УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2018, Т. 160, кн. 3
С. ???–???

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 510.5

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННОЙ СВОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МНОЖЕСТВ

Д.Х. Зайнетдинов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Работа посвящена изучению предельно монотонных множеств, а также исследованию основных структурных свойств предельно монотонной сводимости (lm-сводимости) между множеством и последовательностью множеств. Предельно монотонную сводимость можно рассматривать как частный случай Σ-сводимости, определенной на семействах начальных сегментов натуральных чисел. В настоящей работе lm-сводимость между множеством и последовательностью, состоящей из бесконечных множеств, будет рассмотрена на языке предельно монотонного оператора. Основным результатом работы является доказательство отсутствия наименьшей не предельно монотонной последовательности относительно lm-сводимости между множеством и последовательностью множеств. Данный результат будет доказан с помощью метода приоритета с бесконечными нарушениями с использованием дерева стратегий. Результат, представленный в настоящей работы, является обобщением результата об отсутствии наименьшего Σ_2^0-множества, не являющегося предельно монотонным, относительно lm-сводимости множеств.

Ключевые слова: предельно монотонная функция, предельно монотонное множество, предельно монотонный оператор, предельно монотонная сводимость, последовательность множеств, Σ_2^0-множество

Введение

Тематика исследований, проводимых в настоящей работе, появилась в результате активно изучаемых в последнее время в рамках теории вычислимости предельно монотонных множеств. Строго говоря, понятие предельно монотонного множества возникло в теории моделей как очень естественное и является, наверное, самым первым существенным обогащением классической теории вычислимости с помощью теории моделей. Предельно монотонные функции были введены Н.Г. Хисамиевым [1] в 1981 г. при описании критерия конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп. Помимо этого, Н.Г. Хисамиевым в работах [2, 3] были исследованы алгоритмические свойства абелевых групп с точки зрения неубывающих функций.

Приложения предельно монотонных функций можно встретить при изучении теории вычислимых моделей, линейных порядков и вычислимых булевых алгебр. В последнее время изучение предельно монотонных функций и спектров степеней, относительно которых заданное множество предельно монотонно, набирает все большую популярность как среди отечественных, так и среди зарубежных математиков (Н.Г. Хисамиев [1], Р. Доуни [4], А. Ниис [5], Б. Хусаинов [5, 6], Д. Турецкий [4, 7], И.Ш. Калимуллин [6, 8, 9] и др.). Таким образом, рассмотрение и изучение предельно монотонных множеств и степеней, а также их сравнение с уже известными степенями является логическим продолжением развития этой области.

В публикациях [4–7] можно найти основные сведения, полученные при изучении предельно монотонных функций, множеств и последовательностей множеств. Из указанных работ непосредственно следует, что структура предельно монотонных степеней является достаточно сложным объектом, не поддающимся хорошему описанию. В совместной работе с И.Ш. Калимуллиным [8] было установлено, что lm-сводимость является частным случаем Σ-сводимости, рассматриваемой на семействах начальных сегментов натуральных чисел. Там же были доказаны основные структурные свойства частичного порядка предельно монотонных степеней, а именно существование максимальных и минимальных предельно монотонных степеней; существование несравнимых между собой предельно монотонных степеней; возможность вложения произвольных конечных частичных порядков. Позднее в работе [10] было получено описание lm-сводимости множеств на языке Σ-сводимости семейств начальных сегментов натуральных чисел. Стоит отметить, что семейства подмножеств натуральных чисел активно используются в теории вычислимых структур в качестве вспомогательного аппарата [11, 12]. В совместной работе с И.Ш. Калимуллиным и М.Х. Файзрахмановым [9] было установлено, что lm-сводимость множеств эквивалентна Σ-определимости абелевых групп. Кроме того, в этой же работе было обнаружено то, что структура предельно монотонных степеней не является верхней полурешеткой, а также доказано отсутствие наименьшей Σ^0_2-степени, которая не является предельно монотонной. Что касается основных обозначений, встречающихся в настоящей статье, то мы будем придерживаться в основном работ [9, 13].

1. Предельно монотонные последовательности и операторы

Основным результатом работы является доказательство отсутствия наименьшей не предельно монотонной последовательности относительно lm-сводимости между последовательностью множеств и множеством. Остановимся подробнее на понятии предельно монотонного оператора, которое в дальнейшем будем использовать при рассмотрении lm-сводимости между последовательностью множеств и множеством.

Определение 1. Функция $\overline{\theta} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *предельно монотонной*, если существует такая частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N}$ выполнены следующие соотношения:

(i) $\forall\, t \geqslant s\, [\theta(n, x, s)\downarrow \ \&\ \theta(n, x, t)\downarrow \Longrightarrow \theta(n, x, s) \leqslant \theta(n, x, t)]$;

(ii) $\overline{\theta}(n, x) = \max\limits_t \theta(n, x, t) < \infty$ (полагаем $\max \emptyset = 0$).

Определение 2. Отображение $\Theta : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ будем называть *предельно монотонным оператором* (или *lm-оператором*), если существует частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая для всех $\rho \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ и $n, s \in \mathbb{N}$ следующим условиям:

(i) $\forall\, \tau \geqslant \rho\, \forall\, t \geqslant s\, [\theta(n, \rho, s)\downarrow \ \&\ \theta(n, \tau, t)\downarrow \Longrightarrow \theta(n, \rho, s) \leqslant \theta(n, \tau, t)]$;

(ii) $\overline{\theta}(n, \rho) = \max\limits_t \theta(n, \rho, t) < \infty$;

(iii) $\forall\, X \subseteq \mathbb{N}\, [\Theta^n\langle X\rangle = \{\overline{\theta}(n, \rho) : n \in \mathbb{N}\,, \rho \in X^{<\mathbb{N}}\}]$.

Пусть $\{\theta_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ – эффективная гёделевская нумерация всех трехместных частично вычислимых функций, удовлетворяющих условию (i) определения 2. Для каждого e через Θ_e обозначим lm-оператор, действующий из $2^{\mathbb{N}}$ в $2^{\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ и определенный для каждого множества $X \subseteq \mathbb{N}$ равенством

$$\Theta_e\langle X\rangle = (\Theta_e^1\langle X\rangle, \Theta_e^2\langle X\rangle, \ldots, \Theta_e^n\langle X\rangle, \ldots),$$

где $\Theta_e^n\langle X\rangle = \{\overline{\theta}_e(n,\rho) : \rho \in X^{<\mathbb{N}}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение 3. Последовательность множеств $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *предельно монотонно сводится* (или *lm-сводится*) к множеству A (обозначается как $\mathcal{C} \leqslant_{lm} A$), если каждое множество C_n, $n \in \mathbb{N}$ является пустым или $\mathcal{C} = \Theta_e\langle A\rangle$ для некоторого lm-оператора Θ_e.

В следующей теореме мы покажем, что не существует наименьшей не предельно монотонной последовательности относительно lm-сводимости.

Когда говорим о деревьях, то через α, β, $\gamma, \ldots$ будем обозначать вершины дерева, $|\alpha|$ – длину α, $\alpha^\frown\beta$ – конкатенацию α и β; $\alpha \subseteq \beta$ ($\alpha \subset \beta$) означает, что α является (собственным) начальным сегментом β; $\alpha <_L \beta$ означает, что $\alpha \upharpoonright m = \beta \upharpoonright m$ и $\alpha(m) <_\Lambda \beta(m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ (где $<_\Lambda$ – соответствующий порядок на дереве, возможно различный на разных уровнях и $T \subseteq \Lambda^{<\mathbb{N}}$); $\alpha \leqslant \beta$ ($\alpha < \beta$) означает, что $\alpha <_L \beta$ или $\alpha \subseteq \beta$ ($\alpha \subset \beta$). Множество $[T]$ бесконечных путей через дерево $T \subseteq \Lambda^{<\mathbb{N}}$ определяется как $\{h \in \Lambda^{<\mathbb{N}} \mid (\forall m)[h \upharpoonright m \in T]\}$. Через $\{\delta_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, где $\delta_s \in \Lambda^{<\mathbb{N}}$ и $|\delta_s| = s$, определим вычислимую последовательность строк, аппроксимирующую истинный путь f.

Будем придерживаться следующего плана доказательства теоремы: 1) выписывается список требований с бесконечными действиями, которым нужно *удовлетворить* (выполнить); 2) для каждого вида требований приводится стратегия, которую будем называть *основным модулем* для удовлетворения требований данного вида; 3) рассматриваются возможные *выходы* (результаты работы) основных модулей для всех видов требований; 4) определяется *дерево стратегий* и каждой вершине дерева назначается некоторое требование; 5) описывается *основная конструкция*, которая определяет, как работают и взаимодействуют между собой стратегии на дереве; 6) доказываются *предложения*, устанавливающие, что построенные в процессе конструкции объекты удовлетворяют условиям теоремы.

При описании стратегий используем следующую терминологию: при выборе представителя цикла слова «достаточно большое число» означают первое число, большее всех упомянутых в конструкции к данному моменту; *начинаем цикл*, позволяя ему выполнить действия, описанные в состоянии (1), и перейти в состояние (2); *останавливаем цикл*, прекращая его работу, определяя его запрет равным нулю и заставляя перейти в (1); *инициализируем стратегию*, разрушая все её циклы и начиная цикл 0; *цикл работает*, переходя из некоторого состояния в другое; *стратегия работает*, позволяя циклу с наименьшим номером, который может это сделать, работать (в противном случае ничего не делает).

Параметры, получившие некоторые значения в ходе конструкции, остаются с этим значением, пока не будут переопределены.

Теорема 1. *Пусть имеется последовательность $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, состоящая из бесконечных Σ_2^0-множеств, которая не является предельно монотонной. Тогда существует такое Σ_2^0-множество A, что A не предельно монотонно и $\mathcal{C} \not\leqslant_{lm} A$.*

Доказательство. Для каждого e определим lm-оператор Θ_e, действующий на множестве $A \subseteq \mathbb{N}$, следующего вида:

$$\Theta_e\langle A\rangle = (\Theta_e^1\langle A\rangle, \Theta_e^2\langle A\rangle, \ldots, \Theta_e^n\langle A\rangle, \ldots),$$

где $\Theta^n_e\langle A\rangle = \{\overline{\theta}_e(n,\rho) \mid \overline{\theta}_e(n,\rho) = \max\limits_t \theta_e(n,\rho,t) < \infty \ \&\ \rho \in A^{<\mathbb{N}},\ t \in \mathbb{N}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Здесь $\overline{\theta}_e(n,\rho)$ – предельно монотонная функция, а $\theta_e(n,\rho,t)$ является частично вычислимой функцией от трех аргументов.

Ясно, что достаточно построить множество A, удовлетворяя для всех e отрицательным N_e (условие $\mathcal{C} \not\leqslant_{lm} A$) и положительным P_e (условие не предельной монотонности множества A) требованиям:

$$N_e : C_n = \Theta^n_e\langle A\rangle \implies C_n \supseteq \operatorname{rng} \overline{\psi},$$

$$P_e : A \neq \Theta_e\langle\{0\}\rangle,$$

где $\overline{\psi}$ – предельно монотонная функция с бесконечной областью значений. Используем следующие основные модули для удовлетворения данных требований.

Основной модуль для требования $N_e : C_n = \Theta^n_e\langle A\rangle \implies C_n \supseteq \operatorname{rng} \overline{\psi}$. Запишем подробнее, что означает выполнение данного требования N_e. Пусть имеется последовательность $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и некоторый предельно монотонный оператор $\Theta_e\langle A\rangle = (\Theta^1_e\langle A\rangle, \Theta^2_e\langle A\rangle, \ldots, \Theta^n_e\langle A\rangle, \ldots)$. Стратегия удовлетворения требования N_e состоит в следующем. Если существует Σ^0_2-множество A такое, что $C_n = \Theta^n_e\langle A\rangle$, где $\Theta^n_e\langle A\rangle = \{\overline{\theta}_e(n,\rho) : \rho \in A^{<\mathbb{N}}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то мы в этом случае определяем предельно монотонную функцию $\overline{\psi}$ такую, что $\operatorname{rng}\ \overline{\psi} = \infty$ и $C_n \supseteq \operatorname{rng} \overline{\psi}$.

Модуль работает по циклам $k \in \mathbb{N}$, каждый из которых действует согласно следующему алгоритму. Начальное состояние каждого цикла (1). Цикл с номером 0 запускается только из начального состояния.

Цикл k

(1) Выбираем такую строку $\rho \in A^{<\mathbb{N}}$, что $\overline{\theta}_e(n,\rho) > k$, то есть значение функции $\overline{\theta}_e(n,\rho)$ является достаточно большим числом.

(2) Запрещаем множество A от изменений на всех элементах, не больших элементов строки ρ. Переходим в состояние (3).

(3) Ждем пока значение функции $\overline{\theta}_e(n,\rho)$ будет принадлежать множеству C_n.

(4) Определяем $\overline{\psi}(n,k) = \overline{\theta}_e(n,\rho)$. Таким образом, значение функции $\overline{\psi}(n,k)$ также будет принадлежать C_n.

(5) Начинаем $(k+1)$-й цикл. Одновременно продолжаем работу цикла с номером k, переходя в (6).

(6) Ждем когда значение $\overline{\theta}_e(n,\rho) \notin C_n$ (так как C_n является Σ^0_2-множеством, то его элементы могут «мигать») или же значение функции $\overline{\theta}_e(n,\rho)$ возрастёт.

(7) Инициализируем циклы с номерами $k' > k$, сбрасываем все запреты, наложенные ранее циклами с номерами k', $k' > k$, переходим в состояние (3).

Выходы из основного модуля для N-стратегии

1. Существует некоторый цикл с номером k, который останавливается в состоянии (1). Тогда множество $\Theta^n_e\langle A\rangle$ является конечным и требование N_e выполнено в силу мощностных соображений.

2. Существует некоторый цикл k, который останавливается в состоянии (3). Следовательно, значение $\overline{\theta}_e(n,\rho)$ не принадлежит множеству C_n. При этом по построению $\overline{\theta}_e(n,\rho) \in \Theta^n_e\langle A\rangle$. Значит, $\Theta^n_e\langle A\rangle \not\subseteq C_n$, и требование N_e выполнено.

3. Существует цикл с наименьшим номером k_0, который бесконечно много раз переходит из состояния (7) в состояние (3). Тогда либо $\Theta^n_e\langle A\rangle \not\subseteq C_n$ (следовательно, $C_n \neq \Theta^n_e\langle A\rangle$), либо $\overline{\theta}_e(n,\rho) \to \infty$ для $\rho \in A^{<\mathbb{N}}$ (что противоречит условию (ii) определения 2). Таким образом, в этом случае требование N_e также выполнено.

4. Существует некоторый шаг s_0, после которого ни один цикл не работает. Это означает, что каждый цикл $k \in \mathbb{N}$ основного модуля навсегда остаётся в состоянии (6). Следовательно, каждый цикл k получит некоторое значение $\overline{\theta}_e(n,\rho) \in C_n$ и значение $\overline{\theta}_e(n,\rho)$ не будет больше возрастать. Тогда по построению имеем некоторую предельно монотонную функцию $\overline{\psi}(n,k)$ с бесконечной областью значений и все $\overline{\psi}(n,k)$ будут принадлежать множеству C_n. Таким образом, мы построили бесконечную предельно монотонную подпоследовательность, содержащуюся в $\mathcal{C}$, что является невозможным в силу того, что последовательность $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сама не предельно монотонна. В нашей конструкции этот выход невозможен, поэтому мы его не учитываем.

Для N-стратегии **выходы 1 и 2** из основного модуля являются конечными. Это означает, что основной модуль останавливается в состоянии (1) или (3) соответственно. Требование N_e выполнено. Обозначим через $R(\alpha,s)$ общий запрет для всех циклов N-стратегии после шага s. Общий запрет всех циклов $R(\alpha,s)$ имеет конечный предел. Обозначим этот выход через f. **Выход 3** из основного модуля для N-стратегии бесконечный, то есть существует цикл с номером k_0, переходящий бесконечно часто из состояния (7) в состояние (3). В данном выходе только конечная часть всех запретов накладывается на постоянной основе. Общий запрет всех циклов $R(\alpha,s)$ может быть бесконечным в пределе, но существует конечный $\liminf\limits_{s} R(\alpha,s)$. Номер цикла k_0 и будет обозначать этот выход.

Основной модуль для требования P_e : $A \neq \Theta_e\langle\{0\}\rangle$.

Стратегия удовлетворения требования P_e состоит в построении не предельно монотонного множества A, то есть требуется построить множество A не являющееся областью значения никакой предельно монотонной функции. Модуль выполняет действия, которые соответствуют его текущему состоянию от (1) до (4). Начальное состояние (1). На начальном этапе основной модуль начинает свою работу с предположения о том, что $A = \mathbb{N}$.

(1) Ждем такой номер $r \in \mathbb{N}$, что значение функции $\overline{\theta}_e(0^r)$ является достаточно большим числом.

(2) Удаляем значение $\overline{\theta}_e(0^r)$ из множества A. Переходим в состояние (3).

(3) Ждем пока значение функции $\overline{\theta}_e(0^r)$ возрастёт. Поскольку модуль работает в предположении, что $A = \mathbb{N}$, то новое значение $\overline{\theta}_e(0^r)$ будет принадлежать множеству A. Переходим в состояние (4).

(4) Возвращаем в A предыдущее значение $\overline{\theta}_e(0^r)$, а новое значение $\overline{\theta}_e(0^r)$ удаляем из A. Переходим в состояние (3).

Выходы из основного модуля для P-стратегии

1. Основной модуль останавливается в состоянии (1). Это означает, что $\Theta_e\langle\{0\}\rangle$ конечно. Требование P_e выполнено в силу мощностных соображений.

2. Основной модуль останавливается в состоянии (3). Следовательно, значение $\overline{\theta}_e(0^r)$ не изменилось. Поэтому $\overline{\theta}_e(0^r) \notin A$ и $\overline{\theta}_e(0^r) \in \Theta_e\langle\{0\}\rangle$. Тогда $\Theta_e\langle\{0\}\rangle \nsubseteq A$ и требование P_e выполнено.

3. Основной модуль останавливается в состоянии (4). Это означает, что модуль проходит через бесконечное число циклов. Тогда существует цикл с номером k_0, который бесконечное число раз переходит из состояния (4) в состояние (3). Требование P_e удовлетворено, так как $\overline{\theta}_e(0^r) \to \infty$, что противоречит определению lm-оператора, поскольку $\overline{\theta}(\rho) = \max\limits_{t} \theta(\rho,t) < \infty$.

Для P-стратегии **выходы 1 и 2** из основного модуля являются конечными. Следовательно, работа основного модуля для требования P_e останавливается в состоянии (1) или (3) и максимум только один элемент может быть навсегда удалён из A. Обозначим данные выходы через 1. **Выход 3** является бесконечным, то есть основной модуль бесконечно часто переходит из состояния (4) в состояние (3), но ни один элемент не будет навсегда удалён из A. Обозначим данный выход через 0.

Дерево стратегий

Обозначим множество выходов стратегий N, P через Λ_N и Λ_P соответственно. Тогда $\Lambda_N = \{0 <_{\Lambda_N} 1 <_{\Lambda_N} 2 < \dots <_{\Lambda_N} f\}$, $\Lambda_P = \{0 <_{\Lambda_P} 1\}$. Пусть $\Lambda = \Lambda_N \bigcup \Lambda_P$. Тогда деревом стратегий будем называть множество

$$T = \{\alpha \in \Lambda^{<\mathbb{N}} \mid (\forall\, k < |\alpha|)\ [\alpha(k) \in \Lambda_N,\ \Lambda_P \text{ для } k \equiv 0, 1 \pmod 2]\}.$$

Далее, каждой вершине $\alpha \in T$ назначаем некоторое требование, над которым она будет работать. Пусть $|\alpha| = 2e + k$, где $e, k \in \mathbb{N}$ и $k \leqslant 1$. Затем

$$\text{назначаем вершине } \alpha \text{ требование } \begin{cases} N_e, & \text{если } k = 0; \\ P_e, & \text{если } k = 1. \end{cases}$$

Таким образом, каждый уровень дерева работает над одним требованием.

Обозначим через L список всех стратегий в естественном порядке

$$L = \{N_0,\, P_0,\, N_1,\, P_1, \dots, N_e,\, P_e, \dots\}.$$

Теперь α-стратегией будем называть вариант основного модуля для требования, которое назначено вершине α с некоторыми изменениями, описанными в конструкции. В свою очередь, S-стратегией, где $S \in \{N, P\}$, будем называть стратегию α, если она работает над требованием вида N_e, P_e соответственно. Шаг s назовём α-шагом, если стратегия α имела возможность работать на шаге s.

Полная конструкция

Шаг 0. $A_0 = \emptyset$ и все стратегии $\alpha \in T$ инициализированы.

Шаг $s + 1$. Работаем по подшагам $t \leqslant 2s + 1$, причем на каждом подшаге t одна из стратегий α длины t будет иметь возможность работать. Возможны два случая.

Первый случай: $|\alpha| = t = 2e$. Стратегия α работает над требованием N_e как описано в основном модуле. Определяем выход o стратегии α следующим образом: если некоторый цикл работал, то выходом будет номер этого цикла, в противном случае – f. Далее инициализируем стратегии $\beta >_L \alpha^\frown o$ и определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1$; если работающий цикл k_0 перешел из (7) в (3), то $\beta = \alpha^\frown k_0$, в противном случае $\beta = \alpha^\frown f$. Переходим к подшагу $t + 1$.

Отметим, что на подшаге $t = 2e$ рассматривается следующая ситуация:

Стратегия α работает с требованием N_e под γ-стратегиями для требований P_i, $i < e$.

Пусть $\gamma^\frown 0 \subseteq \alpha$. Тогда основной модуль для γ-стратегии бесконечно часто переходит из (4) в (3). Стратегия α для требования N_e снабжена *«предположением»* о результатах попыток удовлетворения P_i для всех $i < e$, и α действует только тогда, когда это предположение *«кажется верным»*. Поэтому если α находится под правильным выходом, то γ-стратегия будет бесконечно часто некоторые элементы удалять из множества A, а затем снова перечислять их в A. В результате ни один элемент не будет навсегда удалён из A. В этом случае возможны только временные нарушения запретов со стороны требования P_i, и α-стратегия продолжает работать дальше, игнорируя данные нарушения.

Если $\gamma^\frown 1 \subseteq \alpha$, то α-стратегия работает в предположении о том, что P_i больше ничего не делает, то есть требование P_i не нарушает её запретов. Если все же P_i нарушает запреты, наложенные α-стратегией, то α инициализируется.

При рассмотрении работы стратегии α над требованием N_e можно отметить, что α вообще может не рассматривать в своей работе числа, большие, чем значения $\overline{\theta}_i(0^r)$. Так как в работе γ-стратегий требований P_i для всех $i < e$ мы ждем, когда значение $\overline{\theta}_i(0^r)$ увеличится, и только потом проводим необходимые вычисления и можем нарушить наложенные ранее запреты. Следовательно, если α не будет работать с числами, большими, чем $\overline{\theta}_i(0^r)$, то требования P_i не будут их нарушать. А если окажется, что требование P_i все-таки нарушает запреты, тогда α-стратегия предполагает, что она находится под ложным выходом.

Второй случай: $|\alpha| = t = 2e + 1$. Стратегия α работает над требованием P_e, как описано в основном модуле. Определяем выход o стратегии α следующим образом: если произошел переход из (4) в (3), то выход есть 0, в противном случае выход есть 1. Далее, инициализируем стратегии $\beta >_L \alpha^\frown o$. Определяем следующую стратегию β, которая имеет возможность работать на подшаге $t+1$: если в процессе работы основной модуль P-стратегии перешел из (4) в (3), то $\beta = \alpha^\frown 0$, в противном случае $\beta = \alpha^\frown 1$. Переходим к подшагу $t+1$.

Отметим, что на подшаге $t = 2e+1$ рассматриваются следующие ситуации.

Стратегия α работает с требованием P_e под γ-стратегиями для требований N_i, $i \leqslant e$.

Если $\gamma^\frown f \subseteq \alpha$, то α-стратегия предполагает, что запреты со стороны требований N_i наложены только на циклы с номерами k, то есть все они являются конечными. Следовательно, α-стратегия в качестве своего представителя выбирает «достаточно большое число» $\overline{\theta}_e(0^r)$, большее всех конечных запретов γ-стратегий для требований N_i, $i \leqslant e$, и работает с ним согласно своему алгоритму.

Если $\gamma^\frown k_0 \subseteq \alpha$, то α-стратегия, каждый раз проходя через бесконечный выход γ-стратегий, инициализируется, то есть заново начинает свою работу. Все запреты будут сняты, и α-стратегия их игнорирует.

Проверка конструкции

Для завершения доказательства теоремы докажем ряд утверждений. Определим *истинный путь* $f \in [T]$ как самую левую бесконечную ветвь дерева T, посещаемую δ_s в течение конструкции бесконечное число раз, то есть для всех m, если $\alpha = f \upharpoonright m$, то $f(m) = \alpha$ означает окончательный выход стратегии α. Покажем, что истинный путь в нашей конструкции определяется корректно.

Предложение 1. *Истинный путь f существует.*

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по высоте дерева m. Полагаем, что $f \upharpoonright 0 = \lambda$. Пусть $\alpha = f \upharpoonright m$ уже определено. Покажем, что путь $f(m)$ определяется единственным образом. Возможны две ситуации:

1) $|\alpha| = m = 2e$, то есть α является N-стратегией. Тогда $f(m) = \liminf_s \delta_s(m)$ в том смысле, что $(\exists^{<\infty} s)[\delta_s(m) <_L f(m)]$ и $(\exists^\infty s)[f(m) = \delta_s(m)]$. Следовательно, либо $f(m) = k_0$, где k_0 это номер цикла, который бесконечно часто переходит из состояния (7) в состояние (3) основного модуля, либо $f(m) = f$.

2) $|\alpha| = m = 2e+1$, то есть α есть P-стратегия. Тогда $f(m) = \liminf_s \delta_s(m)$, поскольку в данной ситуации предел всегда существует. Если $f(m) = 0$, то $(\exists^\infty s)[\alpha^\frown 0 \subseteq \delta_s]$, то есть основной модуль бесконечно часто переходит из состояния (4) в состояние (3). □

Предложение 2. *Все вершины $\alpha \subset f$ инициализируются конечное число раз.*

Доказательство. В процессе работы конструкции стратегия α может инициализироваться стратегиями β, которые либо $\beta <_L \alpha$, либо $\beta \subset \alpha$. В первом случае, так как $\alpha \subset f$, β может это делать только конечное число раз. Во втором случае, так как α находится под конечным выходом β для P-стратегии, α инициализируется конечное число раз; в противном случае β вообще не инициализирует вершину α. $\square$

Предложение 3. *Любая стратегия $\alpha \subset f$ для $\gamma \supset \alpha$ на истинном пути f создает конечный запрет $R(\alpha)$.*

Доказательство. Согласно нашему построению запреты могут быть наложены только со стороны N-стратегий. Пусть $\alpha \subset f$ это N-стратегия. Как было отмечено в разделе о выходах N-стратегий, если $\alpha^\frown f \subset f$, то общий запрет всех циклов $R(\alpha)$ существует и имеет конечный предел, то есть $R(\alpha) = \lim_s R(\alpha, s)$. Если $\alpha^\frown k_0 \subset f$, то общий запрет всех циклов $R(\alpha)$ может быть бесконечным в пределе, но существует конечный $\liminf_s R(\alpha, s) = R(\alpha)$. $\square$

Предложение 4. *Требования N_e для всех e вдоль истинного пути f удовлетворяются.*

Доказательство. Пусть $\alpha \subset f$ – произвольная N-стратегия, которая работает с требованием N_e под γ-стратегиями для требований P_i, $i < e$.

Пусть $\gamma^\frown 0 \subseteq \alpha$. Тогда основной модуль для γ-стратегии бесконечно часто переходит из (4) в (3). Стратегия α для требования N_e снабжена *«предположением»* о результатах попыток удовлетворения P_i для всех $i < e$, и α действует только тогда, когда это предположение *«кажется верным»*. Поэтому если α находится под бесконечным выходом γ-стратегии, то γ будет бесконечно часто удалять элементы из множества A, а затем снова перечислять их в A; в конечном итоге ни один элемент не будет навсегда удалён из A. В этом случае возможны только временные нарушения запретов со стороны γ-стратегий для требований P_i и α-стратегия продолжает работать дальше, игнорируя данные нарушения. Таким образом, требование N_e выполнено.

Пусть $\gamma^\frown 1 \subseteq \alpha$, то есть стратегия α находится под конечным выходом γ-стратегии для требования P_i, $i < e$. Тогда α-стратегия работает в предположении о том, что P-стратегия больше ничего не делает, то есть требования P_i не нарушают её запретов. Если все же P_i нарушает запреты, наложенные α-стратегией, то α инициализируется. По предложению 2 это может произойти только конечное число раз, поэтому фиксируем наименьший шаг s_0 такой, что α не инициализируется на шагах $\geqslant s_0$. Следовательно, на всех последующих α-шагах стратегии α уже ничто не будет мешать выполнить требование N_e. $\square$

Предложение 5. *Требования P_e для всех e вдоль истинного пути f удовлетворяются.*

Доказательство. Отметим, что стратегия прикрепления требований к вершинам дерева стратегий гарантирует, что вдоль любой бесконечной ветви расположены все требования P_e. Пусть $\alpha \subset f$ – произвольная P-стратегия. Применяя предложение 2, фиксируем наименьший шаг s_0 такой, что α не инициализируется на шагах $\geqslant s_0$. Пусть $\beta_0{}^\frown k_0 \subseteq \beta_1{}^\frown k_0 \subseteq \cdots \subseteq \beta_n{}^\frown k_0 \subseteq \alpha$, где β_i – все такие N-стратегии, что α находится под их бесконечными выходами. Так как $\alpha \subset f$, из предложения 3 вытекает, что запрет $R = \max\{R(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ конечен. Поскольку установка нового запрета сопровождается инициализацией всех стратегий, лежащих правее и ниже вдоль дерева, все вновь выбранные представители стратегии α после шага s_0 уже будут больше общего запрета R. Следовательно, на всех последующих α-шагах стратегии α уже ничто не будет мешать выполнить требование P_e. Поэтому стратегия α будет работать как раньше, то есть согласно своему описанию в основном модуле, и требование P_e, над которым она работает, будет выполнено. $\square$

На этом доказательство теоремы полностью завершено. $\square$

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.1515.2017/4.6.

Литература

1. *Хисамиев Н.Г.* Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физ.-матем. – 1981. – Т. 98, № 1. – С. 51–55.
2. *Khisamiev N.G.* Arithmetic hierarchy of abelian groups // Sib. Math. J. – 1988. – V. 29, No 6. – P. 987–999. – doi: 10.1007/BF00972425.
3. *Khisamiev N.G.* Constructive abelian groups // Stud. Logic Found. Math. – 1998. – V. 139. – P. 1177–1231. – doi: 10.1016/S0049-237X(98)80050-5.
4. *Downey R.G., Kach A.M., Turetsky D.* Limitwise monotonic functions and their applications // Proc. 11th Asian Logic Conf. – 2011. – P. 59–85. – doi: 10.1142/9789814360548_0004.
5. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* Computable models of theories with few models // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – V. 38, No 2. – P. 165–178. – doi: 10.1305/ndjfl/1039724885.
6. *Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A.* Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures // Proc. Am. Math. Soc. – 2013. – V. 141, No 9. – P. 3275–3289. – doi: 10.1090/S0002-9939-2013-11586-8.
7. *Kach A., Turetsky D.* Limitwise monotonic functions, sets, and degrees on computable domains // J. Symb. Logic. – 2010. – V. 75, No 1. – P. 131–154. – doi: 10.2178/jsl/1264433912.
8. *Зайнетдинов Д.Х., Калимуллин И.Ш.* О предельно монотонной сводимости Σ^0_2-множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 22–30.
9. *Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D.* Maximality and minimality under limitwise monotonic reducibility // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35, No 4. – P. 333–338. – doi: 10.1134/S1995080214040155.
10. *Зайнетдинов Д.Х.* Предельно монотонная сводимость на множествах и парах множеств // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 3. – С. 97–101.
11. *Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure Appl. Logic. – 2005. – V. 136, No 3. – P. 219–246. – doi: 10.1016/j.apal.2005.02.001.
12. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г.* О сводимости на семействах // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 1. – С. 31–53.
13. *Зайнетдинов Д.Х.* Σ-сводимость и lm-сводимость множеств и последовательностей множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 51–65.

Поступила в редакцию
24.12.17

Зайнетдинов Дамир Хабирович, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *damir.zh@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 3, pp. ???–???

Structural Properties of Limitwise Monotonic Reducibility of Sequences of Sets

D.Kh. Zainetdinov

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *damir.zh@mail.ru*

Received December 24, 2017

Abstract

The paper is devoted to the study of limitwise monotonic sets, as well as to the investigation of the main structural properties of limitwise monotonic reducibility (lm-reducibility) between set and sequence of sets. Limitwise monotonic reducibility can be regarded as a special case of Σ-reducibility defined on families of initial segments of natural numbers. In this paper, lm-reducibility between set and sequence consisting of infinite sets has been considered in the language of the limitwise monotonic operator. The main result of this paper is the proof of the absence of the least non-limitwise monotonic sequence with respect to lm-reducibility between set and sequence of sets. This result as been proved with the help of the infinite injury priority method with the use of the tree of strategies. The result presented in this paper is a generalization of the result that there are no least non-limitwise monotonic Σ_2^0-set under lm-reducibility of sets.

Keywords: limitwise monotonic function, limitwise monotonic set, limitwise monotonic operator, limitwise monotonic reducibility, sequence of sets, Σ_2^0-set

Acknowledgments. The research was funded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities, project no. 1.1515.2017/4.6.

References

1. Khisamiev N.G. Criterion for constructivizability of a direct sum of cyclic p-groups. *Izv. Akad. Nauk Kaz. SSR Ser. Fiz.-Mat.*, 1981, vol. 98, no. 1, pp. 51–55. (In Russian)
2. Khisamiev N.G. Arithmetic hierarchy of abelian groups. *Sib. Math. J.*, 1988, vol. 29, no. 6, pp. 987–999. doi: 10.1007/BF00972425.
3. Khisamiev N.G. Constructive abelian groups. *Stud. Logic Found. Math.*, 1998, vol. 139, pp. 1177–1231. doi: 10.1016/S0049-237X(98)80050-5.

4. Downey R.G., Kach A.M., Turetsky D. Limitwise monotonic functions and their applications. *Proc. 11th Asian Logic Conf.*, 2011, pp. 59–85. doi: 10.1142/9789814360548_0004.

5. Khoussainov B., Nies A., Shore R. Computable models of theories with few models. *Notre Dame J. Formal Logic.*, 1997, vol. 38, no. 2, pp. 165–178. doi: 10.1305/ndjfl/1039724885.

6. Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A. Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2013, vol. 141, no. 9, pp. 3275–3289. doi: 10.1090/S0002-9939-2013-11586-8.

7. Kach A., Turetsky D. Limitwise monotonic functions, sets, and degrees on computable domains. *J. Symb. Logic.*, 2010, vol. 75, no. 1, pp. 131–154. doi: 10.2178/jsl/1264433912.

8. Zainetdinov D.Kh., Kalimullin I.Sh. On limitwise monotonic reducibility of Σ^0_2-sets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 1, pp. 22–30. (In Russian)

9. Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D. Maximality and minimality under limitwise monotonic reducibility. *Lobachevskii J. Math.*, 2014, vol. 35, no. 4, pp. 333–338. doi: 10.1134/S1995080214040155.

10. Zainetdinov D.Kh. Limitwise monotonic reducibility on sets and on pairs of sets. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 3, pp. 85–88. doi: 10.3103/S1066369X16030117.

11. Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R. Enumerations in computable structure theory. *Ann. Pure Appl. Logic*, 2005, vol. 136, no. 3, pp. 219–246. doi: 10.1016/j.apal.2005.02.001.

12. Kalimullin I.Sh., Puzarenko V.G. Reducibility on families. Algebra Logic, 2009, vol. 48, no. 1, pp. 20–32. doi: 10.1007/s10469-009-9037-1.

13. Zainetdinov D.Kh. Σ-reducibility and lm-reducibility of sets and sequences of sets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 51–65. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Зайнетдинов Д.Х.* Структурные свойства предельно монотонной сводимости последовательностей множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. ???–???.

***For citation*:** Zainetdinov D.Kh. Structural properties of limitwise monotonic reducibility of sequences of sets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. ???–???. (In Russian)