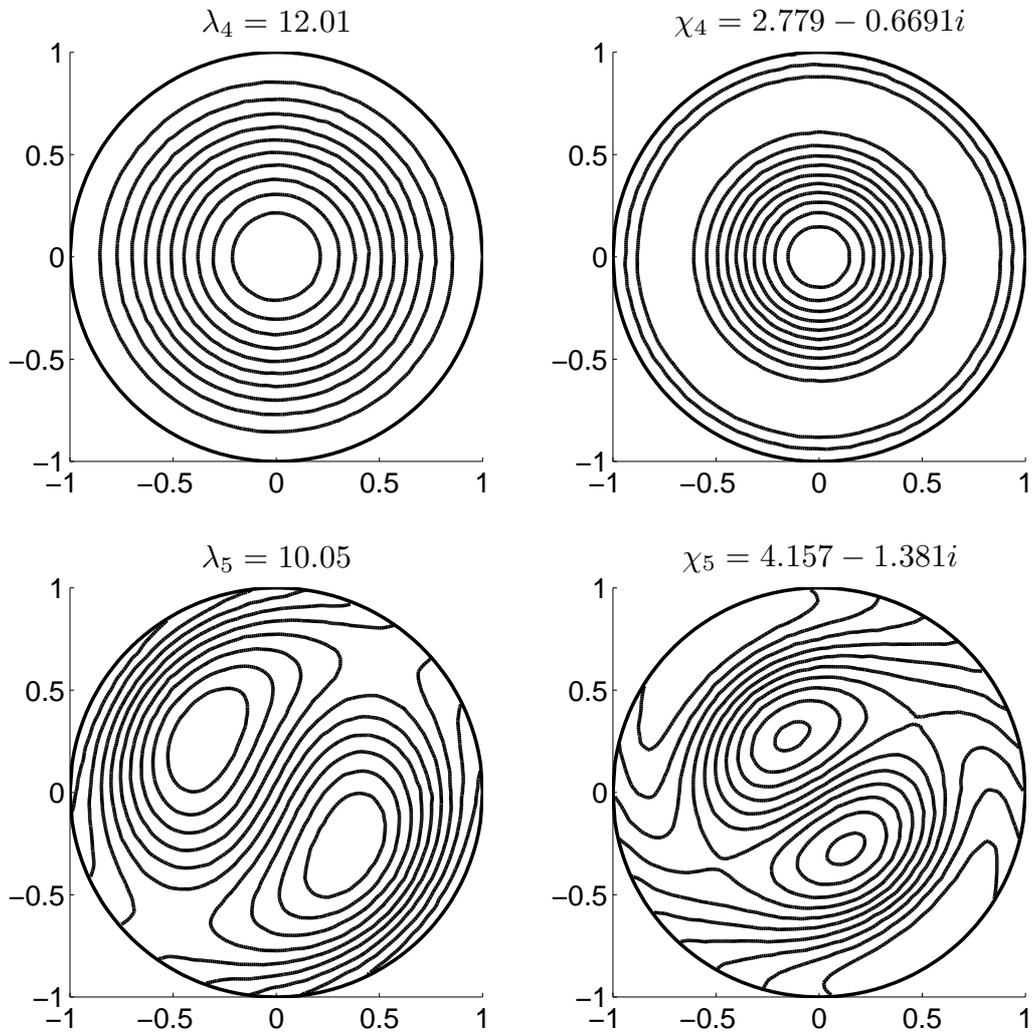


Рис. 31. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4128$  и соответствующих  $\lambda$ .

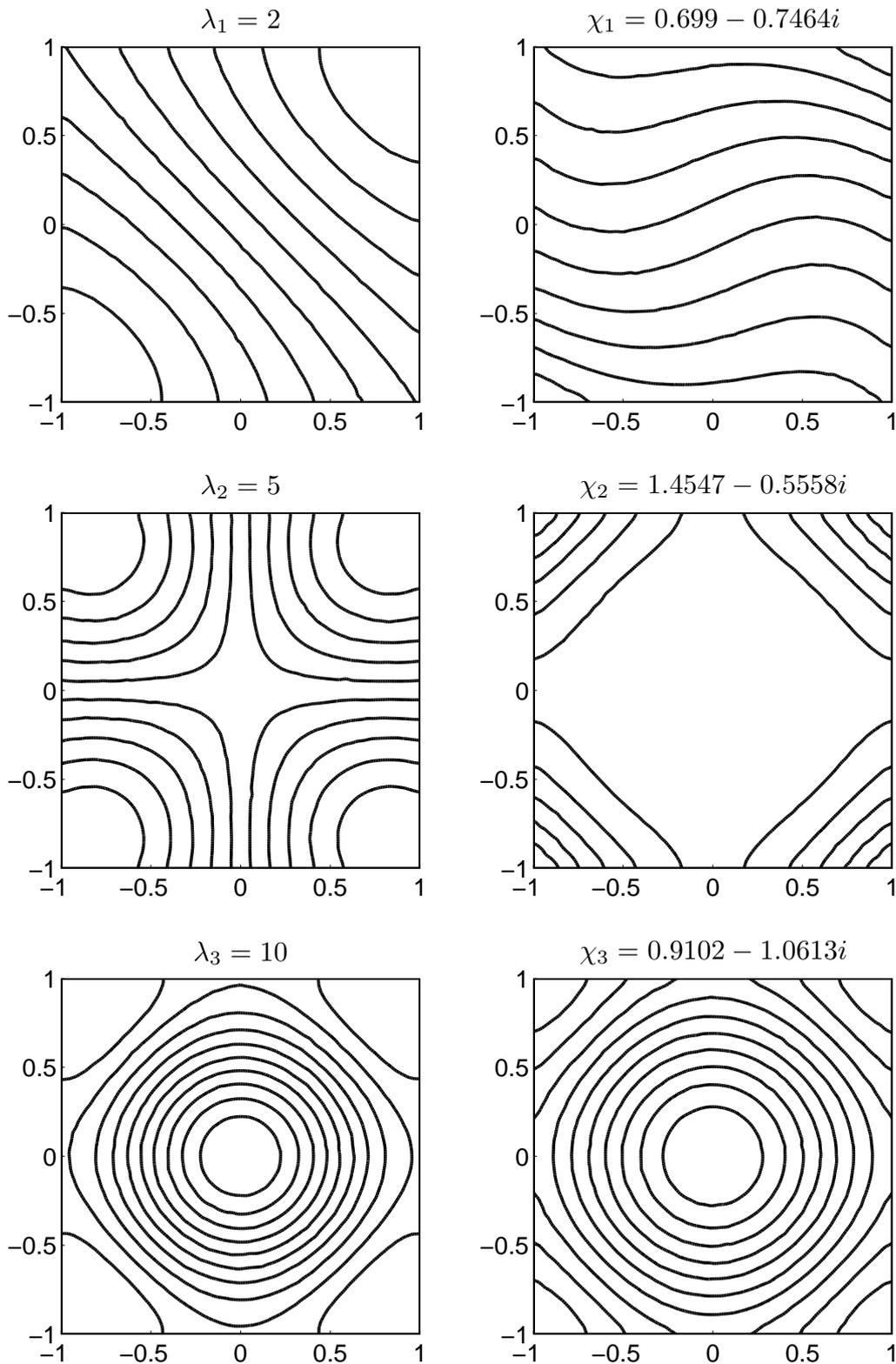


Рис. 32. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4992$  и соответствующих  $\lambda$ .

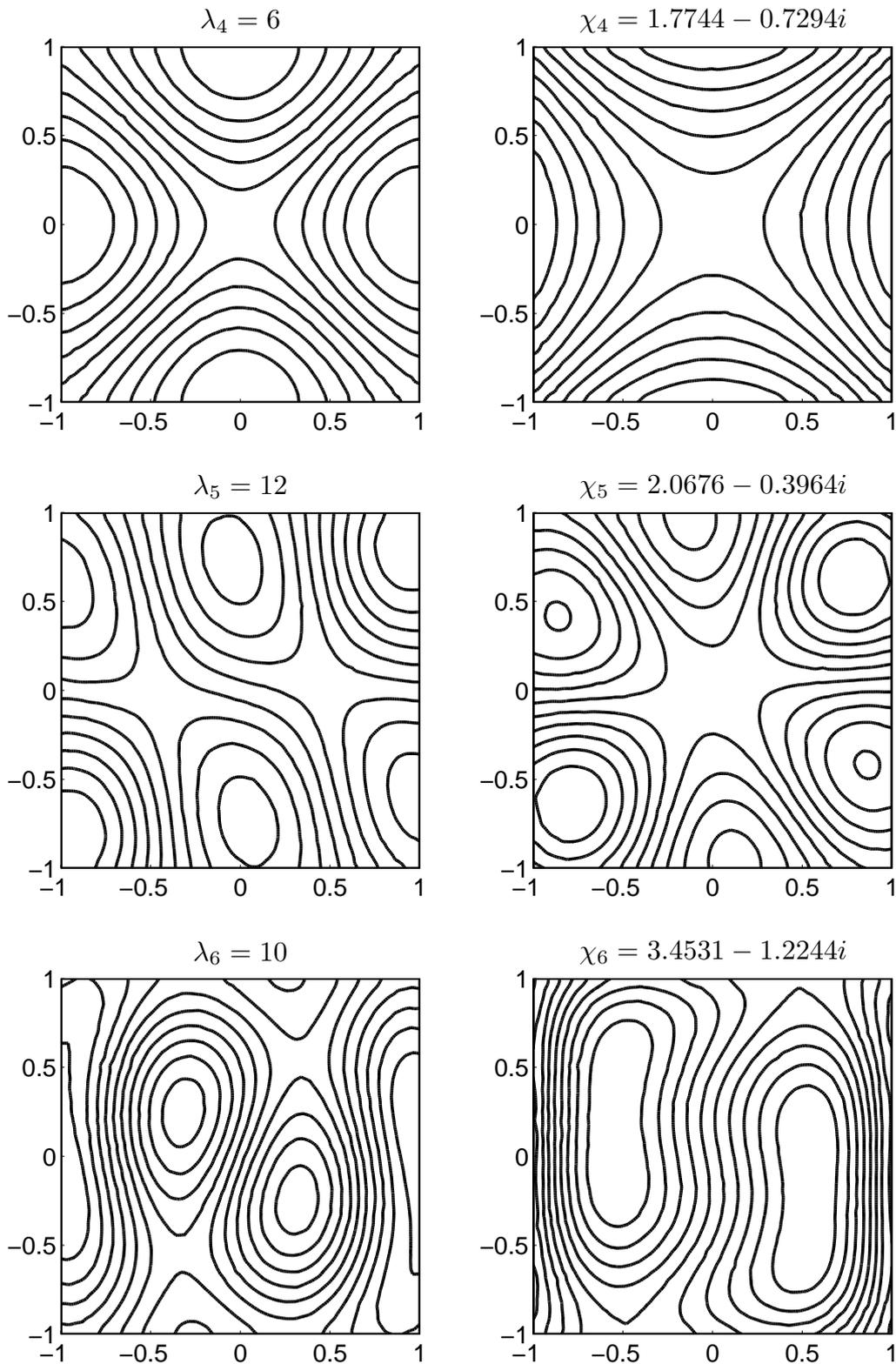


Рис. 33. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн волновода квадратного поперечного сечения, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 4992$  и соответствующих  $\lambda$

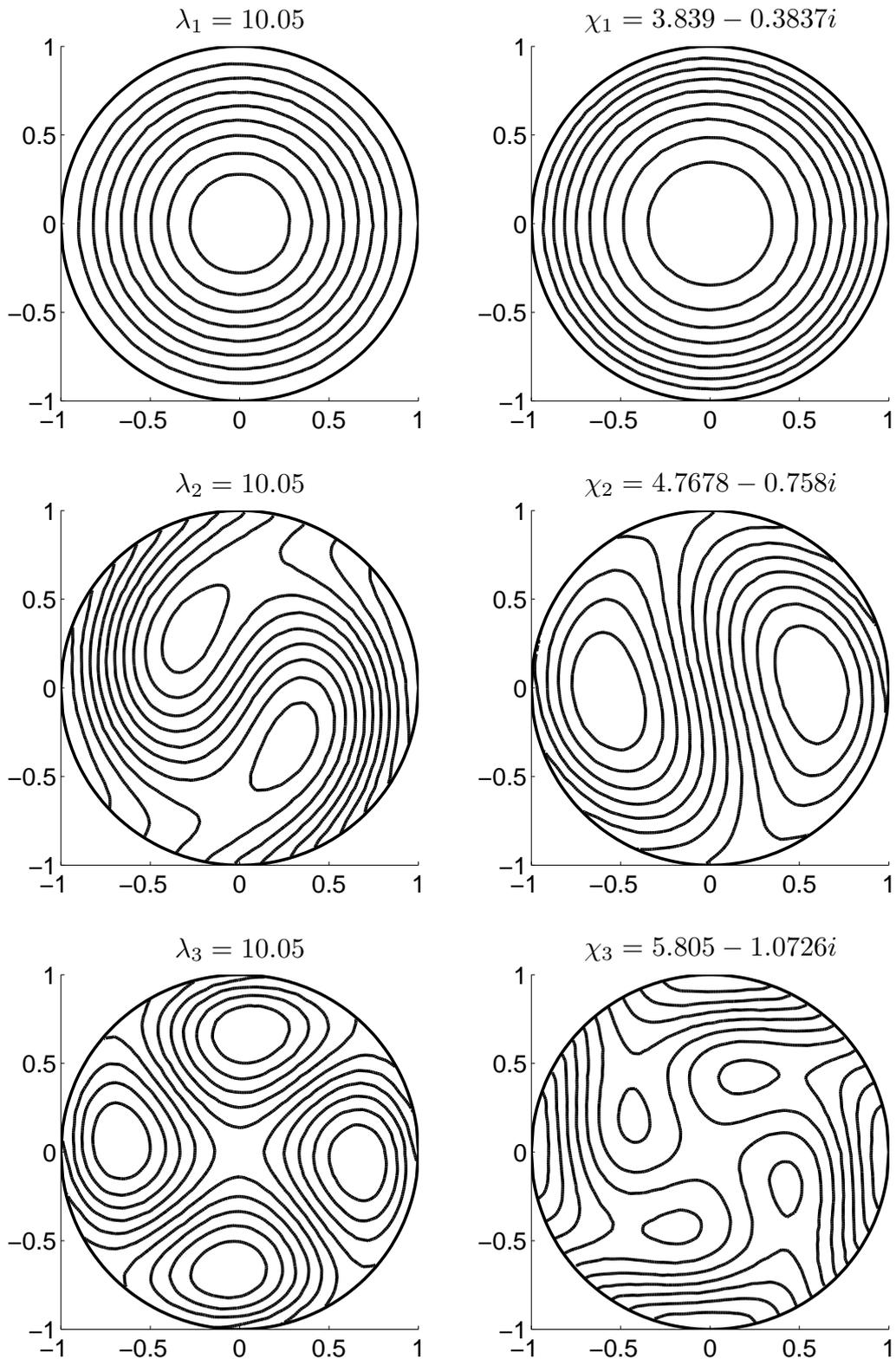


Рис. 34. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн канального волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = 1$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $\lambda = 10.05$  и  $N = 4128$

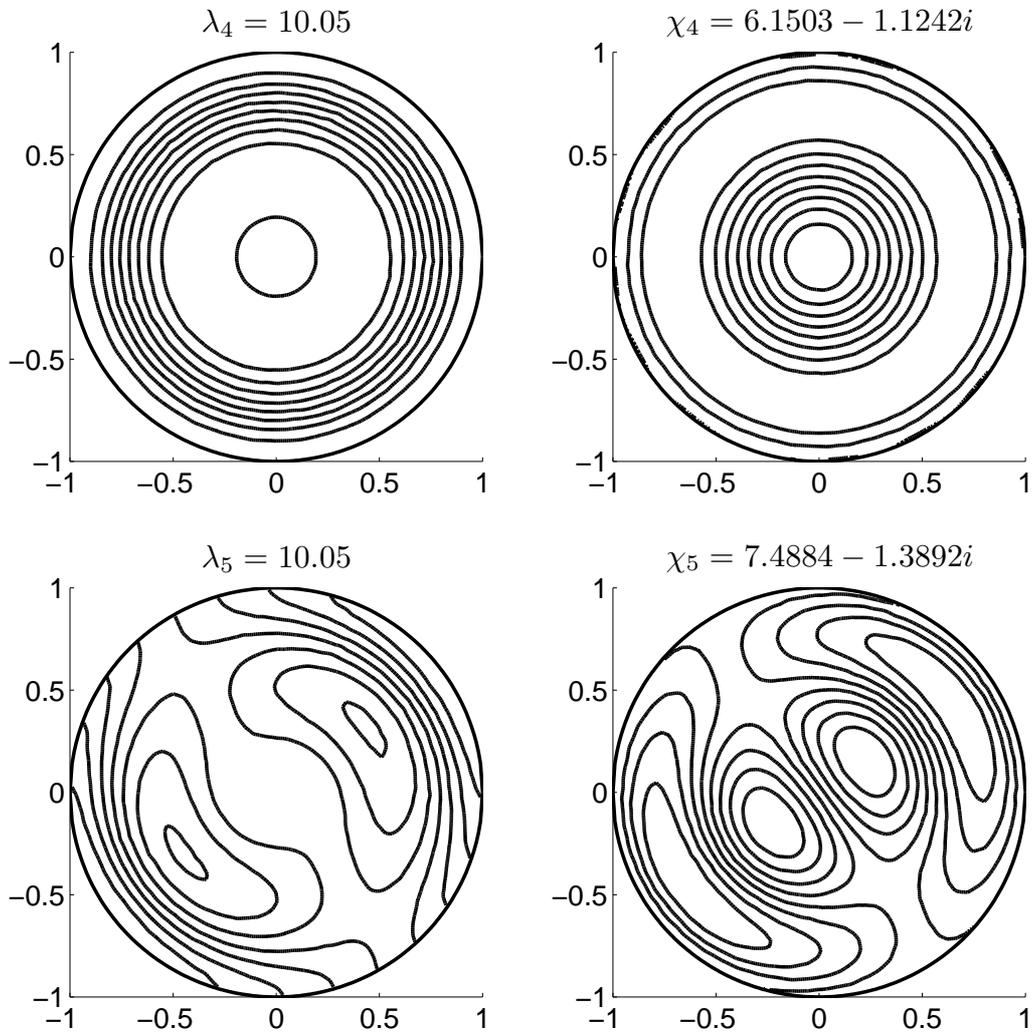


Рис. 35. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для вытекающих собственных волн канального волновода кругового поперечного сечения, построенные при  $n(x) = 1$ ,  $n_\infty = \sqrt{2}$ ,  $\lambda = 10.05$  и  $N = 4128$

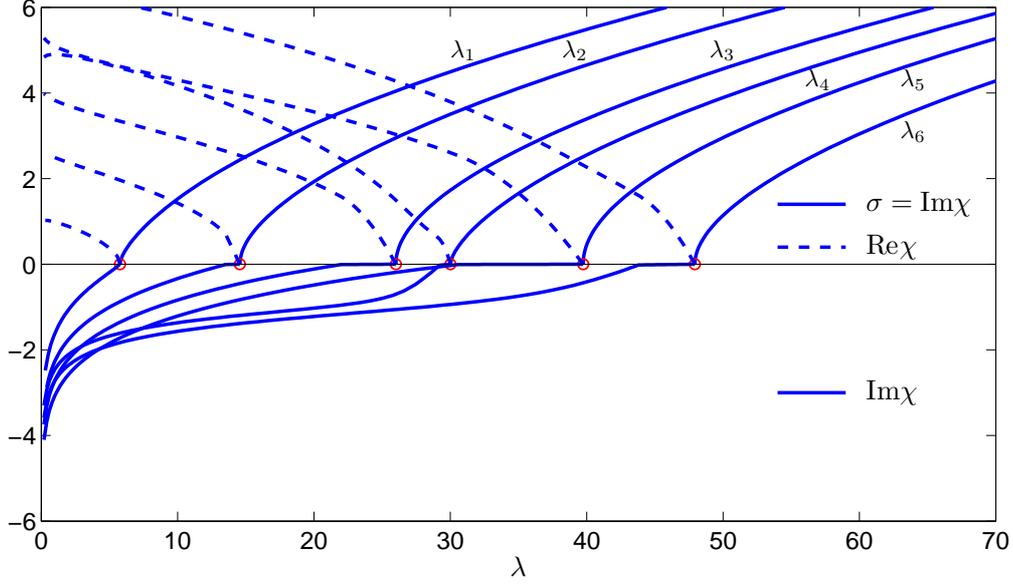


Рис. 36. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 506$ . Сплошными линиями обозначено  $\text{Im}\chi$ , штриховыми —  $\text{Re}\chi$ .

## 2. Волновод в полупространстве.

**2.1. Особенности вычислений.** Алгоритм вычисления элементов матрицы аналогичен способу, применявшемуся при решении задачи поиска поверхностных волн, волновода в полупространстве. Основное отличие заключается в том, что в данном случае функция Ханкеля  $H_0^{(1)}$  является комплекснозначной. Для диагональных элементов формула имеют вид:

$$a_{ii} = 1 - \lambda \frac{p^2(\xi_i)}{2\pi} \left( \frac{\pi R_i^2}{2} - \ln R_i |\Omega_i| - \ln \frac{\chi \gamma}{2} |\Omega_i| - \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(2\chi |\xi_i^i|) |\Omega_i| \right).$$

Внедиагональные элементы вычислялись по формуле:

$$a_{ij} = \frac{i}{4} \lambda p(\xi_i) p(\xi_j) |\Omega_j| \left( H_0^{(1)}(\chi |\xi_i - \xi_j|) - H_0^{(1)}(\chi |\xi_i - \xi_j^*|) \right).$$

Дисперсионные кривые строились по алгоритму описанному в предыдущем пункте.

**2.2. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим однородный волновод, поперечным сечением которого является полукруг с центром в начале координат единичного радиуса. Показатель преломления волновода равен  $\sqrt{2}$ , показатель преломления окружающей среды в

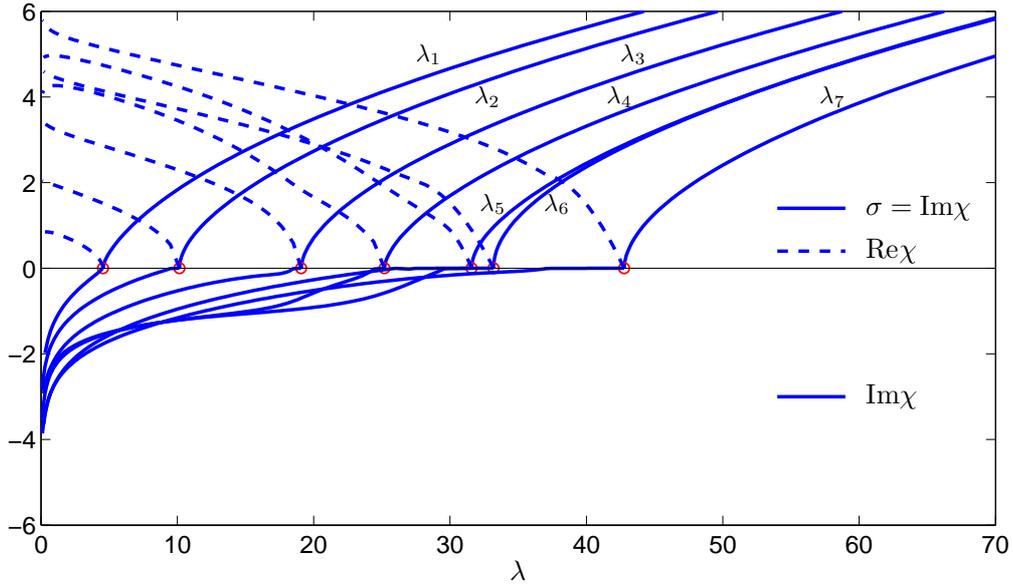


Рис. 37. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн волновода прямоугольного поперечного сечения, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$  и  $N = 664$ . Сплошными линиями обозначено  $\text{Im}\chi$ , пунктирными —  $\text{Re}\chi$ .

верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 36 изображены первые шесть дисперсионных кривых  $\chi = \chi(\lambda)$ , построенных при  $N = 506$ . На рис. 38 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 506$ . В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ . Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\tilde{\chi}_4 = 2.8042 - 1.0803i$ , вычисленном при  $N = 4236$  и  $\lambda = 20.2$ .

$N$	240	506	1059	2024
$h$	0.1693	0.1210	0.0863	0.0605
$\tilde{\chi}_4$	2.7616 - 0.9311i	2.7897 - 1.0195i	2.7978 - 1.0556i	2.8020 - 1.0715i
$e$	1.8019	1.4209	1.1408	0.8241
$\varepsilon$	0.0516	0.0208	0.0085	0.0030

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1059$  и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 1.1h^2$ .

Рассмотрим однородный волновод прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон, равным 2. Середина его большей стороны совпадает с началом координат, а длина меньшей — равна единице. Показатель преломления  $n(x)$  волновода равен  $\sqrt{2}$ , показатель преломления

окружающей среды в верхней полуплоскости  $n_\infty = 1$ . На рис. 37 изображены первые семь дисперсионных кривых  $\chi = \chi(\lambda)$ , построенных при  $N = 664$ . На рис. 39 представлены линии уровня собственных функций, вычисленные при  $N = 664$ . В следующей таблице приведено исследование внутренней сходимости для характеристического числа  $\chi_4$ . Значения  $\tilde{\chi}_4$ , вычисленные при разном числе треугольников, сравнивались со значением  $\chi_4 = 2.6630 - 1.0437i$ , вычисленном при  $N = 4800$  и  $\lambda = 15.2$ .

$N$	320	664	1280	2656
$h$	0.1598	0.1125	0.0799	0.0562
$\tilde{\chi}_4$	2.6492 - 0.9372i	2.6523 - 1.0056i	2.6597 - 1.0224i	2.6612 - 1.0389i
$e$	1.4703	1.0922	1.1777	0.5662
$\varepsilon$	0.0375	0.0138	0.0075	0.0018

Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1280$ , и при этом  $|\chi_4 - \tilde{\chi}_4|/|\chi_4| \approx 1.2h^2$ .

## Приложение

Доказательство теоремы 3.12 базируется на леммах 5.1–5.3 [114]. В монографии [114] рассмотрен более общий, чем в этой теореме, случай многомерных интегральных операторов с полярными ядрами. Сформулируем леммы 5.1–5.3 [114] в виде соответствующих утверждений 1–3 для двумерных операторов, а их доказательство проведем более подробно. Буквой  $c$  будем обозначать константы, не зависящие от  $h$ .

**Утверждение 1.** Пусть кривая  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ ,

$$\Gamma_{h,-} = \{x \in \Omega : x = y - nt, y \in \Gamma, t \in [0, h]\}, \quad h > 0,$$

есть внутренний пограничный слой толщины  $h$ . Здесь  $n$  — внешняя нормаль к контуру  $\Gamma$  в точке  $y$ . Предположим, что функция  $K(x, y)$  удовлетворяет условию

$$|K(x, y)| \leq b|x - y|^{-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad x, y \in \Omega. \quad (32)$$

Тогда

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-}} |K(x, y)| dy \leq ch. \quad (33)$$

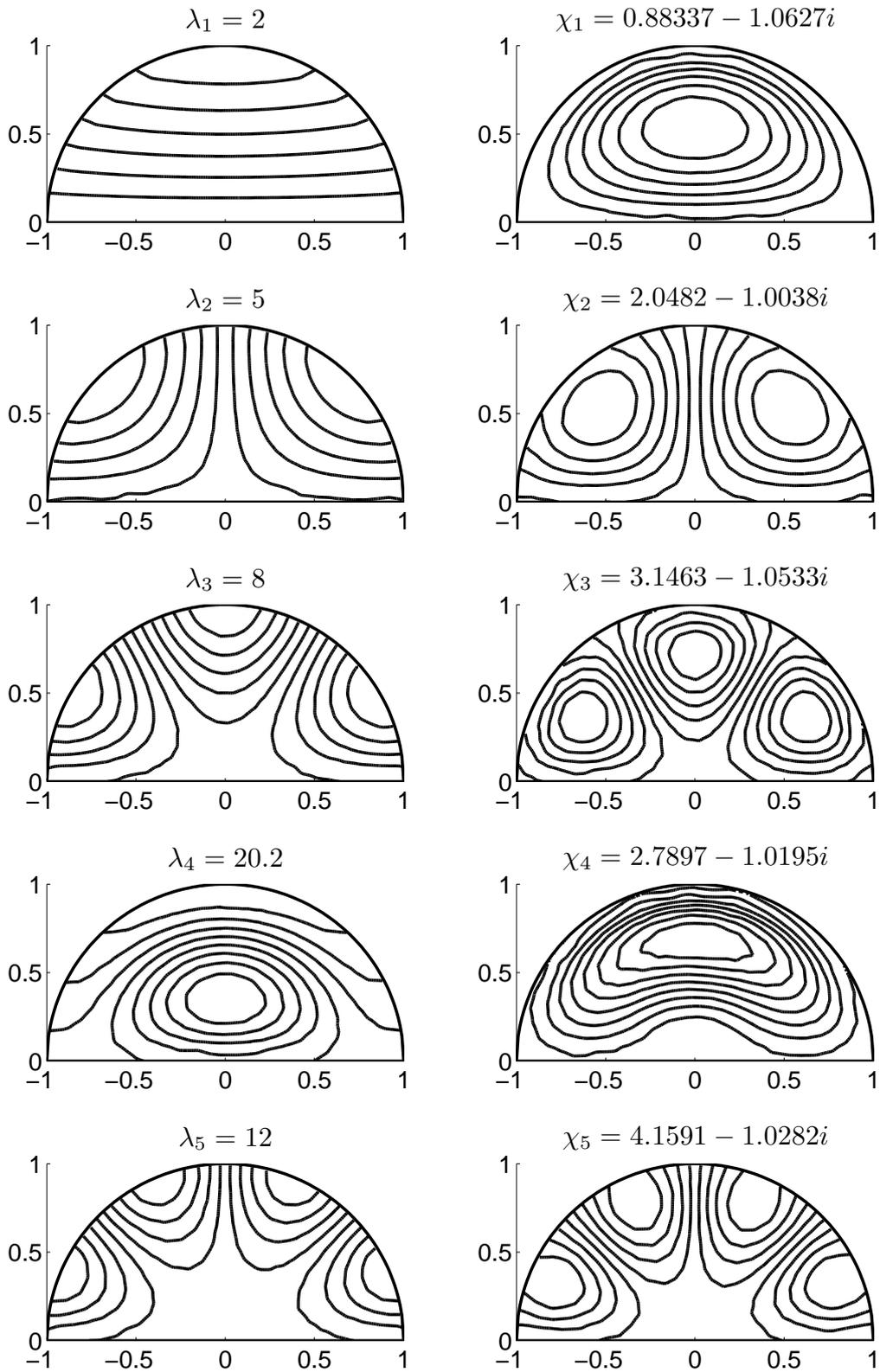


Рис. 38. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для волновода с сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 506$  и соответствующих  $\lambda$ .

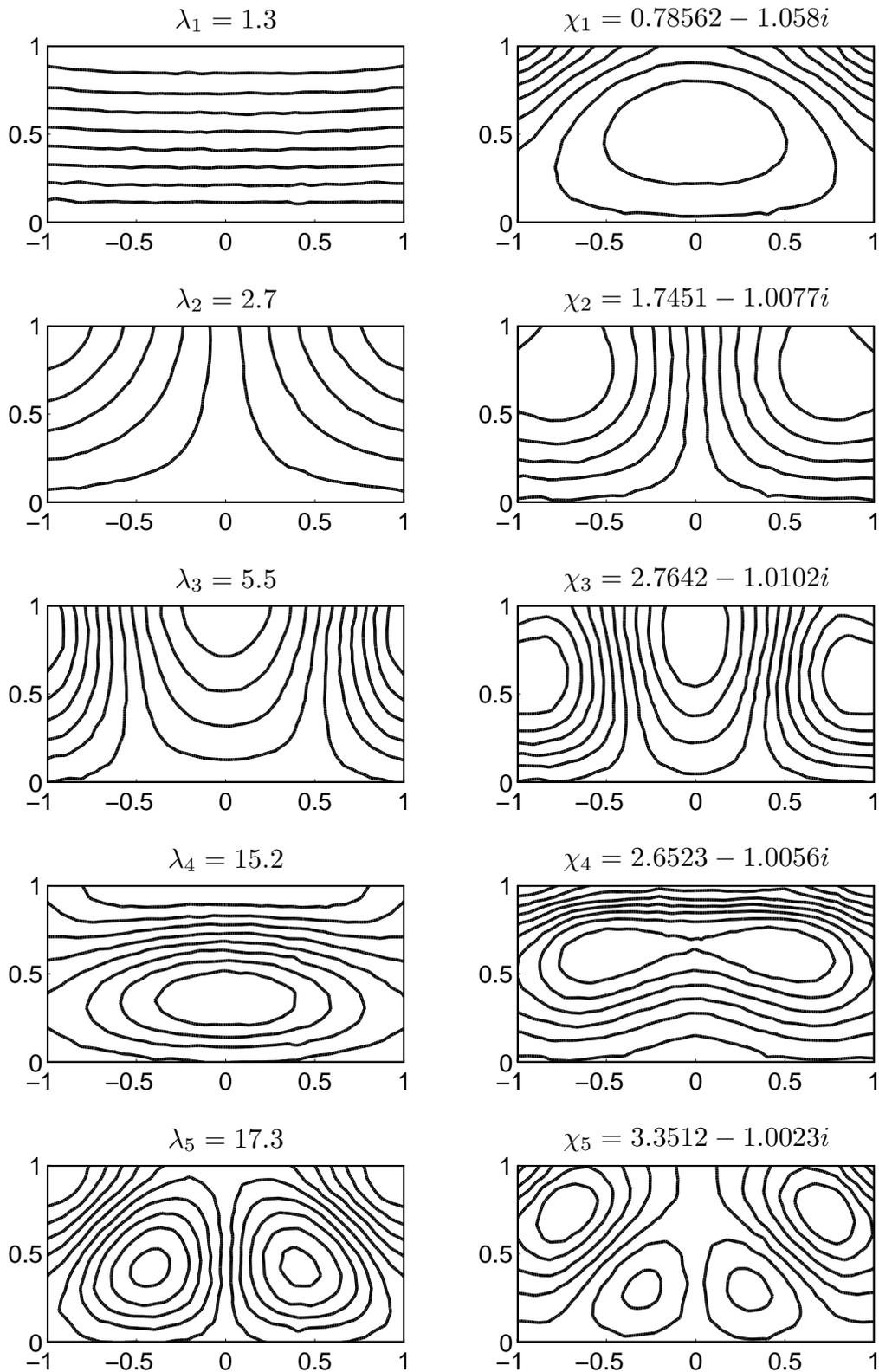


Рис. 39. Линии уровня вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции  $u$  для волновода прямоугольного поперечного сечения, находящегося в полупространстве, построенные при  $n(x) = \sqrt{2}$ ,  $n_\infty = 1$ ,  $N = 664$  и соответствующих  $\lambda$ .

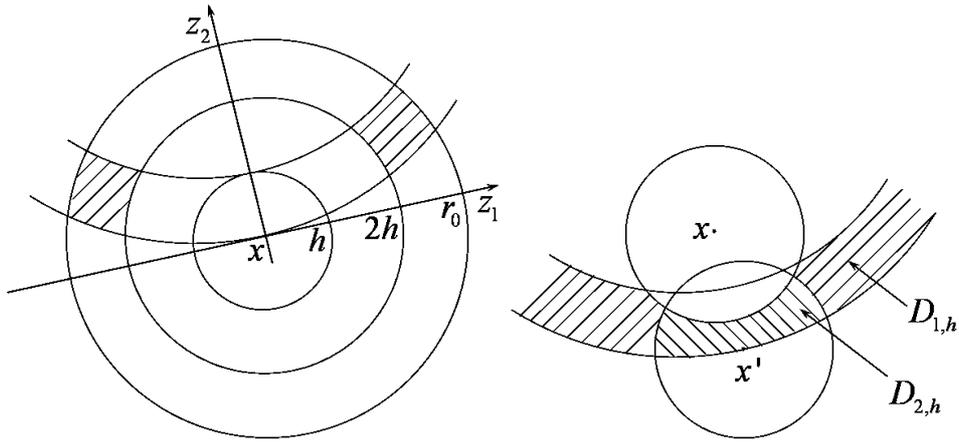


Рис. 40. К доказательству утверждения 1.

Пусть

$$\Gamma_{h,+} = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega : x = y + nt, y \in \Gamma, t \in [0, h]\}, \quad h > 0,$$

есть внешний пограничный слой толщины  $h$ . Предположим, что функция  $K(x, y)$  удовлетворяет условию

$$|K(x, y)| \leq b|x - y|^{-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad x, y \in \Omega \cup \Gamma_{h,+}. \quad (34)$$

Тогда

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,+}} |K(x, y)| dy \leq ch. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Второе доказывается аналогично. Функция  $K(x, y)$  при  $x = y$  имеет особенность (см. (32)). Выделим ее явно, вычислив интеграл по кругу радиуса  $ah$ :

$$\int_{B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy = \frac{2\pi}{(2 - \nu)} (ah)^{2-\nu} = ch^{2-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

Очевидно имеем

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-}} |K(x, y)| dy \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy + \sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy,$$

Следовательно, для доказательства (33) нужно показать, что

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch, \quad 0 < \nu \leq 1, \quad (36)$$

где константа  $c$  не зависит от  $h$ . Обозначим  $x'$  ближайшую к  $x \in \Omega$  точку на  $\Gamma$ . Тогда, для  $y \in \Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)$  имеем  $|x - y| \geq ah$ ,

$$|x - x'| \leq |x - y| + \text{dist}(y, \Gamma) \leq |x - y| + h \leq (1 + a^{-1})|x - y|.$$

Учитывая последнее неравенство, получим

$$|x' - y| \leq |x' - x| + |x - y| \leq (2 + a^{-1})|x - y|.$$

Следовательно,

$$|x - y|^{-\nu} \leq (2 + a^{-1})^{-\nu} |x' - y|^{-\nu}. \quad (37)$$

Разделим область интегрирования в (36) на две подобласти

$$D_{1,h} = \Gamma_{h,-} \setminus [B(x, ah) \cup B(x', ah)], \quad D_{2,h} = [\Gamma_{h,-} \cap B(x', ah)] \setminus B(x, ah).$$

Используя неравенство (37), получим оценку

$$\int_{D_{1,h}} |x - y|^{-\nu} dy \leq (2 + a^{-1})^{-\nu} \int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x', ah)} |x' - y|^{-\nu} dy, \quad x' \in \Gamma, x \in \Omega. \quad (38)$$

Кроме того, имеем

$$\int_{D_{2,h}} |x - y|^{-\nu} dy \leq (ah)^{-\nu} \int_{D_{2,h}} dy \leq (ah)^{-\nu} \int_{B(x', ah)} dy = ch^{2-\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

В дальнейшем знак «'» у  $x'$  будем опускать. Оценим теперь интеграл в правой части (38)

$$\int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, ah)} |x - y|^{-\nu} dy \leq \int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy + \int_{\Gamma_h \setminus B(x, r_0)} |x - y|^{-\nu} dy,$$

где

$$\Gamma_{h,-}^x = \{y \in \Omega : \text{dist}(y, \Gamma) < h, \quad 2h < |x - y| < r_0\},$$

$r_0$  — константа, определяемая условием 2, с. 49. При определении  $\Gamma_{h,-}^x$  было зафиксировано  $a = 2$ . Подынтегральная функция во втором интеграле не имеет особенностей, следовательно, ограничена. И так как область интегрирования имеет ширину  $h$ , то

$$\int_{\Gamma_{h,-} \setminus B(x, r_0)} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch.$$

Осталось показать, что

$$\int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch.$$

Обозначим через  $y'$  ближайшую к  $y$  точку на  $\Gamma$ . При  $x \in \Gamma$ ,  $y \in \Gamma_{h,-}^x$  справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|x - y'| \leq |x - y| + |y - y'| \leq |x - y| + h \leq 2|x - y|.$$

Поэтому, переходя от интеграла по области к повторному, получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy &\leq 2^\nu \int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y'(y)|^{-\nu} dy \leq \\ &\leq c'h \int_{\Gamma \cap [B(x, r_0) \setminus B(x, h)]} |x - y'|^{-\nu} dl(y'). \end{aligned}$$

Контур  $\Gamma$  удовлетворяет условиям 1–3, с. 49. Положим

$$c_0 = \max_{z_1 \in [0, r_0]} |\varphi'(z_1)|.$$

$$\begin{aligned} \Gamma \cap [B(x, r_0) \setminus B(x, h)] &= \\ &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_2 = \varphi(z_1), h^2 \leq z_1^2 + (\varphi(z_1))^2 \leq r_0^2\} \subset \\ &\subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_2 = \varphi(z_1), \frac{h}{\sqrt{1 + c_0^2}} < |z_1| < r_0\}. \end{aligned}$$

Для  $y' \in \Gamma \cap B(x, r_0)$  справедлива следующая оценка

$$|x - y'| = \sqrt{z_1^2 + \varphi^2(z_1)} \geq |z_1|.$$

Дифференциал дуги  $dl(y')$  оценивается так

$$dl(y') = \sqrt{1 + \varphi'^2(z_1)} dz_1 \leq \sqrt{1 + c_0^2} dz_1.$$

Используя две последние оценки, окончательно получим

$$\int_{\Gamma_{h,-}^x} |x - y|^{-\nu} dy \leq ch \sqrt{1 + c_0^2} \int_{\{z_1 \in \mathbb{R} : h/\sqrt{1+c_0^2} < |z_1| < r_0\}} |z_1|^{-\nu} dz_1 \leq ch. \quad \square$$

**Утверждение 2.** Пусть  $T \in L(E, E)$  и  $T_h \in L(E_h, E_h)$  — операторы, определяемые по формулам (2), с. 94, и (7), с. 96, соответственно. Тогда  $T_h \dashrightarrow T$  компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что если выполнены условия

$$\|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad \forall u \in E, \quad (39)$$

$$\|T_h\|_{E_h} < c, \quad h \in (0, \bar{h}), \quad (40)$$

то  $T_h \dashrightarrow T$ .

Действительно, пусть  $u_h \dashrightarrow u$ . Докажем, что  $T_h u_h \dashrightarrow T u$ . Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|T_h u_h - p_h T u\|_{E_h} &\leq \|T_h u_h - T_h p_h u\|_{E_h} + \|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \leq \\ &\leq \|T_h\|_{E_h} \|u_h - p_h u\|_{E_h} + \|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h}. \end{aligned} \quad (41)$$

Так как  $\|T_h\|_{E_h} < c$ ,  $h \in (0, \bar{h})$ , и  $\|u_h - p_h u\|_{E_h} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то

$$\|T_h\|_{E_h} \|u_h - p_h u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (42)$$

Используя условие (39), получаем  $T_h \dashrightarrow T$ .

В соответствии с только что доказанным свойством и определением дискретной компактной сходимости достаточно показать, что существует такое  $\bar{h} > 0$ , что

$$\|T_h\|_{E_h} < c, \quad h \in (0, \bar{h}); \quad (43)$$

$$\|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \quad \forall u \in E; \quad (44)$$

$$\|u_h\|_{E_h} \leq 1, \quad 0 < h < \bar{h} \implies (T_h u_h) \text{ дискретно компактно.} \quad (45)$$

Докажем неравенство (43). Имеем

$$\begin{aligned} \|T_h\|_{E_h} &\leq \sup_{\|u_h\| \leq 1} \left( \max_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) u_h(\xi_{j,h}) dy \right| \right) \leq \\ &\leq \sup_{\|u_h\| \leq 1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} |K(\xi_{i,h}, y)| |u_h(\xi_{j,h})| dy \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} |K(\xi_{i,h}, y)| dy \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega_h} |K(x, y)| dy. \end{aligned}$$

С помощью утверждения 1 легко проверить, что

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega_h} |K(x, y)| dy \rightarrow \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)| dy = \|T\|_E, \quad h \rightarrow 0.$$

Оператор  $T$  ограничен, следовательно, существует такое  $\bar{h}$ , что выполняются (43).

Далее, для любой функции  $u \in E$  имеем

$$\begin{aligned}
& \|p_h T u - T_h p_h u\|_{E_h} = \\
& = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \int_{\Omega} K(\xi_{i,h}, y) u(y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} K(\xi_{i,h}, y) u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \\
& \leq \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h}} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \\
& \leq \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega'_h} K(x, y) u(y) dy + \int_{\Omega \setminus \Omega_h} K(x, y) u(y) dy - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy - \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_{j,h} \setminus \Omega'_{j,h}} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) [u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| + \\
& + \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_h} K(x, y) u(y) dy \right| + \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega_h \setminus \Omega'_h} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy \right|. \quad (46)
\end{aligned}$$

Здесь  $\Omega'_{j,h} = \Omega_{j,h} \cap \Omega$  (для невыпуклых областей треугольники, находящиеся на границе, могут целиком не принадлежать  $\Omega$ ). Очевидно, что

$$\Omega = \Omega'_h \cup (\Omega \setminus \Omega_h),$$

где  $\Omega'_h = \sum_{j=1}^N \Omega'_{j,h}$ . Кроме того,  $\Omega \setminus \Omega_h \subset \Gamma_{ch^2,-}$  и  $\Omega_h \setminus \Omega'_h \subset \Gamma_{ch^2,+}$  (см. [20], с. 115).

Известно [114], с. 72, что для любой функции  $u \in E$  первое слагаемое в правой части последней оценки стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ :

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) [u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Кроме того, если дополнительно предположить, что  $u \in C^{2,0}$ , то скорость этой сходимости имеет второй порядок по  $h$  (см. ниже доказательство утверждения 3).

Кривая  $\Gamma$  принадлежит классу  $C^{1,\alpha}$ . Ядро  $K(x, y)$  слабо полярно. Поэтому, используя утверждение 1, имеем

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_h} K(x, y) u(y) dy \right| \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{ch^2, -}} |K(x, y)| dy \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq ch^2, \quad (47)$$

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega_h \setminus \Omega'_h} K(x, y) u(\xi_{j,h}) dy \right| \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Gamma_{ch^2, +}} |K(x, y)| dy \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq ch^2. \quad (48)$$

В оценке (48) используется тот факт, что даже если треугольник для невыпуклой области частично выходит за ее пределы, то при достаточно малом  $h$  его центр масс все равно остается внутри области [20]. Следовательно, (44) выполнено.

Теперь докажем справедливость (45). Для произвольного элемента  $u_h \in E_h$  определим кусочно постоянную функцию  $u^{(h)} \in L_\infty(\Omega)$  по формуле (3), с. 94. Так как  $\|u_h\|_{E_h} \leq 1$ , то  $\|u^{(h)}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 1$ , при  $h \in (0, \bar{h})$ . Оператор  $T : L_\infty(\Omega) \rightarrow E$  компактный (см. [114], с. 14). Следовательно, семейство  $(Tu^{(h)})$ ,  $h \in (0, \bar{h})$  относительно компактно. Значит из любой последовательности  $Tu^{(h_n)}$ , этого семейства можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $Tu^{(h_{n_k})}$ . Пусть

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} Tu^{(h_{n_k})} = v \in E. \quad (49)$$

Легко проверить, что если семейство элементов  $(u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})} \subset E$  относительно компактно, то семейство  $(p_h u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})}$  дискретно компактно. Действительно, так как семейство  $(u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})} \subset E$  относительно компактно, то из любой последовательности  $(u^{(h_n)})$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $(u^{(h_{n_k})})$  (см., напр., [29], с. 42). Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(h_{n_k})} = u \in E.$$

Очевидно, что

$$\|p_{h_{n_k}} u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} u\|_{E_{h_{n_k}}} \leq \|p_{h_{n_k}}\|_{E_{h_{n_k}}} \|u^{(h_{n_k})} - u\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно семейство  $(p_h u^{(h)})_{h \in (0, \bar{h})}$  дискретно компактно. Используя этот факт, получим, что семейство  $p_h T u^{(h)}$  дискретно компактно.

Заметим, что  $p_h u^{(h)} = u_h$ , значит,

$$\begin{aligned} & \|T_{h_{n_k}} u_{h_{n_k}} - p_{h_{n_k}} v\|_{E_{h_{n_k}}} = \\ & = \|T_{h_{n_k}} u_{h_{n_k}} - p_{h_{n_k}} v + p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})}\|_{E_{h_{n_k}}} \leq \\ & \leq \|p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} v\|_{E_{h_{n_k}}} + \|T_{h_{n_k}} p_{h_{n_k}} u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})}\|_{E_{h_{n_k}}}. \end{aligned}$$

В силу (49)

$$\|p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} v\|_{E_{h_{n_k}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, известно [114], с. 73, что для  $u^{(h_{n_k})} \in L_\infty(\Omega)$

$$\|T_{h_{n_k}} p_{h_{n_k}} u^{(h_{n_k})} - p_{h_{n_k}} T u^{(h_{n_k})}\|_{E_{h_{n_k}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, семейство  $(T_h u_h)$  дискретно компактно.  $\square$

**Утверждение 3.** Пусть  $T \in L(E, E)$ , и  $T_h \in L(E_h, E_h)$  — операторы, определяемые по формулам (2), с. 94, и (7), с. 96, соответственно. Тогда для любой функции  $u \in C^{2,0}(\Omega)$  существует такое число  $\bar{h} > 0$ , что справедлива оценка

$$\|T_h p_h u - p_h T u\|_{E_h} \leq ch^2, \quad h \in (0, \bar{h}).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу (46)–(48) для доказательства леммы достаточно показать, что для любой функции  $u \in C^{2,0}(\Omega)$  выполняется неравенство

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) [u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| \leq ch^2.$$

Используем то, что  $|y - \xi_{j,h}| \leq h$  при  $y \in \Omega'_{j,h}$ . Запишем неравенство Липшица для функции  $u$ :

$$|u(x) - u(y)| \leq c_L |x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (50)$$

Получим

$$\max_{1 \leq j \leq N} \sup_{y \in \Omega'_{j,h}} |u(y) - u(\xi_{j,h})| \leq c_L h. \quad (51)$$

Введем множества индексов

$$N(x) = \{j : 1 \leq j \leq N, \text{dist}(x, \partial\Omega_{j,h}) < h\},$$

$$N(\partial\Omega) = \{j : 1 \leq j \leq N, \text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_{j,h}) < h\}.$$

Так как в рассматриваемом случае кривая  $\Gamma$  принадлежит  $C^{1,\alpha}$ , а ядро  $K(x, y)$  слабо полярно, то можно использовать утверждение 1. Согласно (33) и (51) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in N(\partial\Omega)} \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y)[u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| &\leq \\ &\leq c_L h \int_{\Gamma_{2h}} |K(x, y)| dy \leq ch^2. \end{aligned}$$

Используя аналогичные рассуждения, получим, что для суммы с индексами  $j \in N(x)$  справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in N(x)} \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y)[u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| &\leq \\ &\leq c_L h \int_{B(x, 2h)} |K(x, y)| dy \leq ch^2. \end{aligned}$$

Действительно, ядро удовлетворяет условию

$$|K(x, y)| \leq c(1 + |\ln |x - y||). \quad (52)$$

В силу (52)

$$\begin{aligned} \int_{B(x, 2h)} |K(x, y)| dy &\leq c \int_{B(x, 2h)} dy + c \int_{B(x, 2h)} |\ln |x - y|| dy \leq \\ &\leq c(4\pi h^2 + ch). \end{aligned}$$

Теперь оценим оставшуюся часть суммы с индексами

$$j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega).$$

Получим

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) [u(y) - u(\xi_{j,h})] dy \right| \leq s_h^1 + s_h^2,$$

где

$$\begin{aligned} s_h^1 &= \\ &= \sup_{x \in \Omega} \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \int_{\Omega'_{j,h}} |K(x, y)| |u(y) - u(\xi_{j,h}) - (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h}))| dy, \\ s_h^2 &= \sup_{x \in \Omega} \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \left| \int_{\Omega'_{j,h}} K(x, y) (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dy \right|. \end{aligned}$$

Так как  $u \in C^{2,0}(\Omega)$ , то для нее справедливо разложение по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$u(x + z) = u(x) + (\nabla u(x), z) + \int_0^1 (1 - t) (D^2 u(x + tz) z, z) dt, \quad (53)$$

где

$$(D^2 u(x + z) z, z) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u(x + z)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j.$$

Применяя формулу (53), запишем разложение функции  $u$  в окрестности точки  $\xi_{j,h}$  по степеням  $(y - \xi_{j,h})$ :

$$\begin{aligned} u(y) &= u(\xi_{j,h} + (y - \xi_{j,h})) = u(\xi_{j,h}) + (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) + \\ &+ \int_0^1 (1 - t) (D^2 u(\xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h})) (y - \xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dt. \end{aligned} \quad (54)$$

Оценим  $s_h^1$  при  $y \in \Omega'_{j,h}, j \notin N(\partial\Omega)$ . Вследствие (54) имеем

$$\begin{aligned} &|u(y) - u(\xi_{j,h}) - (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h}))| = \\ &= \left| \int_0^1 (1 - t) (D^2 u(\xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h})) (y - \xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dt \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{t \in [0,1]} |D^2 u(\xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h}))| |y - \xi_{j,h}|^2 \int_0^1 (1-t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{l,m=1,2} \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_m}(ty + (1-t)\xi_{j,h}) \right| |y - \xi_{j,h}|^2. \end{aligned}$$

Заметим, что если  $y \in \Omega_{j,h}$ ,  $j \notin N(\partial\Omega)$ , то

$$\frac{1}{2}\rho(y) \leq \rho(ty + (1-t)\xi_{j,h}) \leq 2\rho(y),$$

следовательно, используя оценку второй производной (12) функции  $u$ , получим:

$$\begin{aligned} s_h^1 \leq ch^2 \sup_{x \in \Omega} \int_{F_h} |K(x, y)| (1 + |\ln \rho(y)|) dy &\leq ch^2 \left( \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)| dy + \right. \\ &\left. + \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)| |\ln \rho(y)| dy \right) \leq ch^2. \end{aligned}$$

Так как точки коллокации  $\xi_{j,h}$  являются центрами масс треугольников  $\Omega'_{j,h}$ , то

$$\int_{\Omega'_{j,h}} (y - \xi_{j,h}) dy = 0.$$

Следовательно, слагаемое  $s_h^2$  представимо в виде:

$$s_h^2 = \sup_{x \in \Omega} \sum_{j \notin N(x) \cup N(\partial\Omega)} \left| \int_{\Omega'_{j,h}} [K(x, y) - K(x, \xi_{j,h})] (\nabla u(\xi_{j,h}), (y - \xi_{j,h})) dy \right|.$$

Запишем разложение функции  $K(x, y)$  по формуле Тейлора по переменной  $y$  по степеням  $(y - \xi_{j,h})$ :

$$K(x, y) = K(x, \xi_{j,h}) + \int_0^1 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial K(x, \xi_{j,h} + t(y - \xi_{j,h}))}{\partial y_l} (y_l - \xi_{j,h}^l) dt. \quad (55)$$

Для  $y \in \Omega'_{j,h}$ ,  $j \notin N(x)$  имеем

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |x - (ty + (1-t)\xi_{j,h})| \leq 2|x - y|, \quad t \in (0, 1).$$

Используя разложение (55) и предыдущее неравенство, получим

$$|K(x, y) - K(x, \xi_{j,h})| \leq ch \sum_{i=1}^2 \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{\partial K(x, ty + (1-t)\xi_{j,h})}{\partial y_i} \right| \leq ch|x - y|^{-1}.$$

Окончательно оценка для  $s_h^2$  будет иметь вид:

$$s_h^2 \leq ch^2 \int_{\Omega} |x - y|^{-1} dy \leq ch^2. \quad \square$$

## ГЛАВА 4

# ВЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ

### § 1. Задача о собственных волнах волновода с размытой границей

#### 1. Постановка задачи и локализация собственных значений.

Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей и произвольным переменным показателем преломления. Обозначим через  $C^2(\mathbb{R}^2)$  пространство комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^2$  функций. Пусть  $\Omega$  — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Относительно показателя преломления волновода  $n$  предположим следующее:  $n$  — вещественная функция из  $C^2(\mathbb{R}^2)$  не зависящая от  $x_3$ ;

$$n = n_\infty = \text{const}, \quad x \notin \Omega;$$

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0.$$

Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  — неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  — заданная частота электромагнитных колебаний. Задача сводится (см. параграф 1 главы 1) к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения  $E, H$  системы уравнений

$$\text{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \text{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства, через  $\mu_0$  обозначена магнитная проницаемость свободного пространства, векторная операция  $\text{rot}_\beta$  определена равенством (4), с. 16. Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{E, H\}$  системы (1) в пространстве  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ .

Следуя результатам главы 1, будем предполагать, что функции  $E$  и  $H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения, то есть существует такая константа  $R_0$ , когда для всех  $x : |x| \geq R_0$  эти функции разлагаются

в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_l \\ \mathbf{B}_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi). \quad (2)$$

Здесь  $\chi_\infty = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$ ,  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ . При этом будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ . Строение поверхности  $\Lambda$  подробно рассмотрено в главе 1. Обозначим множества

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}, \\ B &= \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| \geq kn_+ \right\}, \\ D &= \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| < kn_\infty \right\}. \end{aligned}$$

**Определение 4.12.** Ненулевой вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  будем называть собственным вектором задачи (1), (2), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (1), (2).

Если известен собственный вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  задачи (1), (2), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , то собственная волна волновода определяется по формуле (2), с. 15. Следовательно, поиск собственных волн сводится к решению нелинейной векторной спектральной задачи (1), (2).

**Теорема 4.14.** *Области  $B$  и  $D$  главного листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  не содержат собственных значений задачи (1), (2).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  — собственный вектор задачи (1), (2), отвечающий собственному значению  $\beta \in B$ . Тогда имеет место равенство (12), с. 17. Умножим его скалярно на  $\bar{\mathbf{H}}$  и проинтегрируем по  $\mathbb{R}^2$ . Мы имеем право это делать в силу условия (2) и асимптотики (13), с. 53. В результате получим:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{H}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \operatorname{rot}_\beta \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} \right) \right) \cdot \bar{\mathbf{H}} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{n^2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} \right) \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}} dx \geq \\ &\geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}} dx = \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H})) \cdot \bar{\mathbf{H}} dx. \end{aligned}$$

Используя равенство (14), формулу (9), с. 16 и формулу интегрирования по частям, продолжим оценку:

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{H}|^2 dx &\geq \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} (-\Delta \mathbf{H} + \beta^2 \mathbf{H}) \cdot \bar{\mathbf{H}} dx = \\ &= \frac{1}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathbf{H}|^2 dx + \frac{\beta^2}{n_+^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{H}|^2 dx. \end{aligned}$$

В итоге получили неравенство

$$(\beta^2 - k^2 n_+^2) \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{H}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathbf{H}|^2 dx \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что значениям  $\beta \in B$  отвечает только нулевое решение задачи (1), (2). Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то имеем  $\mathbf{H} = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, и

$$\mathbf{E} = -1/(i\omega\varepsilon_0 n^2) \text{rot}_\beta \mathbf{H} = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Если же  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то функция  $\mathbf{H}$  принимает постоянное значение в  $\mathbb{R}^2$ . Но из условия излучения (2) и асимптотики (13), с. 53, для любого  $\beta \in B$  следует, что  $\mathbf{H}$  обращается в нуль на бесконечности. Значит,  $\mathbf{H} = 0$  в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbf{E} = 0$  в  $\mathbb{R}^2$  при  $\beta \in B$ , что противоречит предположению о том, что вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  является собственным вектором задачи (1), (2), отвечающим собственному значению  $\beta \in B$ . Следовательно, область  $B$  свободна от собственных значений задачи (1), (2).

Пусть  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  — собственный вектор задачи (1), (2), отвечающий собственному значению  $\beta \in D$ . Тогда имеет место равенство (11), с. 17. Умножим его скалярно на  $\bar{\mathbf{E}}$  и проинтегрируем по  $\Omega_R$ , где  $R \geq R_0$ . Для всех  $x : |x| \geq R_0$  справедливо разложение (2). Используем формулу (9), формулу интегрирования по частям, равенство (13) и получим

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\Omega_R} n^2 |\mathbf{E}|^2 dx &= \int_{\Omega_R} (\text{rot}_\beta (\text{rot}_\beta \mathbf{E})) \cdot \bar{\mathbf{E}} dx = \\ &= \int_{\Omega_R} (-\Delta \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} + \text{grad}_\beta (\text{div}_\beta \mathbf{E})) \cdot \bar{\mathbf{E}} dx = \\ &= - \int_{\Omega_R} |\text{div}_\beta \mathbf{E}|^2 dx + \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{E}|^2 dx - \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial |x|} \cdot \bar{\mathbf{E}} dx + \beta^2 \int_{\Omega_R} |\mathbf{E}|^2 dx. \end{aligned}$$

Возьмем от левой и правой части полученного равенства мнимую часть:

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial E}{\partial |x|} \cdot \bar{E} dx = 0, \quad R \geq R_0.$$

Из последнего равенства, условия (2) и ортогональности тригонометрических функций для любого  $R \geq R_0$  получим

$$2\pi\chi_\infty R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] |A_l|^2 = 0.$$

Легко видеть, что мнимая часть выражения, стоящего в этой сумме в квадратных скобках, не зависит от  $l$ , а именно:

$$\operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] = \frac{2}{\pi\chi_\infty R}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$  все коэффициенты  $A_l$  в разложении (2) функции  $E$  обращаются в нуль. А это значит, что  $E = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ . В силу гладкости показателя преломления  $n$ , функция  $E$  должна обращаться в нуль всюду в  $\mathbb{R}^2$  (см. [90], с. 190). Тогда

$$H = 1/(i\omega\mu_0)\operatorname{rot}_\beta E = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, значениям  $\beta \in D$  отвечает только нулевое решение задачи (1), (2), что противоречит предположению о том, что вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (1), (2), отвечающим собственному значению  $\beta \in D$ . Следовательно, область  $D$  свободна от собственных значений задачи (1), (2).  $\square$

**2. Нелинейная спектральная задача для системы слабосингулярных интегральных уравнений по области поперечного сечения волновода.** Для изучения качественных свойств спектра сведем задачу (1), (2) к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. При этом мы будем использовать электромагнитные потенциалы, введенные в главе 1.

**Лемма 4.3.** Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (1), (2), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда справедлива формула

$$E(x) = (B(\beta)E)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

где

$$(B(\beta)E)(x) = k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy + \\ + \text{grad}_{\beta} \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad (4)$$

$$\Phi_{\infty}(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_{\infty}(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор Герца  $\Pi$  удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (27), с. 20. Запишем решение этого уравнения в виде

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_{\infty}^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда и из равенства (25), с. 20, для  $x \in \mathbb{R}^2$  получим

$$E(x) = (k^2 n_{\infty}^2 + \text{grad}_{\beta} \text{div}_{\beta}) \frac{1}{n_{\infty}^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy.$$

Воспользуемся теперь теоремой о дивергенции [81]

$$\text{div}_{\beta} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_{\infty}^2) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy = \\ = \int_{\Omega} \text{div}_{\beta} [(n^2(y) - n_{\infty}^2) E(y)] \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

и формулой (29), с. 20. В итоге получим требуемое равенство.  $\square$

При фиксированном  $\beta \in \Lambda$  будем рассматривать оператор  $B(\beta)$ , определенный равенством (4), как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega)]^3$ . Пусть

$$A(\beta) = I - B(\beta), \quad (6)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $[L_2(\Omega)]^3$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро оператора  $B(\beta)$  слабополярно, следовательно, оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.

**Определение 4.13.** Ненулевой вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  будем называть собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение

$$A(\beta)F = 0. \quad (7)$$

Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $[L_2(\Omega)]^3$ . Это множество будем обозначать символом  $\sigma(A)$ . Обозначим множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$  через  $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : [L_2(\Omega)]^3 \rightarrow [L_2(\Omega)]^3\}$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи о собственных волнах волновода с размытой границей (1), (2) и спектральной задачи (7) для оператор-функции  $A(\beta)$ .

**Теорема 4.15.** Если вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  является собственным вектором задачи (1), (2), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то

$$F = E \in [L_2(\Omega)]^3$$

есть собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  является собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , и это  $\beta_0$  не является собственным значением задачи (A), с. 52, то вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ , где

$$E = B(\beta_0)F, \quad H = (i\omega\mu_0)^{-1}\text{rot}_{\beta_0}E,$$

есть собственный вектор задачи (1), (2), отвечающий собственному значению  $\beta_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4.3. Докажем второе утверждение. Пусть  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  — собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ . Ядро интегрального оператора  $B(\beta)$  слабо-

полярно при любом  $\beta \in \Lambda$ . Следовательно, вектор  $E = B(\beta)F$  принадлежит  $[C(\Omega)]^3$  (см., напр., [9], с. 327). В силу известных свойств потенциала площади (см., напр., [9], с. 463) вектор  $E$  принадлежит пространству  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ .

По построению вектор  $E$  удовлетворяет равенству (3). Применим к левой и правой частям этого равенства операцию  $\text{rot}_\beta$ , учтем формулу (5), с. 16, и теорему о дивергенции (5). Получим равенство

$$\begin{aligned} \text{div}_\beta E(x) &= k^2 \int_{\Omega} \text{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) E(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy + \\ &+ (\Delta - \beta^2) \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Добавим и вычтем к правой части этого равенства слагаемое

$$k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy$$

и используем формулу Пуассона для потенциала площади

$$\begin{aligned} [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy = \\ = - \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Получим равенство

$$\begin{aligned} \text{div}_\beta E(x) &= k^2 \int_{\Omega} \text{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) E(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \\ &- k^2 n_\infty^2 \int_{\Omega} \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \left( E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, в силу линейности операции  $\text{div}_\beta$  и формулы (7), с. 16, имеем

$$\text{div}_\beta [(n^2 - n_\infty^2) E] = \text{div}_\beta (n^2 E) - n_\infty^2 \text{div}_\beta E,$$

$$E \cdot \frac{\text{grad} n^2}{n^2} = n^{-2} \text{div}_\beta (n^2 E) - \text{div}_\beta E.$$

Используя два предыдущих равенства и равенство (9), нетрудно видеть, что функция  $u = n^{-2} \operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E})$  удовлетворяет уравнению

$$u = \int_{\Omega} k^2 (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

которое совпадает с уравнением (28), с. 63. В пункте 4, с. 62, было показано, что если  $\beta$  не является собственным значением задачи (A), с. 52, то  $u = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, мы получили, что для вектора  $\mathbf{E}$  справедлива формула

$$\operatorname{div}_\beta (n^2 \mathbf{E}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (10)$$

и уравнение (3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ & - \operatorname{grad}_\beta \int_{\Omega} \Phi_\infty(\beta; x, y) \operatorname{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть вектор  $\mathbf{H}$  определяется следующим равенством (то есть векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют первому из уравнений (1)):

$$\mathbf{H} = (i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot}_{\beta_0} \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Из уравнения (11) и формулы (8), с. 16, имеем

$$\mathbf{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (12)$$

Отсюда следует, в частности, что если  $\mathbf{E} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ , то и  $\mathbf{H} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Докажем, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют второму из уравнений (1). Применим к обеим частям уравнения (12) операцию  $\operatorname{rot}_\beta$  и полученное равенство почленно сложим с равенством (11), умноженным на  $i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathbf{E} = & -i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}_\beta \operatorname{rot}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 k^2 \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \end{aligned}$$

$$-i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \operatorname{grad}_\beta \int_\Omega \Phi_\infty(\beta; x, y) \operatorname{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Продолжим равенство, используя формулу (9), с. 16, и теорему о дивергенции (5):

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathbf{E} = \\ & = i\omega\varepsilon_0 [\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \int_\Omega (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ & \quad - i\omega\varepsilon_0 \operatorname{grad}_\beta \int_\Omega \operatorname{div}_\beta [(n^2(y) - n_\infty^2) \mathbf{E}(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \\ & \quad - i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \operatorname{grad}_\beta \int_\Omega \Phi_\infty(\beta; x, y) \operatorname{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Из этого равенства, уравнения (10) и формулы Пуассона (8) окончательно получим

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_0 (n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют второму из уравнений (1). Из (11), (12) с помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [44], с. 201) легко получить, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют парциальным условиям излучения (2).  $\square$

**Теорема 4.16.** *Регулярное множество определенной в (7) оператор-функции  $A(\beta)$  не пусто, а именно,  $B \cup D \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , то есть в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассуждая аналогично [28], с. 71, нетрудно показать, что оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция трех переменных  $\beta \in \Lambda$ ,  $n_\infty > 0$  и  $\omega > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$ , теоремы 4.14 о локализации спектра задачи (1),

(2) и теоремы 4.15 о спектральной эквивалентности задач (1), (2) и (7) оператор  $A(\beta)$  обратим для любых  $n_\infty > 0$ ,  $\omega > 0$  и  $\beta \in B \cup D$ . Таким образом, справедливость настоящей теоремы следует из теорем 2.1 и 2.2, с. 48.  $\square$

## § 2. Элементы теории сингулярных интегральных уравнений

Приведем некоторые сведения теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, следуя [101]. При этом для простоты изложения будем формулировать результаты [101] в частном случае интегралов по области на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Обозначим  $x$  и  $y$  точки плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Пусть

$$r = |x - y|, \quad \alpha = (y - x)/r.$$

Точка  $\alpha$  принадлежит единичной окружности с центром в точке  $x$ , которую обозначим  $\Theta$ . Пусть  $\Omega$  — область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Эта область может быть конечной или бесконечной, в частности совпадать с плоскостью  $\mathbb{R}^2$ . Будем рассматривать сингулярные интегралы вида

$$v(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{f(x, \alpha)}{r^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus (r < \varepsilon)} u(y) \frac{f(x, \alpha)}{r^2} dy. \quad (13)$$

Точка  $x$  называется полюсом сингулярного интеграла, функция  $u(y)$  — плотностью, а функция  $f(x, \alpha)$  — характеристикой. Во всем последующем изложении будем предполагать, что характеристика удовлетворяет условию

$$\int_{\Theta} f(x, \alpha) dl_{\Theta} = 0. \quad (14)$$

Относительно существования интеграла (13) справедлива следующая теорема [101, с. 274].

**Теорема 4.17.** Пусть  $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ , характеристика  $f(x, \alpha)$  удовлетворяет условию (14), и для любой точки  $x$  выполняется неравенство

$$\int_{\Theta} |f(x, \alpha)|^2 dl_{\Theta} \leq C = \text{const}.$$

Тогда сингулярный интеграл (13) существует и принадлежит пространству  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .

Сформулируем теорему [101, с. 242] о дифференцировании слабо сингулярных интегралов следующего вида:

$$w(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{\psi(x, \alpha)}{r} dy. \quad (15)$$

**Теорема 4.18.** Пусть  $u \in L_2(\Omega)$ , функция  $\psi(x, \alpha)$  имеет в  $\bar{\Omega}$  непрерывные первые производные по декартовым координатам точек  $x$  и  $\alpha$ . Тогда интеграл (15) имеет обобщенные производные в  $L_2(\Omega)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\psi(x, \alpha)}{r} \right] dy - u(x) \int_{\Theta} \psi(x, \alpha) \cos \varphi dl_{\Theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} w(x) = \int_{\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\psi(x, \alpha)}{r} \right] dy - u(x) \int_{\Theta} \psi(x, \alpha) \sin \varphi dl_{\Theta},$$

где  $\varphi$  — угловая координата точки  $\alpha$  в полярной системе координат с центром в точке  $x$ .

Сингулярным интегральным оператором в гильбертовом пространстве  $L_2(\mathbb{R}^2)$  будем называть линейный оператор  $A$ , который определяется формулой

$$(Au)(x) = a(x)u(x) + \int_{\mathbb{R}^2} u(y) \frac{f(x, \alpha)}{r^2} dy + (Ku)(x), \quad (16)$$

где  $K$  — вполне непрерывный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . При исследовании фредгольмовости сингулярных интегральных операторов вида (16) вводится понятие символа сингулярного оператора  $A$ . Символ определяется как функция  $\Psi_A(x, \alpha)$  точек  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $\alpha \in \Theta$ . При этом символ, при определенных ограничениях на  $a(x)$  и  $f(x, \alpha)$ , должен удовлетворять следующим трем условиям:

- 1) символ любого вполне непрерывного оператора равен нулю;
- 2) символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов;

3) символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению их символов.

Существует несколько эквивалентных формул для определения символа. Приведем одну из них, которая удобна для исследования конкретных сингулярных интегральных операторов. Пусть характеристика  $f(x, \alpha)$  разлагается в ряд вида

$$f(x, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(x) \sin(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(x) \cos(n\varphi)$$

(член с  $n = 0$  в разложении отсутствует вследствие условия (14)). Определим функцию  $\Psi_A(x, \alpha)$  по формуле

$$\Psi_A(x, \alpha) = a(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n a_n^{(1)}(x) \sin(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n a_n^{(2)}(x) \cos(n\varphi), \quad (17)$$

где  $\gamma_n = i^n 2\pi/n$ . Если функция  $\Psi_A(x, \alpha)$ , определенная таким образом, является непрерывной функцией своих аргументов, причем существует такая ограниченная область  $\Omega$ , что  $\Psi_A(x, \alpha)$  не зависит от  $x$  при  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , то  $\Psi_A(x, \alpha)$  — символ сингулярного оператора (16).

Относительно фредгольмовости сингулярного интегрального оператора (16) справедлива следующая теорема [101, с. 245]. Напомним, что линейный оператор называется фредгольмовым, если он нормально разрешим и его индекс равен нулю.

**Теорема 4.19.** Пусть  $A$  — сингулярный интегральный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^2)$  вида (16), а его символ определяется равенством (17). Тогда для того чтобы оператор  $A$  был фредгольмов в  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , необходимо и достаточно, чтобы его символ не вырождался, то есть

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\Psi_A(x, \alpha)| > 0.$$

Пусть  $\mathcal{A}$  — матричный сингулярный оператор вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

действующий в пространстве  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$ , где  $A_{l,m}$  – сингулярные интегральные операторы вида (16). Обозначим через  $\Psi_{l,m}(x, \alpha)$  символ оператора  $A_{l,m}$ . Матрица

$$\Psi(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) & \cdots & \Psi_{1,N}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) & \cdots & \Psi_{2,N}(x, \alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N,1}(x, \alpha) & \Psi_{N,2}(x, \alpha) & \cdots & \Psi_{N,N}(x, \alpha) \end{pmatrix} \quad (19)$$

называется матричным символом или просто символом матричного оператора  $\mathcal{A}$ . Справедлива следующая теорема [101, с. 368].

**Теорема 4.20.** Пусть  $\mathcal{A}$  – матричный сингулярный интегральный оператор в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$  вида (18), и каждый элемент его матричного символа определяется равенством (17). Тогда сопряженный к  $\mathcal{A}$  в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$  оператор  $\mathcal{A}^*$  имеет матричный символ  $\Psi^*$ , элементы которого определяются формулой

$$\Psi_{l,m}^*(x, \alpha) = \overline{\Psi_{m,l}(x, \alpha)},$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Для того чтобы оператор  $\mathcal{A}$  был фредгольмов в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^N$  достаточно, чтобы нижние грани модулей всех главных миноров были строго положительны:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} \left| \det \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) \\ \cdots & \cdots \\ \Psi_{l,1}(x, \alpha) & \Psi_{l,2}(x, \alpha) \end{pmatrix} \right| > 0, \quad (20)$$

### § 3. Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в слоистой среде

Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде. Схематическое изображение такого волновода приведено на рис. 1.

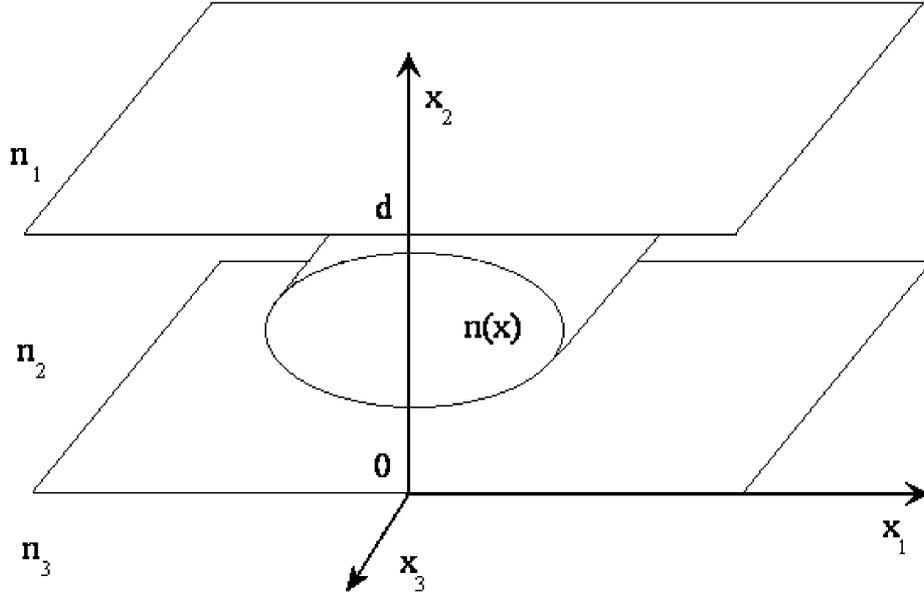


Рис. 1. Геометрия цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде

Пусть все трехмерное пространство

$$\{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$$

занято изотропной средой без источников, и пусть показатель преломления  $n = n(x_1, x_2)$  является положительной вещественной функцией, не зависящей от продольной координаты  $x_3$ . Пусть существует такая ограниченная область  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , что

$$n(x) = n_\infty(x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega},$$

где  $n_\infty(x_2)$  зависит только от координаты  $x_2$ . Для определенности положим

$$n_\infty(x_2) = \begin{cases} n_1, & x_2 > d, \\ n_2, & 0 < x_2 < d, \\ n_3, & x_2 < 0. \end{cases}$$

Можно предположить без потери общности рассуждений, что

$$n_2 \geq n_3 \geq n_1 > 0.$$

Обозначим через  $n_+$  максимум функции  $n$  в области  $\Omega$  и предположим, что

$$n_+ > n_2.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > d\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < d\},$$

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 < 0\}.$$

Предположим, что  $\Omega \subset \Omega_2$  и  $n(x)$  является непрерывной функцией в бесконечной области  $\Omega_2$ , то есть волновод имеет размытую границу. Обозначим через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы области  $\Omega_2$ :

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = d\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = 0\}.$$

Для простоты рассуждений мы рассматриваем трехслойную среду, где возмущение показателя преломления находится целиком в центральном слое, но, в действительности, методами, используемыми в данном параграфе, может быть исследована задача с произвольным конечным числом параллельных слоев, если возмущение целиком находится в одном из них, и волновод имеет размытую границу.

Задача о собственных волнах волновода может быть сформулирована как векторная спектральная задача для системы уравнений Максвелла (1), с. 14, в предположении, что векторы напряженности электрического и магнитного поля имеют вид (2), с. 15. Мы рассматриваем постоянную распространения  $\beta$  как неизвестный вещественный параметр и  $\omega > 0$  как заданный параметр. Для полей, имеющих форму (2), система уравнений Максвелла (1) сводится к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (21)$$

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (22)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (4), с. 16.

Обозначим через  $U$  множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}_1$ ,  $\bar{\Omega}_2$  и  $\bar{\Omega}_3$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , кроме того, экспоненциально убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  по любому направлению, не параллельному прямым  $\Gamma_j$ , и ограниченных

при  $|x| \rightarrow \infty$  параллельно прямым  $\Gamma_j$ . Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{E, H\}$  системы уравнений (21), (22) в пространстве  $U^6$ . На границах раздела сред векторы  $E$  и  $H$  должны удовлетворять условиям сопряжения (см. главу 1)

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad \nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

Здесь  $\nu$  — вектор нормали к  $\Gamma_j$ ,  $f^+(f^-)$  — предел функции  $f$  сверху (снизу) прямой  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Обозначим  $\Lambda_0^{(1)}$  главный (“физический”) лист римановой поверхности функции  $\ln \chi(\beta)$ , где

$$\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_2^2 - \beta^2},$$

который определяется условиями

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}.$$

**Определение 4.14.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  будем называть собственным вектором задачи (21)–(23), отвечающим собственному значению

$$\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)} = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \text{Im} \beta = 0, |\beta| > kn_2\},$$

если выполнены условия (21)–(23).

Получим теперь интегральное представление для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (21)–(23), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Это представление будет использовано для сведения задачи (21)–(23) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения.

**Определение 4.15.** Вектор-функция  $\Pi$  называется вектором Герца, или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{E, H\}$ , если для всех значений  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  справедливо представление

$$E = (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) \Pi, \quad (24)$$

$$H = -i\omega \varepsilon_0 n_\infty^2 \text{rot}_\beta \Pi. \quad (25)$$

**Лемма 4.4.** Для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (21)–(23), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , существует поляризационный потенциал  $\Pi \in U^3$ , который для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{n_\infty^2} (n^2 - n_\infty^2) \mathbf{E}, \quad (26)$$

и для  $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  удовлетворяет граничным условиям

$$\Pi_l^+ = N^2 \Pi_l^-, \quad l = 1, 2, 3, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Pi_l^+}{\partial x_2} = N^2 \frac{\partial \Pi_l^-}{\partial x_2}, \quad l = 1, 2, \quad (28)$$

$$\left( \frac{\partial \Pi_2^+}{\partial x_2} - \frac{\partial \Pi_2^-}{\partial x_2} \right) = (1 - N^2) \left( \frac{\partial \Pi_1^-}{\partial x_1} + i\beta \Pi_3^- \right), \quad (29)$$

где  $N = n_{i+1}/n_i$  для  $x \in \Gamma_i$ ;  $f^+(f^-)$  — предел функции  $f$  сверху (снизу) на прямой  $\Gamma_i$ . Для  $x \in \mathbb{R}^2$  поляризаационный потенциал  $\Pi$  имеет интегральное представление

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} G(\beta; x, y) &= \Phi(\beta; x, y) + G^s(\beta; x, y), \\ \Phi(\beta; x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\beta) |x - y|), \end{aligned}$$

$$G^s(\beta; x, y) = \begin{bmatrix} G_n(\beta; x, y) & \partial G_c(\beta; x, y) / \partial x_1 & i\beta G_c(\beta; x, y) \\ 0 & G_t(\beta; x, y) & 0 \\ 0 & 0 & G_t(\beta; x, y) \end{bmatrix},$$

$$G_\alpha(\beta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda) \frac{\exp(i\lambda(x_1 - y_1))}{2\sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_2^2}} d\lambda,$$

$$\alpha = t, n, c.$$

Функции  $R_\alpha$  определяются геометрией задачи и для трехслойной окружающей среды представлены в приложении, с. 188;  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода индекса 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что существует такой вектор  $\Pi$ , при котором представление (24), (25) и уравнение (26) справедливы (см., напр., [80]). Если поляризаационный потенциал  $\Pi$  удовлетворяет условиям

(27)–(29), то векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , имеющие представление (24), (25) удовлетворяют условиям (23). Задача (26)–(29) имеет решение в виде (30) [74]. Функция  $G(\beta; x, y)$  — хорошо известная тензорная функция Грина для поляризованного потенциала [75]. Используя представление (30) для поляризованного потенциала  $\Pi$  можно доказать, что  $\Pi \in U^3$  для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ .  $\square$

Используем (24), (30) и получим интегральное представление для любого собственного вектора  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  задачи (21)–(23), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ :

$$\mathbf{E}(x) = (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad (31)$$

$$\mathbf{H}(x) = -i\omega \varepsilon_0 \text{rot}_\beta \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) G(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy,$$

где  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ .

Сведем теперь задачу (21)–(23) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения, аналогичного уравнению, полученному в [74]. Это уравнение часто используется на практике потому, что оно точно учитывает поведение поля в окружающей слоистой среде.

**Лемма 4.5.** Пусть  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  — собственный вектор задачи (21)–(23), отвечающий собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Тогда

$$(\mathcal{Q}(\beta)\mathbf{E})(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}(\beta)\mathbf{E})(x) = & \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) - \\ & - \int_{\Omega} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy - \\ & - \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy - \\ & - \int_{\Omega} L(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy, \end{aligned}$$

$$TF = \begin{bmatrix} (K\mathbf{F})_1 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_1 \\ (K\mathbf{F})_2 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_2 \\ i\beta F_1 \partial\Phi/\partial x_1 + i\beta F_2 \partial\Phi/\partial x_2 + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2) F_3 \Phi \end{bmatrix},$$

$$T_1\mathbf{F} = \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\eta(x) = \begin{pmatrix} n^2(x)/n_\infty^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^2(x)/n_\infty^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K(\beta; x, y)\mathbf{F}(y) = k^2 n_\infty^2 \mathbf{F}(y) \Phi(\beta; x, y) + \\ + \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_2 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|,$$

$$\Phi_0(\beta; x, y) = \Phi(\beta; x, y) - \Phi_1(x, y),$$

$$L(\beta; x, y)\mathbf{F}(y) = (k^2 n_\infty^2 + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) G^s(\beta; x, y)\mathbf{F}(y),$$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2)^T.$$

Утверждение леммы доказывается непосредственными вычислениями. Для этого надо внести оператор  $\text{grad}_\beta \text{div}_\beta$  под знак интеграла в соотношении (31) и использовать правило дифференцирования слабо сингулярных интегралов (см., теорему 4.18). Отметим, что применение этих преобразований обосновано, так как плотности возникающих сингулярных интегралов равны нулю вне области  $\Omega$  и принадлежат пространству  $L_2(\Omega)$  в силу гладкости  $E$  и  $n$ . Отметим также, что для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  и  $y \in \Omega$  функции  $G^s(\beta; x, y)$  и  $\Phi_0(\beta; x, y)$  дважды непрерывно дифференцируемы по  $x \in \Omega$ .

Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$ , определенный равенством (32), будем рассматривать как оператор в пространстве комплексно-значных функций  $[L_2(\Omega)]^3$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  имеет сильно сингулярное ядро  $T_1(x, y)$ .

#### § 4. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора

**Теорема 4.21.** При любом  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\beta$  — фиксированное число, принадлежащее  $\widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Через  $\mathcal{Q}^*(\beta)$  обозначим оператор, сопряженный с  $\mathcal{Q}(\beta)$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \Omega$  получим

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{Q}^*(\beta)\mathbf{E})(x) &= \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) - \\
 &- \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \int_{\Omega} T^p(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\
 &- \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \int_{\Omega} T_1(x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\
 &- \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \int_{\Omega} L^p(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \\
 T^p\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} (\overline{K\mathbf{F}})_1 + i\overline{\beta}\mathbf{F}_1\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 \\ (\overline{K\mathbf{F}})_2 + i\overline{\beta}\mathbf{F}_2\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 \\ i\overline{\beta}\mathbf{F}_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 + i\overline{\beta}\mathbf{F}_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 + (k^2n_\infty^2 - \overline{\beta^2})\mathbf{F}_3\overline{\Phi} \end{bmatrix}, \\
 L^p\mathbf{F} &= (k^2n_\infty^2 + \overline{\text{grad}_\beta \text{div}_\beta}) \overline{G^s(\beta; y, x)}^T \mathbf{F}(y),
 \end{aligned} \tag{33}$$

где  $\overline{\text{grad}_\beta}$  и  $\overline{\text{div}_\beta}$  означает, что множитель  $(i\beta)$  заменяется множителем  $(-i\overline{\beta})$ ;  $G^T$  — матрица транспонированная к  $G$ .

Заметим, что ядро  $T_1(x, y)$  сильно сингулярное, самосопряженное и не зависит от  $\beta$ ; ядра  $T(\beta; x, y)$ ,  $T^p(\beta; x, y)$  слабо полярные для любого значения  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ ; ядра  $L(\beta; x, y)$  и  $L^p(\beta; x, y)$  непрерывны по  $x, y \in \Omega$  для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ .

Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов. Будем использовать теорему 4.20. Положим

$$(\mathcal{D}(\beta)\mathbf{E})(x) = \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) - \tag{34}$$

$$-p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy - \tag{35}$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy, \quad (36)$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $p(x)$  — бесконечно дифференцируемая вещественно-значная функция, имеющая компактный носитель в  $\mathbb{R}^2$ , и тождественно равная единице для  $x \in \Omega$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  получим

$$(\mathcal{D}^*(\beta)E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \quad (37)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} p(y) (T^p(\beta; x, y) + L^p(\beta; x, y)) E(y) dy - \quad (38)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy. \quad (39)$$

Интегральные операторы, определенные слагаемыми (35) и (38), в силу гладкости их ядер для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  вполне непрерывны в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Обозначим их через  $\mathcal{C}(\beta)$  и  $\mathcal{C}^*(\beta)$  соответственно. Положим для  $x \in \mathbb{R}^2$

$$(\mathcal{S}E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \quad (40)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy,$$

тогда

$$(\mathcal{S}^*E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \quad (41)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy$$

и

$$\mathcal{D}(\beta) = \mathcal{C}(\beta) + \mathcal{S}, \quad \mathcal{D}^*(\beta) = \mathcal{C}^*(\beta) + \mathcal{S}^*,$$

где  $S^* = [S_{l,m}^*]_{l,m=1}^3$  — матричный интегральный оператор. Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $l, m = 1, 2$  получим

$$(\mathcal{S}_{l,m}^* E_m)(x) = \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \right) \delta_{l,m} E_m(x) -$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} (2\alpha_l(\varphi)\alpha_m(\varphi) - \delta_{l,n}) \frac{E_m(y)}{2\pi |x-y|^2} dy, \\
& (\mathcal{S}_{3,3}^* E_3)(x) = E_3(x), \\
& (\mathcal{S}_{l,3}^* E_3)(x) = 0, \\
& (\mathcal{S}_{3,m}^* E_m)(x) = 0,
\end{aligned}$$

где  $\delta_{l,m}$  — символ Кронекера;  $\alpha_1(\varphi)$  и  $\alpha_2(\varphi)$  — декартовы координаты точки  $\alpha = (y-x)/|x-y|$ . Точка  $\alpha$  принадлежит окружности

$$\Theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\},$$

и

$$\alpha_1(\varphi) = \cos \varphi, \quad \alpha_2(\varphi) = \sin \varphi, \quad (42)$$

где  $\varphi$  — угловая координата точки  $\alpha$ . Функция  $n$  непрерывна в  $\Omega_2$ , кроме того  $n(x) = n_\infty$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ . Следовательно, характеристики операторов  $\mathcal{S}_{l,n}^*$  непрерывны в  $\mathbb{R}^2$  и не зависят от  $x$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ . Непосредственными вычислениями получаем представление матричного символа  $\Psi^*(x, \alpha)$  оператора  $\mathcal{S}^*$ :

$$\Psi^*(x, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1^2(\varphi) & \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi) & 0 \\ \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi) & 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_2^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

для  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \Theta$ . Функция  $n$  вещественна, следовательно матричный символ  $\Psi(x, \alpha)$  сингулярного интегрального оператора  $\mathcal{S}$  равен символу  $\Psi^*(x, \alpha)$ :

$$\Psi(x, \alpha) = \Psi^*(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \Theta. \quad (44)$$

Очевидно, имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
& \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\det \Psi(x, \alpha)| > 0, \\
& \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} \left| \det \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) \end{pmatrix} \right| > 0, \\
& \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\Psi_{1,1}(x, \alpha)| > 0.
\end{aligned} \quad (45)$$

Следовательно (см., теорему 4.20), оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов.

Докажем теперь, что индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  равен индексу оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Пусть вектор-функция  $W(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  принадлежит множеству  $N(\mathcal{D})$  нулей оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ . Нетрудно видеть, что для всех  $x \in \Omega$  справедливо равенство

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (46)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q})$  нулей оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ :

$$W(x) = V(x), \quad x \in \Omega. \quad (47)$$

По определению оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  имеем для всех  $x \in \mathbb{R}^2$  следующее равенство:

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = W(x) + \frac{1}{2}\eta(x)W(x) - \quad (48)$$

$$-p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy - \quad (49)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy. \quad (50)$$

Из двух последних равенств, учитывая то, что  $n(x) = n_\infty$ ,  $x \in \Omega_\infty$ , получаем представление вектор-функции  $W(x)$  для  $x \in \Omega_\infty$  через  $V(x)$ :

$$W(x) = p(x) \int_{\Omega} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) V(y) \right) dy + \quad (51)$$

$$+ \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) V(y) \right) dy. \quad (52)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}) = \dim N(\mathcal{Q}). \quad (53)$$

Пусть теперь вектор-функция  $W^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  принадлежит множеству  $N(\mathcal{D}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Учитывая явный вид этого оператора

(37)–(39), получим

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = W^*(x) = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (54)$$

Из этого равенства и равенств (37)–(39), (33) имеем:

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = (\mathcal{Q}^*(\beta)W^*)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (55)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W^*(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ :

$$W^*(x) = V^*(x), \quad x \in \Omega. \quad (56)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$  взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}^*). \quad (57)$$

Окончательно, используя (53) и (57), для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  имеем равенство индексов оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  и оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ :

$$\text{Ind} \mathcal{D} = \dim N(\mathcal{D}) - \dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}) - \dim N(\mathcal{Q}^*) = \text{Ind} \mathcal{Q}. \quad (58)$$

Согласно доказанному выше, индекс оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  равен нулю. Следовательно, равен нулю и индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ .

Оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов, а значит, нормально разрешим. Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  также нормально разрешим. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = W^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (59)$$

где вектор правой части  $W^0$  ортогонален множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ . Пусть вектор-функция  $U^0 \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  совпадает с вектор-функцией  $W^0(x)$  для всех  $x \in \Omega$  и тождественно равна нулю в  $\Omega_\infty$ . Используем представления (54), (56) для нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$  и придем к заключению, что вектор-функция  $U^0$  ортогональна множеству нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Следовательно, в силу фредгольмовости оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  существует решение  $U \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  уравнения

$$(\mathcal{D}(\beta)U)(x) = U^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (60)$$

Представим вектор-функцию  $U(x)$  в виде суммы двух вектор-функций:

$$U(x) = V(x) + W(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (61)$$

где  $V(x) = 0$  при  $x \in \Omega$ , а  $W(x) = 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ . Заметим, что для такой вектор-функции  $W(x)$  справедливо равенство (46), а вектор-функция  $U(x)$  удовлетворяет уравнению (60). Следовательно, при  $x \in \Omega$  имеем цепочку равенств

$$W^0(x) = U^0(x) = \quad (62)$$

$$= (\mathcal{D}(\beta)U)(x) = (\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x), \quad x \in \Omega. \quad (63)$$

Таким образом, для любой вектор-функции  $W^0$ , ортогональной множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , существует решение  $W$  из  $(L_2(\Omega))^3$  уравнения (59). А это значит, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Итак, для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим, индекс его равен нулю, следовательно, по определению он фредгольмов.  $\square$

**Определение 4.16.** Ненулевой вектор  $F \in [L_2(\Omega)]^3$  будем называть собственным вектором оператор-функции  $\mathcal{Q}(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , если выполнено уравнение

$$\mathcal{Q}(\beta)F = 0. \quad (64)$$

**Теорема 4.22.** Пусть  $\{E, H\} \in U^6$  — собственный вектор задачи (21)–(23), отвечающий собственному значению  $\beta_0 \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Тогда

$$F = E \in [L_2(\Omega)]^3, \quad x \in \Omega,$$

— собственный вектор оператор-функции  $\mathcal{Q}(\beta)$ , отвечающий тому же самому характеристическому значению  $\beta_0$ .

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4.5.

## Приложение

Приведем явный вид функций

$$R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda), \quad \alpha = t, n, c$$

для  $(x, y) \in \Omega_2^2$ . Способ их построения методом преобразования Фурье изложен, например, в статье [86]:

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{R_t^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_t^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_t^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_t^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^H}, \\ R_n &= \frac{R_n^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_n^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_n^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_n^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E}, \\ R_c &= \frac{R_c^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_c^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_c^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_c^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E Z^H}. \end{aligned}$$

Для трехслойной геометрии

$$\begin{aligned} Z^H(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d} - \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right), \\ Z^E(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{2p_2 d} \\ &\quad - \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_t^1(\beta, \lambda) &= R_t^2(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right), \\ R_t^3(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right), \\ R_t^4(\beta, \lambda) &= \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n^1(\beta, \lambda) &= R_n^2(\beta, \lambda) = \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right), \\ R_n^3(\beta, \lambda) &= \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right), \\ R_n^4(\beta, \lambda) &= \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{2p_2 d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_c^1(\beta, \lambda) &= e^{2p_2d} \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) \\
&\quad - e^{2p_2d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right), \\
R_c^2(\beta, \lambda) &= e^{2p_2d} \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) \\
&\quad - e^{2p_2d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right), \\
R_c^3(\beta, \lambda) &= \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) \\
&\quad - e^{2p_2d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right), \\
R_c^4(\beta, \lambda) &= \frac{2(1 - N_{23}^2)}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}^2}\right) e^{4p_2d} \\
&\quad - e^{2p_2d} \frac{2(1 - N_{21}^2)}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}^2}\right),
\end{aligned}$$

$$p_j = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_j^2}, \quad \text{Re}(p_j) > 0, \quad N_{ij} = \frac{n_i}{n_j}.$$

Приведем явный вид функций  $R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda)$ ,  $\alpha = t, n, c$  для трех-  
слойной геометрии и  $y \in \Omega_2$ ,  $x \in \Omega_1$ :

$$\begin{aligned}
R_t &= e^{-p_1(x_2-d)} \left( e^{-p_2 y_2} + \frac{1}{R_{32}^t} e^{p_2 y_2} \right) \frac{1}{T_{12}^t F^t} \left( R_{21}^t + \frac{1}{R_{12}^t} \right) e^{p_2 d}, \\
R_n &= e^{-p_1(x_2-d)} N_{21}^2 e^{p_2 y_2} \left( \frac{e^{-p_2 d} + \Lambda_{33}^n e^{p_2 d}}{F_n} + e^{-p_2 d} \right) + \\
&\quad + e^{-p_1(x_2-d)} N_{21}^2 e^{-p_2 y_2} e^{p_2 d} \frac{(1 + \Lambda_{11}^n)}{F_n}, \\
R_c &= e^{-p_1(x_2-d)} (e^{p_2 y_2} C_1 + e^{-p_2 y_2} C_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{N_{21}^2}{F_n} \left( a_5 e^{p_2 d} (1 + \Lambda_{11}^n) + b_5 \frac{1}{R_{32}^t} (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right), \\
C_2 &= \frac{N_{21}^2}{F_n} \left( a_5 e^{3p_2 d} \frac{1}{R_{12}^t} (1 + \Lambda_{11}^n) + (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^t &= e^{2p_2d} \frac{1}{R_{32}^t} \frac{1}{R_{12}^t} - 1, \\
F_n &= e^{2p_2d} \Lambda_{33}^n \Lambda_{11}^n - 1, \\
a_5 &= \frac{(N_{32}^2 - 1) \left( \frac{p_2+p_3}{p_2-p_3} + \frac{p_3-p_2}{p_3+p_2} \right)}{\frac{2p_3}{p_3+p_2} F^t (N_{32}^2 p_2 - p_3)}, \\
b_5 &= \frac{N_{12}^2 (N_{21}^2 - 1) \left( \frac{2p_2}{p_2-p_1} \right) e^{p_2d}}{F^t (p_2 N_{12}^2 - p_1)},
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{33}^n = \frac{N_{32}^2 p_2 + p_3}{N_{32}^2 p_2 - p_3}, \quad \Lambda_{11}^n = \frac{N_{12}^2 p_2 + p_1}{N_{12}^2 p_2 - p_1},$$

$$T_{\alpha\beta}^t = \frac{2N_{\alpha\beta}^2 p_\alpha}{p_\alpha + p_\beta}, \quad R_{\alpha\beta}^t = \frac{p_\beta - p_\alpha}{p_\beta + p_\alpha},$$

$$p_j = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 n_j^2}, \quad Re(p_j) > 0, \quad N_{ij} = \frac{n_i}{n_j}.$$

## Литература

1. Боголюбов, А.Н. Расчет оптических волноводов методом конечных разностей / А.Н. Боголюбов, И.В. Митина, А.Г. Свешников // Математические модели прикладной электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 136–155.
2. Вайникко, Г.М. О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14. — № 4. — С. 828–837.
3. Вайникко, Г.М. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра / Г.М. Вайникко, О.О. Карма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14. — № 6. — С. 1393–1408.
4. Васильев, Е.Н. Возбуждение тел вращения / Е.Н. Васильев — М.: Радио и связь, 1987. — 272 с.
5. Васильев, Е.Н. Численные методы в задачах расчета диэлектрических волноводов, диэлектрических резонаторов и устройств на их основе / Е.Н. Васильев, В.В. Солодухов // Моск. энерг. ин-т. Научн. тр. — 1983. — № 19. — С. 68–78.
6. Веселов Г.И. О спектре комплексных волн круглого диэлектрического волновода / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский // Радиотехника. — 1983. — № 2. — С. 55–58.
7. Веселов, Г.И. Алгоритм расчета собственных волн открытого диэлектрического волновода произвольного сечения / Г.И. Веселов, Г.Г. Воронин, Н.И. Платонов // Микроэлектронные радиотехнические устройства и техника СВЧ: сб. науч. тр. по проблемам микроэлектроники. — М.: МИЭТ, 1980. — С. 53–67.

8. Векуа, И.Н. О метагармонических функциях / И.Н. Векуа // Труды Тбилисского Матем. ин-та. — 1943. — Т. 12. — С. 105–174.
9. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 527 с.
10. Войтович, Н.Н. Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения / Н.Н. Войтович, Б.З. Каценеленбаум, А.Н. Сивов, А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24. — № 7. — С. 1245–1263.
11. Войтович, Н.Н. Расчет диэлектрических волноводов сложного профиля методом наименьших квадратов / Н.Н. Войтович // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24. — № 5. — С. 1058–1060.
12. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Миттры. — М.: Мир, 1977. — 485 с.
13. Габдулхаев, Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1994. — 288 с.
14. Габдулхаев, Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во КГУ, 1995. — 231 с.
15. Галишникова, Т.Н. Численные методы в задачах дифракции / Т.Н. Галишникова, А.С. Ильинский. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 208 с.
16. Гончаренко, А.М. Основы теории оптических волноводов / А.М. Гончаренко, В.А. Карпенко. — Минск: Наука и техника, 1983. — 237 с.
17. Гохберг, И.Ц. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // Успехи матем. наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 2. — С. 44–118.
18. Дианов, Е.М. Волоконная оптика: проблемы и перспективы / Е.М. Дианов // Вестн. АН СССР. — 1989. — № 10. — С. 41–51.

19. Даутов, Р.З. Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. — 271 с.
20. Даутов, Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов / Р.З. Даутов, М.М. Карчевский. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. — 239 с.
21. Ермаков, О.Н. Прикладная оптоэлектроника / О.Н. Ермаков. — М.: Техносфера, 2004. — 416 с.
22. Завадский, В.Ю. Моделирование волновых процессов / В.Ю. Завадский. — М.: Наука, 1991. — 248 с.
23. Захаров, Е.В. Метод расчета собственных волн диэлектрических волноводов произвольного сечения / Е.В. Захаров, Х.Д. Икрамов, А.Н. Сивов // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1980. — Вып. 32. — С. 71–85.
24. Захаров, Е.В. Численный анализ дифракции радиоволн / Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.
25. Ильинский, А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
26. Ильинский, А.С. Развитие методов Тихонова в прикладной электродинамике / А.С. Ильинский, А.Г. Свешников // Вестн. МГУ. Выч. математика и кибернетика. — 1986. — Вып. 3. — С. 28–42.
27. Ильинский, А.С. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции) / А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов. — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.
28. Ильинский, А.С. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн / А.С. Ильинский, Ю.В. Шестопапов. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 184 с.

29. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов — М.: Наука, 1984. — 752 с.
30. Карчевский, Е.М. Математические модели спектральной теории диэлектрических волноводов: Учебное пособие / Е.М. Карчевский. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. — 140 с.
31. Карчевский, Е.М. Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей / Е.М. Карчевский, А.И. Носич, С.И. Соловьев // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 79–114.
32. Карчевский, М.М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: учебное пособие / М.М. Карчевский, М.Ф. Павлова. — Казань: Казан. гос. ун.-т, 2007. — 212 с.
33. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
34. Каценеленбаум, Б.З. Симметричное и несимметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра / Б.З. Каценеленбаум // Журнал технической физики. — 1949. — Т. 19. — № 10. — С. 1168–1181.
35. Клеев, А.И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Частные методы (обзор) / А.И. Клеев, А.Б. Маненков, А.Г. Рожнев // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38. — № 5. — С. 769–788.
36. Клеев, А.И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики (обзор) / А.И. Клеев, А.Б. Маненков, А.Г. Рожнев // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38. — № 11. — С. 1938–1968.
37. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. — М.: Мир, 1987. — 312 с.

38. Кузнецов, В.А. Дисперсионные характеристики прямоугольного диэлектрического волновода / В.А. Кузнецов, А.М. Лерер // Радиотехника и электроника. — 1982. — Т. 27. — № 4. — С. 651–657.
39. Купрадзе, В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения / В.Д. Купрадзе. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 280 с.
40. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И.К. Лифанов. — М.: ТОО «Янус», 1995. — 519 с.
41. Любимов, Л.А. Диэлектрический волновод эллиптического сечения / Л.А. Любимов, Г.И. Веселов, Н.А. Бей // Радиотехника и электроника. — 1961. — Т. 51. — Вып. 11. — С. 1871–1880.
42. Малов, А.В. Расчет собственных волн диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения методом интегральных уравнений / А.В. Малов, В.В. Солодухов, А.А. Чурилин // Антенны. — М.: Радио и связь, 1984. — Вып. 31. — С. 189–195.
43. Мартинес-Дуарт, Дж.М. Нанотехнологии для микро- и оптоэлектроники / Дж.М. Мартинес-Дуарт, Р.Дж. Мартин-Палма, Ф. Агулло-Руеда. — М.: Техносфера, 2007. — 368 с.
44. Никифоров, А.Ф. Основы теории специальных функций / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. — М.: Наука, 1974. — 303 с.
45. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. — М.: Наука, 1978. — 543 с.
46. Панасюк, В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. — Киев: Наук. думка, 1984. — 344 с.
47. Пресдорф, З. Линейные интегральные уравнения / З. Пресдорф // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальн. направления. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1988. — Т. 27. — С. 5–130.

48. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
49. Самохин, А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А.Б. Самохин. — М.: Радио связь, 1998. — 160 с.
50. Свешников, А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80. — № 3. — С. 345–347.
51. Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184. — № 1. — С. 71-74.
52. Свешников, А.Г. Применение метода конечных разностей к расчету световодов / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов // Вычисл. математика и программирование. — 1978. — Вып. 28. — С. 104–117.
53. Свешников, А.Г. Расчет плоского волновода-трансформатора конечно-разностным методом / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов // Вычисл. математика и программирование. — 1978. — Вып. 28. — С. 118–133.
54. Семенов, А.Б. Волоконно-оптические подсистемы современных СКС / А.Б. Семенов. — М.: Академия АйТи, ДМК Пресс, 2007. — 632 с.
55. Смирнов, Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. — Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2009. — 268 с.
56. Снайдер, А. Теория оптических волнопроводов / А. Снайдер, Дж. Лав. — М.: Радио и связь, 1987. — 656 с.
57. Соловьев, С.И. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 4. — С. 563–565.

58. Соловьев, С.И. Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Известия вузов. Математика. — 2003. — № 3. — С. 78–80.
59. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. — М.: Мир, 1973. — 342 с.
60. Унгер, Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы / Х.-Г. Унгер. — М.: Мир, 1980. — 656 с.
61. Фролов, А.Г. Математические модели и метод коллокации в теории слабонаправляющих диэлектрических волноводов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Фролов Александр Геннадьевич. — Казань, 2012. — 19 с.
62. Фролов, А.Г. Математическая модель диэлектрического волновода / Е.М. Карчевский, Э.Р. Миниахметов, А.Г. Фролов // Супервычисления и математическое моделирование, XI международный семинар, 5–9 апреля 2009 г.: тезисы. — Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009. — С. 75–76.
63. Фролов, А.Г. Задача о собственных волнах оптического волновода / А.Г. Фролов // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2009 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. — С. 92–93.
64. Фролов, А.Г. Собственные волны градиентного волновода / А.Г. Фролов // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского государственного университета 2010 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2010. — С. 99–100.
65. Фролов, А.Г. Метод коллокации для решения спектральных задач теории диэлектрических волноводов / А.Г. Фролов // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского университета 2011 года: сборник тезисов. — Казань: Казан. ун-т, 2011. — С. 104–105.
66. Фролов, А.Г. Собственные волны градиентного диэлектрического волновода / А.Г. Фролов // Труды Математического центра имени

- Н.И.Лобачевского: Материалы Девятой молодёжной научной школы–конференции «Лобачевские чтения – 2010»; Казань, 1 – 6 октября 2010 г. — Казань: Казан. мат. о-во, 2010. — Т.40. — С. 353–357.
67. Фролов, А.Г. Метод коллокации поиска постоянных распространения слабонаправляющего диэлектрического волновода / А.Г. Фролов // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Десятой молодёжной научной школы–конференции «Лобачевские чтения – 2011»; Казань, 1 – 5 ноября 2011 г. — Казань: Казан. мат. о-во, 2011. — Т.44. — С. 324–327.
68. Фролов, А.Г. Численное решение задачи о распространении электромагнитных волн в слабонаправляющих волноводах / Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2011. — №1(17). — С. 47–57.
69. Фролов, А.Г. Собственные волны слабонаправляющего волновода в полупространстве / Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2012. — №1(21). — С. 22–30.
70. Фролов, А.Г. Метод коллокации для спектральных задач теории диэлектрических волноводов / А.Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2012. — №2(22). — С. 3–15.
71. Фролов, А.Г. Метод коллокации для поиска собственных волн диэлектрического волновода / А.Г. Фролов // Исследования по прикладной математике и информатике. — Казань: Изд-во Казан. федерал. ун-та, 2011. — Вып. 27. — С. 171–178.
72. Шестопапов, В.П. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции / В.П. Шестопапов, А.А. Кириленко, С.А. Масалов. — Киев: Наук. думка, 1984. — 296 с.

73. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
74. Bagby J.S. Integral formulation for analysis of integrated dielectric waveguides / J.S. Bagby, D.P. Nyquist, B.C. Drachman // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1985. — MTT-29. — P. 906–915.
75. Bagby J.S. Dyadic Green's functions for integrated electronic and optical circuits / J.S. Bagby, D.P. Nyquist // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1987. — MTT-35 — P. 206–210.
76. Bastiaansen H.J.M. Domain-integral analysis of channel waveguides in anisotropic multi-layered media / H.J.M. Bastiaansen, N.H.G. Baken, H. Blok // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1992. — V. 40. — P. 1918–1926.
77. Bonnet-Ben Dhia A.S. Mathematical analysis and numerical approximation of optical waveguides / A.S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly // Mathematical Modelling in Optical Science. Frontiers. Appl. Math. — 2001. — V. 22. — SIAM Philadelphia. PA. — P. 273–324.
78. Bonnet-Ben Dhia, A.S. Computation of the modes of dielectric waveguides by finite elements coupled with an integral representation / A.S. Bonnet-Ben Dhia, N. Gmati // Numerical Methods in Engineering. — 1992. — P. 73–77.
79. Boriskina, S.V. Highly Efficient Full-Vectorial Integral Equation Solution for the Bound, Leaky, and Complex Modes of Dielectric Waveguides / S.V. Boriskina, T.M. Benson, P. Sewell, A.I. Nosich // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. — 2002. — V. 8. — N 6. — P. 1225–1232.
80. Collin R.E. Field Theory of Guided Waves / R.E. Collin. — New York: IEEE Press, 1991. — 578 p.
81. Colton D. Time harmonic electromagnetic waves in an inhomogeneous medium / D. Colton, R. Kress // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. — 1990. — V. 116A. — P. 279–293.

82. Eliseev, M.V. Analysis of Leaky Modes by a Modified Finite-Element Method / M.V. Eliseev, A.B. Manenkov, A.G. Rozhnev // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2006. — V. 51. — N 12. — P. 1329–1337.
83. Frolov, A. Natural modes of weakly guiding optical fiber [Электронный ресурс] / A. Frolov, E. Karchevskiy // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kyiv, Ukraine, 6–8 September 2010. — Proceedings, Kyiv, Ukraine, 2010. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). — IEEE Catalog Number: CFP10761-CDR. — ISBN: 978-1-4244-8860-5.
84. Frolov A. Generalized modes of optical fiber / Frolov, A. Generalized modes of optical fiber / A. Frolov, E. Karchevskiy // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction' 2011. Saint Petersburg, May 30 – June 3, 2011. — IEEE, 2011. — IEEE Catalog No.: CFP11489-PRT. — P. 67–71.
85. Frolov, A. Generalized modes of optical fiber / A. Frolov, E. Karchevskiy // Days on Diffraction' 2011. Int. Conf. Saint Petersburg, May 30 – June 3, 2011: Abstracts. Universitas Petropolitana. — P. 35–36.
86. Kartchevski E.M. Green's function expansions in dyadic root functions for shielded layered waveguide problems obtained via residue theory / G.W. Hanson, A.I. Nosich, E.M. Kartchevski // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2003. — V. 17. — № 5. — P. 759–761.
87. Kartchevski, E.M. Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber / E.M. Kartchevski, A.I. Nosich, G.W. Hanson // SIAM J. Appl. Math. — 2005. — V. 65. — № 6. — P. 2033–2048.
88. Lehoucq, R.B. Deflation Techniques for an Implicitly Re-Started Arnoldi Iteration / R.B. Lehoucq, D.C. Sorensen // SIAM J. Matrix Analysis and Applications, Vol. 17, 1996, pp. 789-821.

89. Eyges, L. Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape / L. Eyges, P. Gianino, P. Wintersteiner // J. Opt. Soc. Am. — 1979. — V. 69. — № 9. — P. 1226–1235.
90. Hörmander L. Linear Partial Differential Operators / L. Hörmander. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 379 p.
91. Hunsperger R.G. Integrated optics: theory and technology / R.G. Hunsperger // Optical Sciences 33. — New York: Springer-Verlag, 1991. — 426 p.
92. Jablonski T.F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides / T.F. Jablonski // J. Opt. Soc. Am. A. — 1994. — V. 11. — № 4. — P. 1272–1282.
93. James, J.R. Point-matched solutions for propagating modes on arbitrarily-shaped dielectric rods / J.R. James, I.N.L. Gallet // Radio and Electron. Eng. — 1972. — V. 42. — P. 103–113.
94. James, J.R. Modal analysis of triangular-cored glass-fibre waveguide / J.R. James, I.N.L. Gallett // IEE Proc. — 1973. — V. 120. — № 11. — P. 1362–1370.
95. Keuster, E.F. Fundamental mode propagation on dielectric fibres of arbitrary cross-section / E.F. Keuster, R.C. Pate // IEE PROC-H. 1980. — V. 126. — № 1. — P. 41–47.
96. Kress, R. Linear Integral Equations / R. Kress. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 365 p.
97. Kolk E.W. Domain integral equation analysis of integrated optical channel and ridge waveguides in stratified media / E.W. Kolk, N.H.G. Baken, H. Blok // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1990. — V. 38. — P. 78–85.
98. Lifante, G. Integrated photonics: fundamentals / G. Lifante. — John Wiley and Sons, 2003. — 184 p.

99. Lu, M. Anisotropic dielectric waveguides / M. Lu, M.M. Fejer // J. Opt. Soc. Am. A. — Feb. 1993. — V. 10. — № 2. — P. 246–261.
100. Marcuse D. Theory of Dielectric Optical Waveguides / D. Marcuse. — New York: Academic Press, 1972. — 457 p.
101. Mikhlin S.G. Singular Integral Operators / S.G. Mikhlin, S. Prossdorf. — Berlin: Springer-Verlag, 1986. — 528 p.
102. Miller, C.M. Optical Fiber Splices and Connectors: Theory and Methods / C.M. Miller. — Marcel Dekker, 1986. — 378 p.
103. Mittra, R. Analysis of open dielectric waveguides using mode-matching technique and variational methods / R. Mittra, V. Jamnejad, Y. Hou // IEEE Trans. on MTT. — 1980. — V. 28. — № 1. — P. 36–43.
104. Muller, C. Grundprobleme der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen / C. Muller. — Berlin: Springer, 1957. — 345 p.
105. Nosich, A.I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering / A.I. Nosich // J. Electromag. Waves Applicat. — 1994. — V. 8. — № 3. — p. 329–353.
106. Neumaier, A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem / A. Neumaier // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — V. 22. — № 5. — p. 914–923.
107. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung / H. Reichardt // Abh. Mathem. Seminar Univ. Hamburg. — 1960. — V. 24. — p. 41–53.
108. Shestopalov, Yu.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics / Yu.V. Shestopalov, Yu.G. Smirnov, E.V. Chernokozhin. — VSP, 2000. — 117 p.
109. Snyder, A.W. Anisotropic fibers with nonaligned optical (stress) axes / A.W. Snyder, A. Ankiewicz // J. Opt. Soc. Am. A. — June 1986. — V. 3. — № 6. — p. 856–863.

110. Solbach, K. The electromagnetic fields and the phase constants of dielectric image lines / K. Solbach, I. Wolff // IEEE Trans. on MTT. — 1978. — V. 26. — № 4. — p. 266–274.
111. Solov'ëv, S.I. Existence of the guided modes of an optical fiber / S.I. Solov'ëv. — Preprint SFB393/03-02 — Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2003. — 21 p.
112. Splunter J.M. Computational analysis of propagation properties of integrated-optical waveguides using a domain integral equation / J.M. Splunter, H. Blok, N.H.G. Baken, M.F. Dane // Proc. URSI Int. Symp. on EM Theory. — Budapest, 1986. — p. 321–323.
113. Steinberg, S. Meromorphic families of compact operators / S. Steinberg // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31. — № 5. — p. 372–379.
114. Vainikko, G. Multidimensional weakly singular integral equations / G. Vainikko. — Springer, 1993. — p. 159.
115. Urbach H.P. Analysis of the domain integral operator for anisotropic dielectric waveguides / Urbach H.P. // SIAM J. Math. Anal. — 1996. — V. 27. — p. 204–220.
116. Wilczewski, F. Bending loss of leaky modes in optical fibers with arbitrary index profiles / F. Wilczewski // Optics Letters. — July 1994. — V. 19. — № 14. — P. 1031–1033.

**Карчевский** Евгений Михайлович  
**Фролов** Александр Геннадьевич

**ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ И СЛАБО  
СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

**Монография**

Подписано в печать

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л.

Тираж            экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37  
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28