Известия вузов. Математика
2018, №5, с. 13–19
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.М. БИКЧЕНТАЕВ, С.А. АБЕД

ПАРАНОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В НОРМИРОВАННОЙ АЛГЕБРЕ

Аннотация. Для нормированной алгебры $\mathcal{A}$ и натурального числа k введены и исследованы $\|\cdot\|$-замкнутые классы $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$. Показано, что $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ содержтся в $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех k и замкнут относительно возведения своих элеменов в любую натуральную степень. Если $\mathcal{A}$ унитальна, U, V из $\mathcal{A}$ такие, что $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то UTV лежит в $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех k. Пусть $\mathcal{A}$ унитальна, тогда 1) если элемент T из $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент T^{-1} лежит в $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$; 2) при $\|I\| = 1$ класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ состоит из нормалоидных элементов; 3) если спектр элемента T из $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ лежит на единичной окружности, то $\|TX\| = \|X\|$ для всех X из $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, C^*-алгебра, паранормальный оператор, квазинильпотентный оператор, изометрия, гипонормальный оператор, нормалоидный оператор, нормированная алгебра, унитальная алгебра.

УДК: 517.98

Введение. Исследование различных подмножеств в нормированных алгебрах и в $*$-алгебрах операторов является актуальной задачей функционального анализа (см., например, [1]–[5] для классов гипонормальных, нормальных, идемпотентных, унитарных операторов, и разностей идемпотентов соответственно). В этой работе для нормированной алгебры $\mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$ введены и исследованы $\|\cdot\|$-замкнутые классы

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \{T \in \mathcal{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathcal{A} \text{ с } \|A\| = 1\}.$$

Показано, что $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (теорема 2). Если $\mathcal{A}$ — подалгебра нормированной алгебры $\mathcal{B}$, то $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{B})$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (предложение 1). Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (теорема 5). Если $\mathcal{A}$ унитальна, $U, V \in \mathcal{A}$ такие, что $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (теорема 3). В частности, если $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех изометрий $U \in \mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$ (следствие 3). Если $\mathcal{A}$ коммутативна и $\|T^2\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (предложение 6).

Пусть $\mathcal{A}$ унитальна, тогда 1) если элемент $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ (теорема 4); 2) при $\|I\| = 1$ класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ состоит из нормалоидных элементов (следствие 1); 3) если спектр элемента $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ лежит на единичной окружности, то $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$ (следствие 4). Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (следствие 6).

Поступила 29.03.2017

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидий, выделенных Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9 и 1.1515.2017/4.6).

1. Обозначения и определения. *Алгеброй* называется векторное пространство $\mathcal{A}$ над полем Λ ($=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), в котором определено умножение элементов, удовлетворяющее условиям

$$X(YZ)=(XY)Z, \quad (Y+Z)X=YX+ZX,$$
$$X(Y+Z)=XY+XZ, \quad \lambda(XY)=(\lambda X)Y=X(\lambda Y)$$

для всех $X,Y,Z\in\mathcal{A}$ и $\lambda\in\Lambda$. Алгебра $\mathcal{A}$ *унитальна* (т. е. обладает единицей), если существует элемент $(0\neq)I\in\mathcal{A}$ такой, что $IX=XI=X$ $(X\in\mathcal{A})$. Элемент X алгебры $\mathcal{A}$ с I называется *обратимым справа*, если существует элемент $X^{-1}\in\mathcal{A}$ такой, что $XX^{-1}=I$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *нормированной*, если в $\mathcal{A}$ определена такая норма $\|\cdot\|$, что $\|XY\|\leq\|X\|\|Y\|$ для всех $X,Y\in\mathcal{A}$. Каждая подалгебра в $\mathcal{A}$, снабженная индуцированной нормой, является нормированной алгеброй. Напомним, что $T\in\mathcal{A}$ *квазинильпотент*, если $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\to 0$ при $n\to\infty$; *нормалоидный*, если $\|T^n\|=\|T\|^n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная унитальная алгебра. Тогда в $\mathcal{A}$ существует (эквивалентная исходной норме) норма $\|\cdot\|_1$ такая, что $\|I\|_1=1$ (для каждого $X\in\mathcal{A}$ рассмотрим оператор $\pi(X)(Y)=XY$ $(Y\in\mathcal{A})$ и положим $\|X\|_1=\|\pi(X)\|$). Если $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ — нормированные алгебры, то алгебра $\mathcal{A}_1\times\dots\times\mathcal{A}_n$, снабженная нормой

$$\|(X_i)_{i=1}^n\|=\max_{1\leq i\leq n}\|X_i\|,$$

является нормированной алгеброй ([6], гл. I, § 2).

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *паранормальным*, если $\|T^2x\|_{\mathcal{H}}\geq\|Tx\|^2_{\mathcal{H}}$ для всех $x\in\mathcal{H}$ с $\|x\|_{\mathcal{H}}=1$ ([7]–[9]); *изометрией*, если $T^*T=I$; *гипонормальным*, если $T^*T\geq TT^*$. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра такая, что $\|X^*X\|=\|X\|^2$ для всех $X\in\mathcal{A}$. По теореме Гельфанда–Наймарка любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

2. Основные результаты. Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра над полем Λ, $\mathcal{A}_1=\{X\in\mathcal{A}:\|X\|=1\}$ и $k\in\mathbb{N}$. Введем класс

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A})=\{T\in\mathcal{A}:\|T^{k+1}A\|\geq\|TA\|^{k+1}\text{ для всех }A\in\mathcal{A}_1\}.$$

Очевидно, $0\in\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $T\in\mathcal{P}_k(\mathcal{A})\Leftrightarrow\lambda T\in\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}$ и $k\in\mathbb{N}$.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ $\|\cdot\|$-замкнут в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $T_n\xrightarrow{\|\cdot\|}T\in\mathcal{A}$ при $n\to\infty$. Тогда в силу $\|\cdot\|$-непрерывности операции произведения в $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ получаем $T_n^{k+1}\xrightarrow{\|\cdot\|}T^{k+1}$ и для каждого $A\in\mathcal{A}_1$ имеем $T_nA\xrightarrow{\|\cdot\|}TA$, $T_n^{k+1}A\xrightarrow{\|\cdot\|}T^{k+1}A$ при $n\to\infty$. В силу непрерывности функционала $\|\cdot\|$ получаем

$$\|T_nA\|\to\|TA\|, \quad \|T_n^{k+1}A\|\to\|T^{k+1}A\| \text{ при } n\to\infty$$

для каждого $A\in\mathcal{A}_1$. □

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — плотная подалгебра нормированной алгебры $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})\subset\mathcal{P}_k(\mathcal{B})$ для всех $k\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $T\in\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ и $A\in\mathcal{B}_1$. Существует последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{A}\setminus\{0\}$ такая, что $A_n\xrightarrow{\|\cdot\|}A$ при $n\to\infty$. Тогда $a_n=\|A_n\|\to 1$ при $n\to\infty$, поэтому в силу неравенства треугольника имеем

$$\|a_n^{-1}A_n-A\|\leq\|a_n^{-1}A_n-A_n\|+\|A_n-A\|=(a_n^{-1}-1)a_n+\|A_n-A\|\to 0$$

при $n \to \infty$. Заметим, что $a_n^{-1} A_n \in \mathcal{A}_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь неравенство $\|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1}$ следует из $\|\cdot\|$-непрерывности операции произведения в $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ и непрерывности функционала $\|\cdot\|$ на $\mathcal{B}$. □

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}_n$ — нормированные алгебры. Тогда $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1) \times \dots \times \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $T_i \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A}_i)$ и $(0 \neq) A_i \in \mathcal{A}_i$ для всех $1 \leq i \leq n$, $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \|A_i\| = 1$. Для всех $1 \leq i \leq n$ имеем

$$\left\| T_i^{k+1} \frac{A_i}{\|A_i\|} \right\| \geq \left\| T_i \frac{A_i}{\|A_i\|} \right\|^{k+1},$$

поэтому $\|T_i^{k+1} A_i\| \geq \|T_i A_i\|^{k+1} \|A_i\|^{-k} \geq \|T_i A_i\|^{k+1}$. Таким образом,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|T_i^{k+1} A_i\| \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|T_i A_i\|^{k+1} = (\max_{1 \leq i \leq n} \|T_i A_i\|)^{k+1}$$

и предложение доказано. □

Теорема 2. *Имеем $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно выполнено для $k - 1$, тогда для каждого $A \in \mathcal{A}_1$ имеем

$$\|T^{k+1}A\| = \|TA\| \cdot \left\| T^k \frac{TA}{\|TA\|} \right\| \geq \|TA\| \cdot \left\| T \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^k =$$
$$= \frac{\|T^2 A\|^k}{\|TA\|^{k-1}} \geq \frac{\|TA\|^{2k}}{\|TA\|^{k-1}} = \|TA\|^{k+1}. \quad \square$$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная унитальная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то T нормалоидный.

Доказательство. Имеем $\|T^n\| = \|T^n I\| \geq \|TI\|^n = \|T\|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Отсюда получаем

Следствие 2. Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная унитальная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $(0 \neq) T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то T не может быть квазинильпотентом.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра.*
(i) *Если $T \in \mathcal{A}$ с $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$, то $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$.*
(ii) *Если $T \in \mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{A})$ и $T^k \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{A})$, то $T \in \mathcal{P}_{kn-1}(\mathcal{A})$ для всех $k, n \geq 2$.*

Доказательство. (i) Для каждого $A \in \mathcal{A}_1$ имеем $1 = \|A\| = \|A\|^2$, поэтому $1 = \|TA\| = \|T(TA)\| = \|TA\|^2$.
(ii) Для каждого $A \in \mathcal{A}_1$ имеем $\|T^{kn}A\| = \|(T^k)^n A\| \geq \|T^k A\|^n \geq \|TA\|^{kn}$. □

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра, $X \in \mathcal{A}_1$ и $T \in \mathcal{A}$ такие, что $XTX = T$. Если $k \in \mathbb{N}$ нечетно и $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $XT \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Очевидно, $(XT)^{k+1} = (XTX \cdot T)^{\frac{k+1}{2}} = T^{k+1}$ и

$$\|(XT)^{k+1}A\| = \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \geq \|XTA\|^{k+1}$$

для всех $A \in \mathcal{A}_1$. □

Предложение 5. *Пусть нормированная алгебра $\mathcal{A}$ унитальна. Тогда $\lambda I \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и справедливы утверждения*
(i) *если $T \in \mathcal{A}_1$ с $T^{k+1} = I$, то $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$,*
(ii) *если $T = T^{k+1} \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ и $\|I\| = 1$, то $\|T\| \in \{0, 1\}$.*

Доказательство. (i) Имеем $1 = \|T^{k+1}A\| = \|A\| \geq \|TA\| \geq \|TA\|^{k+1}$ для всех $A \in \mathcal{A}_1$ и $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Для всех $T = T^{k+1} \in \mathcal{A}$ имеем $\|T\| = \|T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1}$, значит, $\|T\| \in \{0\} \cup [1, \infty)$. Если $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $\|TA\| = \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1}$, поэтому $\|TA\| \in [0, 1]$ для всех $A \in \mathcal{A}_1$. В частности, при $A = I$ получаем $\|T\| \leq 1$. Следовательно, $\|T\| \in \{0, 1\}$. $\square$

Предложение 6. *Если $\mathcal{A}$ — коммутативная (т. е. $XY = YX$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}$) нормированная алгебра и $\|T^2\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно проверить утверждение для $k = 1$. Для всех $T \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{A}_1$ имеем $T^2A = TAT$ и $\|T^2A\| = \|TAT\| \geq \|TATA\| = \|TA\|^2$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная унитальная алгебра и $U, V \in \mathcal{A}_1$ такие, что $VU = I$. Если $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTV \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Имеем $(UTV)^{k+1} = UT^{k+1}V$ и нужно показать, что

$$\|(UTV)^{k+1}A\| = \|UT^{k+1}VA\| \geq \|UTVA\|^{k+1} \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}_1.$$

Если $VA = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $VA \neq 0$, тогда $0 < \|VA\| \leq 1$ и

$$\|UT^{k+1}VA\| \geq \|VUT^{k+1}VA\| = \|T^{k+1}VA\| = \left\| T^{k+1} \frac{VA}{\|VA\|} \right\| \|VA\| \geq$$
$$\geq \left\| T \frac{VA}{\|VA\|} \right\|^{k+1} \|VA\| = \frac{\|TVA\|^{k+1}}{\|VA\|^k} \geq \|TVA\|^{k+1} \geq \|UTVA\|^{k+1}. \quad \square$$

Следствие 3. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, то $UTU^* \in \mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ для всех изометрий $U \in \mathcal{A}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 3 при $k = 1$ обобщает утверждение (ii) теоремы 2 ([10]).

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная унитальная алгебра. Если элемент $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}_1$, $T^{-2} = (T^{-1})^2$. Нужно показать, что $\|T^{-2}A\| \geq \|T^{-1}A\|^2$. Если $T^{-2}A = 0$, то $T^{-1}A = T \cdot T^{-2}A = 0$, и утверждение выполнено. Если $T^{-2}A \neq 0$, то

$$\left\| T^2 \frac{T^{-2}A}{\|T^{-2}A\|} \right\| \geq \left\| T \frac{T^{-2}A}{\|T^{-2}A\|} \right\|^2,$$

т. е. $\frac{\|A\|}{\|T^{-2}A\|} = \frac{1}{\|T^{-2}A\|} \geq \frac{\|T^{-1}A\|^2}{\|T^{-2}A\|^2}$. $\square$

Следствие 4. Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная унитальная алгебра над полем $\mathbb{C}$ и $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ такой, что спектр $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности. Тогда $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Так как $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности, имеем $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ в силу следствия 1 и теоремы 4. Для всех $(0 \neq) X \in \mathcal{A}$ имеем

$$\|X\| \geq \|TX\| = \|T^{-1}X\| \left\| T^2 \frac{T^{-1}X}{\|T^{-1}X\|} \right\| \geq \|T^{-1}X\| \left\| T \frac{T^{-1}X}{\|T^{-1}X\|} \right\|^2 = \\ = \frac{\|X\|^2}{\|T^{-1}X\|} \geq \|X\|. \quad \square$$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то*

$$\|T^3A\| \geq \|T^2A\| \cdot \|TA\| \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}_1. \tag{1}$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $TA \neq 0$. Тогда

$$\|T^3A\| = \|TA\| \cdot \left\| T^2 \frac{TA}{\|TA\|} \right\| \geq \|TA\| \cdot \left\| T \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^2 = \frac{\|T^2A\|^2}{\|TA\|} \geq \frac{\|T^2A\| \cdot \|TA\|^2}{\|TA\|} = \|T^2A\| \cdot \|TA\|.$$

$\square$

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то*

$$\|T^{k+1}A\|^2 \geq \|T^kA\|^2 \cdot \|T^2A\| \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}_1 \quad \text{и} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2_k}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Для $k = 1$ имеем

$$\|T^2A\|^2 = \|T^2A\| \cdot \|T^2A\| \geq \|TA\|^2 \cdot \|T^2A\|$$

и (2_1) выполнено. Пусть (2_k) выполнено для k и $TA \neq 0$, тогда

$$\|T^{k+2}A\|^2 = \|TA\|^2 \cdot \left\| T^{k+1} \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^2 \geq \|TA\|^2 \cdot \left\| T^k \frac{TA}{\|TA\|} \right\|^2 \cdot \left\| T^2 \frac{TA}{\|TA\|} \right\| = \\ = \|T^{k+1}A\|^2 \frac{\|T^3A\|}{\|TA\|} \geq \|T^{k+1}A\|^2 \cdot \|T^2A\|$$

в силу (1) и (2_k). Поэтому (2_{k+1}) выполнено. $\square$

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{A}$ — нормированная алгебра. Если $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^n \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Достаточно показать, что если $T, T^k \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, то $T^{k+1} \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$. Пусть $A \in A_1$ и $T^2A \neq 0$, тогда

$$\|T^{2(k+1)}A\| = \left\| T^{2k} \frac{T^2A}{\|T^2A\|} \right\| \cdot \|T^2A\| \geq \left\| T^k \frac{T^2A}{\|T^2A\|} \right\|^2 \cdot \|T^2A\| = \\ = \frac{\|T^{k+2}A\|^2}{\|T^2A\|} \geq \frac{\|T^{k+1}A\|^2 \cdot \|T^2A\|}{\|T^2A\|} = \|T^{k+1}A\|^2$$

в силу (2_{k+1}) леммы 2. $\square$

Замечание 1. Из теоремы 5 можно получить второе доказательство следствия 1. Для элементов $A = I$, $T \in \mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|T^{2^n}\| = \|T^{2^n}A\| \geq \|T^{2^{n-1}}A\|^2 = \|T^{2^{n-1}}\|^2 \geq \|T^{2^{n-2}}A\|^{2^2} = \|T^{2^{n-2}}\|^{2^2} \geq \cdots \geq \\ \geq \|TA\|^{2^n} = \|T\|^{2^n}.$$

Последовательность $\{\|X^n\|^{1/n}\}$ сходится при $n\to\infty$ для каждого $X\in\mathcal{A}$, и ее предел равен $\inf_n \|X^n\|^{1/n}$ ([6], гл. I, § 2, предложение 1). Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^{2n}\|^{1/2^n}=\inf_n\|T^n\|^{1/n}\geq\|T\|$ и $\|T^n\|^{1/n}\geq\|T\|$, т. е. $\|T^n\|\geq\|T\|^n$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и T является нормалоидным.

Из теоремы 1 [10] имеем

Следствие 5. Если $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в $\mathcal{H}$.

Поскольку операция произведения секвенциально совместно непрерывна в сильной операторной топологии в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ([11], задача 93), из следствия 5 имеем

Следствие 6. Если $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ секвенциально замкнут в сильной операторной топологии.

Следствие 7. Если $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то в $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ существует не гипонормальный оператор.

Доказательство. В ([11], задача 164) П. Халмош привел пример гипонормального оператора $T\in\mathcal{A}$, для которого T^2 не является гипонормальным. Имеем $T\in\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ в силу п. (i) теоремы 2 [10], поэтому $T^2\in\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ в силу теоремы 5. $\square$

Замечание 2. Если $\mathcal{A}=\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, то класс $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ есть множество всех нормальных матриц из $\mathcal{A}$. Для $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ теорема 2 установлена в [12] и [13], теорема 4 (для обратимого T) и следствие 4 доказаны в [12], а леммы 1, 2 и теорема 5 — в [8]. Мы модифицировали соответствующие доказательства.

Литература

[1] Бикчентаев А.М. *О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **96** (3), 350–360 (2014).

[2] Ахрамович М.В., Муратов М.А., Шульман В.С. *Теорема Фуглида–Патнэма в алгебрах с инволюциями*, Матем. заметки **98** (4), 483–497 (2015).

[3] Бикчентаев А.М. *Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **100** (4), 492–503 (2016).

[4] Александров А.Б., Пеллер В.В. *Формула следов Крейна для унитарных операторов и операторно липшицевы функции*, Функц. анализ и его прилож. **50** (3), 1–11 (2016).

[5] Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C^*-алгебрах*, Сиб. матем. журн. **58** (2), 183–189 (2017).

[6] Бурбаки Н. *Спектральная теория* (Мир, М., 1972).

[7] Istrăţescu V. *On some hyponormal operators*, Pacific J. Math. **22** (3), 413–417 (1967).

[8] Furuta T. *On the class of paranormal operators*, Proc. Japan Acad. **43** (7), 594–598 (1967).

[9] Kubrusly C.S. *Hilbert space operators. A problem solving approach* (Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003).

[10] Бикчентаев А.М. *Два класса τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана*, Изв. вузов. Матем., № 1, 86–91 (2017).

[11] Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах* (Мир, М., 1970).

[12] Istrăţescu V., Saito T., Yoshino T. *On a class of operators*, Tôhoku Math. J. **18** (4), 410–413 (1966).

[13] Furuta T., Horie M., Nakamoto R. *A remark on a class of operators*, Proc. Japan Acad. **43** (7), 607–609 (1967).

Айрат Мидхатович Бикчентаев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Сами Абдулла Абед

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: samialbarkish@gmail.com

A.M. Bikchentaev and S.A. Abed

Paranormal elements in normed algebra

Abstract. For a normed algebra $\mathcal{A}$ and natural numbers k we introduce and investigate the $\|\cdot\|$-closed classes $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$. We show that $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ is a subset of $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ for all k. If T in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$, then T^n lies in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ for all natural n. If $\mathcal{A}$ is unital, $U, V \in \mathcal{A}$ are such that $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ and T lies in $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$, then UTV lies in $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$ for all natural k. Let $\mathcal{A}$ be unital, then 1) if an element T in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ is right invertible, then the right inverse element T^{-1} lies in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$; 2) for $\|I\| = 1$ the class $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ consists of normaloid elements; 3) if the spectrum of an element T in $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ lies on the unit circle, then $\|TX\| = \|X\|$ for all $X \in \mathcal{A}$. If $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, then the class $\mathcal{P}_1(\mathcal{A})$ coincides with the set of all paranormal operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$.

Keywords: Hilbert space, C^*-algebra, paranormal operator, quasinilpotent operator, isometry, hyponormal operator, normaloid operator, normed algebra, unital algebra.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Sami Abdulla Abed

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: samialbarkish@gmail.com