

УДК 517.95

**КВАЗИДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА  
С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

О. Абдулвохид<sup>1</sup>, Д.С. Сафаров<sup>2</sup>

<sup>1</sup> vohid161090@mail.ru; Бохтарский государственный университет, Таджикистан

<sup>2</sup> safarov-5252@mail.ru; Бохтарский государственный университет, Таджикистан

*В работе для одного класса эллиптической систем второго порядка находится квазидвокопериодическое решение с помощью аппарата теории эллиптических функций.*

**Ключевые слова:** двокопериодические, квазидвокопериодические, циклические постоянные.

В работе [1] для эллиптической системы вида [2]

$$w_{\bar{z}z} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w_z + c(z)w = f(z),$$

при довольно общих условиях на коэффициенты и правую часть было доказано, что задача существования и нахождения двокопериодических решений с периодами  $h_1, h_2, \text{Im}(h_2/h_1) \neq 0$ , фредгольмова в пространстве Соболева  $W_p^2(\Omega)$ ,  $p > 2$ , где  $\Omega$  — один из параллелограммов периодов.

При решении задачи были использованы интегральные операторы с ядрами, являющимися эллиптическими функциями Вейерштрасса  $\zeta(z), \sigma(z)$  [3], построенными на периодах  $h_1, h_2$ , которые имеют вид

$$T_\zeta \varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \varphi(t) \zeta(t-z) d_t \Omega, \quad T_\sigma \rho = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-D)}{\sigma(-D)\sigma(t-z)} d_t \Omega,$$

причём  $D$  не является периодом. Свойства операторов  $T_\zeta \varphi, T_\sigma \rho$  изучены в [4].

В данной заметке для одного частного случая уравнения вида

$$w_{\bar{z}z} + b(z)w_z = f(z), \tag{1}$$

где  $a(z), b(z)$  — двокопериодические функции с периодами  $h_1, h_2$ , принадлежащие классу  $L_p(\bar{\Omega})$ ,  $p > 2$ ,  $\Omega$  — основной параллелограмм периодов решетки  $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые числа}\}$ , будем исследовать, задачи существования и нахождения решений уравнения, удовлетворяющих условию

$$w(z+h_1) = w(z) + c_1, \quad w(z+h_2) = w(z) + c_2, \tag{2}$$

где  $c_1, c_2$  — постоянные. Если  $w(z)$  удовлетворяет условию (2) и  $w(z) \in C^2$ , то  $w_z$  и  $w_{\bar{z}}$  — двокопериодические функции. Из этого утверждения следует

**Лемма.** *Если  $w(z)$  — решение задачи (1), (2), то необходимо, чтобы  $b(z), f(z)$  были двокопериодическими функциями с периодами  $h_1, h_2$ .*

При обозначении  $w_z = \varphi(z)$ , мы ищем двокопериодические решения уравнения вида

$$\varphi_{\bar{z}} + b(z)\varphi = f(z). \tag{3}$$

Общее решение уравнения (1) зависит от значения  $b_0$ :  $b_0 \in \Gamma$ , и  $b_0 \bar{\in} \Gamma$ , где

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} b(z) d\Omega.$$

Пусть  $b_0 \bar{\in} \Gamma$ . Тогда, как показано в [4], уравнение (3) однозначно разрешимо при любой правой части  $f(z) \in L_p^*$ ,  $p > 2$  и его решение имеет вид

$$w_z = \frac{1}{\pi} \exp[-T\zeta + dz] \iint_{\Omega} f(t) \exp[T\zeta - dz] \frac{\sigma(t-z-D)}{\sigma(-D)\sigma(t-z)} d_t\Omega = g(f(z)), \quad (4)$$

где постоянные  $d, D$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} dh_1 + \eta_1 D = b\bar{h}_1, \\ dh_2 + \eta_2 D = b\bar{h}_2. \end{cases}$$

Эта система уравнений, благодаря соотношению Лежандра  $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$ ,  $\eta_j = 2\zeta(h_j/2)$ ,  $j = 1, 2$ , — циклические постоянные [3], имеет единственное решение

$$d = \frac{b}{2i\Omega_0} (\eta_2 \bar{h}_2 - \eta_1 \bar{h}_1), \quad D = -b \frac{\Omega_0}{\pi}, \quad \Omega_0 = \text{mes}\Omega = |h_1|^2 \text{Im}(h_2/h_1).$$

С учетом (4), мы получим неоднородное уравнение анти-Коши-Римана [4]

$$w_z = g(f(z)) = g_1(z). \quad (5)$$

В этом случае, как показано в [4], все решение уравнения (5) можно представить в виде

$$w(z) = \Phi(\bar{z}) - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} g_1(t) \overline{\zeta(t-z)} d_t\Omega, \quad (6)$$

где  $\Phi(\bar{z})$  — искомая квазиантианалитическая функция и удовлетворяющая условию (2)

$$\Phi(\bar{z} + \bar{h}_j) = \Phi(\bar{z}) + \bar{\eta}_j g_1^0 + c_j, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

где  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$  — циклические постоянные, функции  $\zeta(\bar{z})$  вместе с  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  связаны сопряженным соотношением Лежандра  $\bar{\eta}_1 \bar{h}_2 - \bar{\eta}_2 \bar{h}_1 = -2\pi i$ ,

$$g_1^0 = \iint_{\Omega} g_1(t) d_t\Omega.$$

Функцию  $\Phi(\bar{z})$  будем искать в виде

$$\Phi(\bar{z}) = A\bar{z} + \omega(\bar{z}), \quad (8)$$

где антианалитическая функция  $\omega(\bar{z})$  и постоянное  $A$  — искомые. Подставляя (8) в (7), получим, что  $\omega(\bar{z})$  должна удовлетворять условиям

$$\omega(\bar{z} + \bar{h}_j) - \omega(\bar{z}) = \bar{\eta}_j g_1^0 - A\bar{h}_j + c_j, \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Теперь в этом равенстве, используя соотношения Лежандра, берем  $A$  и  $g_1^0$  как решение системы уравнений

$$\begin{cases} A\bar{h}_1 + \bar{\eta}_1 g_1^0 = c_1, \\ A\bar{h}_2 + \bar{\eta}_2 g_1^0 = c_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим  $A$  и  $g_1^0$ :

$$A = -\frac{1}{2\pi i}(c_2\bar{\eta}_1 - c_1\bar{\eta}_2), \quad g_1^0 = \frac{1}{2\pi i}(c_1\bar{h}_2 - c_2\bar{h}_1). \quad (10)$$

Условия (9) являются необходимым и достаточным условием для разрешимости уравнения (1). Если выполнены эти условия, то антианалитическая функция  $\omega(\bar{z})$  в силу теоремы Лиувилля [2], является постоянной, то есть  $\omega(\bar{z}) \equiv c - \text{const}$ .

**Теорема.** Пусть в уравнения (1)  $b_0 \in \Gamma$ . Тогда для разрешимости задачи (1), (2) в классе регулярных и ограниченных функций необходимо и достаточно, чтобы

$$g_1^0 = \iint_{\Omega} g_0[f(z)] d_t \Omega = \frac{1}{2\pi i}(c_1\bar{h}_2 - c_2\bar{h}_1).$$

При этом, все решения уравнений (1) имеют вид

$$w(z) = c + A\bar{z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} g_1(t) \overline{\zeta(t-z)} d\Omega,$$

где  $c$  — произвольная постоянная, функция  $g_1(z)$  имеет вида (4), а постоянная  $A$  — вид (10).

## Литература

1. Сафаров Д.С. Двойкопериодические решения эллиптических систем второго порядка // ДАН РТ. – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 181-187.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
3. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1971. – 304 с.
4. Сафаров Д.С. Двойкопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. – Душанбе, 2012. – 190 с.
5. Сафаров Д.С. Двойкопериодические обобщенные аналитические функции // Дифф. уравн. – 1991. – Т. 27, № 4. – С. 656-664.

## QUASI-DOUBLE-PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

O. Abdolvokhid, D.S. Safarov

*For one class of second-order elliptic systems, we find a quasi-double-periodic solution using the theory of elliptic functions.*

Keywords: quasi-double-periodic, cyclic constants, doubly-periodic.

УДК 517.95

## О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ю.Р. Агачев<sup>1</sup>, А.В. Гуськова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> jagachev@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> anyshkaflower@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе исследуется задача типа Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения с дробными производными Римана–Лиувилля. Для указанной задачи на базе пространства Лебега суммируемых с некоторой степенью функций предлагается пара пространств искомых элементов и правых частей корректной ее постановки.*

**Ключевые слова:** пространство Лебега, дифференциальное уравнение, дробная производная, задача типа Коши, корректная постановка.

Пусть  $m, p \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq \alpha < m + 1$ . Рассматривается задача типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha-k-1} x)(a) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (1)$$

для обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$(D_{a+}^{\alpha} x)(t) + \sum_{k=1}^m q_k(t) (D_{a+}^{\alpha-k} x)(t) = y(t), \quad -\infty < a < t \leq b < +\infty, \quad (2)$$

где  $q_k(t)$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $y(t)$  — известные,  $x(t)$  — искомая функции на  $[a, b]$ ;  $(D_{a+}^{\beta} x)(t)$  есть производная (левосторонняя) Римана–Лиувилля порядка  $\beta$  функции  $x(t)$ :

$$(D_{a+}^{\beta} x)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(r-\beta)} \frac{d^r}{dt^r} \int_a^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta-r+1}}, \quad r = [\beta] + 1,$$

$\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция Эйлера.

Будем предполагать, что известные функции  $q_k(t)$ ,  $k = \overline{1, m}$  и  $y(t)$  принадлежат пространству  $L_p(a, b)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , функций, интегрируемых по Лебегу на  $[a, b]$  со степенью  $p$ . Тогда задачу (1), (2) можно рассматривать в паре пространств  $(X, Y)$  искомых элементов и правых частей соответственно, где  $Y = L_p \equiv L_p(a, b)$ , а  $X = I_{a+}^{\alpha}(L_p)$  — пространство функций  $f(t)$ , представимых в виде левостороннего дробного интеграла Римана–Лиувилля порядка  $\alpha$  от функции из  $L_p$ :

$$f(t) = (I_{a+}^{\alpha} \varphi)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(r-1+\alpha)} \int_a^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{r-\alpha}}, \quad r = [\alpha] + 1,$$

Заметим, что такой выбор пространства  $X$  искомых элементов вполне естествен, поскольку, как следует из теоремы 2.3 монографии [1, с. 49], для функций из  $X$  выполняются начальные условия (1). В пространствах  $X$  и  $Y$  норму зададим следующим образом:

$$\|y\|_Y \equiv \|y\|_p = \left\{ \int_a^b |y(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad \|x\|_X = \|x\|_p + \|I_{a+}^\alpha x\|_p \quad (y \in Y, x \in X).$$

Таким образом, в выбранной паре  $(X, Y)$  задача (1), (2) может быть записана в операторной форме

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (3)$$

где

$$(Gx)(t) = D_{a+}^\alpha x(t), \quad (Tx)(t) = \sum_{k=1}^m q_k(t) (D_{a+}^{\alpha-k} x)(t), \quad x \in X. \quad (4)$$

Оператор  $G: X \rightarrow Y$  в (4) обладает свойством: из того, что  $x \in X$ , т. е.  $x = I_{a+}^\alpha z, z \in L_p$ , следует

$$(Gx)(t) = (D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha z)(t) = z(t), \quad x \in X, z \in L_p.$$

С другой стороны,  $(I_{a+}^\alpha Gx)(t) = (I_{a+}^\alpha z)(t) = x(t), x \in X$ . Следовательно,  $G: X \rightarrow Y$  имеет обратный  $G^{-1} = I_{a+}^\alpha: Y \rightarrow X$ . При этом, как нетрудно видеть, обратный оператор обладает свойством непрерывности.

Далее, оператор  $T: X \rightarrow Y$ , определенный в (4), вполне непрерывен. Этот результат вытекает из свойств дробно-дифференциального оператора Римана–Лиувилля порядка меньше  $\alpha$  (см. в [1, с. 65, теорема 3.6]). Тем самым, установлено, что уравнение (3) в паре  $(X, Y)$  является уравнением, приводящимся к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Следовательно, к этому уравнению применима теория Фредгольма, что дает, в свою очередь, корректную постановку в паре пространств  $(X, Y)$  задачи типа Коши (1) для обыкновенного дифференциального уравнения (2) с дробной производной Римана–Лиувилля в главной части.

Отметим, что в случае  $\alpha = m$  задача (1), (2) представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения  $m$ -го порядка с коэффициентами из  $L_p$ . В этом случае, очевидно, пространство  $X$  совпадает с пространством Соболева функций, имеющих производную  $m$ -го порядка из  $L_p(a, b)$  и удовлетворяющих начальным условиям задачи.

## Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

## ON THE CORRECT FORMULATION OF A CAUCHY TYPE PROBLEM FOR A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Y.R. Agachev, A.V. Guskova

*In the paper we investigate a Cauchy type problem for an ordinary differential equation with fractional Riemann-Liouville derivatives. For the problem, on the base of the Lebesgue space of summable with some degree functions, it is proposed a pair of spaces of the desired elements and of the right parts for its correct setting.*

Keywords: Lebesgue space, differential equation, fractional derivative, Cauchy type problem, correct setting.

УДК 517.968

**О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В ПАРЕ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА**

Ю.Р. Агачев<sup>1</sup>, М.Ю. Першагин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> *mpershagin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В работе предлагается пара пространств Соболева со специальными весами Якоби–Гегенбауэра, в которой общая краевая задача для класса обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, характеризуемых положительностью разности порядков внутреннего и внешнего дифференциальных операторов, корректно поставлена по Адамару.*

**Ключевые слова:** пространство Соболева, вес Якоби–Гегенбауэра, интегро-дифференциальное уравнение, общая краевая задача, корректная постановка.

Пусть  $m + 1, p \in \mathbb{N}, p > m$ . Рассматривается общая линейная краевая задача

$$R_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^m g_k(t)x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^p \int_{-1}^{+1} h_j(t, s)x^{(j)}(s) ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

где  $\{R_i\}$  — линейно-независимые функционалы на пространстве  $(m-1)$ -раз непрерывно дифференцируемых на сегменте  $[-1, 1]$  функций,  $y(t)$ ,  $g_k(t)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , и  $h_j(t, s)$ ,  $j = \overline{0, p}$ , — известные функции в своих областях определения.

Пусть  $\rho_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , — вес Якоби–Гегенбауэра,  $q_l(t) = \rho_{\alpha+l}(t)$ ,  $l+1 \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $L_{2, q_l} \equiv L_{2, q_l}(-1, 1)$  — пространство Лебега функций, квадратично-суммируемых с весом  $q_l(t)$  в промежутке  $(-1, 1)$ ,  $W^r L_{2, q_r} \equiv W^r L_{2, q_r}[-1, 1]$  — пространство Соболева функций  $f(t) \in L_{2, \rho_\alpha}$ , имеющих производные  $f^{(l)}(t) \in L_{2, q_l}$ ,  $1 \leq l \leq r$ . Норму в пространстве  $W^r L_{2, q_r}$  зададим по формуле

$$\|f\|_{r, 2, q_r} = \left( \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^r q_l(t) |f^{(l)}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

С этой нормой пространство  $W^r L_{2, q_r}$  является банаховым. Введем также пространство  $W^p L_{2, q_r} \equiv W^p L_{2, q_r}[-1, 1]$ ,  $r = p - m \leq 1$ , непрерывных функций  $f(t)$ , для кото-

рых существует производная  $f^{(m)}(t) \in W^r L_{2,q_r}$ . В этом пространстве зададим полунорму по формуле

$$\|f\|_{p;2,q_r} = \|f^{(m)}\|_{r;2,q_r}. \quad (3)$$

Задачу (1), (2) будем рассматривать в паре пространств  $(X, Y)$ , где  $X = \overset{\circ}{W}^p L_{2,q_r}$  — подпространство функций из  $W^p L_{2,q_r}$ , удовлетворяющих краевым условиям (1), а  $Y = W^r L_{2,q_r}$ , где  $r = p - m \geq 1$ . Это возможно, если на известные функции наложить определенные условия гладкостного характера (соответствующие условия приведены ниже). В пространстве  $X$  полунорма (3) представляет собой норму, по которой, очевидно,  $X$  становится полным.

В паре пространств  $(X, Y)$  исходная задача может быть записана в операторном виде:

$$Kx \equiv Dx + Gx + Hx = y \quad (x \in X, y \in Y), \quad (4)$$

где

$$Dx \equiv x^{(m)}(t), \quad Gx \equiv (Gx)(t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) x^{(m-k)}(t),$$

$$Hx \equiv (Hx)(t) = \sum_{j=0}^p \int_{-1}^{+1} h_j(t, s) x^{(j)}(s) ds.$$

Следует отметить, что при исследовании корректной постановки задачи без ограничения общности можно считать краевые условия (1) начальными [1], т. е.

$$x^{i-1}(-1) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1')$$

Ясно, что оператор  $D: X \rightarrow Y$  имеет непрерывный обратный  $D^{-1}: Y \rightarrow X$ , определяемый через  $m$ -кратный интеграл в случае начальных условий (1'), причем

$$\|D\|_{X \rightarrow Y} = \|D^{-1}\|_{Y \rightarrow X} = 1.$$

Пусть известные функции обладают свойствами:  $g_k \in Y, k = \overline{1, m}, h_j \in Y, j = \overline{0, p}$  (по переменной  $t$ ); по переменной  $s$ :  $h_j \in L_1(a, b), j = \overline{0, m-1}, h_j \in L_{2, \rho_{m-\alpha-j}}, j = \overline{m, p}$ . Тогда операторы  $G: X \rightarrow Y$  и  $H: X \rightarrow Y$  вполне непрерывны. Этот факт вытекает из критерия компактности множества в весовом пространстве Лебега.

Таким образом, уравнение (4) в паре банаховых пространств  $(X, Y)$ , приводится к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Следовательно, уравнение (4), а вместе с ним и задача (1), (2), относится к корректно поставленным в смысле Адамара.

## Литература

1. Агачев Ю. Р., Першагин М. Ю. *Корректная постановка условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре невесовых пространств Соболева* // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 8. – С. 80–85.

ON THE WELL-POSEDNESS OF A GENERAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM  
FOR A CLASS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS  
IN A PAIR OF SOBOLEV WEIGHTED SPACES

J.R. Agachev, M.Yu. Pershagin

*In this paper, we propose a pair of Sobolev spaces with special Jacobi–Gegenbauer weights, in which the general boundary–value problem for a class of ordinary integro–differential equations, characterized by a positivity of the difference between the orders of the inner and outer differential operators, is well–posed according to Hadamard.*

Keywords: Sobolev space, Jacobi–Gegenbauer weight, integro–differential equation, general boundary–value problem, well–posedness.

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ  
ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ  
ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ**

О.Л. Александрова<sup>1</sup>, И.С. Балафендиева<sup>2</sup>, Л.Р. Секаева<sup>3</sup>, М.Р. Шамим<sup>4</sup>

<sup>1</sup> alexanderova.o@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> e\_xo@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>3</sup> lrsekaeva@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>4</sup> shamimta@aol.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе предлагается методика расчета деформирования упругопластического деформирования элементов трехмерных конструкций на основе определяющих соотношений между приращениями истинных напряжений и деформаций. Решены: нестационарная неизотермическая задача насадки модели ротора турбокомпрессора на вал и задача деформирования клинч-соединений в процессе их изготовления и эксплуатации.*

**Ключевые слова:** упругопластическое деформирование, контактный элемент, многослойная пластина.

В работе вводятся в рассмотрение так называемые «истинные» деформации, т. е. для конечных деформаций за меру деформаций принимаются три деформации удлинений и три составляющие сдвиговых деформаций. Вводятся в рассмотрение так называемые обобщенные напряжения, отнесенные к единицам соответствующих площадей до деформации тела, и «истинные» напряжения, отнесенные к единицам соответствующих площадей после деформации тела. На основе построенных соотношения предложен алгоритм решения вариационной задачи трехмерной теории упругости, описана конечно-элементная методика решения трехмерных задач механики деформируемого твердого тела. Разработана и реализована конечно-элементная методика решения неизотермических трехмерных задач с односторонним контактом, построен специальный контактный элемент. Реализована методика решения нестационарной задачи термоупругого взаимодействия элементов и трехмерных конструкций.

Решены практические задачи упругопластического деформирования взаимодействующих между собой элементов трехмерных конструкций: нестационарная



неизотермическая задача насадки модели ротора турбокомпрессора на вал; задача деформирования клинч-соединений в процессе их изготовления и эксплуатации.

Построен конечно-элементный алгоритм расчета ортотропных и многослойных оболочек, взаимодействующих с элементами трехмерных конструкций при термосиловом воздействии. Методика решения нестационарной задачи термоупругого взаимодействия элементов конструкций распространена на решение задач деформирования многослойных оболочек.

Решен ряд тестовых задач изгиба многослойных пластин, а также решена практическая задача деформирования взаимодействующего с оснасткой корпуса многослойного конического обтекателя при термосиловом нагружении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан рамках научных проектов №18-41-160018 и №18-41-160021.

#### RESEARCH OF PROCESSES OF DEFORMATION OF THE INTERACTING THREE-DIMENSIONAL ELEMENTS OF DESIGNS AT THERMOPOWER LOADING

O.L. Alexandrova, I.S. Balafendieva, L.R. Sekaeva, M.R. Shamim

*The method of calculation of deformation of elasto-plastic deformation of elements of three-dimensional designs on the basis of the defining ratios between increments of true tension and deformations is offered. There are solved: a non-stationary not isothermal problem of a nozzle of model of a rotor of a turbocompressor on a shaft and a problem of deformation a clinch connections in the course of their production and operation.*

Keywords: elasto-plastic deformation, contact element, multilayered plate.

УДК 514.74; 517.98

### О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ПЛОСКИМИ МНОЖЕСТВАМИ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ И НЕКОТОРЫМИ ОДНОМЕРНЫМИ ВЕЙВЛЕТАМИ

Е.С. Алексеева<sup>1</sup>, А.Э. Рассадин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> kometarella@mail.ru; Независимый Московский университет

<sup>2</sup> brat\_ras@list.ru; Нижегородское математическое общество

*Задачи, связанные с выпуклыми фигурами на плоскости, уже почти сто лет активно используются в работе математических кружков для школьников и студентов младших курсов в качестве пропедевтики дискретной и комбинаторной геометрии, а теория вейвлетов лишь в последние два десятилетия стала входить в материал спецкурсов по функциональному анализу и цифровой обработке сигналов. В статье приведены примеры фигур постоянной ширины на плоскости, поставленных в соответствие вейвлетам Хаара и вейвлетам Добеши второго порядка. Построенные примеры указывают на существование скрытых взаимосвязей между этими двумя формально весьма далёкими разделами математики.*

**Ключевые слова:** опорная функция, масштабирующая функция, преобразование Фурье.

Теория выпуклых фигур, зародившаяся в XIX веке в работах О. Коши и Я. Штейнера, получила своё концептуальное оформление после выхода в 1910 г. книги

Г. Минковского [1]. В том же году А. Хааром была опубликована в виде статьи [2] его кандидатская диссертация, выполненная под руководством Д. Гильберта, положившая начало теории вейвлетов. Более века две эти важные отрасли математики развивались совершенно независимо друг от друга. И только сейчас авторам статьи удалось обнаружить связь между ними.

Как хорошо известно [3], для построения ортогонального кратномасштабного разложения в  $L^2(R)$  необходимо наличие масштабирующей функции  $\phi(x) \in L^2(R)$ , которая должна подчиняться масштабирующему уравнению:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h_n \phi(2x - n), \quad (1)$$

где бесконечномерный вектор  $(\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots) \in l_2$  и называется масштабирующим фильтром [3].

Преобразование Фурье от формулы (1) приводит к появлению  $2\pi$ -периодической частотной функции  $H_0(\omega) \in L^2([0, 2\pi])$  для  $\phi(x)$  [3]:

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h_n \exp(-i n \omega), \quad (2)$$

и если целочисленные сдвиги масштабирующей функции  $\phi(x - n)$ ,  $n \in Z$  образуют ортонормированный базис в некотором подпространстве  $V_0 \subset L^2(R)$ , то функция (2) удовлетворяет соотношению

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\pi + \omega)|^2 = 1 \quad (3)$$

почти всюду [3].

С другой стороны, выпуклое множество  $K$  единичной ширины характеризуется следующим образом [4]:

$$p(\omega) + p(\pi + \omega) = 1, \quad (4)$$

где  $p(\omega)$  –  $2\pi$ -периодическая опорная функция множества  $K$ , с помощью которой граница этого выпуклого множества  $K$  определяется согласно [4] по формулам:

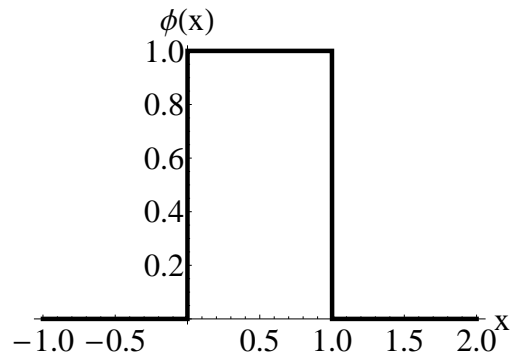
$$x = p(\omega) \cos \omega - p'(\omega) \sin \omega \quad y = p(\omega) \sin \omega + p'(\omega) \cos \omega. \quad (5)$$

Сравнивая формулы (3) и (4), легко видеть, что по заданной частотной функции (2) выпуклое множество с границей (5) может быть определено, если положить его опорную функцию равной  $p(\omega) \equiv |H_0(\omega)|^2$ .

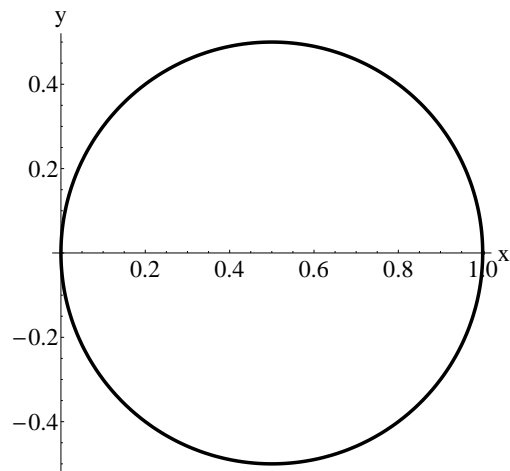
Начнём применение этой схемы с самых первых из введённых вейвлетов – вейвлетов Хаара [2]. Масштабирующей функцией для них является решение функционального уравнения (1) со следующими ненулевыми коэффициентами:  $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  [3]. Её график приведён на рис. 1. Частотная функция для вейвлетов Хаара согласно формуле (2) равна  $H_0(\omega) = \frac{1 + \exp(-i\omega)}{2}$ .

Из всего сказанного выше следует, что справедлива

**Теорема 1.** *Вейвлетам Хаара можно поставить в соответствие выпуклую фигуру единичной ширины, параметрические уравнения границы которой получаются по*



**Рис. 1.** Масштабирующая функция для вейвлетов Хаара

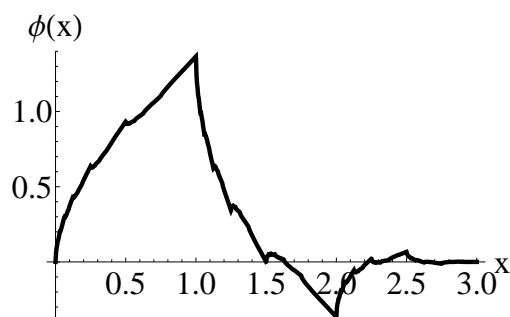


**Рис. 2.** Выпуклая фигура единичной ширины, соответствующая вейвлетам Хаара

формулам (5) из опорной функции  $p(\omega) = \cos^2 \frac{\omega}{2}$ :

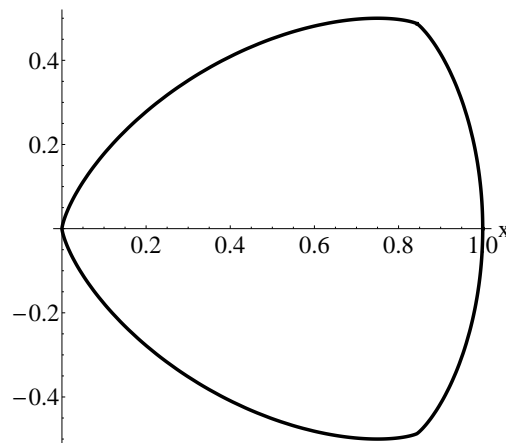
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega \quad y = \frac{1}{2} \sin \omega. \quad (6)$$

Кривая (6) есть не что иное как окружность. Её график представлен на рис. 2.



**Рис. 3.** Масштабирующая функция для вейвлетов Добеши второго порядка

Другими довольно простыми вейвлетами являются вейвлеты Добеши второго порядка. Ненулевые коэффициенты масштабирующего фильтра для этих вейвле-



**Рис. 4.** Выпуклая фигура единичной ширины, соответствующая вейвлетам Добеши второго порядка

тов равны [3]:  $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ,  $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ,  $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ,  $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ . График решения масштабирующего уравнения (1) с этими коэффициентами приведён на рис. 3. По формуле (2) найдём частотную функцию для вейвлетов Добеши второго порядка:  $H_0(\omega) = \frac{(1+\exp(-i\omega))^2}{8} [1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) \exp(-i\omega)]$ . Это означает, что верна

**Теорема 2.** Вейвлетам Добеши второго порядка можно поставить в соответствие выпуклую фигуру единичной ширины, параметрические уравнения границы которой получаются по формулам (5) из опорной функции  $p(\omega) = \cos^4 \frac{\omega}{2} (1 + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2})$ :

$$x = \frac{9}{16} + \frac{\cos \omega}{2} - \frac{\cos 2\omega}{8} + \frac{\cos 4\omega}{16} \quad y = \frac{\sin \omega}{2} + \frac{\sin 2\omega}{8} + \frac{\sin 4\omega}{16}. \quad (7)$$

График кривой (7) представлен на рис 4.

Обе выпуклые фигуры – и на рис. 2, и на рис. 4, – могут вращаться внутри квадрата с единичной стороной, касаясь при этом его сторон в четырёх различных точках. Таким образом, в статье доказаны две теоремы, демонстрирующие скрытые связи симметричных объектов (выпуклых фигур единичной ширины на плоскости) с сильнонесимметричными нерегулярными объектами (одномерными вейвлетами).

Перспективой данной работы является дальнейший поиск примеров соответствия одномерных вейвлетов и плоских фигур постоянной ширины. Однако при этом всегда надо проверять справедливость неравенства  $p(\omega) + p''(\omega) \geq 0$ , выражающего необходимое и достаточное условие того, что  $2\pi$ -периодическая функция  $p(\omega)$  является опорной функцией некоторого выпуклого множества  $K$  (см. [4] и ссылки там). Очевидно, что в теоремах 1 и 2 это условие выполняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-01356-а).

## Литература

1. Minkovski H. *Geometrie der Zahlen*. – Leipzig: Teubner, 1910. – 264 s.

2. Haar A. *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* // Math. Ann. – 1910. – Bd. 69. – № 3. – S. 331–371.
3. Смоленцев Н. К. *Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB*. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 448 с.
4. Сантало Л. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*. – М.: Наука, 1983. – 360 с.

## ON CORRESPONDENCE BETWEEN SOME PLANE CONVEX REGIONS WITH CONSTANT WIDTH AND SOME ONE-DIMENSIONAL WAVELETS

E.S. Alekseeva, A.E. Rassadin

*During almost a hundred years tasks connected with plane convex regions are actively used in work of mathematical communities for students and schoolchildren as an introduction into problems of discrete and combinatorial geometry. But only in this century wavelet theory has been included into content of special courses concerning functional analysis and digital signal processing. In this paper examples of plane convex regions with constant width corresponding to the Haar wavelet and to the Daubechies wavelet of the second order have been constructed. These examples give an evidence of existence of hidden interrelations between these two formally far from each other branches of mathematics.*

Keywords: the support function, the scaling function, the Fourier transform.

УДК 517.51; 514.172.2; 510.2

## О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТРЕУГОЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ И МНОЖЕСТВОМ КАНТОРА

Е.С. Алексеева<sup>1</sup>, А.Э. Рассадин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> kometarella@mail.ru; Независимый Московский университет

<sup>2</sup> brat\_ras@list.ru; Нижегородское математическое общество

*В статье построен наглядный пример, демонстрирующий скрытую взаимосвязь хаотического и детерминированного в математических моделях окружающего нас мира. Отталкиваясь от интерпретации сингулярной меры на канторовом множестве на отрезке  $[0, 1]$  как масштабирующей функции вейвлета с параметром сжатия  $N = 3$ , на основе фильтров этого последнего сконструировано треугольное множество, то есть выпуклое множество, которое может вращаться внутри равностороннего треугольника, одновременно касаясь каждой из его сторон.*

**Ключевые слова:** опорная функция, результат, философия математики.

Рассмотрим последовательность функций  $\phi_n : R \rightarrow R$ , задаваемую следующим рекуррентным соотношением:

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{3}{2}\phi_n(3x) + \frac{3}{2}\phi_n(3x-2). \quad (1)$$

Если начать выполнять итерации по формуле (1) с функции  $\phi_0(x) = \theta(x)\theta(1-x)$ , где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда, то легко убедиться, что  $\phi_1(x)$  принимает ненулевое значение, равное  $\frac{3}{2}$ , на множестве  $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ ,  $\phi_2(x)$  принимает ненулевое значение, равное  $(\frac{3}{2})^2$ , на множестве  $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$  и. т. д. Таким образом, в

рамках алгоритма (1) последовательные приближения приводят к сингулярной мере  $\phi(x)$ , сосредоточенной на отрезке  $[0, 1]$  в точках канторова множества и являющейся решением функционального уравнения [1]:

$$\phi(x) = \frac{3}{2} \phi(3x) + \frac{3}{2} \phi(3x - 2). \quad (2)$$

С другой стороны, формулу (2) можно рассматривать как масштабирующее уравнение для проведения кратномасштабного вейвлет-анализа с параметром сжатия  $N = 3$ .

По масштабирующей функции  $\phi(x)$  с помощью стандартной техники [2] легко построить соответствующие ей вейвлеты:

$$\psi^1(x) = \sqrt{3} \phi(3x - 1), \quad \psi^2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \phi(3x) - \sqrt{\frac{3}{2}} \phi(3x - 2). \quad (3)$$

Невзирая на своеобразную функциональную трактовку масштабирующей функции  $\phi(x)$  и вейвлетов (3), они могут быть использованы для вейвлет-анализа сигналов в рамках обычных процедур (см. [2] и ссылки там).

Выполняя преобразование Фурье обеих частей каждого из равенств (2) и (3) (фурье-образы обозначены буквами с тильдами), получим:

$$\tilde{\phi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{3}\right) \tilde{\phi}\left(\frac{\omega}{3}\right), \quad \tilde{\psi}^1(\omega) = H_1\left(\frac{\omega}{3}\right) \tilde{\phi}\left(\frac{\omega}{3}\right), \quad \tilde{\psi}^2(\omega) = H_2\left(\frac{\omega}{3}\right) \tilde{\phi}\left(\frac{\omega}{3}\right), \quad (4)$$

где введены так называемые частотные функции [2]:

$$H_0(\omega) = \frac{1 + \exp(-2i\omega)}{2}, \quad H_1(\omega) = \frac{\exp(-i\omega)}{\sqrt{3}}, \quad H_2(\omega) = \frac{1 - \exp(-2i\omega)}{\sqrt{6}}. \quad (5)$$

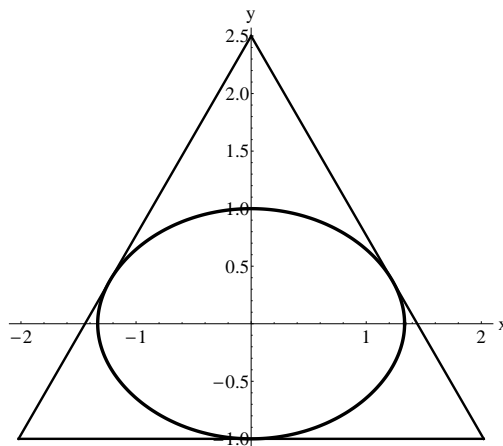


Рис. 1. Треугольная кривая в равностороннем треугольнике

Построим с помощью функций (5) следующее выражение:

$$p_0(\omega) \equiv |H_0(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 + |H_2(\omega)|^2 = \frac{7 + \cos 2\omega}{6}. \quad (6)$$

Легко проверить, что

$$p_0(\omega) + p_0''(\omega) > 0. \quad (7)$$

Неравенство (7) означает, что для функции  $p_0(\omega)$  выполнено необходимое и достаточное условие того, что она представляет собой опорную функцию некоторого выпуклого множества  $K_0$  (см. [3] и ссылки там). Граница  $\partial K_0$  этого множества задается параметрическими уравнениями:

$$x \equiv x_0(\omega) = \frac{17 \cos \omega - \cos 3\omega}{12}, \quad y \equiv y_0(\omega) = \frac{11 \sin \omega - \sin 3\omega}{12}, \quad \omega \in [0, 2\pi]. \quad (8)$$

Возводя в квадрат оба уравнения (8) и вычисляя результат получившихся полиномов относительно переменной  $\cos^2 \omega$ , получим представление кривой  $\partial K_0$  в алгебраической форме:

$$528x^2 - 32y^2 - 360x^4 - 396x^2y^2 + 207y^4 + 243x^2y^2(x^2 + y^2) + 81(x^6 + y^6) = 256. \quad (9)$$

Наконец, несложно убедиться в том, что для функции (6) выполняется следующее равенство:

$$p_0(\omega) + p_0\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) + p_0\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{7}{2}. \quad (10)$$

Тождество (10) означает, что выпуклое множество  $K_0$ , задаваемое уравнениями (8) или (9), является треугольным множеством [3, 4], то есть его можно поворачивать внутри равностороннего треугольника с высотой  $h = \frac{7}{2}$  (и стороной  $a = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ ) так, чтобы каждая из сторон этого треугольника касалась его границы  $\partial K_0$  одновременно. Эта ситуация изображена на рис. 1.

Таким образом, канторову множеству, являющемуся множеством нулевой меры Лебега с фрактальной размерностью  $D = \log_3 2 \approx 0,6309$ , поставлено в соответствие плоское (топологическая размерность  $d = 2$ ) выпуклое множество  $K_0$  площадью  $S = \frac{95\pi}{72}$  с границей  $\partial K_0$  (топологическая размерность  $d = 1$ ) класса  $C^\infty$  длиной  $L = \frac{7\pi}{3}$ , обладающее высокой степенью симметрии (см. рис. 1).

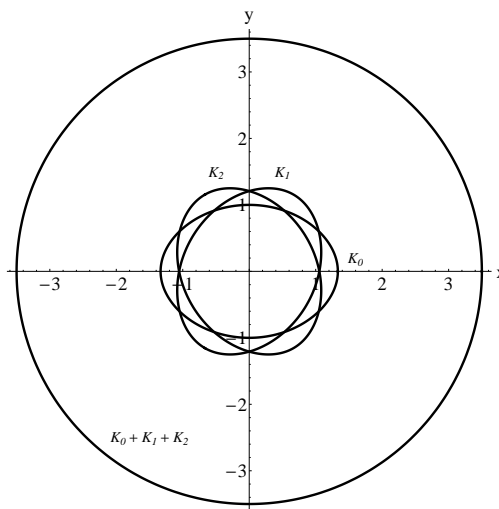


Рис. 2. Треугольные множества  $K_0, K_1, K_2$  и их сумма  $K = K_0 + K_1 + K_2$

Однако множество  $K_0$  является не единственным треугольным множеством, соответствующим функциональной структуре (2)-(3), а именно, функции  $p_1(\omega) = p_0(\omega + \frac{2\pi}{3})$  и  $p_2(\omega) = p_0(\omega + \frac{4\pi}{3})$  также удовлетворяют условиям (7) и (10), и, следовательно, они тоже являются опорными функциями треугольных множеств  $K_1$  и  $K_2$ .

Рассмотрим сумму  $K = K_0 + K_1 + K_2$  в смысле суммирования выпуклых множеств [4], т. е. радиус-вектор точки  $(x, y)$  на плоскости  $\vec{r} \in K$ , если  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2$  и  $\vec{r}_0 \in K_0$ ,  $\vec{r}_1 \in K_1$ ,  $\vec{r}_2 \in K_2$ .

Из параметрических уравнений границ  $\partial K_1$ :

$$x_1(\omega) = \frac{-x_0(\omega) + \sqrt{3}y_0(\omega)}{2}, \quad y_1(\omega) = -\frac{\sqrt{3}x_0(\omega) + y_0(\omega)}{2}, \quad \omega \in [0, 2\pi],$$

и  $\partial K_2$ :

$$x_2(\omega) = -\frac{x_0(\omega) + \sqrt{3}y_0(\omega)}{2}, \quad y_2(\omega) = \frac{\sqrt{3}x_0(\omega) - y_0(\omega)}{2}, \quad \omega \in [0, 2\pi],$$

видно, что треугольные множества  $K_1$  и  $K_2$  получаются поворотами фигуры  $K_0$  вокруг начала координат по часовой стрелке на углы  $\frac{2\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$  соответственно. Это означает, что их сумма  $K = K_0 + K_1 + K_2$  является окружностью радиуса  $h$  (см. задачу 110 в [4] и рис. 2). Окружность  $K$ , в свою очередь, также является треугольным множеством, поскольку может вращаться внутри равностороннего треугольника с длиной стороны  $3a$ , касаясь всех трёх его сторон одновременно.

Построенный пример иллюстрирует платоновскую теорию идей как форму математического онтологического реализма в современной философии математики [5]. С другой стороны, фракталы являются неотъемлемым атрибутом теории динамического хаоса [6], причём фрактальные структуры могут возникать в фазовых пространствах динамических систем, описываемых как точечными отображениями (аттрактор Плыкина, соленоид Смейла-Вильямса и т. д.), так и обыкновенными дифференциальными уравнениями (модель Лоренца, система Рёсслера и т. п.) (см. [6] и ссылки там). Следовательно, фракталы можно интерпретировать как связующее звено между хаотическими и регулярными объектами. В связи с этим возникает вопрос: не видим ли мы, подобно узникам пещеры Платона [7], в наблюдаемом нами регулярном образы неведомого нам хаотического и наоборот? Это обстоятельство должно учитываться при концептуальном проектировании сложных технических систем [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-01356-а).

## Литература

1. Jorgensen P. E. T. *Matrix Factorizations, Algorithms, Wavelets* // Notices Amer. Math. Soc. – 2003. – V. 50. – № 8. – P. 880–894.
2. Смоленцев Н. К. *Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB*. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 448 с.
3. Сантало Л. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*. – М.: Наука, 1983. – 360 с.
4. Яглом И. М., Болтянский В. Г. *Выпуклые фигуры*. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. – 344 с.
5. Лолли Г. *Философия математики: наследие двадцатого столетия*. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2012. – 299 с.



6. Кроновер Р.М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
7. Платон. *Государство*. – СПб.: Азбука, Азбука-Аттикус, 2015. – 352 с.
8. Рассадин А. Э. *Платон и современные сложные технические системы* // 3-я Межд. московская платоновская конф.: Тезисы докл. Москва: Российский гос. гуманитар. унив., 16-17 сентября 2015 г. – М.-СПб.: ПФО; РГГУ; РХГА, 2015. – С. 22–23.

## ON CORRESPONDENCE BETWEEN THE TRIANGULAR SET AND THE CANTOR SET

E.S. Alekseeva, A.E. Rassadin

*In the paper, we present an example demonstrating hidden interconnection between the state of chaos and the ordered one in mathematical models of the World surrounding us. Starting from interpretation of the singular measure of the middle-third Cantor set on the interval  $[0, 1]$  as scaling function of a wavelet with scaling parameter  $N = 3$ , on the basis of its filters, a triangular set has been introduced. This set is defined as a convex region in the plane with smooth boundary which is simultaneously tangent to each side of the equilateral triangle, under rotation of the region in this triangle.*

Keywords: support function, resultant, philosophy of mathematics.

УДК 517.547

**О НЕРАВЕНСТВЕ БОРА ДЛЯ ПОДЧИНЕННЫХ И КВАЗИПОДЧИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ**С.А. Алхалифах<sup>1</sup>, И.Р. Каюмов<sup>2</sup>, С. Поннусами<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *s.alkhaleefah@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> *ikaumov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>3</sup> *samy@isichennai.res.in, samy@iitm.ac.in*; Индийский технологический институт Мадраса

*В работе получен радиус Бора для подчинения нечетных аналитических функций и установлено классическое неравенство Бора для класса квазиподчиненных функций, определенных в единичном круге.*

**Ключевые слова:** неравенство Бора, аналитические функции, нечетная функция, подчинение и квазиподчинение.

Классический результат Х. Бора [1], который в окончательную форму привели М. Рисс, И. Шур и Н. Винер, состоит в следующем. Предположим, что  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  является аналитической функцией в  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  и  $|f(z)| \leq 1$  для всех  $z \in \mathbb{D}$ . Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \quad \text{для всех } r \leq \frac{1}{3}, \quad (1)$$

причем константа  $1/3$  не может быть улучшена. Недавно И.Р. Каюмов и С. Поннусами представили несколько улучшенных версий классического неравенства Бора [4], а также нашли радиус Бора для класса нечетных однолистных функций [3]. В [5] Б. Бувмик и Н. Дас исследовали радиус Бора для подчинения некоторых однолистных функций. Дополнительной информация о неравенстве Бора может быть

найдена в [2].

Напомним следующие два определения.

**Определение 1.** Говорят, что функция  $f(z)$  подчинена функции  $g(z)$  и пишут

$$f(z) < g(z),$$

если существует функция  $\omega(z)$ , голоморфная в  $\mathbb{D}$  и удовлетворяющая условиям:  $\omega(0) = 0$ ,  $|\omega(z)| < 1$  для всех  $z \in \mathbb{D}$  и

$$f(z) = g(\omega(z)) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

**Определение 2.** Говорят, что функция  $f(z)$  является квазиподчиненной функцией  $g(z)$  и пишут

$$f(z) <_q g(z),$$

если для всех  $z \in \mathbb{D}$  справедливо равенство

$$f(z) = \phi(z)g(\omega(z)),$$

где функции  $\omega$  и  $\phi$  голоморфны в  $\mathbb{D}$ , причем  $|\omega(z)| \leq |z|$  и  $|\phi(z)| \leq 1$  для всех  $z \in \mathbb{D}$ .

Нами получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $f(z)$  и  $g(z)$  нечетные аналитические функции в  $\mathbb{D}$  с разложениями Тейлора  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}z^{2k-1}$  и  $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}z^{2k-1}$ , соответственно. Если  $f(z) < g(z)$ , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|r^{2k-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}|r^{2k-1} \quad \text{для всех } |z| = r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

**Теорема 2.** Предположим, что  $f(z)$  и  $g(z)$  две аналитические функции в  $\mathbb{D}$  с разложениями Тейлора  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  и  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ , соответственно. Если  $f(z) <_q g(z)$ , то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|r^k \quad \text{для всех } |z| = r \leq \frac{1}{3}. \quad (3)$$

## Литература

1. Bohr H. *A theorem concerning power series* // Proc. London Math. Soc. – 1914. – V. 13, № 2. – P. 1–5.
2. Abu-Muhanna Y., Ali R.M., Ponnusamy S. *On the Bohr inequality*. – In “Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis” (Ed. by N.K. Govil et al.), Springer Optimization and Its Applications. – 2016. – V. 117. – P. 265–295.
3. Kayumov I.R., Ponnusamy S. *Bohr inequality for odd analytic functions* // Comput. Methods Funct. Theory. – 2018. – V. 17. – p. 679–688.
4. Kayumov I.R., Ponnusamy S. *Improved version of Bohr’s inequality* // Comptes Rendus Mathematique. – 2018. – V. 356 № 3. – P. 272–277.

5. Bhowmik B., Das N. *Bohr phenomenon for subordinating families of certain univalent functions* // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – V. 462, № 2. – P. 1087–1098.

## ON BOHR INEQUALITY FOR SUBORDINATE AND QUASI-SUBORDINATE FUNCTIONS

S.A. Alkhaleefah, I.R. Kayumov, S. Ponnusamy

*In this paper, the Bohr radius is obtained for subordination of odd analytic functions, and the classical Bohr's inequality is established for the class of quasi-subordinate functions, defined in the unit disk.*

Keywords: Bohr inequality, analytic function, odd function, subordination, quasi-subordination.

УДК 515.124

## ВЕРТИКАЛЬНЫЕ $\mathbb{R}$ -ДЕРЕВЬЯ

П.Д. Андреев<sup>1</sup>, А.И. Булыгин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [pdandreev@mail.ru](mailto:pdandreev@mail.ru); Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> [alexey.buligin@gmail.com](mailto:alexey.buligin@gmail.com); Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

*Изучается класс подобно однородных локально полных  $\mathbb{R}$ -деревьев с некоторыми дополнительными свойствами. В частности, определены вертикальные и строго вертикальные  $\mathbb{R}$ -деревья. Для строго вертикальных  $\mathbb{R}$ -деревьев выполнена их метрическая классификация: показано, что любое такое  $\mathbb{R}$ -дерево изометрично модельному  $\mathbb{R}$ -дереву.*

**Ключевые слова:** подобно однородное пространство,  $\mathbb{R}$ -дерево, число ветвления, радиус полноты, тип ветвления, пилообразная функция.

Метрическое пространство  $(X, d)$  называется подобно однородным, если для любых точек  $x, y \in X$  существует подобие  $\varphi$ , переводящее  $x$  в  $\varphi(x) = y$ . Если для любых  $x, y \in X$  существует изометрия  $\varphi$ , переводящая  $x$  в  $y$ , пространство  $X$  называется однородным.

Пространство  $(X, d)$  называется локально полным, если для любой точки  $x \in X$  существует число  $r > 0$ , для которого замкнутый шар  $B(x, r)$  полон в метрике  $d$ . Точная верхняя грань  $c(x)$  радиусов  $r$ , для которых шар  $B(x, r)$  полон, называется радиусом полноты в точке  $x$ . Если  $c(x_0) = +\infty$  хотя бы в одной точке  $x_0 \in X$ , то пространство  $X$  полное и  $c(x) = +\infty$  во всех точках  $x \in X$ .

Изучению локально полных подобно однородных пространств с внутренней метрикой посвящены работы [1], [2], [3], [4]. В частности, в [1] доказан следующий критерий подобно однородных пространств, не являющихся однородными.

**Теорема.** *Локально полное подобно однородное пространство  $X$  однородно тогда и только тогда, когда оно полно.*

Далее рассматриваются исключительно подобно однородные пространства, не являющиеся однородными, поэтому функция  $c(x)$  всюду конечна.

**Определение 1.** *Дугой в пространстве  $(X, d)$  с концами  $x, y \in X$  называется образ числового отрезка  $[a, b]$  при вложении (не обязательно изометрическом)  $\gamma$ :*

$[a, b] \rightarrow X$ , при котором  $\gamma(a) = x$  и  $\gamma(b) = y$ . Геодезическое пространство  $X$  называется  $\mathbb{R}$ -деревом, если в нём любые две точки  $x, y \in X$  соединяются единственной дугой. В этом случае всякая дуга автоматически является отрезком.

**Определение 2.** Числом ветвления  $\mathbb{R}$ -дерева  $X$  в точке  $x \in X$  называется кардинальное число  $\mathfrak{B}(X) - 1$ , где  $\mathfrak{B}(X)$  — кардинальное число компонент связности множества  $X \setminus \{x\}$ . Если  $\mathfrak{B}(X) = 1$ , точка  $x$  называется терминальной. В этом случае её число ветвления равно нулю. В случае, когда  $\mathbb{R}$ -дерево  $X$  является однородным или подобно однородным, его число ветвления во всех точках совпадает. В этом случае оно не содержит терминальных точек. Числом ветвления однородного или подобно однородного  $\mathbb{R}$ -дерева будем называть число ветвления в произвольной его точке. Каждая компонента связности множества  $X \setminus \{x\}$  называется ветвью с корнем  $x$ .

Пусть  $(X, d)$  — локально полное, подобно однородное, не однородное  $\mathbb{R}$ -дерево,  $c : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  — функция радиуса полноты на  $X$ . Мы выделяем класс локально полных подобно однородных  $\mathbb{R}$ -деревьев, в которых функция  $c$  обладает наиболее естественным поведением.

**Определение 3.** Непрерывная функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется пилообразной, если  $f$  не является постоянной ни на каком интервале  $(c, d) \subset [a, b]$  и из того, что  $f$  монотонна на интервале  $(c, d) \subset [a, b]$  следует, что  $f|_{(c,d)}$  — линейная функция с угловым коэффициентом  $\pm 1$ . Пусть  $(Y, d)$  — локально полное подобно однородное не однородное  $\mathbb{R}$ -дерево. Оно называется вертикальным, если на каждом отрезке  $[xy]$ , параметризованном натуральной параметризацией  $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$  так, что  $\gamma(a) = x$  и  $\gamma(b) = y$ , функция радиуса полноты  $c(\gamma(t))$  является пилообразной.

**Определение 4.** Будем говорить, что внутренняя точка  $z \in X$  отрезка  $[xy] \subset X$  является на этом отрезке точкой локального минимума (соответственно, локального максимума) радиуса полноты, если для натуральной параметризации  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  этого отрезка функция  $f(t) = c(\gamma(t))$  имеет локальный минимум (соответственно, локального максимум) при  $t \in (a, b)$ , при котором  $\gamma(t) = z$ . Вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево  $X$  называется строго вертикальным, если на каждом отрезке  $[xy] \subset X$  имеется не более одной внутренней точки, которая является точкой локального экстремума радиуса полноты.

**Лемма 1.** Пусть  $X$  — строго вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево. Если на некотором отрезке  $[xy] \subset X$  имеется внутренняя точка  $z$ , являющаяся локальным минимумом (соответственно, локальным максимумом) радиуса полноты, то всякая внутренняя точка локального экстремума радиуса полноты на произвольном отрезке является локальным минимумом (соответственно, локальным максимумом).

Лемма 1 позволяет разделить класс строго вертикальных  $\mathbb{R}$ -деревьев на два подкласса, отличающихся по типу ветвления.

**Определение 5.** Пусть  $(X, d)$  — строго вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево, отличное от  $\mathbb{R}_+$ . Будем говорить, что  $X$  имеет ветвление кверху (соответственно, ветвление книзу), если всякая точка экстремума радиуса полноты является точкой минимума (соответственно, максимума).

Для каждого из подклассов, задаваемых Определением 5, и заданного числа ветвления  $\mathfrak{B} - 1$  корректно определено  $\mathbb{R}$ -дерево стандартного вида, называемое

далее модельным  $\mathbb{R}$ -деревом. Модельное строго вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево с ветвлением книзу построено в [4], построение модельного строго вертикального  $\mathbb{R}$ -дерева с ветвлением кверху выполняется аналогично. Модельное  $\mathbb{R}$ -дерево с числом ветвления  $|G|$ , где  $G$  — некоторая группа, обозначается  $X_+(G)$  в случае ветвления кверху или  $X_-(G)$  в случае ветвления книзу.

**Теорема 1.** *Всякое строго вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево с ветвлением кверху изометрично модельному строго вертикальному  $\mathbb{R}$ -дереву  $X_+(G)$  с тем же числом ветвления.*

Для строго вертикальных  $\mathbb{R}$ -деревьев с ветвлением кверху аналогичная теорема также справедлива, но её доказательство по аналогии затруднительно. Поэтому мы вводим подход к доказательству, основанный на инверсии.

**Определение 6.** *Пусть  $(X, d), (X', d')$  — два локально полных подобно однородных не однородных пространства. Будем говорить, что пространства  $X$  и  $X'$  инверсны друг другу, если существует гомеоморфизм  $I: X \rightarrow X'$ , называемый инверсией с коэффициентом  $R > 0$   $X$  на  $X'$ , при котором для радиусов полноты  $c(x)$  произвольной точки  $x \in X$  и  $c(x')$  её образа  $x' = I(x)$  выполняется равенство*

$$c(x) \cdot c(x') = R^2.$$

Из доказательства И.А. Гундыревым гипотезы В.Н. Берестовского следует, что всякое локально компактное локально полное подобно однородное пространство  $(X, d)$  инверсно самому себе: поскольку  $X$  гомеоморфно произведению  $X = c^{-1}(1) \times \mathbb{R}_+$ , и при этом  $\mathbb{R}_+$  изометрически вкладывается в  $X$  как сомножитель, следует, что инверсией  $X$  на себя с коэффициентом 1 является отображение  $(s, t) \rightarrow (s, 1/t)$ , где  $s \in c^{-1}(1)$  и  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Теорема 2.** *Пусть  $(Y, d)$  — строго вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево с ветвлением книзу. Тогда оно инверсно некоторому строго вертикальному  $\mathbb{R}$ -дереву  $(Y', d')$  с ветвлением кверху.*

Из теорем 1 и 2 получаем результат о метрической классификации  $\mathbb{R}$ -деревьев.

**Теорема 3.** *Всякое строго вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево с ветвлением книзу изометрично модельному  $\mathbb{R}$ -дереву  $X_-(G)$  для некоторой группы  $G$ .*

Для вертикальных  $\mathbb{R}$ -деревьев, которые не являются строго вертикальными получена оценка числа ветвления: число ветвления такого  $\mathbb{R}$ -дерева не меньше континуума. Это следует из описания функции радиуса полноты на ветвях. Здесь мы приводим упрощённый вариант такого описания, тоже приводящий к указанной оценке.

**Определение 7.** *Пусть  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — функции. Говорят, что  $f$  и  $g$  принадлежат одному ростку в нуле, если  $f(t) = g(t)$  для всех неотрицательных  $t$ , меньших некоторого  $\delta > 0$ . Множество всех функций, которые принадлежат одному ростку в нуле с функцией  $f$ , называется её ростком в нуле и обозначается  $[f]_0$ .*

**Определение 8.** *Пусть  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  — пилообразная функция. Точка  $t \in (0, a)$  называется регулярной точкой для  $f$ , если  $f$  монотонна в интервале  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  при некотором  $\varepsilon > 0$ . Точка  $t \in (0, a)$  называется точкой простого экстремума  $f$ , если она*

не является регулярной, но для некоторого  $\varepsilon > 0$  все точки в  $(t - \varepsilon, t) \cup (t, t + \varepsilon)$  регулярны. Будем говорить, что росток  $[f]_0$  является простым, если все точки функции  $f$  в некотором интервале  $(0, \delta)$  регулярны или являются точками простого экстремума.

Легко видеть, что кардинальное число простых ростков пилообразных функций  $f$ , принимающих в нуле заданное значение  $f(0) = c$ , как минимум равно континууму. Поэтому указанная выше оценка числа ветвления для вертикального  $\mathbb{R}$ -дерева, не являющегося строго вертикальным, вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 4.** Пусть  $(X, d)$  — вертикальное  $\mathbb{R}$ -дерево, не являющееся строго вертикальным,  $x \in X$  и  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  — пилообразная функция, обладающая простым ростком в нуле, и принимающая значение  $f(0) = c(x)$ . Тогда среди компонент связности множества  $X \setminus \{x\}$  есть ветвь, в которой функция радиуса полноты на всяком отрезке с началом в  $x$  принадлежит ростку  $[f]_0$ .

## Литература

1. Берестовский В.Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой // Изв. вузов. Матем. — 2004. — № 11. — С. 3–22.
2. Гундырев И.А. Строение подобно однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой // Матем. тр. — 2015. — Т. 17, № 2. — С. 132–141.
3. Гундырев И.А. Строение подобно однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой II // Матем. тр. — 2015. — Т. 18, № 1. — С. 15–26.
4. Андреев П.Д. Полулинейные метрические полурешётки на  $\mathbb{R}$ -деревах // Изв. вузов. Матем. — 2007. — № 7. — С. 3–13.

## THE VERTICAL $\mathbb{R}$ -TREES

P.D. Andreev, A.I. Bulygin

We study the class of similarly homogeneous locally complete  $\mathbb{R}$ -trees. The vertical and strictly vertical  $\mathbb{R}$ -trees are defined. The metric classification of strictly vertical  $\mathbb{R}$ -trees is made: it is shown that every such  $\mathbb{R}$ -tree is isometric to some model  $\mathbb{R}$ -tree.

Keywords: similarly homogeneous space,  $\mathbb{R}$ -tree, branch number, completeness radius, branching type, saw-like function.

УДК 510.52

## $\omega$ -В.П. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

П.В. Антонова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> valerevna.p@inbox.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе рассматривается новый подход к определению случайности, который основан на разностной иерархии множеств и использует первый бесконечный уровень иерархии Ершова. Определяются  $\omega$ -в.п. тесты и выясняется соотношение возникающего класса  $\omega$ -в.п. случайных чисел с классом случайных по Демуту и 2 - случайных вещественных чисел.

**Ключевые слова:** случайность бесконечных строк,  $\omega$ -в.п. случайность, случайность по Демуту, 2-случайность.

В настоящий момент наиболее изученным понятием случайности является случайность по Мартин-Лёфу. В работе [1] Нг и Франклин ввели новое понятие случайности, которое основано на разностной иерархии множеств. В [2] Нг и Франклин обобщают данное ими в [1] понятие  $d$ -в.п. случайности:  $k$ -я компонента теста теперь является не разностью двух открытых вычислимо перечислимых множеств, а булевой комбинацией  $g(k)$  открытых вычислимо перечислимых множеств для некоторой вычислимой функции  $g$ . В настоящей работе рассмотрен другой подход к определению  $\omega$ -в.п. случайности. Смысл данного подхода заключается в том, что теперь свойство быть  $\omega$ -в.п. множеством индивидуально для каждой строки члена теста.

**Определение.**  $\omega$ -в.п. тестом назовем последовательность  $\omega$ -в.п. множеств  $\langle U_i \rangle_{i \in \omega}$  таких, что  $\forall i (\lambda(U_i) \leq 2^{-i}$  и  $\forall x \in U_i$   $x$  –  $\omega$ -в.п. множество). Вещественное число  $A \in 2^\omega$  является  $\omega$ -в.п. случайным, если для любого  $\omega$ -в.п. теста  $\langle U_i \rangle_{i \in \omega}$   $A \notin \bigcap_i U_i$ .

**Определение.** Тест Мартин-Лефа (Martin-Löf) на  $2^\omega$ , или коротко ML-тест, – это равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств  $\langle U_i \rangle_{i \in \omega}$ . Причем  $\forall i \in \omega$  выполняется  $\lambda(U_i) \leq 2^{-i}$ . Последовательность  $x \in 2^\omega$  не проходит тест, если  $x \in \bigcap_{i \in \omega} U_i$ , в противном случае  $x$  проходит тест. Вещественное число  $x$  называется ML-случайным, если  $x$  проходит каждый ML-тест.

Тесты Мартин-Лефа основаны на вычислимо перечислимых или на  $\Sigma_1^0$  множествах, то есть на множествах, которые принадлежат первому уровню арифметической иерархии. Рассмотрим более общее определение случайности, где в качестве тестов будут использованы  $\Sigma_n^0$  множества.

**Определение.**  $\Sigma_n^0$ -тестом назовем вычислимую последовательность  $\langle V_n \rangle_{n \in \omega}$   $\Sigma_n^0$  множеств таких, что  $(\forall k) \lambda(V_k) \leq 2^{-k}$ . Вещественное число  $\alpha$  является  $n$ -случайным, если для любого  $\Sigma_n^0$  теста  $\langle V_n \rangle_{n \in \omega}$ ,  $\alpha \notin \bigcap_n V_n$ .

Рассмотрим понятие случайности, которое было впервые дано О.Демуту в работе [3]. Неформально, тесты Демута обобщают понятие тестов Мартин-Лефа, с той лишь разницей, что мы можем менять каждую компоненту теста вычислимо ограниченное число раз и не требуем равномерности в определении тестов.

**Определение.** Тестом Демута назовем последовательность  $\langle W_{g(i)} \rangle_{i \in \omega}$  в.п. открытых множеств, где  $g$  является  $\omega$ -в.п. функцией и  $\forall i \lambda(W_{g(i)}) \leq 2^{-i}$ . Вещественное число  $A$  слабо случайно по Демуту (WDR), если для любого теста Демута  $\langle W_{g(i)} \rangle_{i \in \omega}$   $A \notin \bigcap W_{g(i)}$ . Число  $A$  случайно по Демуту (DR), если оно проходит каждый тест Демута по Соловею, то есть если оно содержится в  $W_{g(i)}$  только для конечного числа  $i$ .

Справедлива следующая

**Теорема.** Если вещественное число  $\alpha$  слабо случайно по Демуту, то оно  $\omega$ -в.п. случайно.

Согласно этой теореме и результатам из [1] получаем следующую цепочку вложений:

2-случайные числа  $\subset$  случайные по Демуту числа  $\subset$   $\omega$ -в.п.случайные числа

Ясно, что любое 2-случайное вещественное число является  $\omega$ -в.п. случайным. Однако обратное неверно. Это показывает следующая

**Теорема.** *Существует  $\omega$ -в.п. случайное число, которое не является 2-случайным числом.*

## Литература

1. Franklin J., Ng K. *Difference randomness* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2010. – Vol. 139, № 1. – P. 345–360.
2. Franklin J., Ng K.  *$\omega$ -change randomness and weak Demuth randomness* // Journal of Symbolic Logic. – 2014. – Vol. 79, № 3. – P. 3–13.
3. Демут О. *О некоторых классах арифметических действительных чисел.* // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1982. – Т. 23. – С. 453–465.

## $\omega$ -CHANGE RANDOMNESS

P.V. Antonova

*This paper proposes a new approach to the definition of randomness, which is based on the difference hierarchy of sets and uses the first infinite level of the Ershov hierarchy. We define  $\omega$ -change tests and study the relations between the nascent class of  $\omega$ -change random reals and the class of Demuth random reals and 2-random reals.*

Keywords: randomness of infinite strings,  $\omega$ -change randomness, Demuth randomness, 2-randomness.

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Е.В. Антонова<sup>1</sup>, И.С. Балафендиева<sup>2</sup>, Н.Р. Вильданова<sup>3</sup>, Л.Р. Секаева<sup>4</sup>

<sup>1</sup> b1a9g1i1r1a996ok@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> e\_xo@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>3</sup> vohid161090@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>4</sup> lrsekaeva@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе на основе конечно-элементной методики решения упругопластических задач, основанной на определяющих соотношениях между приращениями истинных напряжений и деформаций, решен ряд тестовых задач деформирования трехмерных тел, выполненных из сплошного и пористого материалов. Отмечено хорошее совпадение результатов расчета с известными решениями, отмечены некоторые обнаруженные закономерности деформирования тел из пористого материала.*

**Ключевые слова:** деформирование трехмерных тел, пористый материал, композитный материал.



В последнее время во многих сферах человеческой деятельности широко используются подходы к анализу, проектированию и оптимизации сложных технических систем на основе применения масштабных имитационных компьютерных моделей. Хорошо известны такие подходы в авиа- и вертолетостроении, автомобилестроении и, химической и транспортной промышленности, строительстве и биологии. В последние годы наблюдается активное применение в технике новых материалов, в частности, напечатанных на 3D-принтерах, волокнистых композитов, а также применяются новые подходы к моделированию пористых коллекторов и биоматериалов в вычислительной гео- и биомеханике. Одно из таких направлений формирует подходы, основанные на комплексном применении в построении механико-математических моделей экспериментальных и численных методов, а также использование сканирующей аппаратуры для определения микроструктуры материала на всех этапах его деформирования.

Использование численных методов механики деформируемого твердого тела позволяет решать широкий круг практических задачи деформирования мелкозернистых пористых сред с учетом их микроструктурных изменений. Несмотря на то, что численные решения уравнений сплошной среды хорошо известны теоретически и реализованы практически в современных прикладных мультифизических системах, таких, например, как ANSYS или ABAQUS, специфика влияния изменения микроструктуры в процессе деформирования на макроскопическое поведение мелкозернистых пористых материалов, костной ткани, пористых и трещиновато-пористых коллекторов геологических пород и композитных материалов влечет за собой значительные трудности в их практическом применении.

В качестве расчетного алгоритма предлагается вариант метода, называемого “модифицированной инкрементальной теорией Лагранжа” и являющегося одним из вариантов реализации инкрементального алгоритма процесса продолжения решения по параметру нагрузки. Процесс деформирования будет представлен в виде последовательности равновесных состояний, реализующихся при соответствующих уровнях нагружения. Построение вычислительного алгоритма будет основано на дискретизации расчетной области в рамках конечно-элементной методики. Реализована конечно-элементная методика, позволяющая на основе построенных ранее уравнений непротиворечивого варианта теории упругости при малых деформациях и произвольных перемещениях моделировать процессы деформирования элементов конструкций из мелкозернистых пористых материалов, костной ткани, пористых и трещиновато-пористых коллекторов геологических пород и композитных материалов с учетом их структурного перестроения в условиях однократных и многократных нагружений. Комплекс программ для реализации методики. Результаты вычислительных экспериментов с целью исследования на макроуровне процессов формирования остаточных деформаций в элементах конструкций.

Решен ряд тестовых и модельных задач, проведено сравнение результатов с известными численными и экспериментальными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан рамках научных проектов №18-41-160018 и №18-31-00419.

RESEARCH OF NONLINEAR DEFORMATION OF POROUS ELEMENTS OF  
THREE-DIMENSIONAL DESIGNS

E.V. Antonova, I.S. Balafendieva, N.R. Vildanova, L.R. Sekaeva

*On the basis of the final and element technique of the solution of elasto-plastic tasks based on the defining ratios between increments of true tension and deformations a number of the test tasks of deformation of three-dimensional bodies which are carried out from continuous and porous materials is solved. Good coincidence of results of calculation to the known decisions is noted, some found regularities of deformation of bodies of porous material are noted.*

Keywords: deformation of three-dimensional bodies, porous material, composite material.

УДК 514.83

**САМОДЕЙСТВИЕ СКАЛЯРНОГО ЗАРЯДА В ЗАРЯЖЕННОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ  
АНТИ-ДИЛАТОННОЙ КРОВОЙ НОРЕ**

О. Аслан<sup>1</sup>, А.А. Попов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> alsucuk@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> arkady.porov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Мы проанализировали эффект самодействия для статического точечного заряда в экстремально заряженной анти-дилатонной кротовой норе. [2] Эта задача имеет математические трудности. Поле заряда в рассматриваемой задаче определяется функцией Грина некоторого обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка;*

$$\frac{\partial^2 g_l(r, \bar{r})}{\partial r^2} + \frac{2r}{(r^2 + Q^2)} \frac{\partial g_l(r, \bar{r})}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{(r^2 + Q^2)} g_l(r, \bar{r}) = -\frac{\delta(r, \bar{r})}{e^{\alpha(r)}(r^2 + Q^2)}. \quad (1)$$

*Эта функция Грина может быть выражена в виде независимых решений соответствующего однородного уравнения. Как правило, вронскиан этих решений совпадает, вплоть до константы нормализации, с коэффициентом перед дельта-функцией в уравнении функции Грина. В рассматриваемом случае это не так. Для решения этой задачи мы использовали свойства дельта-функции;*

$$\frac{\delta(r, \bar{r})}{e^{\alpha(r)}} = \frac{\delta(r, \bar{r})}{e^{\alpha(\bar{r})}} \quad (2)$$

*Это позволяет свести проблему к стандартному случаю.*

*Получено аналитическое выражение для силы самодействия на произвольно связанный статический скалярный заряд в пространстве-времени кротовой норы.*

$$F^r(r) = -\frac{q}{2} g^{rr} \frac{\partial \phi_{ren}(r)}{\partial r} = -\frac{q^2 e^{-3\alpha(r)} \left( \frac{r}{|Q|} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{|Q|}\right) \right)}{\pi Q^2 (1 + r^2/Q^2)^2} \quad (3)$$

**Ключевые слова:** сила самодействия, эффект самодействия, кротовая нора.

## Литература

1. Popov A., Aslan O. *Self-force of a scalar charge in the space-time of extreme charged anti-dilatonic wormhole* // International journal of geometric methods in modern physics . – 2018. – V. 15. – № 3. – P. 1850050.

### SELF-FORCE OF A SCALAR CHARGE IN THE SPACE-TIME OF EXTREME CHARGED ANTI-DILATONIC WORMHOLE

O. Aslan, A.A. Popov

*We have analyzed the self-force problem for a static pointlike scalar charge in an extreme charged anti-dilatonic wormhole. This problem has mathematical difficulties. The field of charge in the considered problem is determined by the Green's function of some ordinary inhomogeneous differential equation of the second order;*

$$\frac{\partial^2 g_l(r, \bar{r})}{\partial r^2} + \frac{2r}{(r^2 + Q^2)} \frac{\partial g_l(r, \bar{r})}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{(r^2 + Q^2)} g_l(r, \bar{r}) = -\frac{\delta(r, \bar{r})}{e^{\alpha(r)}(r^2 + Q^2)}. \quad (4)$$

*This Green's function can be expressed in terms of independent solutions of the corresponding homogeneous equation. As a rule, the Wronskian of these solutions coincides, up to a normalization constant, with the coefficient in front of the delta-function in the Green's function equation. In the case under consideration, this is not so. To solve this problem, we used the properties of the delta-function;*

$$\frac{\delta(r, \bar{r})}{e^{\alpha(r)}} = \frac{\delta(r, \bar{r})}{e^{\alpha(\bar{r})}} \quad (5)$$

*This enables us to reduce the problem to the standard case.*

*We have obtained an analytic expression for the self-force on an arbitrarily coupled, static scalar charge in a wormhole space-time.*

$$F^r(r) = -\frac{q}{2} g^{rr} \frac{\partial \phi_{ren}(r)}{\partial r} = -\frac{q^2 e^{-3\alpha(r)} \left( \frac{r}{|Q|} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{r}{|Q|}\right) \right)}{\pi Q^2 (1 + r^2/Q^2)^2} \quad (6)$$

Keywords: self-force, self-effect, wormhole.

УДК 519.63

### РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА Р.М. Асхатов<sup>1</sup>, Р.Р. Гимаев<sup>2</sup>, В.Ю. Чебакова<sup>3</sup>

- <sup>1</sup> [gimaev2015@mail.ru](mailto:gimaev2015@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет  
<sup>2</sup> [gimaev2015@mail.ru](mailto:gimaev2015@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет  
<sup>3</sup> [vchebakova@mail.ru](mailto:vchebakova@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В данной работе реализован программный комплекс на WPF с помощью языка C#. Объектная ориентированность языка C# и визуальные возможности WPF позволили построить довольно гибкое, масштабируемое и расширяемое приложение. Программный комплекс позволяет численно решить начально-краевую задачу, состоящую из уравнения Бюргерса и начальных, граничных условий как в одномерной, так и двумерной форме с помощью методов Мак-Кормака и Уорминга-Катлера-Ломакса. Для одномерного*

случая с помощью библиотеки *OxyPlot* была реализована возможность вывода решения в графическом виде. С помощью компонента *Viewport3D* было отображено решение двумерного уравнения Бюргерса в виде 3D-модели. Также в программный комплекс добавлена возможность сохранения данных в текстовый файл. В завершении работы проведено тестирование, которое позволило определить особенности уравнения Бюргерса и правильную работу численных алгоритмов расчета.

**Ключевые слова:** уравнение Бюргерса, программный комплекс, метод Мак-Кормака, метод Уорминга-Катлера-Ломакса.

## 1. Введение

Разработка современных приложений все больше тяготеет к созданию программных компонентов в форме автономных и самостоятельных пакетов, реализующих отдельные функциональные возможности. Язык C# предоставляет языковые конструкции, поддерживающие такую концепцию работы.

Необходимо отметить, что C# – объектно-ориентированный, высокотехнологичный язык, который позволяет решать сложные задачи в области программирования и науки [1, 2]. Он до сих пор остается актуальным, потому что позволяет программировать на платформе .NET, создавать приложения, начиная с консольных и заканчивая крупными веб-сайтами, адаптировать программу к общезыковой среде и ускорить разработку и вычисления, что играет большую роль при решении сложных вычислительных задач. Более того, к приложениям, создаваемым с помощью C#, дополнительно можно подключать технологии такие как библиотеки (например, *OxyPlot*, который позволяет отображать любые двумерные графики), 3D-моделирование, шаблоны проектирования и многое другое. Поэтому C# отлично подходит для создания и применения программных компонентов.

В данной работе реализован программный комплекс на WPF с помощью языка C#. Данное приложение позволяет решать начально-краевые задачи состоящие из модельного уравнения Бюргерса и начальных, краевых условий I-го рода. Уравнение Бюргерса описывает нелинейные конвекционные процессы в несжимаемой жидкости (воде, нефти мазуте) [3–6], нелинейной акустике [7, 8] и т.д. Данный программный комплекс может использоваться при изучении свойств бегущей волны, так как модельные уравнения используются для изучения свойств более сложных уравнений в частных производных.

## 2. Реализация программного комплекса

Цель данной работы – разработка программного комплекса для решения уравнения Бюргерса (невязкое течение) конечно-разностными методами Мак-Кормака и Уорминга-Катлера-Ломакса. Само уравнение относится к гиперболическому типу и дополняется начальными и граничными условиями Дирихле I-го рода. реализуется возможность решения одномерного уравнения Бюргерса методами Мак-Кормака и Уорминга-Катлера-Ломакса [9]. Первый из них был предложен Мак-Кормаком в 1969 году [10]. Метод Мак-Кормака имеет хорошие диссипативные и дисперсионные свойства, а также удобен для реализации краевых условий. Второй метод пред-

ложили Уорминг, Катлер и Ломакс в 1973 году [11]. В методе не используются центральные разности, однако, существует параметр, от выбора которого зависят дисперсионные свойства расчета.

Для демонстрации работы методов, решающих уравнение Бюргерса, с помощью технологий, описанных в главе "Технические основы", было написано приложение WPF на языке C#. Для проектирования приложения использовался шаблон MVVM (Model-View-ViewModel). Для демонстрации решения двумерной начально-краевой задачи была использована технология Viewport3D встроенный в WPF для отображения 3D-моделей. В программу заложена возможность увеличения/уменьшения и вращения модели.

Визуальная часть написана на языке разметки XAML. Каждая страница приложения представляет собой XAML-документ, состоящий из тегов и их свойств. Приложение состоит из одного главного окна и нескольких дочерних окон, которые появляются при нажатии на соответствующие кнопки:

В верхней части главной страницы расположено Меню, в котором располагаются кнопки "Данные" и "Двумерный метод Мак-Кормака".

При нажатии на кнопку "Данные" появляются внутренние кнопки "Импорт" и "Экспорт", которые позволяют импортировать данные в текстовый документ и экспортировать данные из анализа в текстовый документ соответственно.

При нажатии на кнопку "Двумерный метод Мак-Кормака" появляется дополнительное окно для ввода данных, а затем окно, где выводится решение двумерного уравнения Бюргерса в виде 3D-модели.

Далее идут вкладки Таблицы, Графики и Анализ. Во вкладке Таблицы в виде таблиц отображаются данные, импортированные из текстового документа или полученные из анализа.

Вкладка Графики предназначена для отображения импортированных данных в виде графика. Выделены отдельные места для результатов, полученных методом Мак-Кормака, Уорминга-Катлера-Ломакса, и для их общего соотношения.

Вкладка Анализ предназначена для решения уравнения Бюргерса и сравнения методов. В ней расположены чарты для отображения данных, полученных методами Мак-Кормака и Уорминга-Катлера-Ломакса. Внизу вкладки расположены поля ввода данных и кнопки "t-" и "t+", предназначение которых двигать графики разрывов по времени.

### 3. Результаты тестирования приложения

Результаты тестов позволяют сделать выводы относительно времени работы методов и их устойчивости.

Первая часть тестов была посвящена определению значений параметра, при которых метод Уорминга-Катлера-Ломакса сохраняет устойчивость. Выяснилось, что при очень малых значениях параметра метод совсем не устойчив, в решении возникают большие осцилляции. При увеличении метод стабилизируется и значение осцилляций становится малым. Устойчивые значения параметра располагаются между 2 и 3. За пределами этого отрезка метод неустойчив.

Во второй части тестов производится сравнение методов Мак-Кормака и Уорминга-Катлера-Ломакса. При малых числах Куранта методы не устойчивы, воз-

никают сильные осцилляции и теряется точность. С увеличением числа Куранта методы становятся устойчивыми, но не смотря на это небольшие осцилляции продолжают при методе Уорминга-Катлера-Ломакса. Что касается времени работы, метод Мак-Кормака работает почти в три раза быстрее чем метод Уорминга-Катлера-Ломакса и имеет более точные результаты.

#### 4. Результаты тестирования приложения

В данной работе реализован программный комплекс на WPF с помощью языка C#. Объектная ориентированность языка C# и визуальные возможности WPF позволили построить довольно гибкое, масштабируемое и расширяемое приложение.

Программный комплекс позволил численно решить начально-краевую задачу, состоящую из уравнения Бюргерса и начальных, граничных условий как в одномерной, так и двумерной форме с помощью методов Мак-Кормака и Уорминга-Катлера-Ломакса. Для одномерного случая с помощью библиотеки OxyPlot была реализована возможность вывода решения в графическом виде. С помощью компонента Viewport3D было отображено решение двумерного уравнения Бюргерса в виде 3D-модели. Также в программный комплекс добавлена возможность сохранения данных в текстовый файл. Проведено тестирование, которое позволило определить особенности уравнения Бюргерса и правильную работу численных алгоритмов расчета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00301).

#### Литература

1. Рихтер Дж. *CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft.NET Framework 4.0 на языке C#*. – СПб.: Питер, 2012. – 928 с.
2. Мак-Дональд М. *CLR Windows Presentation Foundation в .NET 4.5 с примерами на C# 5.0*. – СПб.: Вильямс, 2013. – 1024 с.
3. Бадриев И. Б., Задворнов О. А., Исмагилов Л. Н., Скворцов Э. В. *Решение плоских задач фильтрации при многозначном законе фильтрации и наличии точечного источника // Прикладная математика и механика*. – 2009. – Т. 73. – № 4. – С. 604–614.
4. Бадриев И. Б., Задворнов О. А. *Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // Дифференциальные уравнения*. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 874–880.
5. Badriev I. B., Chebakova V. Y., Zheltukhin V. S. *Capacitive coupled RF discharge: modelling at the local statement of the problem // Journal of Physics: Conference Series*. – 2017. – V. 41. – № 7. – No. 1. – Art. 012004
6. Бадриев И. Б., Желтухин В. С., Чебакова В. Ю. *О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова*. – М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 31–33.
7. Руденко О. В., Солуян С. И. *Теоретические основы нелинейной акустики*. – М.: Наука, 1975. – 287 с.
8. Наугольных К. А., Островский Л. А. *Нелинейные волновые процессы в акустике*. – М.: Наука, 1990. – 237 с.
9. Anderson D. A., Tannehill J. C., Pletcher R. H. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. – New York: Hemisphere Publishing, 1984. – 599 p.

10. MacCormack R. W. *The Effect of viscosity in hypervelocity impact cratering* // AIAA Paper. – 1969. – P. 69–354.
11. Warming R. F., Kutler P., Lomax H. *Second- and Third-Order Noncentered Difference Schemes for Nonlinear Hyperbolic Equations* // AIAA Journal. – 1973. – V. 11. – P. 189–196.

## IMPLEMENTING A SOFTWARE PACKAGE FOR SOLVING THE BURGERS EQUATION

R.M. Askhatov, R.R. Gimaev, V.Yu. Chebakova

*In this paper, it is implemented a software package on WPF with C# language. Object orientation of the C# language and visual WPF features allowed to build a fairly flexible, scalable and extensible application. The software package allows you to numerically solving the initial-boundary value problem consisting of the Burgers equation and initial boundary conditions in both one-dimensional and two-dimensional form using the methods of MacCormack and Warming-Cutler-Lomax. For a one-dimensional case using the OxyPlot library it was implemented the ability to display solutions in graphical form. Using the component Viewport3D displayed the solution to the two-dimensional Burgers equation in as a 3D model. Also added to the program complex saving data to a text file. At the end of the work held testing, which allowed to determine the features of the equation Burgers and the correct operation of numerical calculation algorithms.*

Keywords: Burgers equation, software complex, Mac-Cormack method, Warming-Cutler-Lomax method.

УДК 517.91

## СВОЙСТВА ДУАЛЬНОСТИ И СИММЕТРИИ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.Ю. Багдерина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> bagderinayu@yandex.ru; Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

*Исследуются дуальные уравнения для ОДУ второго порядка, полученных в результате групповой классификации в вещественной области.*

**Ключевые слова:** эквивалентность, дуальное уравнение, групповая классификация.

С точки зрения эквивалентности, т. е. возможности преобразования одного уравнения в другое с помощью точечной замены переменных

$$X = \xi(x, y), \quad Y = \eta(x, y), \quad \partial(\xi, \eta) / \partial(x, y) \neq 0, \quad (1)$$

все обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) второго порядка

$$y'' = F(x, y, p), \quad p = y', \quad (2)$$

делятся на четыре типа. Внутри этих типов они, в свою очередь, разделяются на классы эквивалентности, состоящие из эквивалентных друг другу уравнений, так что уравнение из одного класса никакой заменой (1) не может быть преобразовано в уравнение другого класса. По отношению к относительным инвариантам четвертого порядка

$$F_4 \equiv \partial^4 F / \partial p^4, \quad \beta \equiv \alpha_{xp} + p\alpha_{yp} + F\alpha_{pp} - F_p\alpha_p - 3\alpha_y \quad (3)$$

(где  $\alpha = F_{xp} + pF_{yp} + FF_{pp} - F_p^2/2 - 2F_y$ ) уравнения (2) подразделяются на: тип (I) с  $F_4 \neq 0, \beta \neq 0$ ; тип (II) с  $F_4 \neq 0, \beta = 0$ ; тип (III) с  $F_4 = 0, \beta \neq 0$ ; тип (IV) с  $F_4 = 0, \beta = 0$ . Тип (IV) содержит все линеаризуемые уравнения, т. е. состоит из одного класса уравнений, эквивалентных ОДУ  $y'' = 0$ . К типу (III) относятся все нелинеаризуемые уравнения вида  $y'' = S(x, y)p^3 + 3R(x, y)p^2 + 3Q(x, y)p + P(x, y)$ . Гораздо сложнее определить, какую форму зависимости от  $x, y, p$  имеют уравнения (2), принадлежащие типу (II). Оказывается [2], такие уравнения можем построить, используя понятие дуальности.

Пусть уравнение (2) имеет общее решение

$$\Phi(x, y, a, b) = 0, \quad (4)$$

в котором  $a, b$  — произвольные постоянные. В формуле (4) будем теперь рассматривать  $a, b$  как переменные, а  $x, y$  — как постоянные. Дважды продифференцируем (4) по  $a$ , считая  $b$  функцией  $a$ , и исключим  $x, y$  из (4) и равенств

$$\Phi_a + b'\Phi_b = 0, \quad \Phi_{aa} + 2b'\Phi_{ab} + b'^2\Phi_{bb} + b''\Phi_b = 0.$$

Полученное в результате ОДУ второго порядка

$$b'' = H(a, b, b') \quad (5)$$

относительно функции  $b(a)$  называется *дуальным* для уравнения (2). Уравнения (2) и (5) являются дуальными по отношению друг к другу. У них одна формула общего решения на двоих, где в первом случае как постоянные параметры рассматриваются  $a$  и  $b$ , а во втором случае —  $x$  и  $y$ . Если в уравнении (2) сделать произвольную замену переменных (1), то преобразованное уравнение останется дуальным для уравнения (5). Аналогично, для уравнения (2) дуальными будут все уравнения, эквивалентные уравнению (5) с точностью до точечной замены переменных  $a, b$ .

**Пример 1.** Третье уравнение Пенлеве при значениях своих параметров  $\alpha = \gamma = 0$  или  $\beta = \delta = 0$  интегрируется в элементарных функциях. В частности, уравнение

$$y'' = \frac{p^2}{y} - \frac{p}{x} + \alpha \frac{y^2}{x} + \gamma y^3$$

принадлежит типу (III) и имеет общее решение  $y = \frac{2a^2(\chi + \alpha)}{x(\chi^2 - \gamma a^2)}$ , где  $\chi = e^b x^a - \alpha$ . Дуальное уравнение относительно функции  $b(a)$  получается исключением  $\chi$  из равенств

$$(\chi^2 + 2\alpha\chi + \gamma a^2)(ab' - b + \ln(\chi + \alpha)) = 2\chi^2, \\ a^2 b'' (\chi^2 + 2\alpha\chi + \gamma a^2)^3 + 2\chi^6 + 8\alpha\gamma a^2 \chi^3 + 6\gamma^2 a^4 \chi^2 = 0.$$

Уравнение (2) назовем *самодуальным*, если его дуальное уравнение (5) принадлежит тому же классу эквивалентности, что и само уравнение (2). Так, самодуальными являются все уравнения типа (IV).

**Пример 2.** Уравнение Риккати второго порядка  $y'' = 3yp - y^3 - y$  имеет нулевые относительные инварианты (3) и приводится к виду  $Y'' = 0$  заменой переменных  $X = y^{-1} \sin x - \cos x, Y = y^{-1} \cos x + \sin x$ . Дважды дифференцируя по  $a$  его общее решение  $y = \frac{\sin(x+a)}{b + \cos(x+a)}$  и исключая  $x, y$  из него и из равенств  $(b' - \sin(x+a))y -$



$\cos(x+a) = 0$ ,  $(b'' - \cos(x+a))y + \sin(x+a) = 0$ , получим дуальное уравнение  $b'' + b = 0$ , которое также принадлежит типу (IV).

Уравнение (2) не только самодуально, но и его дуальное уравнение имеет форму

$b'' = F(a, b, b')$  с той же самой функцией  $F$ , если переменные  $(x, a)$ , также как и  $(y, b)$ , входят в формулу (4) общего решения симметрично, т.е. справедливо соотношение

$$\Phi(x, y, a, b) = \Phi(a, b, x, y). \quad (6)$$

А. Коппиш установил следующее свойство ОДУ второго порядка [2].

**Теорема.** Уравнение (2) с  $F_4 = 0$  имеет дуальное уравнение с  $\beta = 0$  и наоборот, уравнение (2) с  $\beta = 0$  имеет дуальное уравнение с  $F_4 = 0$ .

Таким образом, самодуальные уравнения могут содержаться только среди уравнений типов (I) и (IV). Примеры таких уравнений можно найти среди уравнений, допускающих алгебру Ли  $L_r$  точечных симметрий размерности  $r > 1$ . Симметрией дифференциального уравнения называется преобразование, оставляющее инвариантным это уравнение. С. Ли разработал алгоритм интегрирования в квадратурах ОДУ второго порядка, допускающего двумерную алгебру Ли  $L_2$  [3], а также проклассифицировал в комплексной области скалярные ОДУ второго порядка, обладающие симметриями. Для них  $r$  может принимать значения 1, 2, 3 или 8. Вещественная классификация выполнена в [3].

В случае  $r = 1$  представитель уравнения (2), допускающего одну симметрию, имеет слишком общий вид  $y'' = f(y, p)$ , чтобы можно было построить его общее решение и благодаря этому найти дуальное уравнение. В случае  $r = 8$  уравнение  $y'' = 0$  самодуально и принадлежит типу (IV). Для  $r = 2$  и  $r = 3$  в таблице 1 вместе с соответствующим уравнением из [3] приведено его общее решение. Здесь  $k \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , знак “=” в последней колонке означает, что уравнение самодуально (это следует и из выполнения условия (6) для общего решения).

Табл. 1

I	Уравнение и общее решение	Тип
(2.a)	$y'' = f(p), \quad f^{(4)} \neq 0, \quad y + b = \phi(x + a), \quad \phi'' = f(\phi')$	(I) =
(2.b)	$y'' = \frac{g(p)}{x}, \quad g^{(4)} \neq 0$ и/или $g^2 g^{(4)} - 3g g''' + (g' + 2)g'' \neq 0$ $y + b = a\psi\left(\frac{x}{a}\right), \quad \frac{x}{a}\psi'' = g(\psi')$	(I), (II), (III)

(3.a)	$y'' = x^{-1}(p^2 + 1)\left(p \pm \sqrt{p^2 + 1}\right), \quad (y + b)^2 + x^2 = \pm \frac{a}{\sqrt{c}}x$	(II)
(3.b)	$y'' = -x^{-1}\left(2cp^3 + \frac{1}{2}p\right), \quad (y + b)^2 + a^2 = \pm \frac{a}{\sqrt{c}}x$	(III)
(3.c)	$y'' = cp^{\frac{k-2}{k-1}}, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \quad y + b = \frac{c^{k-1}(x+a)^k}{k(k-1)^{k-1}}$	(I) =
(3.d)	$y'' = ce^{-p}, \quad y + b = (x+a)(\ln c(x+a) - 1)$	(I) =
(3.e)	$y'' = c(p^2 + 1)^{3/2}e^{k \arctg p}, \quad 1 + c\sqrt{u^2 + v^2}e^{k \arctg(u/v)} = 0,$ где $u = k(y + b) - x - a, \quad v = y + b + k(x + a)$	(I) =
(3.f)	$y'' = x^{-1}(p^2 + 1)\left(p + c\sqrt{p^2 + 1}\right), \quad c \neq \pm 1,$ $c\sqrt{((y + b)^2 + x^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2} + (y + b)^2 + x^2 + a^2 = 0$	(I) =

Уравнения (3.a) и (3.b) дуальны друг другу, что нетрудно видеть, сравнив формулы их общих решений. Уравнение (3.b) имеет другую стандартную форму  $Y'' = c^{-1}(XY' - Y)^3$ , связанную с ним заменой переменных  $x = cX^{-2}, y = X^{-1}Y$ . А это уравнение как точечным преобразованием  $z = X^{-1}Y, w = \pm\sqrt{c}X^{-1}$ , так и преобразованием Лежандра  $z = Y', w = XY' - Y, w' = X$  связано с ОДУ  $w'' = cw^{-3}$ . Для него дуальное уравнение, эквивалентное ОДУ (3.a), найдено в [4].

Для ОДУ (2.b) из таблицы 1 дуальное уравнение имеет подобный вид  $b'' = a^{-1}G(b')$  с функцией  $G = \sigma^2\psi''(\sigma)$  и в общем случае оно неэквивалентно этому ОДУ (2.b). Дуальное уравнение получается, если из равенства  $b' = \psi - xa^{-1}\psi'$  выразить  $xa^{-1} = \sigma(b')$  и подставить в равенство  $b'' = x^2a^{-3}\psi''$ . Для уравнений, принадлежащих типу (III), форма зависимости правой части от  $p$  известна, что дало возможность в [5] выполнить для них более подробную групповую классификацию. В таблице 2 перечислены уравнения, допускающие две симметрии, вместе с заменой переменных (1), преобразующей их к стандартному виду  $Y'' = X^{-1}g(Y')$ . Здесь  $c(n+1) + 2 \neq 0, 4c(2n+1)^2 + 9(3n+1) \neq 0$ .

Табл. 2

Уравнение типа (III) с $L_2$	Замена (1)	ОДУ в форме (2.b)
$y'' = 3y^n p + cy^{2n+1}, \quad n \neq 0$	$X = \frac{1}{y^n}, \quad Y = x$	$Y'' = \frac{1}{X}\left(cnY'^3 - 3Y'^2 - \frac{n+1}{n}Y'\right)$
$y'' = y^m, \quad m \neq 0, 1, -3$	$X = y^{(1-m)/2}, \quad Y = x$	$Y'' = \frac{1}{X}\left(\frac{m-1}{2}Y'^3 + \frac{m+1}{1-m}Y'\right)$
$y'' = e^y$	$X = \frac{1}{e^{y/2}}, \quad Y = x$	$Y'' = \frac{1}{X}\left(\frac{1}{2}Y'^3 - Y'\right)$

**Пример 3.** Уравнение  $y'' = e^y$  интегрируется следующим образом

$$y = \frac{1}{a}(x + 2b) - 2 \ln \left( a - \frac{a}{2} e^{(x+2b)/a} \right).$$

Эквивалентное уравнение  $Y'' = X^{-1}(\frac{1}{2}Y'^3 - Y')$  из таблицы 2 имеет общее решение в виде

$$Y + 2b = a \ln \frac{2}{a^2} \left( X^2 + a^2 \pm X \sqrt{X^2 + 2a^2} \right),$$

соответствующем пункту (2.b) таблицы 1. Исключение  $x$  из равенств

$$\left( 2b' - \frac{1}{a}(x + 2b) \right) \left( \frac{2}{2 - e^{(x+2b)/a}} - \frac{1}{2} \right) = 1, \quad 8ab'' = \left( 2b' - \frac{1}{a}(x + 2b) \right)^3$$

приводит к дуальному уравнению

$$\frac{2 \exp(2(ab'')^{1/3})}{\exp(2b')} = \frac{1 + (ab'')^{1/3}}{1 - (ab'')^{1/3}},$$

т. е. уравнению вида  $b'' = a^{-1}G(b')$  в форме, неразрешенной относительно  $b''$ .

Из изложенного выше следует: если уравнение (2) допускает  $r$ -мерную алгебру Ли точечных симметрий, где  $r = 2, 3$  или  $8$ , то дуальное уравнение (5) допускает алгебру Ли  $L_r$  той же размерности.

Дуальное уравнение имеет значение, когда в исследуемой задаче важна форма зависимости общего решения от произвольных постоянных.

Из примеров 1, 3 видно, что в паре дуальных друг другу уравнений одно может быть более простым, а другое даже не быть разрешимым относительно второй производной. В приложениях такие сложные уравнения, хотя и не часто, но появляются. Поскольку у уравнений (2) и (5) одна и та же формула общего решения (4), может оказаться, что ее проще построить не для данного ОДУ (2), а для его дуального уравнения (5). Таким образом, возникает задача: по уравнению (2) уметь получить дуальное уравнение (5), не имея формулы общего решения (4).

## Литература

1. Koppisch A. *Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung* // Inaugural Dissertation der hohen philosophischen Fakultät der königlichen Universität Greifswald zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde. – Leipzig: B. G. Teubner, 1905. – 36 s.
2. Lie S. *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*. – Leipzig: B. G. Teubner, 1891. – 568 s.
3. Mahomed F. M., Leach P. G. L. *Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations* // J. Math. Phys. – 1989. – V. 30. – № 12. – P. 2770–2777.
4. Nurowski P., Sparling G. A. J. *Three-dimensional Cauchy–Riemann structures and second-order ordinary differential equations* // Class. Quantum Grav. – 2003. – V. 20. – № 23. – P. 4995–5016.
5. Багдерина Ю. Ю. *Групповая классификация ОДУ второго порядка проективного типа* // Сиб. ж. индустр. матем. – 2016. – Т. 19. – № 1. – С. 37–51.

DUALITY AND SYMMETRY PROPERTIES OF THE SECOND-ORDER ODES

Yu.Yu. Bagderina

*Dual equations for second-order ODEs, obtained as a result of group classification in a real domain,*

*are considered.*

Keywords: equivalence, dual equation, group classification.

УДК 539.3

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДОКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

И.Б. Бадриев<sup>1</sup>, М.В. Макаров<sup>2</sup>, Е.В. Смирнова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *ildar.badriev1@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> *makarovmaksim@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>3</sup> *ovsanka@ro.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Разработан программный комплекс для численного исследования докритического поведения трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной одномерной постановке. На основе разработанного программного комплекса проведены численные эксперименты для модельной задачи. Приведены результаты численных экспериментов. Нами проведен анализ полученных результатов. Разработанный программный комплекс может применяться для проектирования конструкций из композитных материалов.*

**Ключевые слова:** программный комплекс, трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель.

### 1. Введение

Настоящая работа посвящена описанию комплекса программ для численного исследования докритического поведения трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной одномерной постановке. Следует отметить, что трехслойные конструкции широко применяют в аэрокосмической технике, судостроении, транспортном машиностроении, а также в строительстве, когда требуются повышенная жесткость и минимальная масса [1–5]. Высокая удельная изгибная жесткость в трехслойных конструкциях достигается простым приемом разнесения на некоторое расстояние (за счет промежуточного легкого слоя заполнителя) двух жестких несущих слоев. В качестве заполнителя часто используют различные пенопласты, соты из металлической фольги или полимерной бумаги, гофры, ячейки и др. Для несущих слоев применяют различные металлические сплавы, а также композиционные материалы с высокими удельными жесткостными характеристиками. Для обеспечения совместного деформирования несущие слои скрепляются со слоем заполнителя, например, с помощью высокопрочных клеев. Для численного исследования докритического поведения трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в среде MatLab разработан программный комплекс. Проведены численные эксперименты для модельных задач.

## 2. Постановка задачи

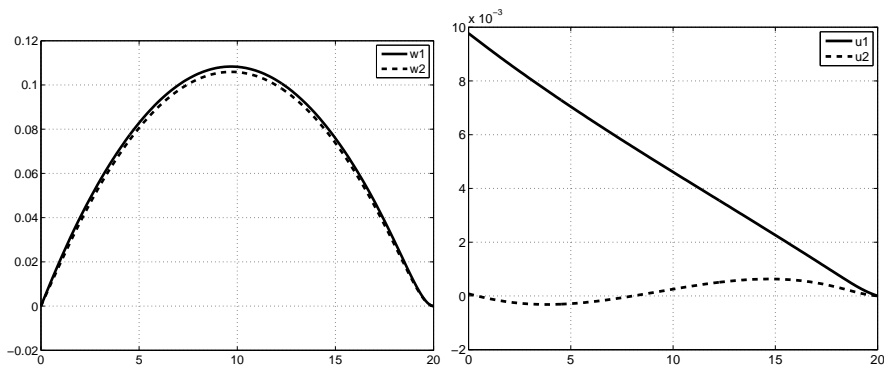
Рассматривается задача об определении положения равновесия трехслойной пластины. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа-Лява. Кинематические соотношения для заполнителя выводятся путем последовательного интегрирования по поперечной координате исходных трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет введения предположения о равенстве нулю тангенциальных компонент напряжений [6]. Предполагаем, что края несущих слоев пластины жестко закреплены. Кроме того, считаем, что на кромках пластины диафрагмы отсутствуют.

В [7] для описания напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины был построен функционал Лагранжа  $L(U, q^1) = A_u(U, q^1) - A_l(U, q^1) - A_q(U, q^1)$ , где  $q^1$  – касательные напряжения в заполнителе,  $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)})$  – вектор перемещений точек срединных поверхностей несущих слоев,  $w^{(k)}$  и  $u^{(k)}$  – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности  $k$ -го слоя,  $k = 1, 2$ ,  $A_u$  – потенциальная энергия деформаций,  $A_l$  – работа заданных внешних сил и моментов,  $A_q$  – работа неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. При этом установлено [8], что решение задачи о равновесии трехслойной пластины есть стационарные точки функционала  $L$ . Путем вычисления производных Гато функционала  $L$  построена обобщенная постановка задачи в виде операторного уравнения в пространстве Соболева. Исследованы свойства оператора – псевдомонотонность [9], ограниченная липшиц-непрерывность [10], коэрцитивность и квазипотенциальность. Это дало возможность доказать теорему существования задачи на основе общих результатов теории монотонных операторов.

## 3. Приближенные методы и программный комплекс

Для приближенного решения задачи методом сумматорных тождеств [11, 12] построена конечно-разностная аппроксимация задачи. Численное решение осуществляется с помощью двухслойного итерационного метода [13–16] с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора построенной разностной схемы.

Разработан комплекс программ в среде Matlab, с помощью которого производилось численное моделирование рассматриваемых процессов. Программы написаны в соответствии с модульным принципом, что позволило осуществить раздельное программирование, отладку и тестирование составных частей пакета программ, а также простую модернизацию и настройку пакета на решение задач различного уровня сложности. Для создания графического интерфейса использовалась специализированная среда GUIDE (см. [17]). Пользователь может задавать число точек сетки, изменять толщины несущих слоев и заполнителя оболочки, менять параметры, определяющие свойства оболочки (жесткости на растяжение-сжатие, модули упругости первого рода, изгибные жесткости слоев), итерационный параметр, точность вычислений (величину относительной погрешности на соседних итерациях). Визуально выводятся графики прогибов и осевые перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев и касательных напряжений в заполнителе. На

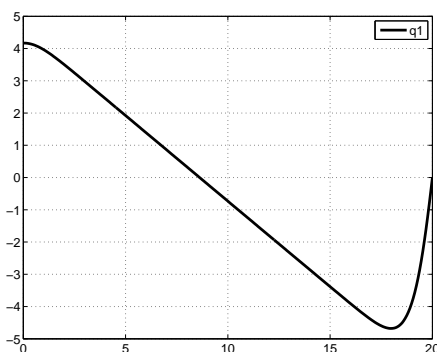


**Рис. 1.** Прогибы точек срединных поверхностей несущих слоев

**Рис. 2.** Осевые перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев

основе разработанного комплекса программ проведены численные эксперименты для модельной задачи. На рис. 1–3 приведены примеры численных расчетов.

Разработанный комплекс может применяться для проектирования конструкций из композитных материалов, в том числе, внешние нагрузки, которые могут привести к потере устойчивости (разрушению) оболочки.



**Рис. 3.** Касательные напряжения в заполнителе

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-41-160014, 18-38-00595)

## Литература

1. Бадриев И. Б., Макаров М. В., Паймушин В. Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39-51.
2. Бадриев И. Б., Макаров М. В., Паймушин В. Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158. – № 4. – С. 453–468.
3. Бадриев И. Б., Бандеров В. В. Численное моделирование деформирования биокompозитов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – М: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2015. – С. 7-9.

4. Бадриев И. Б., Макаров М. В., Паймушин В. Н. *Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159. – № 2. – С. 174–190.
5. Paimushin V. N., Shalashilin V. I. *Geometrically Non-linear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2006. – V. 70. – № 1. – P. 91–101.
6. Paimushin V. N., Bobrov S. N. *Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms* // Mechanics of composite materials. – 2000. – V. 36. – № 1. – P. 59–66.
7. Паймушин В. Н. *К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел* // Доклады Академии наук. – 1983. – Т. 273. – № 5. – С. 1083–1087.
8. Paimushin V. N. *Generalized Reissner variational principle in nonlinear mechanics of three-dimensional composite solids, with applications to the theory of multilayer shells* // Mechanics of solids. – 1987. – V. 22. – No. 2. – P. 166–174.
9. Lions J.-L. *Quelque problèmes méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*. – Paris: Dunod, 1969. – 554 p.
10. Gajewskii H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. – Berlin: Akademie-Verlag, 1974. – 281 p.
11. Карчевский М. М., Ляшко А. Д. *Разностные схемы для нелинейных задач математической физики*. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1976. – 156 с.
12. Badriev I. B., Banderov V. V., Gnedenkova V. L., Kalacheva N. V., Korablev A. I., Tagirov R. R. *On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities* // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9. – No. 113-116. – P. 5697–5705.
13. Badriev I. B., Zadvornov O. A. *On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities* // Differential Equations. – 2006. – V. 42. – No. 8. – P. 1180–1188.
14. Badriev I. B., Makarov M. V., Paimushin V. N. *Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39. – № 3. – P. 448–457.
15. Badriev I. B., Banderov V. V., Makarov M. V. *Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – V. 208, – art. 012002.
16. Badriev I. B., Paimushin V. N. *Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38. – № 5. – P. 779–793.
17. Бандеров В. В. *Создание пользовательского интерфейса при разработке программных комплексов в среде MATLAB* // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 48–49.

#### THE SOFTWARE PACKAGE FOR THE NUMERICAL INVESTIGATION OF SUBCRITICAL BEHAVIOR OF SANDWICH PLATE WITH TRANSVERSALLY SOFT CORE

I.B. Badriev, M.V. Makarov, E.V. Smirnova

*A software package has been developed for the numerical study of the subcritical behavior of a sandwich plate with a transversally soft filler in a geometrically nonlinear one-dimensional formulation. On the basis of the developed software complex, numerical experiments for a model problem were carried out. The results of numerical experiments are given. We have analyzed the results obtained. The developed*

*software package can be used to design structures made of composite materials.*

Keywords: software package, sandwich plates, transversely soft core.

УДК 539.3

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ  
ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ  
С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

И.Б. Бадриев<sup>1</sup>, В.Ю. Буянов<sup>2</sup>, М.В. Макаров<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *ildar.badriev1@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> *ildar.badriev1@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>3</sup> *makarovmaksim@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Разработан комплекс программ для нахождения критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в геометрически нелинейной одномерной постановке. На основе разработанного комплекса программ проведены численные эксперименты для модельной задачи.*

**Ключевые слова:** программный комплекс, трехслойная пластина, трансверсально-мягким наполнитель, потеря устойчивости.

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена описанию комплекса программ для для нахождения критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в геометрически нелинейной одномерной постановке. Следует отметить, что многослойные конструкции широко распространены в технике. В одних случаях применение многослойных конструкций диктуется стремлением сочетать легкость с достаточной прочностью и жесткостью. Примером служат трехслойные пластины и оболочки с мягким наполнителем, применяемые в авиации и судостроении [1–5].

В настоящей работе рассматриваются одномерные геометрические нелинейные задачи о смешанных формах потери устойчивости (ФПУ) несущих слоев трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем, находящиеся в условиях торцевого сжатия силой, приложенной к одному из внешних слоев, и поперечной распределенной нагрузке. Обобщенная постановка сформулирована в виде операторного уравнения в пространстве Соболева. Для поиска неустойчивых положений равновесия были найдены точки бифуркаций нелинейных решений. С этой целью проведена линеаризация уравнений в окрестности нелинейного решения и введена в рассмотрение нелинейной задачи на собственные значения. Разработан комплекс программ для нахождения критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости трехслойной пластины. На основе разработанного комплекса программ проведены численные эксперименты для модельной задачи.



## 2. Постановка задачи

Рассмотрена трехслойная пластина, состоящая из двух внешних несущих слоев и расположенного между ними трансверсально-мягкого заполнителя, связанного с несущими слоями при помощи клеевого соединения. При таком нагружении пластина оказывается в условиях продольно-поперечного изгиба, одной из возможных причин её разрушения является реализация исследуемых ФПУ [6].

В уточненной постановке [1, 2, 7–9] задача о геометрически нелинейном деформировании пластины описывается системой пяти обыкновенных дифференциальных уравнений относительно поперечных касательных напряжений  $q^1$  в заполнителе, постоянных по его толщине, осевых перемещений  $u^{(k)}$  и прогибов  $w^{(k)}$  точек срединной поверхности  $k$ -го слоя,  $k = 1, 2$ . Пусть  $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q^1)$  – вектор неизвестных. Тогда задача в операторном виде будет иметь следующий вид:

$$A_1 U + A_2 U = F, \quad (1)$$

где  $A_1, A_2$  – линейный и нелинейный операторы. Решение задачи (1) позволяет определить напряженно-деформированное состояние пластины для устойчивых положений равновесия.

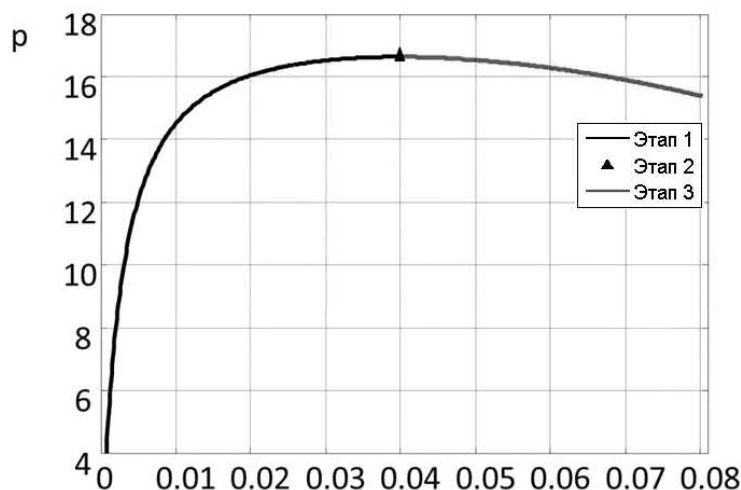
## 3. Приближенные методы и программный комплекс

Поиск критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости, осуществляется с помощью метода, который предусматривает реализацию трех этапов (см. рис. 1). Во-первых, проводится решение системы нелинейных дифференциальных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины в устойчивых положениях равновесия с помощью метода, предложенного в [9–12]. Для приближенного решения задачи построена конечно-разностная аппроксимация задачи методом сумматорных тождеств [13, 14]. Численное решение осуществляется с помощью двухслойного итерационного процесса с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора построенной разностной схемы. Во-вторых, проводится постановка и решение квадратичной спектральной задачи для поиска точки ветвления решений (точки бифуркации) [15, 16]. Постановка этой задачи проводится путем линеаризации дифференциальных уравнений в некоторой окрестности решения нелинейной задачи. В-третьих, проводится смена параметра нагружения и последующее решение задачи путем табулирования по новому параметру, начиная с найденной точки бифуркации. Критическая нагрузка (точка бифуркации) определяется как точка ветвления решений задачи. Указанную точку можно найти, линеаризуя нелинейное уравнение в некоторой окрестности решения. Основная идея определения точки бифуркации состоит в следующем. Пусть после реализации первого этапа найдена некоторая форма равновесия пластины; необходимо определить точку бифуркации этой формы равновесия. Для этого достаточно, не интересуясь поведением системы вдали от известной формы равновесия  $U$ , найти условия существования другой формы  $U + \Delta U$ , отличной от исходной, но бесконечно к ней близкой:  $AU = A(U + \Delta U) = F$ , т.е. точка, в окрестности которой существует такая форма равновесия, и будет точкой бифуркации, где  $\Delta U$  – малое приращение. Имеем, что

$A(U + \Delta U) = AU + B(U)\Delta U + R(U, \Delta U)$ , где  $B(U)$  – дифференциал Фреше оператора  $A$  в точке  $U$ , причем  $B$  линеен и непрерывен по  $\Delta U$  и нелинеен по  $U$ . Приняв во внимание, что остаточный член дифференциала Фреше стремится к нулю:  $R(U, \Delta U) \rightarrow 0$  при  $\Delta U \rightarrow 0$ , получим равенство  $B(U)\Delta U$ . Для решения данного уравнения ставится задача на собственные значения, путем решения которой и определяется точка бифуркации.

Разработан комплекс программ в среде Matlab, с помощью которого производилось численное моделирование рассматриваемых процессов. Программы написаны в соответствии с модульным принципом, что позволило осуществить раздельное программирование, отладку и тестирование составных частей пакета программ, а также простую модернизацию и настройку пакета на решение задач различного уровня сложности. Пользователь может задавать число точек сетки, изменять толщины несущих слоев и заполнителя оболочки, менять параметры, определяющие свойства пластины. Визуально выводятся графики прогибов и осевые перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев и касательных напряжений в заполнителе. На основе разработанного комплекса программ проведены численные эксперименты для модельной задачи. На рис. 1 приведен пример численных расчетов.

Разработанный комплекс может применяться для проектирования конструкций из композитных материалов, в том числе, внешние нагрузки, которые могут привести к потере устойчивости (разрушению) оболочки.



**Рис. 1.** Зависимость нагрузки от прогиба  $w^{(1)}$  в центральной точке пластины

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-41-160029, 18-38-00595)

## Литература

1. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник

- Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39-51.
2. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. *Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
3. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. *Численное моделирование деформирования биокompозитов* // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – М: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2015. – С. 7-9.
4. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. *Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами* // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 2. – С. 174–190.
5. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *Geometrically Non-linear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2006. – V. 70, № 1. – P. 91–101.
6. Paimushin V.N., Bobrov S.N. *Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms* // Mechanics of composite materials. – 2000. – V. 36, № 1. – P. 59–66.
7. Паймушин В.Н. *Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и стержней с прямолинейной осью* // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 855–893.
8. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. *Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – V. 158. – P. 012011.
9. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М. В., Паймушин В.Н. *Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке* // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 393–396.
10. Badriev I.B., Zadvornov O.A. *On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities* // Differential Equations. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1180–1188.
11. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. *Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39, № 3. – P. 448–457.
12. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V. *Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – V. 208. – P. 012002.
13. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. *Разностные схемы для нелинейных задач математической физики.* – Казань: Изд-во Казанского университета, 1976. – 156 с.
14. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. *On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities* // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 113-116. – P. 5697–5705.
15. Badriev I.B., Paimushin V.N. *Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38, № 5. – P. 779–793.
16. Badriev I.B., Paimushin V.N. *Mathematical modeling of a dynamic thin plate deformation in acoustoelasticity problems* // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2018. – V. 107. – P. 012095.

THE SOFTWARE PACKAGE FOR FINDING THE CRITICAL LOAD  
FOR A SANDWICH PLATE WITH TRANSVERSALLY SOFT CORE

I.B. Badriev, V.Ju. Bujanov, M.V. Makarov

*A software package has been developed for finding the critical load at which buckling occurs sandwich plate with a transversally soft filler in a geometrically nonlinear one-dimensional formulation. On the basis of the developed software complex, numerical experiments for a model problem were carried out.*

Keywords: software package, sandwich plates, transversely soft core, buckling.

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
МАТЕРИАЛА ФРИКЦИОННОГО РАЗЪЕМА  
НА ПАРАМЕТРЫ ЕГО ЭКСПЛУАТАЦИИ**И.С. Балафендиева<sup>1</sup>, В.В. Михеев<sup>2</sup>, Л.Р. Секаева<sup>3</sup>, И. Сүй<sup>4</sup>

<sup>1</sup> e\_xo@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> miheevvova@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>3</sup> lrsekaeva@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>4</sup> хуq\_1988@hotmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе предлагается методика расчета процессов создания и некоторых этапов эксплуатации фрикционных разъемов, элементы которых получены путем полученных путем закручивания перфорированных толстостенных цилиндрических заготовок. Для одного из расчетных случаев было проведено численное моделирование процесса изготовления и этапов эксплуатации фрикционного разъема.*

**Ключевые слова:** упругопластическое деформирование, фрикционный разъем, штырь.

На основе предложенной ранее методики был проведен расчет упругопластического деформирования статичного элемента фрикционного разъема и расчет его контактного взаимодействия со штырем при кинематическом смещении последнего. Статичный элемент фрикционного разъема представляет собой толстостенный трехмерный цилиндр с 12-ю симметрично расположенными продольными секторальными прорезями. Штырь разъема – толстостенный цилиндр, внешний радиус которого совпадает с внутренним радиусом статичного элемента разъема. Расчет производился в несколько этапов.

На первом этапе статичный элемент разъема жестко закреплялся по одному из торцов, а ко второму торцу по шагам прикладывался осевой момент кручения, изменяющийся от нуля до некоторого значения и снова до нуля. Была определена величина момента кручения, при достижении которой в статичном элементе разъема возникали пластические деформации.

На втором этапе соосно статичному элементу разъема непосредственно рядом моделируется штырь разъема. Далее, в закрепленный по торцу элемент разъема, вдвигается и выдвигается штырь разъема путем приложения к торцу штыря раз-

ема кинематического нагружения вдоль продольной оси разъема. Расчет для случая вдвигания и извлечения штыря разъема при повышении температуры всего разъема на 100С показывает, что качественно характер зависимости продольного усилия в штыре разъема от шагов нагружения не меняется, только поднимается общий уровень усилий для участков прохождения начального сечения штыря стержня через перфорированную область неподвижной части разъема и наблюдается пик усилий при движении в зоне торца, где закреплена статичная часть разъема.

Таким образом, реализованная методика позволяет определять усилия извлечения штыря из разъема в зависимости от угла начального закручивания статичной части разъема. Можно отметить, что предложенная авторами методика расчета нелинейного поведения элементов трехмерных подконструкций позволяет адекватно описывать процессы упругопластического деформирования и контактного взаимодействия, реализующиеся в реальных практических конструкциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан рамках научных проектов №18-41-160018 и №18-41-160021.

#### RESEARCH OF INFLUENCE OF ELASTO-PLASTIC DEFORMATION OF MATERIAL OF THE FRICTIONAL SOCKET ON PARAMETERS OF HIS OPERATION

I.S. Balafendieva, V.V. Miheev, L.R. Sekaeva, Yingqian XU

*In work the method of calculation of processes of creation and some operational phases of frictional sockets which elements are received in the way of the punched thick-walled cylindrical preparations received by twisting is offered. For one of settlement cases numerical modeling of process of production and operational phases of the frictional socket has been carried out.*

Keywords: elasto-plastic deformation, frictional socket, probe.

УДК 517.9

#### О ЗАДАЧЕ ЧЕРНОУСЬКО

Ж.А. Бахрамов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> bahramov\_jasurbek@mail.ru; Институт математики АНРУз

*В статье рассмотрена задача оптимального управления по времени для уравнения распределения тепла в стержне. Предложен метод группировки членов Фурье для улучшения субоптимального управления, получена предварительная оценка оптимального времени.*

**Ключевые слова:** оптимальное управление, задача Черноусько, уравнение теплопроводности.

Рассматривается задача оптимального быстродействия [1] для уравнения распределения тепла на стержне:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(t, x), \quad |v(t, x)| \leq v_0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть  $L = \{l \neq 3^{2p-1}q \mid p, q \in \mathbb{N}, (q, 3) = 1\}$ . Ограничение  $|v(t, x)| \leq v_0$  задается в виде

$$\max_{0 \leq z \leq \pi} \left| \sum_{k \in L} (u_k \sin kz + v_k \sin 3kz) \right| \leq v_0.$$

Заменим это ограничение счетной системой неравенств

$$\max_{0 \leq z \leq \pi} |u_k \sin kz + v_k \sin 3kz| \leq \mu_k, \quad k \in L, \quad (2)$$

где последовательность  $\mu_k$  выбирается так, чтобы было выполнено условие  $\sum_{k \in L} \mu_k = v_0$ , в результате чего получим задачу субоптимального управления [2].

Ограничение (2) задает определенный выпуклый центрально симметричный компакт  $Q_k$  на плоскости, с координатами  $(u_k, v_k)$ .

Пусть  $Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \max_{0 \leq z \leq \pi} |u \sin z + v \sin 3z| \leq 1\}$ . В результате задача построения субоптимального управления сведется к задаче оптимального управления для двумерной системы

$$\dot{x} = -x + u, \quad \dot{y} = -9y + v, \quad (u, v) \in Q. \quad (3)$$

В первую очередь отметим, что во вспомогательной задаче (3) для каждой начальной точки  $(x_0, y_0)$  существует единственное оптимальное по быстродействию управление [2]. Поэтому оптимальные управления задачи (1) совпадают с экстремальными управлениями принципа максимума Понтрягина [3].

Пусть  $\tau = T(x_0, y_0) - t$ , где  $T(x_0, y_0)$  – оптимальная время перехода для начальной точки (т. е. перейдем к “попятному движению”).

**Теорема. Функции**

$$u(\tau, s) = 3(2 - e^{-8\tau} \operatorname{tg} s) v(\tau, s), \quad v(\tau, s) = (3 - e^{-8\tau} \operatorname{tg} s)^{-3/2}$$

задают синтез оптимальных управлений в (3).

## Литература

1. Черноусько Ф.Л. *Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами*. – ПММ. 1992. – Т.56. – Вып.5. – С. 810–826.
2. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
3. Понтрягин Л.С., Болянский В.Г., Гаикрелидзе Р.Ф., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.
4. Azamov A.A., Ruzibayev M.R. *The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations // J. of App. Math. and Mech.* – 2013. – V. 77, № 2.

ABOUT A PROBLEM CHERNOUS'KO

J.A. Bakhramov

*It is considered a time-optimal problem for the equation of heat distribution in a rod. In order to get better suboptimal control, grouping method of terms of Fourier series is suggested, and advanced*

*estimation for optimal time is yielded.*

Keywords: optimal control, problem of Chernous'ko, equation of heat conductivity.

UDC 517.9

## SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL CONTROL IN THE PROBLEM OF QUICK-SPEED FOR A ONE-DIMENSIONAL EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY

Sh.R. Bakhramova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> bahramov\_jasurbek@mail.ru; Gulistan State University

*It is considered time-optimal problem for the equation of heat distribution in a rod. In order to get better suboptimal control, grouping method of terms of Fourier series is suggested, and advanced estimation for optimal time is yielded.*

**Keywords:** optimal control, problem of Chernous'ko, equation of heat conductivity.

In [1] it was studied the problem

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = A[u(\cdot, \cdot)](t, x) + v(t, x) \quad (1)$$

with initial and boundary conditions

$$u(0, x) = u_0(x), \quad Mu(t, s) = w(t, s), \quad (2)$$

where  $A$  is a uniformly elliptic differential operator,  $t \geq 0$ ,  $x \in D$ ,  $D$  is a regular domain with Lyapunov boundary  $\gamma$ ,  $s \in \gamma$ ,  $M$  is a differential operator whose order is less than the order  $A$ .

The solution and admissible controls will be understood in the sense of [2, 3]. The restriction on the control function is put in the norm of the space  $L_\infty$ , i.e.  $|v(t, x)| \leq v_0$  a.e.  $t$  for every  $x \in \bar{D}$ ,  $v_0$  is a given positive number.

If the solution  $u(t, x)$  of problem (1), (2) satisfies the condition  $u(T, x) \equiv 0$  at some  $T$ ,  $T \geq 0$ , then the control function  $v(t, x)$  is called admissible, and the number  $T$  is called the transition time (from the initial state  $u_0(\cdot)$  into the equilibrium state 0). The class of all admissible controls is denoted by  $V$ . The quantity  $T = T[v(\cdot, \cdot)]$  is a functional of  $v(\cdot, \cdot)$  for given  $u_0(x)$  and  $w(t, s)$ .

If the admissible control  $v_*(t, x)$  satisfies the condition  $T_* = T[v_*(\cdot, \cdot)] \leq T[v(\cdot, \cdot)]$  for all  $v(\cdot, \cdot) \in V$ , then  $v_*(\cdot, \cdot)$  is called optimal (in terms of speed) control, and the value  $T_*$  – is the optimal transition time.

The direct application of the Pontryagin maximum principle to problem (1) and (2) is difficult. Therefore in [1] the method of expansion on the system of eigenfunctions of the operator  $A$  was successfully used as a result of such a decomposition, the problem reduces to the infinite system

$$\frac{d}{dt} y_k = -\lambda_k y_k + v_k, \quad y_k(0) = y_{k0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Each of equations (3) is an elementary controlled system with a control parameter  $v_k = v_k(t)$ . In the language of the system (3), the constraint  $|v(t, s)| \leq v_0$  means that the counting system of control parameters  $u_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , must satisfy the constraint

$$\max_{x \in \bar{D}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) v_k \right| \leq \nu_0. \quad (4)$$

Condition (4) defines a convex set in the linear space of all real sequences  $\{v_k\}$ , which is difficult to deal with. In this connection, it is natural to seek suboptimal control. For this purpose, in [1] the restriction (4) was replaced by a more rigid system of constraints

$$|v_k| \leq U_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

where  $\alpha_k = \max_{x \in \bar{D}} |\varphi_k(x)|$ , the nonnegative numbers  $U_k$  are chosen so that condition

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \alpha_k U_k = \nu_0.$$

Let  $T_{*k}$  – the optimal transition time in the problem

$$\dot{y}_k = -\lambda_k y_k + v_k(t), \quad y_k(0) = y_{k0}, \quad (6)$$

so that  $y_k(T_{*k}) = 0$ . In [1] it is shown that the numbers  $U_k$  can be chosen so that all  $T_{*k}$  will coincide  $T_{*k} = \hat{T}$  for all  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Let  $v_{*k}(t)$  – the corresponding optimal controls. Then  $T_* \leq \hat{T}$  and  $v_*(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) v_{*k}(t)$  will be suboptimal control.

In the present paper, the method of grouping the terms of the Fourier series is used to construct suboptimal control. Unfortunately, its effectiveness is tightly related to a specific kind of eigenfunctions  $\varphi_k()$ , so here it is demonstrated by the example  $A = \frac{d^2}{dx^2}$ .

So, consider the problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(t, x), \quad |v(t, x)| \leq \nu_0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = 0. \end{aligned}$$

Then the eigenvalues are equal  $\lambda_k = -k^2$  and the system of eigenfunctions consists of  $\varphi_k(t) = \sin kx$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , which is a complete orthogonal basis of the space  $L_2[0, \pi]$ .

Let  $Q$  – the collection of positive integers having the form  $3^{2p}q$ , where  $p = 0, 1, 2, \dots$ , and  $q$  is relatively simple with 3. It is obvious that the set of all positive integers  $\mathbb{N}^+$  decomposes into a union of two disjoint  $Q$  and  $3Q$ . Let  $v_k(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \sin kx$  – the expansion of a function  $v(t, x)$  in a Fourier series in the basis  $\{\sin kx\}$ . Then the restriction (4) takes the form

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \sin kx \right| \leq \nu_0. \quad (7)$$

Since it is difficult to work with the constraint (7), instead of it we will consider a more stringent restriction

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |u_k \sin kx + v_k \sin 3kx| \leq \mu_k, \quad k \in L, \quad (8)$$

where the sequence  $\mu_k$  is chosen so that condition  $\sum_{k \in L} \mu_k = \nu_0$ . The set  $(u_k, v_k)$  satisfying the inequality (8) is denoted by  $P_k$ . Let



$$P = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \max_{0 \leq t \leq \pi} |u \sin t + v \sin 3t| \leq 1 \right\}. \quad (9)$$

Then  $P_k = \mu_k P$ . As a result, the problem of constructing suboptimal control is reduced to the problem of optimal control in the problem of speed for a two-dimensional system

$$\dot{x} = -x + u, \quad \dot{y} = -9y + v, \quad (u, v) \in P. \quad (10)$$

The part of the boundary of the set  $P$  lying on the half-plane  $\geq 0$ , is given by the formula

$$u = \begin{cases} v + 1 & \text{if } -1 \leq v < 0.125 \\ 3(\sqrt[3]{v} - v) & \text{if } 0.125 \leq v \leq 1, \end{cases}$$

the other part is obtained by central symmetry.

First of all, we note that in the auxiliary problem (10), for each initial point  $(x_0, y_0)$  there exists a unique optimal control for speed [2]. Therefore, the optimal controls of problem (9) coincide with the extremal controls of the Pontryagin maximum principle [5].

Let  $\tau = T(x_0, y_0) - t$ , where  $(x_0, y_0)$  – the optimal transition time for the starting point (i.e., go to the "backward motion").

Functions

$$u(\tau, s) = \frac{3(2 - e^{-8\tau} \operatorname{tg} s)}{3 - e^{-8\tau} \operatorname{tg} s} \sqrt{\frac{1}{3 - e^{-8\tau} \operatorname{tg} s}}, \quad v(\tau, s) = \frac{1}{3 - e^{-8\tau} \operatorname{tg} s} \sqrt{\left(\frac{1}{3 - e^{-8\tau} \operatorname{tg} s}\right)} \quad (11)$$

specify the synthesis of optimal controls in (10).

## References

1. Chernous'ko F.L. *Bounded controls in distributed-parameter systems* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1992. – Vol. 56, № 5. – P. 810-826.
2. Azamov A.A., Ruzibayev M.R. *The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2013. – Vol. 77, № 2. – P. 220-224.
3. Pontryagin L.S. *The mathematical theory of optimal processes*. – New York, 1964. – 391 p.
4. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics*. – New York: Springer, 1985. – 407 p.

УДК 517.9

## АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОТЕНЦИАЛОМ РИССА

Н.С. Белевцов<sup>1</sup>, С.Ю. Лукашук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *nikitabelewtsov@mail.ru*; Уфимский государственный авиационный технический университет  
<sup>2</sup> *lsu@ugatu.su*; Уфимский государственный авиационный технический университет

*В статье рассматривается дробно-дифференциальное обобщение уравнения Пуассона, которое является стационарным случаем дробно-дифференциального уравнения фильтрации с потенциалом Рисса. Для введенного уравнения строится фундаментальное решение методом преобразования Фурье. На основе быстрого метода мультиполей для рассматриваемого уравнения предлагается численный алгоритм порядка  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Наконец, сравниваются результаты, полученные прямым численным счетом и  $N \log N$  алгоритмом.*

**Ключевые слова:** потенциал Рисса, дробно-дифференциальное уравнение фильтрации, быстрый метод мультиполей.

Дробно-дифференциальные модели все чаще находят применение при исследовании фильтрационных процессов в сложных неоднородных пористых средах [1, 2]. Стационарное двумерное дробно-дифференциальное уравнение фильтрации с потенциалом Рисса имеет вид [2]:

$$\Delta R^\alpha u = f(x, y), \quad u = u(x, y), \quad (x, y) \in R^2, \quad (1)$$

где

$$R^\alpha u(x, y) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\mu, \nu)}{[(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2]^{\frac{2-\alpha}{2}}} d\mu d\nu,$$

$$\gamma(\alpha) = 2^\alpha \pi \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$$

– потенциал Рисса [3].

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$u(x, y) = \int_{R^2} f(\xi, \eta) G(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2)$$

где  $G$  – функция Грина, которая является фундаментальным решением линейного интегро-дифференциального оператора  $\Delta R^\alpha$  и находится как решение уравнения

$$\Delta R^\alpha G(x, y) = \delta(x, y). \quad (3)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (3), получаем:

$$g(|k|) = |k|^{\alpha-2}. \quad (4)$$

Обратное преобразование Фурье от (4) дает фундаментальное решение интегро-дифференциального оператора  $\Delta R^\alpha$ :

$$G(x, y) \equiv G(r) = \frac{2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\pi \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)} r^{-\alpha}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Численное вычисление интеграла (2) требует порядка  $\mathcal{O}(N^2)$  операций, где  $N$  – количество расчетных узлов. Для уменьшения количества операций, и, следовательно, времени численного счета был выбран быстрый метод мультиполей [4].

Для построение мультипольного разложения функции Грина требуется ее факторизация. Доказано, что для (5) справедливо следующее представление:

$$G(x - \xi, y - \eta) \equiv G(r, \rho, \theta_1, \theta_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{r^{m+\alpha}} C_m^{\alpha/2}(\cos(\theta)), \quad (6)$$

$$x = r \cos(\theta_1), \quad y = r \sin(\theta_2), \quad \xi = \rho \cos(\theta_2), \quad \eta = \rho \sin(\theta_2), \quad \theta = \theta_2 - \theta_1,$$

где  $C_m^{\alpha/2}(\cos(\theta))$  – многочлены Гегенбауэра.

Используя свойства многочленов Гегенбауэра, (6) можно записать в виде:

$$G(r, \rho, \theta_1, \theta_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \frac{\rho^m}{r^{m+\alpha}} A_n^m(\alpha) Z_n^m(\theta_1, \alpha) Z_n^m(\theta_2, \alpha),$$

где

$$Z_n^m(\theta, \alpha) = (\sin(\theta))^n C_{m-n}^{\alpha+n}(\cos(\theta)),$$

$$A_n^m(\alpha) = (-1)^n 4^n \frac{\Gamma(2\alpha - 1) \Gamma(m - n + 1) [\Gamma(\alpha + n)]^2}{\Gamma(m + 2\alpha + n) [\Gamma(\alpha)]^2} (2n + 2\alpha - 1) C_n^{\alpha-1/2}(-1).$$

Из полученного разложения естественным образом вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 1 (Мультипольное разложение).** Пусть есть  $k$  точек с координатами  $(\xi_i, \eta_i)$ ,  $i = 1..k$ , причем  $|\rho_i| < a$ ,  $\rho_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$ . Тогда для любой точки  $(x, y)$  такой, что  $|r| > a$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , справедливо представление

$$\Phi(x, y) \equiv \sum_{i=1}^k G(r, \rho_i, \alpha, \theta_i) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \frac{A_n^m(\alpha)}{r^{m+\alpha}} M_n^m Z_n^m(\phi, \alpha),$$

где

$$M_n^m = \sum_{i=1}^k \rho_i^m Z_n^m(\theta_i, \alpha).$$

### NlogN алгоритм

Строится иерархическое разбиение расчетной области на ячейки. Уровень  $l + 1$  получается из уровня  $l$  разделением каждой ячейки на 4 равных части.

**Определение 1.** Две ячейки называются соседними, если они находятся на одном уровне разбиения и имеют общую точку (ячейка также считается соседней сама себе).

Для каждой ячейки  $i$  на уровне  $l$  определяется схема взаимодействия по следующему алгоритму.

1. На уровне разбиения  $l - 1$  определяется ячейке  $j$ , породившая ячейку  $i$ .
2. Для ячейки  $j$  определяются соседние ячейки на уровне  $l - 1$ , по которым строится список  $L$  порожденных ими ячеек на уровне  $l$ .

3. Из списка  $L$  исключаются ячейки, являющиеся соседними для ячейки  $i$ .

Начиная с уровня разбиения 2, для каждой ячейки:

- определяется схема взаимодействия;
- для каждого узла расчетной области, находящегося в ячейках схемы взаимодействия, считается мультипольное влияние рассматриваемой ячейки при выбранном параметре  $p$ , который можно увеличивать для достижения большей точности получаемого решения:

$$\Phi(\xi, \eta) \approx \sum_{l=0}^p \sum_{n=0}^l \frac{A_n^l(\alpha)}{r^{l+\alpha}} M_n^m Z_n^l(\phi, \alpha).$$

Описанные шаги алгоритма выполняются последовательно для каждого уровня разбиения  $l$ , вплоть до  $l_{max}$ . Максимальный уровень разбиения  $l_{max} \approx \log_4(N)$ ,  $N$  – количество узлов расчетной области.

На последнем шаге алгоритма прямым методом определяется влияние ячеек-соседей друг на друга.

Оценим количество операций, необходимое для выполнения рассматриваемого алгоритма.

1. На каждом уровне требуется порядка  $Np^2$  операций, чтобы построить все мультипольные разложения.
2. Так как максимально возможное число ячеек в схеме взаимодействия составляет 27, требуется  $27Np^2$  операций на каждом уровне разбиения.
3. Для расчета взаимодействия соседей требуется порядка  $9N$  операций.
4. Для  $\log_4(N)$  уровней разбиения, суммарное количество операций равно

$$27Np^2 \log_4(N) + 9N.$$

N	Levels	p	$t_{dir}$	$t_{N \log N}$	$\max  u_{dir} - u_{N \log N} $	$S_p$
100	3	3	0.08	0.18	$4.25 \times 10^{-3}$	0.44
400	3	3	1.06	0.84	$2.3 \times 10^{-3}$	1.26
900	3	3	4.85	2.51	$2.6 \times 10^{-3}$	1.93
2500	4	3	34.79	11.92	$3.4 \times 10^{-3}$	2.91
4900	4	3	124.57	27.05	$3.1 \times 10^{-3}$	4.60
10000	5	3	532.46	74.95	$4.6 \times 10^{-3}$	7.10

**Таблица 1.** Результаты численного моделирования

В таблице 1 представлены результаты численного моделирования уравнения ( ). Здесь  $N$  – количество узлов расчетной сетки,  $Levels$  – количество уровней разбиения,  $p$  – количество членов в мультипольном разложении функции Грина,  $t_{dir}$  – время расчета прямым методом,  $t_{N \log N}$  – время расчета  $N \log N$  алгоритмом,

$\max |u_{dir} - u_{N \log N}|$  – максимальная разница между значениями вычисляемой функции, построенными прямым методом и  $N \log N$  алгоритмом,  $S_p$  – ускорение, даваемое  $N \log N$  методом.

Таким образом,  $N \log N$  алгоритм быстрого метода мультиполей был успешно применен к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Пуассона, что позволило существенно сократить время численного счета. Необходимая точность расчета достигается варьированием параметра  $p$ , который отвечает за количество членов мультипольного разложения функции Грина.

Работа выполнялась в рамках проекта государственного задания Министерства образования и науки РФ №1.3103.2017/4.6 на 2017–2019 гг. по теме "Математическое и компьютерное моделирование процессов фильтрации в неоднородных коллекторах нефтегазовых месторождений на основе дробно-дифференциального подхода".

## Литература

1. Raghavan R. *Fractional diffusion: Performance of fractured wells* // J. Petrol. Sci. Eng. – 2012. – V. 92–93. – P. 167–173.
2. Stana D., Felix del Tesoa, Vazquez J.L. *Finite and infinite speed of propagation for porous medium equations with nonlocal pressure* // J. Differ. Equations. – 2016. – V. 260. – № 2. – P. 1154–1199.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
4. Greengard L., Rokhlin V. *A Fast Algorithm for Particle Simulations* // J. Comp. Phys. – 1997. – V. 135. – P. 280–292.

### NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING STEADY-STATE FRACTIONAL FILTRATION EQUATION WITH THE RIESZ POTENTIAL

N.S. Belevtsov, S.Yu. Lukashchuk

*A fractional generalization of the Poisson equation, which is a steady-state fractional filtration equation with the Riesz potential, is considered. Fundamental solution for this equation is obtained by means of the Fourier transform method. On the ground of the fast multipole method, the fast  $\mathcal{O}(N \log N)$  algorithm for considered equation is developed.*

Keywords: Riesz potential, fractional filtration equation, fast multipole method.

УДК 513.813: 512.972, 513.814, 530.12

## ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ, БЛИЗКИЕ ЕВКЛИДОВУ ПРОСТРАНСТВУ

В.Н. Берестовский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *vberestov@inbox.ru*; Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет

*Исследуются 4 лоренцевых многообразия, получаемые небольшими изменениями стандартной евклидовой метрики на  $\mathbb{R}^4$  с выброшенным началом. Два из них — закрытые изотропные глобально гиперболические конформно плоские модели пространства-времени, другие два не хронологичны и не конформно плоские. Найдены алгебры Ли групп движений и подобий; тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна, энергии-импульса, Вейля. Тензоры Вейля 2-й пары имеют первый тип Петрова.*

**Ключевые слова:** группа движений, группа подобий, давление, закрытая изотропная модель, плотность, тензор Вейля, тензор Эйнштейна, тензор энергии-импульса.

Исследуются лоренцевы многообразия  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , получаемые небольшим изменением стандартной евклидовой метрики на  $\mathbb{R}^4$  с выброшенным началом  $O$  и являющиеся искривленными произведениями [2] числовой полупрямой и трехмерной сферы с соответствующими римановыми или псевдоримановыми метриками.

Евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$  допускает четыре взаимно ортогональных векторных поля  $X, Y, Z, T$ , первые три из которых киллинговы, а  $T$  порождает 1-параметрическую группу гомотетий (растяжений с центром  $O$ ), сохраняющих все эти векторные поля. При этом на единичной сфере  $S_1^3 = S(O, 1) \subset \mathbb{R}^4$  эти векторные поля ортонормированы,  $T$  ортогонально  $S_1^3$ , а  $X, Y, Z$  касаются  $S_1^3$  и реализуются как единичные левоинвариантные векторные поля на группе Ли  $SU(2)$  с бинвариантной римановой метрикой, изометричной  $S_1^3$ .

Из  $\mathbb{R}^4 - \{0\}$  получаются  $M_1$  (соответственно,  $M_3$ ) заменой евклидова скалярного квадрата  $(T, T)$  (соответственно,  $(Z, Z)$ ) на (псевдо)скалярный квадрат  $\langle T, T \rangle = -(T, T)$  (соответственно,  $\langle Z, Z \rangle = -(Z, Z)$ ). Тожественное отображение  $\mathbb{R}^4 - \{0\}$  на себя — конформное отображение с конформным множителем  $1/r^2$  многообразия  $M_3$  на  $M_4$  и  $M_1$  на статичное пространство-время  $M_2$  с пространством  $S_1^3$  ( $r$  — радиус в  $\mathbb{R}^4$ );  $M_4$  изометрично прямому метрическому произведению евклидовой прямой и сферы  $S_1^3 \subset M_2$ , снабженной индуцированной из  $M_3$  псевдоримановой метрикой. Другими словами,  $M_2$  — Вселенная Эйнштейна, а  $M_4$  — прямое метрическое произведение евклидовой прямой и группы Ли  $SU(2)$  с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Переход от евклидова пространства  $\mathbb{R}^4$  к пространствам  $M_1$  и  $M_3$  аналогичен превращению  $\mathbb{R}^4$  в пространство-время Минковского.

Многообразия  $M_1$  и  $M_2$  — частные случаи *закрытых изотропных моделей пространства-времени* [3] и *пространств Фридмана-Робертсона-Уокера* [3].

Для  $M_1, M_2$  (соответственно,  $M_3, M_4$ ),  $X, Y, Z$  (соответственно,  $Z$ ) — киллинговы векторные поля, все интегральные траектории которых замкнуты с общим периодом  $2\pi$ , а  $T$  порождает 1-параметрическую группу подобий; для  $M_2, M_4$  и  $T$  киллингово. Все эти киллинговы поля имеют постоянную длину и являются геоде-

зическими полями, т.е. их интегральные траектории являются геодезическими [4]. Многообразия  $M_1, M_3$  (соответственно,  $M_2, M_4$ ) допускают транзитивные группы метрических подобий (соответственно, изометрий). Многообразия  $M_2, M_4$  (соответственно,  $M_1, M_3$ ) геодезически полны (соответственно, неполны).  $M_1, M_2$  глобально гиперболически;  $M_3, M_4$  не хронологичны [2].

Замкнутые интегральные траектории временноподобного поля  $Z$  на  $M_3, M_4$  реализуют “машину времени”. Вселенная Гёделя [3] имеет все указанные свойства многообразия  $M_4$  с тем отличием, что роль  $SU(2)$  играет  $\mathbb{R}^3$  с некоторой однородной лоренцевой метрикой.

На основании [5], [3], [6] найдены все ковариантные производные, тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля для векторных полей из ортогонального базиса (тетрады (т.е. четверки), как говорят физики)  $X, Y, Z, T$  для всех 4 лоренцевых пространств. При этом все компоненты ковариантных производных и ограничений всех тензоров на  $S_1^3 \subset M_j, j = 1, 2, 3, 4$  — постоянные целые числа. Матрицы тензора Эйнштейна  $\mathbf{G}$  (с нулевой космологической постоянной) для всех многообразий нетривиальны, диагональны, а у  $M_1$  и  $M_2$  имеют нулевой след. Соответствующий тензор энергии-импульса  $\mathbf{T} = (1/8\pi)\mathbf{G}$  (согласно уравнениям Эйнштейна поля релятивистской теории гравитации) дает положительные плотности массы-энергии, но совпадающие отрицательные давления, т.е. собственные значения матрицы (трехмерного) тензора напряжений ([3], [3], [6], [7]) для  $M_1$  и  $M_2$ , для  $M_3$  и  $M_4$  есть отрицательные значения.

Многообразия  $M_1$  и  $M_2$  представляют геометрический интерес вследствие того, что

*Если лоренцево многообразие  $(V_4, ds^2)$  допускает  $n$ -параметрическую группу движений  $G_n$ , то оно обладает  $n$  законами сохранения. Для того, чтобы  $n$ -параметрической группе конформных преобразований  $G_n$  соответствовало  $n$  законов сохранения, необходимо и достаточно, чтобы след тензора энергии-импульса был равен нулю [7].*

**Теорема 1.** *Пространство-время  $M_1$  можно интерпретировать как эволюционирующее во времени замкнутое, однородное и изотропное пространство, являющееся сплошной средой в виде идеальной жидкости или идеального газа с плотностью  $\rho(t) = 3/4\pi t^2$ , давлением  $p(t) = -1/4\pi t^2$ , общей массой  $m(t) = (3/2)\pi t$  и объемом  $V(t) = 2\pi^2 t^3, t > 0$ .*

**Замечание 1.** *Масса шара радиуса  $t$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$  с плотностью  $\rho(t) = 3/4\pi t^2$  равна  $t$ , в частности, равна 1 при  $t = 1$ .*

**Предложение 1.** *Замкнутая изотропная модель с космологической постоянной  $\Lambda = 0$  имеет бесследовый тензор Эйнштейна тогда и только тогда, когда она изометрична статичной модели Эйнштейна  $M_2$  с некоторым радиусом  $a > 0$ , изометрична  $M_1$  или получается из  $M_1$  некоторой комбинацией следующих преобразований: пропорциональным изменением масштаба времени, его сдвигом, изменением его направления.*

**Предложение 2.** *Всякая идущая в прошлое временноподобная кривая в  $M_1$  с любым начальным временем  $t_0 > 0$  за конечное собственное время  $\tilde{t}$ , не большее  $t_0$ , попадает в точку  $O \in \mathbb{R}^4$ .*

**Теорема 2.** *Пространство-время  $M_2$  можно интерпретировать как постоянное во времени однородное и изотропное пространство, являющееся сплошной средой в виде идеальной жидкости или идеального газа с плотностью  $\rho = 3/8\pi$ , давлением  $p = -1/8\pi$ , общей массой  $m = (3/4)\pi$  и объемом  $V = 2\pi^2$ . Минимальная космологическая постоянная, для которой  $M_4$  будет иметь давление  $p \geq 0$ , есть  $\Lambda = 1$ .*

**Замечание 2.** *Для Вселенной Эйнштейна с радиусом  $a > 0$ ,*

$$\rho = 3/8\pi a^2, \quad p = -1/8\pi a^2, \quad m = (3/4)\pi a, \quad V = 2\pi^2 a^3.$$

Одна из наиболее интересных замкнутых изотропных моделей — пространство-время (Вселенная) де Ситтера первого рода  $M_\alpha$  с функцией (радиусом трехмерной сферы)  $a(t) = \alpha \operatorname{ch}(\alpha^{-1}t)$ ,  $\alpha > 0$ . Оно реализуется однополостным гиперболоидом

$$-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2$$

с индуцируемой лоренцевой метрикой из пятимерного аналога пространства-времени Минковского  $M^5$  с метрикой

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (dw)^2.$$

Связная группа  $G_S$  его движений — аналог линейной группы Лоренца для  $M^5$  — имеет наибольшую возможную для четырехмерных лоренцевых многообразий размерность 10.  $M_\alpha$  не только пространственно, но и само однородно и изотропно в том смысле, что  $G_S$  действует транзитивно на множествах временноподобных и светоподобных направленных в будущее геодезических. Модель  $M_{\alpha=1}$  будем обозначать  $M$ . Пространство-время  $M$  геодезически полно и глобально гиперболично.

**Теорема 3.** *Пространство-время  $M$  можно интерпретировать как эволюционирующее во времени замкнутое, однородное и изотропное пространство, являющееся сплошной средой в виде идеальной жидкости или идеального газа с плотностью  $\rho \equiv 3/8\pi$ , давлением  $p \equiv 1/8\pi$ , массой  $m(t) = (3/4)\pi \operatorname{ch}^3 t$  и объемом  $V(t) = 2\pi^2 \operatorname{ch}^3 t$ .*

**Теорема 4.** *В  $M_3$  плотность материи и давления в разных направлениях (собственные значения тензора напряжений) равны*

$$\rho(r) = 3/4\pi r^2, \quad p_1(r) = p_2(r) = 1/4\pi r^2, \quad p_3(r) = -1/4\pi r^2, \quad r > 0.$$

**Теорема 5.** *В  $M_4$  плотность материи и давления в разных направлениях (собственные значения тензора напряжений) равны*

$$\rho = \frac{7}{8\pi}, \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{8\pi}, \quad p_3 = -\frac{5}{8\pi}.$$

Известно, что (псевдо)риманово многообразие является конформно плоским тогда и только тогда, когда его тензор Вейля  $W$  тождественно равен нулю [8]. Тензор  $W$  имеет те же свойства симметрии, что и ковариантный тензор кривизны. Более



точно,  $W$  имеет структуру ковариантного тензора кривизны Риччи-плоского многообразия [3], [7]. При этом тензор  $W$  конформно-инвариантен [3]. Вычислены значения тензора  $W$  на  $M_1, M_2, M_3, M_4$  для всех упорядоченных четверок из векторных полей  $X, Y, Z, T$ . На основании этого получены нижеследующие результаты.

**Теорема 6.** *Лоренцево многообразие  $M_1$  и всякое конформно эквивалентное ему лоренцево многообразие, в частности  $M_2$  и  $M$ , конформно плоское.*

**Теорема 7.** *Лоренцево многообразие  $M_3$  и всякое конформно эквивалентное ему лоренцево многообразие, в частности  $M_4$ , не конформно плоское.*

**Предложение 3.** *Каждая замкнутая изотропная модель пространства-времени конформно эквивалентна некоторой области статичной Вселенной Эйнштейна  $M_2$ .*

**Следствие 1.** *Каждая замкнутая изотропная модель пространства-времени конформно плоская.*

На основании предложений 1 и 3 получаем

**Следствие 2.** *Зануление следа тензора Эйнштейна не сохраняется при общих конформных преобразованиях лоренцевых метрик.*

Вследствие симметрий ковариантного тензора кривизны  $R$  на любом псевдоримановом многообразии,  $R$  можно рассматривать как линейный симметрический оператор  $\tilde{R}$  на бивекторных полях при определении псевдоскалярного произведения на простых бивекторах как определителя матрицы Грама задающих их векторов. Пользуясь этим, Петров доказывает в [7], что матрицы операторов  $\tilde{R}$  всех эйнштейновых ([8]) лоренцевых 4-многообразий в специально выбранном ортонормированном базисе из простых бивекторов могут иметь только три типа Петрова. Конформно плоские многообразия  $M_1, M_2$  не эйнштейновы. Следовательно, поскольку тензор Вейля любого лоренцева 4-многообразия имеет все свойства тензора кривизны Риччи-плоского многообразия, имеет смысл определить тип Петрова тензора Вейля для  $M_3, M_4$ .

**Теорема 8.** *Тензор Вейля  $W$  лоренцева многообразия  $M_3$  и всякого конформно эквивалентного ему лоренцева многообразия, в частности  $M_4$ , имеет 1-й тип Петрова [7].*

**Теорема 9.** *Группы конформных преобразований многообразий  $M_3, M_4$  — группы движений или гомотетий некоторого конформного им лоренцева многообразия.*

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0006.

## Литература

1. Бим Дж., Эрлих П. *Глобальная лоренцева геометрия*. – М.: Мир, 1985. – 400 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*, изд. 6. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
3. Хокинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства-времени*. – М.: Мир, 1977. – 433 с.
4. Берестовский В. Н., Никонов Ю. Г. *Римановы многообразия и однородные геодезические*. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. – 414 с.

5. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом*. – М.: Мир, 1971. – 343 с.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация. Т. 1,2,3*. – М.: Мир, 1977. – 474, 525, 510 с.
7. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности*. – М.: Наука, 1966. – 496 с.
8. Бессе А. Л. *Многообразия Эйнштейна. Т. 1* – М.: Мир, 1990. – 318 с.

## LORENTZ MANIFOLDS CLOSE TO EUCLIDEAN SPACE

V.N. Berestovskii

*We study 4 Lorentz manifolds obtained by small changes from Euclidean metric on  $\mathbb{R}^4$  without origin. Two of them are closed isotropic globally hyperbolic conformally flat models of space-time, the other two are not chronological and not conformally flat. We find Lie algebras of motion and similarity groups; curvature tensors, Ricci, Einstein, Weyl, and energy-impulse tensors. The Weyl tensors of 2nd pair have the first Petrov type.*

Keywords: closed isotropic model, density, Einstein tensor, energy-impulse tensor, motion group, pressure, similarity group, Weyl tensor.

УДК 510.5

## СПЕКТР ОТНОШЕНИЯ БЛОКА 1-ВЫЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Р.И. Бикмухаметов<sup>1</sup>, М.С. Еряшкин<sup>2</sup>, А.Н. Фролов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> [ravil.bkm@gmail.com](mailto:ravil.bkm@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> [mikhail.eryashkin@gmail.com](mailto:mikhail.eryashkin@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>3</sup> [andrey.frolov@kpfu.ru](mailto:andrey.frolov@kpfu.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Показано, что для каждого  $\phi'$ -вычислимого линейного порядка  $L$  существует 1-вычисляемый линейный порядок, спектр отношения блока которого совпадает с  $\Sigma_1^0$ -спектром порядка  $L$ . Этот результат позволяет получить ряд примеров спектров отношения блока 1-вычисляемых линейных порядков. В частности, классы всех перечислимых  $n$ -высоких степеней и степеней, не являющихся  $n$ -низкими, реализуются спектрами отношения блока некоторых 1-вычисляемых линейных порядков.*

**Ключевые слова:** линейные порядки, 1-вычислимость, отношение блока, отношение соседства, спектр отношения, внутренне вычисляемые отношения.

В работе изучаются внутренне вычисляемые и внутренне перечислимые отношения на вычисляемых алгебраических структурах и, в частности, на линейных порядках. Алгебраическая структура с конечной сигнатурой называется *вычисляемой*, если основное множество и все отношения и функции структуры вычислимы. В частности, линейный порядок вычислим, если его основное множество и отношение порядка вычислимы. Отношение на вычисляемой структуре называется *внутренне вычисляемым* или *внутренне перечислимым*, если оно является вычисляемым или, соответственно, перечислимым в любом вычисляемом представлении этой структуры (аналогично определяются внутренне  $\Sigma_n$ -отношения).

Исследования внутренне вычисляемых и внутренне перечислимых отношений берут свое начало с работы 1981 года К. Эша и А. Нероуда [1] и продолжаются в большом количестве работ различных авторов. Например, здесь можно выделить дис-

сертацию Д. Хиршфельдта [2], которая несет в себе ценность как самостоятельной большой исследовательской работы, так и обзорной, в которой собраны большинство известных на тот момент результатов в этом направлении исследований.

**Определение.** *Спектром отношения  $P$  вычислимой алгебраической структуры  $\mathcal{A}$  называется класс  $DgSp_{\mathcal{A}}(P) = \{deg_T(P_{\mathcal{B}}) \mid (\exists \mathcal{B} \cong \mathcal{A}) (\mathcal{B} \equiv_T \emptyset)\}$ .*

В работе рассматриваются вычислимые линейные порядки, сигнатура которых обогащена отношением соседства, которое также является вычислимым. Другими словами, рассматриваются вычислимые алгебраические структуры с двумя бинарными отношениями, первое из которых является отношением линейного порядка, а второе – отношением соседства, согласованным с отношением порядка. Такие вычислимые обогащенные порядки будем называть *1-вычислимыми линейными порядками*, что согласовывается с вышеприведенным результатом М. Мозеса [3].

Очевидно, что отношение блока 1-вычислимого линейного порядка является внутренне перечислимым отношением. М. Мозес [4] получил также описание 1-вычислимых линейных порядков, отношение блока которых является внутренне вычислимым. А именно, показано, что 1-вычислимый линейный порядок имеет внутренне вычислимое отношение блока тогда и только тогда, когда порядок содержит конечное число точек, интервалы между которыми либо пусты, либо являются сильно  $\eta$ -схожими, либо имеют тип  $\omega$ ,  $\omega^*$  или  $\omega + \omega^*$ .

В работе показано, что для каждого  $\emptyset'$ -вычислимого линейного порядка  $L$  существует 1-вычислимый линейный порядок, спектр отношения блока которого совпадает с  $\Sigma_1^0$ -спектром порядка  $L$ . Этот результат позволяет получить ряд примеров спектров отношения блока 1-вычислимых линейных порядков. Впервые, ограниченные спектры на линейных порядках ввел Р. Миллер [5], им был построен пример  $\Delta_2^0$ -спектра, содержащего в точности все ненулевые степени. Затем, А.Н. Фролов [6] построил вычислимые линейные порядки, чьи  $\Delta_2^0$ -спектры состоят в точности из всех  $n$ -высоких  $\Delta_2^0$ -степеней и всех  $\Delta_2^0$ -степеней, не являющихся  $n$ -низкими, для любого наперед заданного натурального  $n$ . Впервые  $\Sigma_1^0$ -спектр использовался А.Н. Фроловым [7] для исследования спектров отношения соседства:

**Определение.**  $\Sigma_1^0$ -спектром линейного порядка  $L$  называется класс  $Spec^{\Sigma_1^0}(L) = Spec(L) \cap \Sigma_1^0$ . Другими словами,

$$Spec^{\Sigma_1^0}(L) = \{deg_T(\tilde{L}) \in \Sigma_1^0 \mid \tilde{L} \cong L\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00174 "Алгоритмические аспекты линейных порядков и отношений на них").

## Литература

1. Ash C. J., Nerode A. *Intrinsically recursive relations* // Aspects of Effective Algebra, Upside Down A Book Co. – Yarra Glen, Australia: in J.N.Crossley (ed.), 1981. – P. 26–41.
2. Hirschfeldt D. R. *Degree spectra of intrinsically c.e. relations* // Journal of Symbolic Logic. – 2001. – V. 66. – P. 441–469.

3. Moses M. *Relations intrinsically recursive in linear orders* // Z. Math. Logik Grundlag. Math. – 1986. – V. 32. – P. 467–472.
4. Moses M. *Recursive linear orders with recursive successivities* // Ann. Pure Appl. Logic. – 1984. – V. 27. – P. 253–264.
5. Miller R. *The  $\Delta_2^0$  spectrum of a linear ordering* // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – V. 66. – P. 470–486.
6. Frolov A. N.  *$\Delta_2^0$ -copies of linear orderings* // Algebra and logic. – 2006. – V. 45. – № 3. – P. 201–209.
7. Frolov A. N. *A note on  $\Delta_2^0$ -spectra of linear orderings and degree spectra of the successor relation* // Russian Mathematics. – 2013. – V. 57. – № 11. – P. 65–68.

#### DEGREE SPECTRA OF THE BLOCK RELATION ON 1-COMPUTABLE LINEAR ORDERINGS

R.I. Bismukhametov, M.S. Eryashkin, A.N. Frolov

*It is shown that for any  $\varphi'$ -computable linear ordering  $L$  there exists a 1-computable linear ordering whose the degree spectrum of the block relation coincides with the  $\Sigma_1^0$ -spectrum of  $L$ . This result gives examples of the spectra of the block relation of 1-computable linear orderings. In particular, the classes of all enumerable  $high_n$  degrees and enumerable non- $low_n$  degrees are realized by the spectra of the block relation of 1-computable linear orderings.*

Keywords: linear orders, 1-computability, block relation, successivity relation, spectra of relations, intrinsically computable relations.

УДК 512.54

#### ПРОБЛЕМА КЛАССИФИКАЦИИ В ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Е. Благовещенская<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *kblag2002@yahoo.com*; Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

*Обсуждается проблема классификации в классе абелевых групп без кручения и обосновывается расширение понятия почти изоморфизма на группы бесконечных рангов. Доказывается его эффективность в классификации локально почти вполне разложимых групп.*

**Ключевые слова:** абелева группа, группа без кручения, почти вполне разложимая группа.

Проблема классификации алгебраических объектов является необходимой частью построения любой связанной с ними теории. При этом классический изоморфизм не всегда подходит для установления эквивалентности между рассматриваемыми объектами. В этом случае естественным является разумное ослабление понятия изоморфизма для возможности его эффективного использования в классификации объектов изучаемых классов. В теории абелевых групп без кручения конечного ранга более полувека такая роль принадлежит понятию "почти изоморфизма".

#### Определение 1

Абелевы группы без кручения конечного ранга  $G$  и  $H$  почти изоморфны, обозн.  $G \cong_{nr} H$ , если для любого простого  $p$  существуют мономорфизмы  $\Phi_p : G \rightarrow H$ ,  $\Psi_p :$

$H \rightarrow G$ , для которых группы  $G/H\Psi_p$  и  $H/G\Phi_p$  конечны, и числа  $[G : H\Psi_p]$  и  $p$ , а также  $[H : G\Phi_p]$  и  $p$ , являются взаимно простыми.

Обобщение концепции почти изоморфизма к группам бесконечных рангов было сделано в работах [1] - [4]:

**Определение 2**

Пусть  $G$  и  $H$  — абелевы группы без кручения. Тогда  $G$  и  $H$  называются *почти изоморфными*,  $G \cong_{nr} H$ , если для любого простого  $p$  существуют мономорфизмы  $\Phi_p : G \rightarrow H$  и  $\Psi_p : H \rightarrow G$ , такие что

1. группы  $H/G\Phi_p$  и  $G/H\Psi_p$  являются периодическими;
2.  $(H/G\Phi_p)_p = 0 = (G/H\Psi_p)_p$ ;
3. для любых сервантных подгрупп конечного ранга  $G' \subseteq G$  и  $H' \subseteq H$  факторгруппы  $(G'\Phi_p)^H / G'\Phi_p$  и  $(H'\Psi_p)^G / H'\Psi_p$  являются конечными.

Обоснование условий этого нового понятия эквивалентности для абелевых групп без кручения произвольных рангов, для которого мы сохраняем привычное название "почти изоморфизм", естественным образом обобщает традиционный почти изоморфизм, совпадая с ним в случае групп конечного ранга. Важной характеристикой является то, что ему присущи и другие качества исходного понятия почти изоморфизма, обеспечивающие его применимость в достаточно широком классе, определенном следующим образом:

**Определение 3**

Пусть  $T$  — счетное множество идемпотентных попарно несравнимых типов. Абелева группа без кручения  $X$  принадлежит классу  $\mathcal{C}'$ , если она содержит вполне разложимую подгруппу  $R(X) = C_X = \bigoplus_{\tau \in T_{cr}(C_X)} C_\tau$ , для которой выполнены следующие условия:

1.  $T_{cr}(C_X) \subseteq T$ ;
2.  $C_\tau$  — сервантная подгруппа конечного ранга в  $X$  для каждого  $\tau \in T_{cr}(C_X)$ ;
3.  $X/C_X = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X$  для некоторого множества простых чисел  $P_X$  и  $p^{n_p(X)}$ -ограниченных  $p$ -примарных групп  $T_p^X$ ;
4. для каждого  $p \in P_X$  множество  $\{q \in P_X : [T_p^X] \cap [T_q^X] \neq \emptyset\}$  — конечно; здесь  $[T_p^X]$  совпадает с наименьшим из подмножеств  $\mathfrak{T}_p \subset T_{cr}(C_X)$ , для которых  $T_p^X \subseteq ((\bigoplus_{\tau \in \mathfrak{T}_p} C_\tau)^X + C_X) / C_X$ .

В [5] доказана

**Теорема**

Пусть  $X$  и  $Y$  — почти изоморфные группы из класса  $\mathcal{C}'$ . Если  $X = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} X_i$ , то существует разложение  $Y = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} Y_i$ , такое что  $X_i \cong_{nr} Y_i$  для всех  $i \in \mathcal{I}$ .

Таким образом, для групп из класса  $\mathcal{C}'$  справедливы следующие утверждения:

- 1) ранги почти изоморфных групп совпадают;
- 2) две почти изоморфные группы обладают одним набором прямых разложений с точностью до почти изоморфизма неразложимых слагаемых (при их подходящей нумерации);
- 3) две вполне разложимые почти изоморфные группы являются изоморфными.

Свойства 1)-2) имеют принципиальное значение, поскольку в общем случае абелева группа без кручения допускает неизоморфные прямые разложения, в которых даже наборы рангов неразложимых слагаемых могут быть различны. Однако, это не относится к случаю вполне разложимых групп, которые представляются единственным способом с точностью до изоморфизма в виде прямых сумм групп ранга 1, чем и обусловлено свойство 2).

Поскольку классификация произвольных абелевых групп без кручения даже конечного ранга является чрезвычайно сложной задачей, выделение отдельных классов групп и исследование возможности классификации в них как традиционными, так и специально изобретенными методами, является естественным подходом к общей задаче классификации абелевых групп. При этом расширение классов применимости почти изоморфизма влечет усиление условий в его определении.

Прослеживая хронологическую последовательность получения классификационных результатов, отметим, что естественное начало было положено в теории упомянутого класса "вполне разложимых групп", которые изоморфны прямым суммам аддитивных подгрупп группы рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  и допускают исчерпывающее решение проблемы классификации с точностью до изоморфизма на языке типов прямых слагаемых ранга 1.

Следующим по сложности является класс так называемых "почти вполне разложимых групп" (англ.: almost completely decomposable groups or acd-groups). Это группы конечного ранга и определяются они как расширения вполне разложимых групп при помощи конечных групп. Иными словами, acd-группа  $G$  содержит некоторую вполне разложимую подгруппу  $C$  конечного ранга, индекс которой конечен, то есть  $G/C$  -конечная группа. Для случая циклической фактор-группы  $G/C$  удалось построить графическую теорию прямых разложений, используя алгоритмический подход, приложением которого является новый эффективный метод распараллеливания алгоритмов специального вида, см. [6].

Базовым для последующего развития классификационных методов абелевых групп без кручения является тот факт, что регуляторы (специальным образом однозначно определенные вполне характеристические вполне разложимые подгруппы) почти изоморфных acd-групп изоморфны в обычном смысле. Поэтому, далее, естественным образом был введен класс  $\mathcal{C}'$  групп счетного ранга, который естественно называть классом "локально почти вполне разложимых групп" ввиду того, что любая вполне характеристическая сервантная подгруппа конечного ранга группы из этого класса является почти вполне разложимой. Возможность распространения методов с acd-групп на группы счетного ранга в данном случае обусловлена наличием однозначно с точностью до изоморфизма определенного регулятора для почти изоморфных групп из класса  $\mathcal{C}'$ , который является вполне разложимой группой счетного ранга. Дальнейшее развитие почти изоморфизма для классификации

групп, не удовлетворяющих данному условию, требует характеристики их свойств в других терминах.

Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания Минобрнауки РФ, проект № 11.5861.2017/БЧ

## Литература

1. Blagoveshchenskaya, E., Strümgmann, L.H. *Direct decomposition theory under near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free abelian groups* // Journal of Group Theory. – 2017. – V. 20, № 2. – P. 325-346.
2. Blagoveshchenskaya E., Göbel R., Strümgmann L. *Classification of some Butler groups of infinite rank* // Comm. in Algebra. – 2013. – V. 380. – P. 1-17.
3. Blagoveshchenskaya E., Strümgmann L. *Near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free abelian groups* // Comm. in Algebra. – 2007. – V. 35. – P. 1-18.
4. Blagoveshchenskaya E., Göbel R. *Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank* // Comm. in Algebra. – 2002. – V. 30, № 7. – P. 3403-3427.
5. Благовещенская Е. *Прямые разложения локально почти вполне разложимых групп счетного ранга* // Чебышевский сборник. – 2005. – V. 6, № 4. – P. 24-47.
6. Blagoveshchenskaya E., Kunetz D. *Direct Decomposition Theory of Torsion-Free Abelian Groups of Finite Rank: Graph Method* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, № 1. – P. 29–34.

## CLASSIFICATION PROBLEM FOR TORSION-FREE ABELIAN GROUP

E. Blagoveshchenskaya

*Classification problem for torsion-free abelian groups is discussed. An extension of the notion of near isomorphism to groups of infinite ranks is justified. Its efficiency in the classification of locally almost completely decomposable groups is proved.*

Keywords: abelian group, torsion-free group, totally almost decomposable group.

УДК 514.7

## ДВУМЕРНЫЕ ПЛОСКИЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ОРБИФОЛДЫ С СУЩЕСТВЕННЫМИ ГРУППАМИ ИЗОМЕТРИЙ

Е.В. Боголепова<sup>1</sup>, Н.И. Жукова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *perfilova001@mail.ru*; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

<sup>2</sup> *nzhukova@hse.ru*; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

*Группа изометрий лоренцева орбифолда называется несущественной, если она совпадает с группой изометрий некоторой римановой метрики на этом орбифолде; в противном случае группа изометрий лоренцева орбифолда называется существенной. Среди двумерных орбифолдов полные плоские лоренцевы метрики допускают только орбифолды, представимые в виде фактор-пространства  $M/\Psi$ , где  $M$  — одна из следующих поверхностей: плоскость, цилиндр, открытый лист Мебиуса, тор и бутылка Клейна, а группа диффеоморфизмов  $\Psi$  либо тривиальна, либо изоморфна  $\mathbb{Z}_2$  или*

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Известно, что среди замкнутых двумерных многообразий только тор допускает полные плоские лоренцевы метрики с существенной группой изометрий. Мы доказываем, что существует только два (с точностью до изоморфизмов в категории орбифолдов) гладких двумерных некомпактных орбифолда, допускающих полные плоские лоренцевы метрики с существенной группой изометрий. Они представляют собой плоскость  $\mathbb{R}^2$  и фактор-орбифолд  $\mathbb{R}^2/\Psi$  плоскости по группе изометрий  $\Psi$ , изоморфной  $\mathbb{Z}_2$ .

**Ключевые слова:** орбифолд, лоренцев орбифолд, группа изометрий, существенная группа изометрий.

## 1. Введение

Орбифолды можно рассматривать как многообразия с особенностями.  $n$ -мерные орбифолды есть связные хаусдорфовы топологические пространства, локально представляющие собой фактор-пространства  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$  по конечной группе диффеоморфизмов  $\Gamma$ , причем группа  $\Gamma$  не фиксирована и может меняться при переходе от одной точки к другой. Орбифолды естественным образом образуют категорию [1].

Говорят, что точка  $x$  орбифолда  $N$  регулярна, если она имеет окрестность, изоморфную  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ , где группа  $\Gamma$  тривиальна. Если все точки орбифолда регулярны, то орбифолд является гладким многообразием. Таким образом гладкие многообразия образуют полную подкатеорию категории орбифолдов.

Понятие орбифолда было введено И. Сатаки [2]. Термины орбифолд, хороший орбифолд и очень хороший орбифолд были предложены У. Тёрстоном [2].

Орбифолды находят применение в различных областях математики и физики. У. Тёрстон применил классификацию двумерных компактных орбифолдов при классификации замкнутых трехмерных многообразий [3]. Они возникают в теории слоений как хаусдорфовы пространства компактных слоений. Орбифолды используются в качестве пространств распространения струн в теоретической физике. Обзор приложений орбифолдов можно найти в [3].

Орбифолд  $N$  с заданной на нем лоренцевой метрикой  $g$  называется *лоренцевым орбифолдом* и обозначается через  $(N, g)$ .

Группа всех изометрий лоренцева орбифолда  $(N, g)$  называется *полной* и обозначается через  $\mathfrak{I}(N, g)$ .

Известно [4], что группа изометрий  $\mathfrak{I}(N, g)$  лоренцева орбифолда  $(N, g)$  является группой Ли размерности не выше  $\frac{n(n+1)}{2}$ , где  $n$  — размерность орбифолда, причем равенство достигается только в случае, когда  $(N, g)$  — лоренцево многообразие постоянной кривизны.

Группа изометрий  $\mathfrak{I}(N, g)$  лоренцева орбифолда  $(N, g)$  называется *несущественной*, если существует риманова метрика  $d$  на  $N$  такая, что  $\mathfrak{I}(N, g) = \mathfrak{I}(N, d)$ . В противном случае  $\mathfrak{I}(N, g)$  называется *существенной*.

Напомним, что отображение топологических пространств  $f : A \rightarrow B$  называется собственным, если прообраз  $f^{-1}(K)$  любого компактного подмножества  $K$  в  $B$  компактен в  $A$ . Гладкое действие группы Ли на орбифолде  $N$

$$G \times M \rightarrow M : (g, x) \mapsto g \cdot x \quad \forall (g, x) \in G \times M,$$



называется *собственным*, если выполняется одно из следующих трех эквивалентных условий:

- (1) сходимости двух последовательностей  $g_n \cdot x_n \rightarrow y$  и  $x_n \rightarrow x$  в  $N$ , где  $g_n \in G$  и  $x_n, x, y \in N$ , влечет существования сходящейся подпоследовательности  $\{g_{n_k}\}$  в  $G$ ;
- (2) отображение  $(\Phi, id_M) : G \times M \rightarrow M \times M : (g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$  — собственное;
- (3) из того, что  $K$  и  $L$  компактны в  $M$ , следует, что множество

$$H = \{g \in G \mid g(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

компактно в  $G$ .

**Предложение.** *Группа изометрий  $\mathfrak{I}(N, g)$   $n$ -мерного лоренцева орбифолда  $(N, g)$  существенная тогда и только тогда, когда группа изометрий  $\mathfrak{I}(N, g)$  действует несобственно на  $N$ .*

## 2. Компактные лоренцевы поверхности с существенными группами изометрий

Связные двумерные многообразия называются поверхностями.

Исследованию компактных лоренцевых поверхностей с существенными группами изометрий посвящена работа [5].

Единственной компактной поверхностью, допускающей лоренцеву метрику с существенной группой изометрий, является тор, причем такая метрика является плоской.

В [5] показано, что не каждая плоская лоренцева метрика на торе имеет существенную группу изометрий, и доказаны, в частности, следующие две теоремы,

**Теорема 1.** *Если компактная лоренцева поверхность  $(M, g)$  имеет существенную полную группу Ли изометрий, то  $(M, g) = (\mathbb{T}^2, g)$  — плоский лоренцев тор, не имеющий замкнутых изотропных геодезических. При этом полная группа изометрий  $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^2, g)$  изоморфна полупрямому произведению  $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g) \ltimes \mathbb{T}^2$  дискретной некомпактной стационарной подгруппы  $\mathfrak{I}_0(\mathbb{T}^2, g)$  в некоторой точке тора и компактной абелевой нормальной подгруппы  $\mathbb{T}^2$ . Группа Ли всех сохраняющих ориентацию изометрий такого лоренцева тора  $(\mathbb{T}^2, g)$  изоморфна полупрямому произведению групп  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{T}^2$ .*

**Теорема 2.** *Пусть  $(N, g)$  — двумерный компактный лоренцев орбифолд с существенной полной группой изометрий, не являющийся многообразием. Тогда:*

1. *Существует двулистное накрывающее отображение  $r : \mathbb{T}^2 \rightarrow N$ , и орбифолд  $N$  изоморфен в категории орбифолдов „стандартной подушке“  $\mathcal{P} = \mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2$ .*

2. *Группа сохраняющих ориентацию изометрий  $\mathfrak{I}^+(\mathcal{P}, g)$  лоренцева орбифолда  $(\mathcal{P}, g)$  изоморфна полупрямому произведению групп  $\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ .*

В [5] установлено также, что лоренцев тор с существенной группой изометрий характеризуется существованием изометрии, являющейся ановским автоморфизмом тора.

### 3. Некомпактные лоренцевы поверхности с существенными группами изометрий

Показано, что среди двумерных орбифолдов полные плоские лоренцевы метрики допускают только орбифолды, представимые в виде фактор-пространства  $M/\Psi$ , где  $M$  — одна из следующих поверхностей: плоскость, цилиндр, открытый лист Мебиуса, тор и бутылка Клейна, а группа диффеоморфизмов  $\Psi$  либо тривиальна, либо изоморфна  $\mathbb{Z}_2$  или  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Доказано следующее утверждение.

**Теорема 3.** *С точностью до изоморфизма в категории  $Orb$  существует только два двумерных некомпактных гладких орбифолда, допускающих полную плоскую лоренцеву метрику с существенной группой изометрий, которые представляют собой:*

- 1) либо стандартную псевдоевклидову плоскость  $\mathbb{E}_1^2$ ;
- 2) либо фактор-орбифолд  $\mathbb{E}_1^2/\Psi$  псевдоевклидовой плоскости  $\mathbb{E}_1^2$  по группе изометрий  $\Psi$ , изоморфной  $\mathbb{Z}_2$ , причем нетривиальный элемент  $\psi$  группы  $\Psi$  действует на  $\mathbb{E}_1^2$  по правилу  $\psi(x) = -x$ ,  $x \in \mathbb{E}_1^2$ .

Полные группы изометрий указанных орбифолдов равны  $\mathfrak{J}(\mathbb{E}_1^2) \cong O(1,1) \times \mathbb{R}^2$  и  $\mathfrak{J}(\mathbb{E}_1^2/\Psi) \cong O(1,1)/\{\pm E\}$ , где  $E$  единичная матрица 2-го порядка, а  $\cong$  обозначает изоморфность групп Ли.

**Благодарность.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01041.

### Литература

1. Adem A., Leida J., Ruan Y. *Orbifolds and stringy topology* // Cambridge tracts in mathematics. – 2007. – V. 171. – Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 163 p.
2. Satake I. *On a generalization of the notion of manifold* // Proc. of the Nat. Ac. of Sciences. – 1956. – V. 42, № 6. – P. 359–363.
3. Thurston W.P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds* // Electronic version 1.1 – March 2002. – С. 297–305. <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
4. Багаев А.В., Жукова Н.И. *Группы автоморфизмов G-структур конечного типа на орбиобразиях* // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44, № 2. – С. 263–278.
5. Рогожина Е.А., Жукова Н.И. *Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий* // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 1292–1309.

### TWO-DIMENSIONAL FLAT LORENTZIAN ORBIFOLDS WITH ESSENTIAL GROUPS OF ISOMETRIES

E.V. Bogolepova, N.I. Zhukova

*The group of isometries of Lorentzian orbifold is called inessential if it coincides with the group of isometries of some Riemannian metric on this orbifold; otherwise the group of isometries of Lorentzian orbifold is called essential. Among two-dimensional orbifolds full flat Lorentzian metrics only allow orbifold representable by as a quotient space  $M/\Psi$ , where  $M$  is one of the following surfaces: a plane, a cylinder, an open Mobius sheet, a torus and a Klein bottle, and a group of diffeomorphisms  $\Psi$  is either trivial or isomorphic to  $\mathbb{Z}_2$  or  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . It is known that among the closed two-dimensional manifolds,*

only the torus admits complete flat Lorentzian metrics with the essential groups of isometries. We prove that there are only two (up to isomorphisms in the category of orbifolds) two-dimensional smooth non-compact orbifolds allowing complete flat Lorentzian metrics with the essential group of isometries. They are the plane  $\mathbb{R}^2$  and the quotient orbifold  $\mathbb{R}^2/\Psi$  of the plane by the isometric group  $\Psi$  isomorphic to  $\mathbb{Z}_2$ .

Keywords: orbifold, Lorentzian orbifold, group of isometries, essential group of isometries.

УДК 517.954.988.8

## ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ СО СХЕМОЙ КРАНКА-НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ

А.С. Бондарев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [bondarev@math.vsu.ru](mailto:bondarev@math.vsu.ru); Воронежский государственный университет

*В сепарабельном гильбертовом пространстве гладко разрешимое абстрактное линейное параболическое уравнение с периодическим условием решается приближённо проекционно-разностным методом с использованием по времени схемы Кранка-Николсон. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина. В работе установлены среднеквадратичные оценки погрешности приближённых решений, из которых следует сходимость приближённых решений к точному, а также порядки скорости сходимости, зависящие от гладкости точного решения. В качестве примера рассматривается параболическая задача на отрезке с краевым условием Дирихле, для которой проекционными подпространствами полагаются подпространства типа конечных элементов, построенные для случая равномерного разбиения отрезка на конечные элементы.*

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, параболическое уравнение, периодическое условие, проекционно-разностный метод, схема Кранка-Николсон, метод Галёркина.

### 1. Постановка задачи

Пусть задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств  $V \subset H \subset V'$ , где пространство  $V'$  – двойственное к  $V$ , а пространство  $H$  отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по  $u, v \in V$  форму  $a(u, v)$ . Пусть для  $u, v \in V$

$$|a(u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$ . Форма  $a(u, v)$  порождает линейный ограниченный оператор  $A : V \rightarrow V'$ , такой, что  $(Au, v) = a(u, v)$ , где выражение типа  $(z, v)$  есть значение функционала  $z \in V'$  на элементе  $v \in V$ . Если  $z \in H$ , то  $(z, v)$  – скалярное произведение в  $H$  [1].

Рассмотрим в  $V'$  на  $[0, T]$  параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \quad (2)$$

В [2] показано, что для заданного  $f \in L_2(0, T; V')$  существует (и притом единственное) решение  $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$  задачи (2), называемое слабым, причем  $u' \in L_2(0, T; V')$ .

Для построения приближенной задачи далее предположим, что вложение  $V \subset H$  компактно, функция  $t \rightarrow f(t) \in V'$  дифференцируема,  $f' \in L_2(0, T; V')$  и выполняется равенство  $f(0) = f(T)$ . Тогда слабое решение задачи (2) будет таким, что  $u' \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$ ,  $u'' \in L_2(0, T; V')$  [3].

Пусть  $V_h$ , где  $h > 0$ , есть произвольное конечномерное подпространство пространства  $V$ . Определим пространство  $V'_h$ , задав на  $u_h \in V_h$  двойственную норму  $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$ , где точная верхняя граница берется по всем  $v_h \in V_h$  с  $\|v_h\|_V = 1$ .

Пусть  $P_h$  — ортопроектор в пространстве  $H$  на  $V_h$ . Отметим [4], что оператор  $P_h$  допускает расширение по непрерывности до  $\overline{P_h} : V' \rightarrow V'_h$ , причем для  $u \in V'$  справедливо  $\|\overline{P_h}u\|_{V'_h} \leq \|u\|_{V'}$ .

В подпространстве  $V_h \subset V$  рассмотрим разностную задачу:

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_h \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} = f_k^h, \quad u_0^h = u_N^h, \quad (3)$$

для  $k = \overline{1, N}$ , где  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\tau N = T$ ,  $t_k = k\tau$ ,  $u_k^h \in V_h$ , оператор  $A_h = \overline{P_h}A$ , элемент  $f_k^h \in V_h$  определим позже.

**Лемма.** *Задача (3) имеет единственное решение.*

Далее будем предполагать, что форма  $a(u, v)$  является симметричной, то есть  $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ , где черта над комплексным числом означает переход к сопряженному числу.

## 2. Основные результаты.

Пусть  $f_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} f(t) dt$ .

**Теорема.** *Пусть выполнены все указанные выше предположения. Пусть  $u(t)$  — слабое решение задачи (2), такое, что  $u' \in L_p(0, T; V)$ ,  $u'' \in L_p(0, T; H)$  для некоторого  $p$ , такого, что  $1 \leq p \leq 2$ . Пусть  $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$  — решение задачи (3). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq \leq M \left\{ \tau^{5-2/p} \left( \int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + \int_0^T \|[I - P_h]u(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (4)$$

Заметим, что в случае  $u'' \in L_2(0, T; V)$  нормы погрешностей сходятся к нулю по времени со вторым порядком. Оценка (4) позволяет получить оценки погрешности с порядком скорости сходимости и по пространственным переменным.

Пусть существует гильбертово пространство  $E$  такое, что  $E \subset V$ , и пространство  $V$  совпадает с интерполяционным пространством  $[E, H]_{1/2}$ . Пусть подпространства

$V_h$  обладают следующим аппроксимационным свойством, типичным для метода конечных элементов [5]

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq rh\|v\|_E \quad (v \in E), \quad (5)$$

где  $Q_h$  – ортопроектор в пространстве  $V$  на  $V_h$ , а константа  $r > 0$  и не зависит от  $v$  и  $h$ .

**Следствие.** Пусть подпространства  $V_h \subset V$  обладают свойством (5). Пусть выполнены условия теоремы и решение  $u(t)$  задачи (2) дополнительно такое, что  $u \in L_2(0, T; E)$ , тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq \\ \leq M \left\{ \tau^{5-2/p} \left( \int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + h^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 dt \right\}. \end{aligned}$$

**Замечание.** В условиях теоремы можно рассмотреть и оценку погрешности

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq \\ \leq 2 \sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right\|_H^2 \tau + 2 \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau. \quad (6) \end{aligned}$$

Оценка второго слагаемого в правой части (6) установлена в (4). Поэтому достаточно проследить, что первое слагаемое можно оценить в аналогичных условиях с тем же порядком по  $\tau$ . А именно, из представления

$$u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} = \frac{1}{2} \left( \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}} (t_{k-1} - t) u''(t) dt + \int_{t_{k-1/2}}^{t_k} (t - t_k) u''(t) dt \right)$$

следует оценка

$$\sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right\|_H^2 \tau \leq \tau^{5-\frac{2}{p}} \left( \int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{\frac{2}{p}}.$$

### 3. Модельная задача

Укажем модельную параболическую задачу, к которой применимы результаты данной работы.

Пусть  $t \in [0, T]$  и  $x \in [a, b]$ . Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du(t, x)}{dx} \right) + q(x)u(t, x) = f(t, x) \quad (7)$$

$$u(0, x) = u(T, x) \quad (8)$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0. \quad (9)$$

Определим пространства  $H = L_2[a, b]$ ,  $V = W_2^1[a, b]$ ,  $V' = W_2^{-1}[a, b]$ . В этом случае интерполяционное пространство  $E = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ .

В пространстве  $V$  рассмотрим форму:

$$a(u, v) = \int_a^b \left( p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + q(x) u(x) v(x) \right) dx,$$

где  $u, v \in V$ . Предположим, что функции  $p(x)$  и  $q(x)$  измеримы и, кроме того,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) > 0$ . Тогда форма  $a(u, v)$  порождает линейный ограниченный оператор  $A: V \rightarrow V'$ , связанных с формой следующим соотношением: для  $u, v \in V$

$$a(u, v) = (Au, v),$$

где под выражением  $(Au, v)$  понимается значение функционала  $Au \in V'$  на элементе  $v \in V$ .

В задаче (7) – (9) считается, что  $f(t)$  рассматривается как функция со значениями в  $V$ .

В сделанных предположениях задача (7) – (9) сводится к задаче определения функции  $u(t)$  со значениями в  $V$ , такой, что для всех  $v \in V$  выполняется:

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad u(0) = u(T). \quad (10)$$

При этом в качестве конечномерных подпространств  $V_h \in V$  при решении задачи (10) проекционно-разностным методом возможно использовать подпространства кусочно-линейных функций. Покажем способ построения таких подпространств. Введем в рассмотрение на отрезке  $[a, b]$  равномерную сетку  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Обозначим  $h = \frac{b-a}{N}$ . Узлам сетки поставим в соответствие функции:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & \text{если } x \in [x_{i-1}; x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & \text{если } x \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0, & \text{если } x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}]. \end{cases}$$

для любого  $i = \overline{1, N-1}$ .

Используемое в данной работе конечномерное подпространство  $V_h \subset V = W_2^1[a, b]$  в этом случае можно определить как линейную оболочку:

$$V_h = L(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}).$$

Функции из  $V_h$  являются абсолютно-непрерывными и кусочно-линейными; более того, их производные являются ступенчатыми функциями. Это означает, что  $V_h \subset W_2^1[a, b]$ .

## Литература

1. Обэн Ж.-П. *Приближённое решение эллиптических краевых задач*. – М.: Мир, 1977. – 384 с.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

3. Бондарев А. С. *Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение* // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 4. – С. 78–88.
4. Вайникко Г. М., Оя П. Э. *О сходимости и скорости сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений* // Дифф. уравн. – 1975. – Т. 11 – № 7. – С. 1269–1277.
5. Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционно-сеточные методы*. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

PROJECTION-DIFFERENCE METHOD WITH THE CRANK-NICOLSON SCHEME  
IN TIME FOR A PARABOLIC EQUATION WITH PERIODIC CONDITION

A.S. Bondarev

*A smoothly solvable abstract linear parabolic equation with a periodic condition is treated in a separable Hilbert space. This problem is solved approximately by the projection-difference method using the Galerkin method in space and the Crank-Nicolson scheme in time. We established root-mean-square error estimates for approximate solutions, which imply the convergence of approximate solutions to a solution and also the convergence rate that depends on the smoothness of a solution. As an example, we considered a parabolic problem with the Dirichlet condition, in which the subspaces of the "finite element" type can be assumed as the projection subspaces that were built for the occasion of uniform dividing a segment into finite elements.*

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, periodic condition, projection-difference method, Crank-Nicolson scheme, Galerkin method.

УДК 515.165.4

**О КЛАССИФИКАЦИИ  $M$ -РАСПАДАЮЩИХСЯ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 8**

И.М. Борисов<sup>1</sup>, Г.М. Полотовский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *i.m.borisov@mail.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

<sup>2</sup> *polotovskiy@gmail.com*; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

*Мы продолжаем классификацию вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых при выполнении некоторых условий максимальной и общего положения. В нашей работе рассматриваются взаимные расположения кривой степени 2 (коники)  $C_2$  и кривой степени 6 (секстики)  $C_6$ . Применением метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, нам удалось доказать нереализуемость 230 схем расположений таких кривых.*

**Ключевые слова:** вещественные алгебраические кривые, распадающиеся алгебраические кривые, метод Оревкова

Обозначим через  $\mathbb{R}C_m$  множество точек кривой  $C_m$  степени  $m$  в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ . Будем считать, что выполняются следующие условия:

(i)  $C_6$  и  $C_2$  являются  $M$ -кривыми, то есть  $\mathbb{R}C_2$  состоит из одного овала  $O_2$ , а  $\mathbb{R}C_6$  состоит из 11 овалов и, согласно классификации и кодировке Д.А. Гудкова (см. [1]), имеет одну из следующих схем расположения овалов:  $\frac{1}{1}9$ ,  $\frac{9}{1}1$  и  $\frac{5}{1}5$ ;

(ii)  $\mathbb{R}C_6$  и  $\mathbb{R}C_2$  пересекаются в 12 действительных точках без касания;

(iii) все точки пересечения лежат на одной ветви кривой  $\mathbb{R}C_6$  и на одной ветви кривой  $\mathbb{R}C_2$ ;

(iv) точки пересечения лежат на пересекающихся ветвях в одном порядке.

К исследуемым схемам кривых мы применяем метод Оревкова, основанный на теории кос и зацеплений. Для этого выберем схемы, для которых существует максимальный пучок, то есть в  $\mathbb{R}P^2$  есть точка такая, что любая прямая из пучка прямых с центром в этой точке пересекает исследуемую схему кривой степени 8 не менее, чем в 6 точках, и в этом пучке существует прямая, пересекающая эту схему в 8 точках. Таких схем оказалось 250. Суть метода Оревкова заключается в следующем (подробности см. в [2], [3]). Пусть  $\mathbb{C}C_m$  – множество комплексных точек кривой  $C_m$ ,  $\mathbb{C}l_p$  ( $\mathbb{R}l_p$ ) – пучок комплексных (вещественных) прямых с центром в точке  $p$ . Рассмотрим на комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$  множество  $\mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}l_p$ , оно гомеоморфно набору окружностей, которые попарно склеены в двойных точках множества  $\mathbb{R}C_m$  вещественных точек кривой и в точках касания прямых пучка  $\mathbb{R}l_p$  с  $\mathbb{R}C_m$ . Устраняя все точки склейки некоторым стандартным образом, получим косу из  $m$  нитей. Известно, что если схема реализуется вещественной алгебраической кривой, то соответствующая коса квазиположительна. Необходимыми условиями квазиположительности косы являются неравенство Мурасуги-Тристрама и условие Фокса-Милнора. Если хотя бы одно из них не выполняется, то схема не реализуется вещественной алгебраической кривой.

Применение метода Оревкова к 250 схемам распадающихся кривых степени 8 позволило доказать нереализуемости 230 из них. Известно, что ещё 6 схем реализуются построением по методу Гильберта (см. например, [4]). Для оставшихся 14 схем вопрос о реализуемости их вещественными алгебраическими кривыми указанного вида остаётся открытым.

## Литература

1. Гудков Д.А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. – 1974. – Т. 29, № 4. – С. 3–79.
2. Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. – 1999. – V. 38. – P. 779–810.
3. Orevkov S.Yu. Classification of flexible  $M$ -curves of degree 8 up isotopy // GAFA. – 2002. – V. 12, № 4. – P. 723–755.
4. Виро О.Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией // Алгебра и анализ. – 1989. – Т. 1, Вып. 5. – С. 1–73.

## ON THE CLASSIFICATION OF REAL DECOMPOSABLE CURVES OF DEGREE 8

I.M. Borisov, G.M. Polotovskiy

*We continue the classification of real algebraic curves which are decomposed into a product of two nonsingular curves under some conditions of maximality and general position. In our work we consider the arrangements of the curve of degree 2 (conic)  $C_2$  and the curve of degree 6 (sextic)  $C_6$ . Using the Orevkov method based on the theory of braids and links, we have proved the unrealizability of 230 schemes of such curves.*

Keywords: real algebraic curves, real decomposable algebraic curves, Orevkov method.



УДК 517.54

**МАЛЫЕ ВАРИАЦИИ В ЗАДАЧЕ ФЕКЕТЕ И СЕГЕ**Я.В. Борисова<sup>1</sup><sup>1</sup> borisova\_yana@list.ru; Национальный исследовательский Томский государственный университет

В работе вариационным методом решается задача Фекете и Сеге о нахождении множества значений и граничных отображений для функционала  $I(f) = c_3 - \gamma c_2^2$ , где  $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$  – отображение из класса  $S$ .

**Ключевые слова:** вариационный метод, функционал, однолистные голоморфные отображения.

Класс  $S$  – множество всех голоморфных однолистных в единичном круге отображений  $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ .

Задачу о нахождении множества значений функционала  $I : S \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I(f) = c_3 - \gamma c_2^2$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , и граничных отображений, то есть отображений, вносящих граничные точки в  $I(S)$ , называют задачей Фекете и Сеге.

В работе [1] в 1933 году венгерские математики М. Фекете и Г. Сеге решили задачу при  $\gamma = \frac{1}{4}$ . Выбор значения  $\gamma$  был связан с оценкой модуля соответствующего коэффициента в разложении отображения из класса  $S_2$ ,  $S_2 \subset S$ , область значения которого обладает двукратной симметрией вращения.

В 1949 году Г.М. Голузин решил задачу при  $\gamma \in (0, 1)$ , используя параметрический метод [2]. И.А. Александров в 1963 году в работе [3] решил задачу Фекете и Сеге методом П.П. Куфарова при  $\gamma \in \mathbb{R}$ . В данной работе задача решается вариационным методом [4].

Пусть  $f_1(z) = e^{i\beta} f(e^{-i\beta} z)$ . Так как  $f_1 \in S$  если и только если  $f \in S$ , то получаем, что множество значений функционала есть круг с центром в точке  $w = 0$ . Тогда достаточно найти  $I_1(S)$  функционала  $I_1 : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_1(f) = \operatorname{Re} I(f)$ , то есть найти  $\max_{f \in S} I_1(f)$ .

Используя стандартные для вариационного метода рассуждения, получаем, что необходимое условие для граничных отображений будет иметь вид:

$$\operatorname{Re}(P_3 - 2\gamma c_2 P_2) \leq 0, \quad (1)$$

где  $f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(\varepsilon)$  – вариационная формула,  $P(z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + P_3 z^3 + \dots$ , и граничные отображения удовлетворяют функционально-дифференциальному уравнению:

$$\frac{q f(z) + 1}{f^2(z)} \left( \frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^2 = \frac{z^4 + \bar{q} z^3 + b_2 z^2 + q z + 1}{z^2}, \quad (2)$$

где  $q = 2(1 - \gamma)c_2$ ,  $b_2 = 2I_1(f)$ .

Случай  $\gamma = 1$  рассмотрен отдельно [5].

С помощью качественного анализа дифференциального уравнения (2) получена

**Теорема.** Для функционала  $I : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I(f) = \operatorname{Re}(c_3 - \gamma c_2^2)$ , где  $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$  и  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , множество значений граничного отображения есть комплексная

плоскость с разрезом по кусочно-аналитическим кривым, одна из которых уходит на бесконечность. При этом возможны следующие варианты:

- 1) одна аналитическая кривая;
- 2) две аналитические кривые, соединяющиеся в точке под углом  $\frac{4\pi}{3}$ ;
- 3) три аналитические кривые, соединяющиеся в одной точке под равными углами.

В работе [6] приведены известные и получены новые малые вариационные формулы. С их помощью получены как известные, так и новые условия на граничные отображения.

Настоящая работа выполнена при поддержке Программы повышения международной конкурентоспособности Томского государственного университета на 2013-2020 гг.

## Литература

1. Szegő G., Fekete M. *Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen* // J. London Math. Soc. – 1933. – Vol. 8. – № 2(30). – P. 85–89.
2. Голузин Г. М. *Некоторые вопросы теории однолистных функций* // Тр. МИАН СССР. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – Т. 27. – С. 3–110.
3. Александров И. А. *Некоторые свойства класса  $S(w_0)$*  // Вопросы геометрической теории функций. – Томск: изд-во Том-го. гос. ун-та, 1963. – Т. 169. – С. 24–58.
4. Александров И. А., Колесников И. А., Копанев С. А., Копанева Л. С. *Метод внутренних вариаций в теории однолистных отображений*. – Томск: Изд-во Том-го. ун-та, 2017.
5. Борисова Я. В. *Об одном частном случае задачи Сеге и Фекете* // Материалы 56-й Межд. науч. студ. конф. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2018. – С. 17.
6. Борисова Я. В., Колесников И. А., Копанев С. А. *О малых вариационных формулах* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2017. – № 49. – С. 5–15.

## SMALL VARIATIONS IN THE FEKETE AND SZEGO PROBLEM

Ya.V. Borisova

*In the paper, we study the Fekete and Szego problem on the region and boundary mappings of the functional  $I(f) = c_3 - \gamma c_2^2$  where  $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$  is from the class  $S$ .*

Keywords: variational method, functional, univalent holomorphic mapping.

УДК 372.851

## ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ КАК ЭЛЕМЕНТ ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА К МАТЕМАТИКЕ

И.И. Валеев<sup>1</sup>, Э.И. Фазлеева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [iivaleev01@yandex.ru](mailto:iivaleev01@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> [elmira.fazleeva@mail.ru](mailto:elmira.fazleeva@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье рассматривается прикладная направленность как одна из важнейших составляющих в обучении математике. Подчеркивается ее значимость и необходимость, отмечается роль в осуществлении межпредметных связей. Приводится классификация представленных в школьных учебниках по математике прикладных задач, выявляется их соответствие к предъявляемым им требованиям, предлагаются различные типы задач для существенного обогащения их содержания.*

**Ключевые слова:** прикладная направленность обучения математике, прикладные задачи, межпредметные связи.

В условиях современной системы математического образования в нашей стране одной из актуальных является проблема снижения интереса обучающихся к предмету «математика». По нашему мнению, основной причиной выступает отсутствие достаточно обоснованного ответа на основополагающий вопрос: «для чего нужна математика?». Как правило, это связано с высокой степенью абстрактности математических объектов: числа, множества, функции и т.д. Опрос, проведенный среди учащихся 9-11 классов, показал, что около 90% респондентов отдают предпочтение изучению биологии, физики и географии, считая данные дисциплины наиболее востребованными для получения будущего профессионального образования. В то же время роль математики в различных отраслях жизни общества резко возросла.

Зачастую результаты педагогических исследований и опыт преподавания свидетельствуют об отсутствии связи между учебным предметом «математика» и «жизненной» составляющей данной науки. Одним из факторов, повышающих и стимулирующих учебную мотивацию может стать усиление практической значимости и активация прикладной направленности при обучении математике. По мнению российского математика и педагога Ю.М. Колягина, прикладная направленность обучения – это ориентация содержания и методов обучения на применение учебного предмета в технике и смежных науках, в профессиональной деятельности, в народном хозяйстве и быту [1]. Школьный курс математики предполагает применение прикладной направленности в целях повышения качества образования и математических способностей к решению задач из области повседневной практики. Это так называемые прикладные задачи, поставленные вне математики и решаемые математическими средствами. К математическим задачам прикладного характера естественно, наряду с общими, И.М. Шапиро предъявляет и следующие дополнительные требования:

- а) доступность школьникам используемого нематематического материала;
- б) реальность описываемой в условии задачи ситуации, числовых значений данных, корректность поставленного вопроса и полученного решения. Однако, по

его мнению, в современных школьных учебниках задачи с прикладной направленностью представлены в виде стандартных алгебраических и геометрических задач, не отвечающих сформулированным требованиям [3].

Следует отметить, что прикладные задачи в школьном курсе математики встречаются довольно редко и охватывают «скромный» перечень тем, а их легенда и постановка не всегда соответствуют предъявляемым к ним требованиям. К такому же результату привел проведенный анализ учебников, который показал, что задачи с прикладной направленностью в них практически отсутствуют, чаще всего встречаются при изучении производной, интегралов и нахождении экстремумов. Базой для усовершенствования методики и расширения применения этих тем в прикладных задачах могут выступить задачи из биологии и химии, экономического содержания, а также связанные с экологическими проблемами.

В ходе исследования мы изучили содержание и определили классификацию прикладных задач, проверили их на соответствие к предъявляемым требованиям, а также выделили числовые характеристики по количеству исследуемых задач в учебных пособиях по математике 9-11 классов, включенных в федеральный перечень, под редакциями следующих авторов: А.Г. Мордкович и др., А.Н. Колмогоров и др., С.М. Никольский и др., Н.Я. Виленкин и др., и Ю.Н. Макарычев и др.. При классификации руководствовались учебным пособием Л.Ш. Лысенкер, Э.М. Лысенкер «Прикладные математические задачи для основной и старшей школы» [2]. В нем представлена авторская классификация прикладных задач, которые тесно связаны с реальной жизнью. Их решение отчетливо отражает использование методов и моделей школьной математики на практике. Содержание пособия имеет разнообразную тематику: начиная с житейских и производственных задач и заканчивая задачами на использование функций, графиков и правил теории вероятностей.

Задачи прикладного характера, соответствующие всем требованиям, с учетом всех рассмотренных нами учебников по математике представлены в следующих процентных соотношениях от общего числа подобных задач (всего 69 задач):

- задачи на житейские и производственные темы (15%);
- задачи на процентные вычисления (22%);
- задачи на наилучший выбор (12%);
- задачи на использование графиков и элементарных функций (29%);
- задачи на использование основных правил теории вероятностей (17%);
- разные прикладные задачи (5%).

В результате анализа задачного материала указанных учебников по математике нами были выявлены следующие недостатки:

1. Представленные в учебниках задачи прикладного характера в основном направлены на нахождение в описываемых явлениях лишь количественных характеристик: «На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель?», «Какое количество воды поднимется на поверхность?», «Найти путь, пройденный телом?» и т.д. Такого рода задачи необходимо обогатить дополнительными вопросами и заданиями с целью ориентирования учащихся не только на выявление количественных характеристик связей, но и на определение сущности этих связей.

2. Среди прикладных задач мало задач из сферы искусства, литературы и спорта.

3. Практически нет задач, направленных на умение ставить проблему, то есть задачи, где приведены лишние, недостающие или противоречивые сведения.

4. Большинство прикладных задач в плане формулировки имеют словесный характер. Таким образом, прикладная направленность задачного материала в учебниках выражена очень слабо. Данная ситуация объяснима с точки зрения построения математической модели прикладных задач: необходимо иметь опыт, большой багаж жизненных знаний и развитую математическую культуру. Вследствие чего возникает проблема разработки практико-ориентированных задач и методики обучения работе с ними. Мы считаем, что содержание задач, представленных в учебниках, необходимо существенно обогатить, и рекомендуем включить в их число задачи на:

– создание номограмм: этот тип задач позволит продемонстрировать, как поведет себя график, описывающий жизненный процесс при различных параметрах;

– использование математического моделирования: моделирование некоторых производственных задач опирается на соотношения, известные учащимся, но в ряде случаев они основываются на зависимостях, которые невозможно установить в рамках школьной программы;

– создание расчетных таблиц: данные задачи могут быть использованы при составлении применяемых на практике таблиц, которые будут иллюстрировать определенное математическое правило;

– вывод формул соотношений, встречающихся на практике: подобного рода задачи не будут иметь алгоритма решения. Это задачи творческого (эвристического) характера.

В рамках исследования важно было отметить и наличие в задачах межпредметных связей. Обращение в обучении математике к смежным дисциплинам также вносит свою лепту в реализацию его прикладной направленности. Выигрышной для осуществления этой цели может выступить тема «Производная». В геометрии, к примеру, производной описывается крутизна графика, в механике – неравномерное прямолинейное движение, в экономике она характеризует надежность производственной функции, в биологии – скорость размножения бактерий, в химии – скорость протекания химической реакции. Такое взаимное проникновение понятий в различные учебные предметы не только имеет прикладную составляющую, но и отражает современные тенденции развития науки, создает благоприятные условия для формирования научного мировоззрения, существенно повышает интерес к математике.

## Литература

1. Колягин Ю. М., Пикан В. В. *О прикладной и практической направленности обучения математике* // Математика в школе. – 1985. – № 6. – С. 27.
2. Лысенкер Л. Ш., Лысенкер Э. М. *Прикладные математические задачи для основной и старшей школы*. – М.: Илекса, 2017. – 64 с.
3. Шапиро И. М. *Прикладная и практическая направленность обучения математике в средней общеобразовательной школе* // Сибирский межвузовский журнал. – 1998. – № 5.

## APPLIED FOCUS AS AN ELEMENT OF INCREASING INTEREST IN MATHEMATICS

I.I. Valeev, E.I. Fazleeva

*The article deals with applied orientation as one of the most important components in teaching mathematics. Its importance, necessity and the role in the implementation of interdisciplinary connections is emphasized in this article. The classification of applied problems presented in school textbooks is given, their correspondence to the requirements imposed on them is revealed, various types of problems are proposed for the substantial enrichment of their content.*

Keywords: applied orientation in teaching mathematics, applied problems, interdisciplinary connections.

УДК 517.927.4, 517.988.57

### О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Д.В. Валовик<sup>1</sup>, В.Ю. Курсеева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> lynxbax@mail.ru; Пензенский государственный университет, Политехнический институт

<sup>2</sup> dvalovik@mail.ru; Пензенский государственный университет, Политехнический институт

*В статье рассмотрен подход, позволяющий доказывать существование решений некоторых нелинейных многопараметрических задач на собственные значения. Предлагаемый подход, по существу, является «нелинейным» методом возмущений, в котором в качестве «невозмущенных» используются более простые нелинейные однопараметрические задачи на собственные значения.*

**Ключевые слова:** двоякопериодические, квазидвоякопериодические, циклические постоянные.

#### 1. Постановка задачи и вводные замечания

Классический метод возмущений [1] основан на следующей идее. Рассмотрим нелинейную задачу  $R(\alpha)$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  – вектор числовых параметров. В операторном виде такую задачу можно записать так:  $\mathcal{R}(\mathbf{u}; \lambda, \alpha) = 0$ , где  $\mathcal{R}$  – некоторая нелинейная по  $\mathbf{u}$  оператор-функция,  $\lambda$  – еще один вектор параметров (например, спектральных). Пусть существует решение  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_0(x; \lambda)$  задачи  $R(\mathbf{0})$ , где  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ . Как правило, задача  $R(\mathbf{0})$  линейная. При достаточно широких предположениях относительно  $\mathcal{R}$  можно доказать, что как только величина  $|\alpha|$  достаточно мала, задача  $R(\alpha)$  имеет решение  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_\alpha(x; \lambda)$  и  $\mathbf{u}_\alpha(x; \lambda) \rightarrow \mathbf{u}_0(x; \lambda)$  при  $|\alpha| \rightarrow 0$ .

Пусть задача  $R(\alpha')$ , где  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{l'}, 0, \dots, 0)$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_{l'} \neq 0$ , остается нелинейной, но является в некотором смысле более простой, чем задача  $R(\alpha)$ . Предположим, что разрешимость задачи  $R(\alpha')$  может быть установлена и пусть  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\alpha'}(x; \lambda)$  – ее решение. Тогда при определенных условиях на  $\mathcal{R}$  можно доказать, что если достаточно мала величина  $|\alpha - \alpha'|$ , то разрешима будет и задача  $R(\alpha)$  и  $\mathbf{u}_\alpha(x; \lambda) \rightarrow \mathbf{u}_{\alpha'}(x; \lambda)$  при  $|\alpha - \alpha'| \rightarrow 0$ .

Обсуждаемый подход может оказаться полезным если:

- (i) найдется вектор  $\alpha'$ , такой, что  $R(\alpha')$ , будучи более простой нелинейной задачей, может быть исследована каким-либо методом;
- (ii) решения задачи  $R(\alpha')$  существуют не только для «малых»  $|\alpha'|$ ;
- (iii) задача  $R(\alpha')$  имеет решения, не связанные с решениями задачи  $R(\mathbf{0})$ .

Очевидно, что в случаях (ii), (iii) рассмотрение задачи  $R(\mathbf{0})$  в качестве «невозможной» даст весьма скудную информацию о решениях задачи  $R(\alpha)$ . Более того, задача  $R(\mathbf{0})$  может не иметь решений.

В электродинамике нелинейных волноведущих структур возникают задачи, для которых справедливы ситуации (i)–(iii). Например, задачи, зависящие от скалярного параметра  $\alpha$  и удовлетворяющие условиям (ii), (iii), изучались в работе [2]. В работе [3] введен широкий класс задач, зависящих от (векторного) параметра  $\alpha$ , к которым применим изложенный выше подход.

Всюду ниже индексы  $i, j$  принимают значения  $1, 2, \dots, n$ . Пусть  $I = (0, h)$ ,  $\bar{I} = [0, h]$ , а  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$  являются вещественными вектором и матрицей параметров, матрица  $\alpha'$  состоит из  $n^2$  чисел  $\alpha_{ij}$ , где  $\alpha_{ii} > 0$  и  $\alpha_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Считаем, что  $\Lambda^* = \prod_i \Lambda_i$ ,  $A^* = \prod_{i,j} A_{ij}$ , где  $\Lambda_i = [0, \lambda_i^*]$ ,  $A_{ij} = (0, \alpha_{ij}^*)$ ; положительные числа  $\lambda_i^*$ ,  $\alpha_{ij}^*$  фиксированы, при этом числа  $\lambda_i^*$  выбираются достаточно большими (см. теоремы 1, 2), числа  $\alpha_{ii}^*$  могут быть выбраны произвольно, числа  $\alpha_{ij}^*$  при  $i \neq j$  являются достаточно малыми (см. теорему 2).

Задача  $P = P(\alpha)$  заключается в нахождении тех значений параметра  $\lambda = \bar{\lambda}$ , для которых существуют решения  $u_i \equiv u_i(x; \bar{\lambda}, \alpha)$  системы

$$u_i'' = -(a_i - \lambda_i)u_i - u_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j^2,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{aligned} u_i(0) &= 0, & u_i'(0) &= A_i, \\ u_i(h) &= 0, \end{aligned}$$

где  $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times A^*$ ,  $a_i, A_i > 0$  – вещественные постоянные, и  $u_i \in C^2[0, h]$ .

Рассмотрим еще задачу  $P(\alpha')$ . Эта задача распадается на  $n$  независимых нелинейных задач, обозначаемых  $P_i$ .

Обозначим  $\Lambda = [0, +\infty)$  и  $A = (0, +\infty)$ . Задача  $P_i$  заключается в нахождении тех значений параметра  $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ , для которых существуют решения  $v_i \equiv v_i(x; \hat{\lambda}_i, \alpha_{ii})$  уравнения

$$v_i'' = -(a_i - \lambda_i)v_i - \alpha_{ii}v_i^3, \tag{1}$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$v_i(0) = 0, \quad v_i'(0) = A_i, \tag{2}$$

$$v_i(h) = 0, \tag{3}$$

где  $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda \times A$ ,  $a_i, A_i > 0$  – вещественные постоянные, и  $v_i \in C^2[0, h]$ .

Задача  $P(\mathbf{0})$ , где  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , распадается на  $n$  (независимых) линейных задач, которые обозначим  $P_i^0$ .

Основным методом исследования задач  $P$  и  $P_i$  является метод интегральных дисперсионных уравнений [4], который был существенно модифицирован для применения к многопараметрическим задачам. Отметим, что широко известные подходы нелинейного анализа, такие как вариационный метод и методы теории ветвления решений, не применимы для исследования задач  $P(\alpha)$  и  $P_i$  [5, 6].

## 2. Результаты

Собственные значения задач  $P(\alpha)$ ,  $P_i$  и  $P_i^0$  обозначим  $\bar{\lambda}_{k,\dots,l} = (\bar{\lambda}_{1,k}, \dots, \bar{\lambda}_{n,l})^\top$ ,  $\hat{\lambda}_{i,k}$  и  $\tilde{\lambda}_{i,k}$  соответственно, где  $k, l = 1, 2, \dots, n$  – некоторые целочисленные индексы; также будут использоваться обозначения  $\bar{\lambda}$ ,  $\hat{\lambda}_i$  и  $\tilde{\lambda}_i$ .

Для задачи  $P_i^0$  справедливо следующее

**Утверждение 1.** Для любого  $h \geq h_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{a_i}} > 0$  задача  $P_i^0$  имеет конечное число (не меньше одного) простых (кратности 1) собственных значений  $0 \leq \tilde{\lambda}_{i,1} < \dots < \tilde{\lambda}_{i,p} < a_i$ ; при  $a_i = 0$  задача  $P_i^0$  (положительных) решений не имеет.

Рассмотрим задачу  $P_i$ . Введем функции

$$\theta_i(x) = v_i^2(x), \quad \mu_i(x) = v_i'(x) / v_i(x),$$

где  $v_i \equiv v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$  – решение задачи Коши (1)–(2). Можно показать, что указанная задача Коши глобально однозначно разрешима при  $x \in \bar{I}$ , а ее решение  $v_i(x; \lambda_i, \alpha_{ii})$  непрерывно зависит от точки  $(x, \lambda_i, \alpha_{ii}) \in \bar{I} \times \Lambda \times A$ . В силу (1)–(2) функции  $\theta_i(x)$  и  $\mu_i(x)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \theta_i' = 2\theta_i\mu_i, \\ \mu_i' = -(\mu_i^2 + a_i - \lambda_i + \alpha_{ii}\theta_i), \end{cases}$$

первый интеграл которой имеет вид

$$\frac{1}{2}\alpha_{ii}\theta_i^2 + (\mu_i^2 + a_i - \lambda_i)\theta_i = A_i^2. \quad (4)$$

Пусть

$$T_i(\lambda_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + a_i - \lambda_i + \alpha_{ii}\theta_i(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_i(s; \lambda_i)},$$

где  $\theta_i(s)$  определяется из (4) при  $\mu_i = s$ .

Используя метод интегральных дисперсионных уравнений [4], получаем следующее

**Утверждение 2 (об эквивалентности).** Число  $\hat{\lambda}_i$  является решением задачи  $P_i$ , если и только если существует целое число  $m_i' = \hat{m}_i \geq 0$ , такое, что  $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$  при  $m_i' = \hat{m}_i$  является решением уравнения

$$(m_i' + 1)T_i(\lambda_i) = h; \quad (5)$$

собственная функция  $v_i \equiv v_i(x; \hat{\lambda}_i, \alpha_{ii})$  имеет  $\hat{m}_i$  (простых) нулей  $x_{i,k}' \in I$ , где  $x_{i,k}' = kT_i(\hat{\lambda}_i) = \frac{kh}{\hat{m}_i + 1}$ ,  $k = \overline{1, \hat{m}_i}$ .



Исследуя дисперсионное уравнение (5), получаем такой результат.

**Теорема 1.** *Относительно задачи  $P_i$  имеют место утверждения:*

- 1) существует бесконечное число собственных значений  $\hat{\lambda}_i = \hat{\lambda}_{i,k} \in \Lambda$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , с точкой накопления на бесконечности;
- 2) существует постоянная  $\lambda'_i > a_i$ , такая, что все собственные значения  $\hat{\lambda}_{i,k} \in [0, a_i) \cup (\lambda'_i, +\infty)$  являются однократными;
- 3) если задача  $P_i^0$  имеет  $p$  решений  $\tilde{\lambda}_{i,1} < \tilde{\lambda}_{i,2} < \dots < \tilde{\lambda}_{i,p}$ , то существует постоянная  $\alpha''_{ii} > 0$  такая, что для любого положительного  $\alpha_{ii} = \alpha'_{ii} < \alpha''_{ii}$  справедливо  $\hat{\lambda}_{i,k} \in [0, a_i)$  и  $\lim_{\alpha'_{ii} \rightarrow +0} \hat{\lambda}_{i,k} = \tilde{\lambda}_{i,k}$  для  $k = \overline{1, p}$ , а  $\lim_{\alpha'_{ii} \rightarrow +0} \hat{\lambda}_{i,k} = +\infty$  для  $k > p$ , где  $\hat{\lambda}_{i,1} < \hat{\lambda}_{i,2} < \dots < \hat{\lambda}_{i,p}$  – первые  $p$  решений задачи  $P_i$  при  $\alpha_{ii} = \alpha'_{ii}$ ;
- 4) для больших  $\lambda$  и произвольного фиксированного  $\Delta > 0$  имеет место асимптотическое неравенство  $(1 - \Delta)\lambda_i(m) \leq \hat{\lambda}_{i,m} \leq (1 + \Delta)\lambda_i(\sqrt{2}m)$ , где  $\lambda_i(m) = a_i + (g^{-1}(\frac{h}{4m}))^2$ ,  $g^{-1}$  – функция, обратная к  $g(t) = \frac{\ln t}{t}$ ;
- 5)  $\max_{x \in (0, h)} |v_i(x; \hat{\lambda}_{i,k})| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Перейдем к рассмотрению задачи  $P(\alpha)$ . Используя аналогичный подход, что и в случае задачи  $P_i$ , удастся эквивалентно свести исходную задачу  $P(\alpha)$  к системе дисперсионных уравнений. Применяя метод возмущений к полученной системе, можно показать, что имеет место

**Теорема 2.** *Пусть каждая из задач  $P_i$  имеет  $m_i$  однократных собственных значений*

$$\hat{\lambda}_{i,1}, \dots, \hat{\lambda}_{i,m_i} \in [0, a_i) \cup (\lambda'_i, \lambda_i^*) \subset \Lambda_i$$

соответственно. Тогда найдутся положительные постоянные  $\alpha_{ij}^0$  при  $i \neq j$ , такие, что для любых  $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^0$  ( $i \neq j$ ) задача  $P(\alpha)$  имеет по крайней мере  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$  векторных собственных значений  $\bar{\lambda}_{k_1, k_2, \dots, k_n} = (\bar{\lambda}_{1, k_1}, \bar{\lambda}_{2, k_2}, \dots, \bar{\lambda}_{n, k_n})^\top$ , где  $k_i = \overline{1, m_i}$ ; при этом каждое  $\bar{\lambda}_{k_1, k_2, \dots, k_n}$  содержится в некоторой окрестности точки  $(\hat{\lambda}_{1, k_1}, \hat{\lambda}_{2, k_2}, \dots, \hat{\lambda}_{n, k_n})^\top$ .

Отметим, что поскольку числа  $\lambda_i^*$  в  $\Lambda_i$  заданы произвольно, а значит, могут быть выбраны достаточно большими, то теорема 2 утверждает существование (векторных) собственных значений  $\bar{\lambda}$  задачи  $P(\alpha)$  в том числе в области, в которой отсутствуют собственные значения задач  $P_i^0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №18-71-10015).

## Литература

1. Малкин И.Г. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 490 с.
2. Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D. *Third-order nonlinear electromagnetic TE and TM guided waves* // Elsevier sci. Publ. North-Holland. – 1991. – Vol. 29. – P. 73–287.
3. Valovik D.V. *Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena* // Journal of Optics. – 2017. – Vol. 19. – № 11. – P. 115502 (16 pages).

4. Valovik D.V. *Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem* // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2014. – Vol. 20. – № 12. – P. 52–58.
5. Ambrosetti A., Rabinowitz P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications* // Journal of Functional Analysis. – 1973. – Vol. 14. – № 4. – P. 349–381.
6. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

#### SOLVABILITY OF SOME NONLINEAR MULTIPARAMETER EIGENVALUE PROBLEM

D.V. Valovik, V.Yu. Kurseeva

*The paper treats an approach that allows one to prove existence of solutions of some nonlinear multiparameter eigenvalue problems. This approach, in fact, is a “nonlinear” perturbation method, where the non-perturbed problems are simpler nonlinear one-parameter eigenvalue problems.*

Keywords: nonlinear Sturm-Liouville problem, multiparameter nonlinear eigenvalue problem, perturbation method, integral dispersion equation method.

УДК 517.518.23+517.972

#### НОВЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

С.К. Водопьянов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *vodopis@math.nsc.ru*; Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

*Мы приведем обзор основных этапов развития квазиконформного анализа, и определим двухиндексную шкалу отображений с  $\theta$ -весовым  $(q, p)$ -ограничением искажением. Цель лекции — показать, что новая концепция не только содержит в качестве частного случая большинство исследованных в литературе классов отображений, в частности, класс отображений с ограниченным искажением, но и имеет также широкую область применения. Например, гомеоморфные отображения этого класса при  $\theta \equiv 1$ ,  $n-1 \leq q < p = n$  можно рассматривать в качестве допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости.*

**Ключевые слова:** внутренний коэффициент искажения, отображение с ограниченным  $\theta$ -весовым  $(q, p)$ -искажением, функция Полецкого, емкостное неравенство, затираемость особенностей, теорема Лиувилля, дифференцируемость, нелинейная теория упругости.

1. В 60-е годы прошлого века Ю. Г. Решетняк заложил основы теории отображений с ограниченным искажением, которую можно рассматривать как естественное обобщение теории аналитических функций на евклидовы пространства произвольной размерности  $n \geq 2$  (см. [1]). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — область (т. е. открытое связное множество) в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Отображение  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  класса Соболева  $W_{n,\text{loc}}^1(\Omega)$  называется *отображением с ограниченным искажением*, если

$$|Df(x)|^n \leq KJ(x, f) \text{ для п. в. } x \in \Omega, \quad (1)$$

где  $K \in [1, \infty)$  — постоянная,  $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$  — матрица Якоби,  $J(x, f) = \det Df(x)$ .

Ю. Г. Решетняк установил основные топологические свойства этих отображений дока- зав, что всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно открыто и дискретно [1]. Известно, что всякое гомеоморфное отображение с ограниченным искажением квазиконформно.

В соответствии с результатами работы [2,3] всякое непрерывное открытое и дискретное отображение  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  класса Соболева  $W_{n-1,loc}^1(\Omega)$  с условием

$$|\text{adj} Df(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq K' J(x, f) \text{ для п. в. } x \in \Omega, \quad (2)$$

является отображение с ограниченным искажением, т. е. удовлетворяет также соотношению (1) (здесь  $\text{adj} A$  — присоединенная матрица, а  $K' \in [1, \infty)$  — постоянная). Мы включаем отображения класса Соболева  $W_{n-1,loc}^1(\Omega)$  с условием (2) в двухиндексную шкалу отображений зависящую от вещественных параметров  $n-1 < q \leq p < \infty$ .

**Определение 1** [2, 3]. Отображение  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *отображением с ограниченным  $\theta$ -весовым  $(q, p)$ -искажением* (принадлежит классу  $\mathcal{S}\mathcal{D}(\Omega; q, p; \theta, 1)$ ), если

- 1)  $f$  непрерывно, открыто и дискретно;
- 2)  $f$  принадлежит классу Соболева  $W_{n-1,loc}^1(\Omega)$ ;
- 3) якобиан  $J(x, f) \geq 0$  в  $\Omega$  п. в.;
- 4) отображение  $f$  имеет конечное коискажение:  $\text{adj} Df(x) = 0$  п. в. на множестве  $Z = \{x \in \Omega : \det Df(x) = 0\}$ ;
- 5) функция локального  $\theta$ -веса

$$\Omega \ni x \mapsto \mathcal{K}_{q,p}^{\theta,1}(x, f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x) |\text{adj} Df(x)|}{J(x, f)^{\frac{n-1}{p}}}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1)$$

принадлежит  $L_\rho(\Omega)$ , где  $\rho$  находится из условия  $\frac{1}{\rho} = \frac{n-1}{q} - \frac{n-1}{p}$  ( $\rho = \infty$  при  $q = p$ ).

Введем следующее обозначение  $\mathcal{K}_{q,p}^{\theta,1}(f; \Omega) = \|\mathcal{K}_{q,p}^{\theta,1}(\cdot, f) \| L_\rho(\Omega) \|$ .

Цель работы — показать, что отображения двухиндексной шкалы наследуют многие свойства отображений с ограниченным искажением. Заметим, что отображения класса Соболева  $W_{n-1,loc}^1(\Omega)$  не обладают многими привычными в квазиконформном анализе свойствами: дифференцируемостью,  $\mathcal{N}$ -свойством Лузина,  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина и др. Поэтому доказательства основных утверждений работы новые.

1) Мы определяем обобщенную функцию Полецкого и устанавливаем для нее свойства регулярности [2, теорема 18].

2) Этот результат и метод его доказательства служит основой при выводе оценок для перенесенных функций [2, теоремы 28 и 32; 3, теоремы 17 и 24].

3) В качестве одного из следствий мы получаем оценку для емкости перенесенного конденсатора:  $(\text{cap}_s f(E))^{1/s} \leq \mathcal{K}_{q,p}^{\theta,1}(f; \Omega) (\text{cap}_r^\omega E)^{1/r}$ , где  $f \in \mathcal{S}\mathcal{D}(\Omega; q, p; \theta, 1)$ ,  $n-1 < q \leq p < \infty$ , весовая функция  $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$  локально интегрируема,  $E = (A, C)$  — конденсатор в  $\Omega$ ,  $A \Subset \Omega$ ,  $C \subset A$  компактно, а  $s = \frac{p}{p-(n-1)}$ ,  $r = \frac{q}{q-(n-1)}$  [2, теорема 34].

4) Оценка для емкости перенесенного конденсатора позволяет установить теоремы о затираемых особенностях [2, теорема 45], доказать теоремы типа Лиувилля [3, теорема 32], и классифицировать римановы многообразия [3, теорема 39], а также доказать дифференцируемость отображений класса  $\mathcal{SD}(\Omega; q, p; \theta, 1)$  для  $n - 1 \leq q \leq p < n + \frac{1}{n-2}$  и  $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}} \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  [3, теорема 26].

5) Совокупность гомеоморфизмов  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  класса  $\mathcal{SD}(\Omega; q, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$ , где области  $\Omega$  и  $\Omega'$  имеют липшицевы границы, можно рассматривать в качестве класса допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости. Заметим, что класс допустимых деформаций работы [4] содержится в пересечении  $\mathcal{SD}(\Omega; q, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$  при некотором  $q > n - 1$ , а класс деформаций из [5] совпадает с классом  $\mathcal{SD}(\Omega; n - 1, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$ . Новый класс допустимых деформаций представляет собой шкалы семейств, зависящих от непрерывного параметра  $q \in [n - 1, n)$ . Эти семейства естественно упорядочены по вложению: класс с большим  $q$  содержится в классе с меньшим  $q \in [n - 1, \infty)$ . Такая иерархия позволяет подобрать под данный материал допустимый для него класс деформаций. Доказательство существования экстремальной деформации в классе  $\mathcal{SD}(\Omega; q, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$  для вариационной задачи с некоторыми естественными условиями на рост интегранта приведено в [6].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФ, соглашение № 16–41–02004.

## Литература

1. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – М.: Наука, 1989.
2. Водопьянов С. К. Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений // Сиб. мат. журн. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 805–834.
3. Водопьянов С. К. О дифференцируемости отображений класса Соболева  $W_{n-1}^1$  с условиями на функцию искажения // Сиб. мат. журн. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 1240–1267.
4. Ball J. *Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter* // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – 1981. – V. 88A. – P. 315–328.
5. Iwaniec T., Onninen J. *Hyperelastic deformations of smallest total energy*. // Arch. Rational Mech. Anal. – 2009. – V. 194. – № 3. – P. 927–986.
6. Molchanova A., Vodopyanov S. *Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity* // ArXiv:1704.08022v4.

## NEW TRENDS IN GEOMETRIC FUNCTION THEORY

S.K. Vodopyanov

*We provide a review of the main stages of development of the quasiconformal analysis, and we will define a two-index scale of mappings with  $\theta$ -weighted  $(q, p)$ -distortion. The lecture purpose is to show that the new concept not only contains, as a special case, the majority of classes of mappings investigated in the literature, in particular the class of mappings with bounded distortion, but also has wide scope. For example, homeomorphic mappings of this class for  $\theta \equiv 1$ ,  $n - 1 \leq q < p = n$  can be considered as admissible deformations in problems of the non-linear theory of elasticity.*

Keywords: inner distortion, mapping with bounded  $\theta$ -weighted  $(q, p)$ -distortion, Pолекій function, capacity estimate, removable singularity, Liouville-Type Theorem, differentiability, non-linear theory of elasticity.

УДК 514.12

## ПРОБЛЕМА ФЕРМА–ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

А.Х. Галстян<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ares.1995@mail.ru; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*Проблема Ферма–Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства  $Y$  таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечно подмножества  $A$  пространства  $Y$  минимальна [2]. Мы изучаем эту проблему в случае, когда  $Y$  — это пространство компактных подмножеств евклидовой плоскости, наделённое метрикой Хаусдорфа, а точки из  $A$  — это конечные попарно непересекающиеся компакты.*

**Ключевые слова:** проблема Ферма–Штейнера, компакт Штейнера, критерий минимального компакта Штейнера, количество точек в минимальном компакте Штейнера.

Множество  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$  изначально заданных компактных подмножеств называется *границей*, а каждое  $A_i$  — *граничным компактом*. Положим  $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \{a_j^i\}$ . Подмножества, которые реализуют минимум суммы расстояний до граничных компактов, называются *компактами Штейнера*. Мы обозначаем множество всех компактов Штейнера через  $\Sigma(A)$ . Оно разбивается на попарно непересекающиеся классы  $\Sigma_d(A)$ , где  $d = (d_1, \dots, d_n)$ , а  $d_i$  — это расстояние Хаусдорфа от компакта  $K \in \Sigma_d(A)$  до  $A_i$ . Известно [3], что каждый класс  $\Sigma_d(A)$  содержит в себе единственный компакт  $K_d$ , который максимален по включению, а также некоторое количество минимальных по включению компактов. Через  $B_r(y) \subset Y$  мы обозначаем замкнутый шар с центром в точке  $y$  и с радиусом  $r$ . Мы показываем, что для каждого  $d$ ,  $i$  и  $j$  справедливо  $(B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d) \neq \emptyset$ . Если это множество конечно, мы обозначаем его через  $HP(a_j^i)$ , иначе полагаем  $HP(a_j^i) = \emptyset$ . Также пусть  $HP(A) = \bigcup HP(a_j^i)$ . Все результаты ниже справедливы для любой конечной границы  $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ .

**Теорема.** *Существуют такие  $i \in \{1, \dots, n\}$  и  $j \in \{1, \dots, m_i\}$ , что множество  $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$  имеет лишь конечное число точек.*

**Следствие.** *Пусть  $K$  — компакт Штейнера в классе  $\Sigma_d(A)$ . Тогда  $K \cap \partial K_d \neq \emptyset$ .*

**Теорема.** *Минимальный компакт  $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$  является конечным множеством, количество его точек не превосходит  $(\sum_{i=1}^n m_i) - n + 1$ , а в случае, когда имеется больше одного  $i$ , для которого  $m_i > 1$ , оно не превосходит  $(\sum_{i=1}^n m_i) - n$ , где  $n$  — количество граничных компактов. В обоих случаях оценка точна.*

**Теорема.** *Компакт  $K \subset \mathbb{R}^2$  является минимальным компактом Штейнера в классе  $\Sigma_d(A)$  тогда и только тогда, когда одновременно выполняются все три следующие условия:*

- (1)  $K \subseteq K_d$ ;
- (2)  $K \cap B_{d_i}(a_j^i) \neq \emptyset$  для любых  $i \in \{1, \dots, n\}$  и  $j \in \{1, \dots, m_i\}$ ;
- (3) Для любого  $p \in K$  существуют  $i \in \{1, \dots, n\}$  и  $j \in \{1, \dots, m_i\}$  такие, что  $(K \setminus \{p\}) \cap B_{d_i}(a_j^i) = \emptyset$ .

**Теорема.** Минимальный компакт Штейнера  $K_\lambda$  — единственный минимальный в  $\Sigma_d(A)$  тогда и только тогда, когда для каждой точки  $p \in K_\lambda$  существует точка  $a_j^i$  такая, что  $HP(a_j^i) = p$ .

Автор выражает благодарность своим научным руководителям, профессору А.А. Тужилину и профессору А.О. Иванову, за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

Работа подготовлена при финансовой поддержке программы “Leading Scientific Schools” (grant no. NSh-6399.2018.1).

## Литература

1. Ivanov A., Tuzhilin A. *Branching Solutions To One-Dimensional Variational Problems*. – World Scientific, 2001. – 364 p.
2. Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A. *Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance* // Journal of Geom. – 2017. – V. 108. – P. 575–590.

## FERMAT–STEINER PROBLEM IN SPACE OF COMPACT SUBSETS OF THE EUCLIDEAN PLANE

A.K. Galstyan

*The Fermat–Steiner problem consists of finding all points of a metric space  $Y$ , such that the sum of distances from each of them to points from some fixed finite subset  $A$  of the space  $Y$  is minimal [2]. We study this problem in the case when  $Y$  is a space of compact subsets of the Euclidean plane, endowed with the Hausdorff distance, and points from  $A$  are finite pairwise disjoint compacts.*

Keywords: Fermat–Steiner problem, Steiner compact, criterion of a minimal Steiner compact, number of points in a minimal Steiner compact.

УДК 514.8

## О СУПЕРАДДИТИВНОСТИ ЭССЕНА ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Л.И. Гафиятуллина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [gafiyat@gmail.com](mailto:gafiyat@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В 1951 г. Эссен получил результат для жесткости кручения, который назвали супераддитивностью. В данной работе показано, что утверждение Эссена справедливо и для евклидовых моментов областей относительно своей границы порядка  $p$ .*

**Ключевые слова:** жесткость кручения, евклидовы момент области относительно своей границы, функция напряжения, функция расстояния.

Пусть  $G$  — односвязная область на плоскости. Рассмотрим функцию напряжений  $u(x, G)$ , которая удовлетворяет уравнению  $\Delta u = -2$  внутри области  $G$  и граничному условию  $u = 0$  на границе области  $\partial G$ . Хорошо известно, что для широкого класса областей такая функция существует и определяется единственным образом.

Физический функционал

$$P(G) := 2 \int_G u(x, G) dA, \quad (1)$$

называется жесткостью кручения области  $G$ , здесь через  $dA$  обозначен дифференциальный элемент площади (см. [1]).

**Теорема 1 (Эссен).** Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — две необязательно непересекающиеся ограниченные односвязные области на плоскости. Пусть  $P_i$  — жесткость кручения области  $B_i$ ,  $P_\cup$  — жесткость кручения  $B_1 \cup B_2$  и  $P_\cap$  — жесткость кручения  $B_1 \cap B_2$ . Тогда

$$P_1 + P_2 \leq P_\cap + P_\cup. \quad (2)$$

Это неравенство называют супераддитивностью Эссена [5]. Тот же результат выполняется для самих функций напряжений и поэтому (2) следует из интегрирования по всему пространству, если функции напряжений продолжаются нулем вне их областей определения.

Геометрический функционал, определяемый равенством

$$I_p(G) = \int_G \rho(x, G)^p dA, \quad (3)$$

где  $\rho(x, G)$  — функция расстояния от точки  $x$  до границы области  $G$ , называется евклидовым моментом области относительно границы порядка  $p$ . При  $p = 2$  функционал естественно назвать евклидовым моментом инерции области (см. [2], [3]), а при  $p = 1$  — стационарным евклидовым моментом области.

Нетрудно показать, что утверждение Эссена справедливо и для евклидовых моментов областей относительно своей границы порядка  $p$ .

**Теорема 2.** Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — две необязательно непересекающиеся ограниченные односвязные области на плоскости. Пусть  $I_i$  — евклидов момент относительно границы  $B_i$ ,  $I_\cup$  — евклидов момент относительно границы области  $B_1 \cup B_2$  и  $I_\cap$  — евклидов момент относительно границы области  $B_1 \cap B_2$ . Тогда

$$I_1 + I_2 \leq I_\cap + I_\cup. \quad (4)$$

## Литература

1. Поля Г., Серё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. — М.: Физматгиз, 1962. — 336 с.
2. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи*. — Казань: Казанск. фонд Математика, 1996.
3. Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. — 1998. — Т. 189, № 12. — С. 3-12.

4. Aissen M. *A class of superadditive functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – V. 4. – P. 360-362.
5. Payne L.E. *Isoperimetric inequalities and their applications* // SIAM Review. – 1967. – V. 9, № 3. – P. 453-488.

## ON SUPERADDITIVITY BY ESSEN FOR TORSIONAL RIGIDITY

L.I. Gafiyatullina

*In 1951, Essen obtained a result for torsional rigidity, which is called the superadditivity. This paper shows that the statement of Essen is also true for the Euclidean moments of domains with respect to their boundary of order  $p$ .*

Keywords: torsional rigidity, Euclidean moment of domain with respect to its boundary, isoperimetric inequality, distance to the boundary of domain.

УДК 004.42

**МЕТОДЫ СЕМАНТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОЛЛЕКЦИЙ ЦИФРОВОЙ БИБЛИОТЕКИ LOBACHEVSKII-DML**П.О. Гафурова<sup>1</sup>, Е.К. Липачев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *polina.mannshtern@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> *elipachev@gmail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Описан алгоритм формирования метаданных цифровых коллекций электронной библиотеки Lobachevskii DML. Учтена специфика этой библиотеки, построенной на основе парадигмы управления объектами, и часть метаданных сгенерирована в виде связей с внешними ресурсами. Разработаны инструменты, с помощью которых в набор метаданных добавлены связи авторов документов с их профилями на MathNet.ru, Google Scholar и др. Предложена система XSL-преобразований, позволяющих сгенерировать фундаментальный или обязательный набор метаданных в соответствии со схемами Европейской цифровой математической библиотеки EuDML.*

**Ключевые слова:** цифровая коллекция, цифровая математическая библиотека, метаданные, семантический метод, Lobachevskii DML, Европейская цифровая математическая библиотека, Всемирная цифровая математическая библиотека.

Переход к распространению научных знаний через Интернет, происходящий в настоящее время, принято обозначать как новую научную революцию [2]. Одним из направлений формирования глобальной научной инфраструктуры является создание специализированных электронных библиотек. Математические электронные библиотеки являются основой формирования цифровой инфраструктуры математических знаний. Принципы построения такой инфраструктуры оформлены в документах проекта Всемирной цифровой математической библиотеки – World Digital Mathematics Library (WDML) [3]. Основной задачей этого проекта является объединение в распределенной системе электронных коллекций всего корпуса цифровых математических документов. Определяющая роль в этом объединении отведена национальным электронным математическим библиотекам [3]. На



интеграцию европейских математических ресурсов направлен проект The European Digital Mathematics Library (EuDML, <https://initiative.eudml.org/>) [4], [5]. Этот проект является одним из этапов построения Всемирной цифровой математической библиотеки.

В соответствии с основными принципами WDML в Казанском университете создается электронная библиотека Lobachevskii Digital Mathematics Library (Lobachevskii-DML, <https://lobachevskii-dml.ru/>). Построение этой библиотеки предполагает разработку инструментов управления математическим контентом, учитывающих не только специфику математических текстов, но и особенности обработки русскоязычных текстов. Еще одной задачей этой библиотеки является интеграция математических ресурсов Казанского университета и их включение в глобальную научную инфраструктуру [5].

В настоящей работе представлены методы семантического представления цифровых коллекций электронной библиотеки Lobachevskii-DML. Практическим применением этих методов стало формирование метаданных документов коллекций в форматах, соответствующих схемам Journal Archiving and Interchange Tag Suite (NISO JATS) [6], что обеспечило подготовку фундаментальных (для части документов – обязательных) наборов метаданных по требованиям EuDML [7].

Приведем краткое описание алгоритма формирования метаданных цифровых коллекций электронной библиотеки Lobachevskii-DML. В настоящее время цифровые коллекции этой электронной библиотеки представлены метаданными, включающими как описание документов, так и информацию о физическом размещении документов в сети. Оцифрованные архивы нескольких журналов и сборников, издаваемых в Казанском университете, размещены на портале MathNet.Ru (<http://www.mathnet.ru/>) и снабжены метаописаниями. Отметим, что цифровые коллекции имеют различный состав метаданных, в частности, в статьях архивных коллекций до 2008 года отсутствуют ключевые слова и аннотации, а также другие данные, необходимые для формирования фундаментального набора метаданных EuDML.

На первом шаге алгоритма производится проверка состава метаданных документов цифровой библиотеки. С помощью программы, разработанной на C# с использованием функций пакета HtmlAgilityPack, выполняется импорт метаданных с портала MathNet.ru и запись в xml-формат для внутреннего хранения в библиотеке Lobachevskii-DML. Если описание документа не сопровождается англоязычными названием и списком авторов, то автоматически выполняется их транслитерация.

С использованием шаблонов описания журналов и сборников, разработанных нами в соответствии со схемами EuDML, производится создание обязательных наборов метаданных. Схема фундаментального набора метаданных EuDML, в дополнение к обязательному набору метаданных, предполагает наличие списка ключевых слов и аннотации. В статьях научных журналов до 2008 года эта информация, как правило, отсутствует и для ее извлечения из документов потребовалось применение инструментов текстовой аналитики. Имеющиеся в настоящее время сервисы структурного и семантического анализа позволили получить удовлетворительные результаты для основной части документов цифровой библиотеки [8], [9].

Далее, в состав метаданных включены идентификаторы авторов в базах Scopus,

Web of Science, eLibrary, ORCID, а также ссылки на их профили на сайте Казанского университета, Google Scholar и Matnet.Ru. С помощью XSL-преобразований полученные метаданные преобразованы также в форматы RIS, BIBTEX, dblp.xml и RDF triple.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект 1.2368.2017/ПЧ, и при частичной финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-47-160012.

## Литература

1. Bartling S. and Friesike S. *Towards Another Scientific Revolution* // In: Bartling S., Friesike S. (Eds) *Opening Science. The Evolving Guide on How the Internet is Changing Research, Collaboration and Scholarly Publishing*. Springer International Publishing, 2014. – P. 3–15.
2. *Developing a 21st Century Global Library for Mathematics Research*. – Washington, The National Academies Press, 2014. – 131 p.
3. Elizarov A. M., Lipachev E. K., Zuev D. S. *Digital Mathematical Libraries: Overview of Implementations and Content Management Services* // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – V. 2022. – P. 317–325.
4. Sylwestrzak W., Borbinha J., Bouche T., Nowiński A., Sojka P. *EuDML – Towards the European Digital Mathematics Library* // In: Sojka P. (ed.): *Towards a Digital Mathematics Library*. Paris, France, July 7-8th, 2010. Masaryk University Press, Brno, Czech Republic, 2010. – P. 11–26. URL: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/702569>.
5. Bouche T., Rákosník J. *Report on the EuDML External Cooperation Model* // In: Kaiser K., Krantz S., Wegner B. (Eds.): *Topics and Issues in Electronic Publishing, JMM, Special Session, San Diego, January 2013*. – P. 99–108.
6. Elizarov A. M., Lipachev E. K. *Lobachevskii DML: Towards a Semantic Digital Mathematical Library of Kazan University* // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – V. 2022. – P. 326–333.
7. *Journal Article Tag Suite. NISO JATS V1.0*. URL: <https://jats.nlm.nih.gov/1.0/>.
8. Jost M., Bouche T., Goutorbe C., Jorda J.-P. *D3.2: The EuDML metadata schema*. URL: <http://www.mathdoc.fr/publis/d3.2-v1.6.pdf>.
9. Елизаров А. М., Липачёв Е. К. *Семантические методы и инструменты электронной математической библиотеки Lobachevskii-DML* // Научный сервис в сети Интернет: труды XIX Всероссийской научной конференции. – М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. – С. 130–136.
10. Елизаров А. М., Зайцева Н. В., Зуев Д. С., Липачев Е. К., Хайдаров Ш. М. *Сервисы формирования метаданных цифровых документов в форматах международных наукометрических баз данных* // Научный сервис в сети Интернет: труды XX Всероссийской научной конференции. – М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. – С. 175–185.

## METHODS FOR THE SEMANTIC REPRESENTATION OF MATHEMATICAL COLLECTIONS OF THE LOBACHEVSKII DIGITAL MATHEMATICS LIBRARY

P.O. Gafurova, E.K. Lipachev

*We have described the algorithm for generating metadata of digital collections of the Lobachevskii Digital Mathematics Library. The specifics of this library based on the paradigm of managing objects were taken into account and a part of metadata was generated in the form of links to external resources. We developed tools that added links to collection of metadata that bind document authors with their*

profiles on MathNet.ru, Google Scholar, and others. We proposed a system of XSL transformations of metadata to a fundamental set of metadata in accordance with the schemes of the European Digital Mathematics Library Library (EuDML).

Keywords: digital collection, Digital Mathematics Library, metadata, semantic method, Lobachevskii DML, The European Digital Mathematics Library, EuDML, World Digital Mathematics Library, WDML.

УДК 514.762; 514.82

## О ГЛОБАЛЬНОЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ РАССЛОЕННЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т.А. Гончар<sup>1</sup>, Е.И. Яковлев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> gonchar.t.a@yandex.ru; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

<sup>2</sup> eyakovlev@hse.ru; НИУ Высшая школа экономики, Кафедра фундаментальной математики

*Исследуются причинные свойства лоренцевой метрики, заданной на пространстве главного расслоения и инвариантной относительно действия структурной группы.*

**Ключевые слова:** главное расслоение, лоренцево многообразие, глобальная гиперболичность.

Пусть  $\xi = (E, p, B, G)$  — гладкое главное расслоение с проекцией  $p : E \rightarrow B$  и структурной группой  $G$ ,  $\dim B = n$ ,  $\dim G = k$ ,  $\dim E = m = n + k$ . Предположим, что на многообразии  $E$  задана лоренцева метрика  $g$ , инвариантная относительно действия группы  $G$  на  $E$ . Предположим, что слои расслоения  $\xi$  пространственноподобны относительно  $g$ .

Обозначим символом  $V_v$  вертикальное подпространство касательного пространства  $T_v E$ , состоящее из векторов, касающихся слоя  $G_v = p^{-1}(b)$ ,  $b = p(v)$ . При этом ортогональное дополнение  $H_v$  к подпространству  $V_v$  в псевдоевклидовом пространстве  $(T_v E, g_v)$  имеет размерность  $k$ . Соответствие  $H : v \rightarrow H_v$  является  $G$ -связностью на  $E$ . Пусть  $\omega$  — форма связности  $H$ .

Рассмотрим точку  $b \in B$  и касательные векторы  $X, Y \in T_b B$ . Для произвольной точки  $v \in p^{-1}(b)$  и горизонтальных лифтов  $X_v^*, Y_v^*$  векторов  $X, Y$  в точку  $v$  относительно  $H$  положим

$$h(X, Y) = g(X_v^*, Y_v^*).$$

Этим определена лоренцева метрика  $h$  на многообразии  $B$ .

Рассмотрим алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $G$ . Если  $P, Q \in \mathfrak{g}$ , то им соответствуют фундаментальные векторные поля  $P^*, Q^*$  на  $E$ . Для произвольной точки  $v \in E$  положим  $\gamma_v(P, Q) = g(P_v^*, Q_v^*)$ . Очевидно, что  $\gamma_v$  — евклидова метрика на алгебре  $\mathfrak{g}$ . При этом для всех  $a \in G$  имеет место равенство  $\gamma_{v \cdot a}(P, Q) = \gamma_v(ad(a)P, ad(a)Q)$ .

Для произвольных  $\bar{X}, \bar{Y} \in T_v E$

$$g(\bar{X}, \bar{Y}) = \gamma_v(\omega(\bar{X}), \omega(\bar{Y})) + p^* h(\bar{X}, \bar{Y}).$$

Евклидова метрика на алгебре  $\mathfrak{g}$  определяет левоинвариантную риманову метрику на группе  $G$ . Поскольку соответствие между ними взаимно однозначно, их

обычно отождествляют. Поэтому  $\gamma_\nu$  одновременно обозначает как евклидову метрику на  $\mathfrak{g}$ , так и соответствующую ей левоинвариантную риманову метрику на  $G$ .

Предположим, что  $O$  – временная ориентация лоренцева многообразия  $(B, h)$ , то есть непрерывное времениподобное векторное поле на  $B$ , а  $O^*$  – горизонтальный лифт поля  $O$  относительно  $G$ -связности  $H$ . Тогда векторное поле  $O^*$  также непрерывно. Будем считать, что многообразии  $(E, g)$  ориентировано во времени векторным полем  $O^*$ .

Нашей целью является установление связи между причинными структурами многообразий  $(E, g)$  и  $(B, h)$ . В случае, когда группа  $G$  абелева, некоторые результаты в этом направлении были получены в работах [1], [2] и [3]. Они были использованы в двухточечных краевых задачах для гироскопических систем с многозначным функционалом действия, в том числе, для исследования динамики заряженных частиц в гравитационных и электромагнитных полях черных дыр. В [4] для произвольной связной группы Ли  $G$  получены условия хронологичности, причинности и сильной причинности многообразия  $(E, g)$ . Здесь аналогичная задача решается для глобальной гиперболичности.

Открытое подмножество  $U \subset B$  лоренцева многообразия считается причинно выпуклым, если произвольная непространственноподобная кривая данного многообразия либо не имеет с  $U$  общих точек, либо пересекается с ним по связному множеству. Лоренцево многообразие называется сильно причинным, если каждая его точка имеет базу окрестностей, каждая из которых является причинно выпуклым множеством. Это свойство равносильно тому, что топология многообразия совпадает с топологией Александра, базу которой образуют множества вида  $I^+(u) \cap I^-(v)$ , где  $I^+(u)$  – хронологическое будущее точки  $u$ , а  $I^-(v)$  – хронологическое прошлое точки  $v$ .

Сильно причинное лоренцево многообразие  $(B, h)$  называется глобально гиперболическим, если для любой пары точек  $b, c \in B$  пересечение  $J^+(b) \cap J^-(c)$  компактно, где  $J^+(b)$  – причинное будущее точки  $b$  в  $(B, h)$ , а  $J^-(c)$  – причинное прошлое точки  $c$  в  $(B, h)$ .

**Предложение 1.** Для любой точки  $v \in E$  и ее проекции  $b = p(v)$  имеют место равенства  $p(I^+(v)) = I^+(b)$ ,  $p(I^-(v)) = I^-(b)$ ,  $p(J^+(v)) = J^+(b)$ ,  $p(J^-(v)) = J^-(b)$ .

Поверхность Коши  $S$  – это такое подмножество  $(E, g)$ , которое каждая непродолжаемая непространственноподобная кривая пересекает ровно в одной точке.

**Теорема.** Пусть  $G$  – компактная группа Ли,  $(B, h)$  – глобально гиперболическое лоренцево многообразие и  $S$  – его поверхность Коши. Тогда  $S^* = p^{-1}(S)$  – поверхность Коши глобально-гиперболического лоренцева многообразия  $(E, g)$ .

**Предложение 2.** В общей ситуации из глобальной гиперболичности расслоенного лоренцева многообразия  $(E, g)$  не следует глобальная гиперболичность его базы  $(B, h)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00312а).

## Литература

1. Яковлев Е.И. Двухточечные краевые задачи в релятивистской динамике // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59, № 3. – С. 437–449.

2. Яковлев Е.И. О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа // Алгебра и анализ. – 1997.– Т. 9, № 2. – С. 256–271.
3. Яковлев Е.И. Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 22. – С. 100–126.
4. Т.А. Гончар, Е.И. Яковлев О причинной структуре расслоенных лоренцевых многообразий // Материалы международной конференции "Современная геометрия и ее приложения 27 ноября-3 декабря 2017 г. – Казань: КФУ, 2017. – С. 41–43.

## ABOUT GLOBAL HYPERBOLICITY OF BUNDLED LORENTZIAN MANIFOLDS

T.A. Gonchar, E.I. Yakovlev

*Casual properties of Lorentzian metric given on the main fiber bundle and invariant referring to actions of a structural group are studied in the article.*

Keywords: principal bundle, G-connection, Lorentzian manifold, global hyperbolicity.

УДК 514.7

## О СТРУКТУРЕ ГРУППОИДА ГОЛОНОМИИ ПСЕВДОРИМАНОВА СЛОЕНИЯ

А.Ю. Долгоносова<sup>1</sup>, Н.И. Жукова<sup>2</sup>

- <sup>1</sup> *adolgonosova@hse.ru*; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”  
<sup>2</sup> *nzhukova@hse.ru*; Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

*Исследуется структура группоидов голономии псевдоримановых слоений произвольной коразмерности на  $n$ -мерных псевдоримановых многообразиях. Дано описание структуры слоев индуцированных слоений на группоидах голономии. Выявлена специфика группоидов голономии трансверсально полных псевдоримановых слоений.*

**Ключевые слова:** псевдориманово слоение, группоид голономии слоения, связность Эрисмана для слоения.

### 1. Введение

Работа посвящена исследованию группоидов голономии псевдоримановых слоений. Понятие группоида голономии слоения впервые появилось в работах Ш. Эресмана. Х. Винкелькемпер построил конструкцию, эквивалентную группоиду голономии слоения, и назвал ее графиком слоения. Он исследовал графики слоений с дифференциально-геометрической точки зрения.

Группоид голономии слоения содержит всю информацию о слоении и его группах голономии. Поведение слоев слоения  $(M, F)$  полностью описывается группоидом голономии  $G(F)$ . А. Конн определил  $C^*$ -алгебру комплекснозначных функций на группоиде голономии  $G(F)$ , что позволило применить к исследованию слоений некоммутативную геометрию [1].

Как известно, группоид голономии  $G(F)$  гладкого слоения  $(M, F)$  коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном гладком многообразии  $M$  является гладким  $(2n - q)$ -мерным многообразием, которое, вообще говоря, не хаусдорфово. Х. Винкелькемпер доказал эффективный критерий хаусдорфовости топологического пространства группоида  $G(F)$ .

Слоение  $(M, F)$  на псевдоримановом многообразии  $(M, g)$  называется *псевдоримановым*, если оно локально образовано слоями псевдоримановой субмерсии, т.е., если в каждой точке  $x \in M$  существует открытая координатная окрестность  $U$  и псевдориманова метрика  $h$  на многообразии слоев  $U/F_U$  такие, что факторотображение  $f : U \rightarrow U/F_U$  является псевдоримановой субмерсией  $(U, g|_U)$  на  $(U/F_U, h)$ . Подчеркнем, что из определения римановой субмерсии вытекает, что сужение метрики  $g$  на слоях псевдориманова слоения не вырождается. Следовательно, на каждом его слое индуцируется псевдориманова метрика.

В данной работе исследуются группоиды голономии псевдоримановых слоений. Псевдоримановы слоения включают в себя римановы и лоренцевы слоения и находят приложение в теоретической физике.

## 2. Теоремы о структуре группоидов псевдоримановых слоений

Следующая теорема доказана нами ([2]) без предположения полноты как псевдориманова многообразия  $(M, g)$ , так и слоения  $(M, F)$ . Компактность слоеного многообразия  $M$  также не предполагается.

**Теорема 1.** Пусть  $(M, F)$  — гладкое псевдориманово слоение коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном псевдоримановом многообразии  $(M, g)$ , где  $0 < q < n$ . Пусть  $G(F)$  — группоид голономии слоения  $(M, F)$  с каноническими проекциями  $p_i : G(F) \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда:

1. Группоид голономии  $G(F)$  слоения  $(M, F)$  является хаусдорфовым  $(2n - q)$ -мерным многообразием с индуцированным слоением  $(G(F), \mathbb{F})$ , где  $\mathbb{F} = \{\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) \mid L_\alpha \in F\}$ ,  $i = 1, 2$ .

2. Ростковые группы голономии  $\Gamma(L_\alpha)$  и  $\Gamma(\mathbb{L}_\alpha)$  слоев  $L_\alpha$  и  $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha)$  изоморфны.

3. На  $G(F)$  существует единственная псевдориманова метрика  $d$ , относительно которой  $(G(F), \mathbb{F})$  является псевдоримановым слоением, а канонические проекции  $p_i : G(F) \rightarrow M$ , являются псевдоримановыми субмерсиями, причем в точках пересечения слои субмерсий  $p_1$  и  $p_2$  ортогональны.

4. Для любого слоя  $L_\alpha$  определено регулярное покрывающее отображение  $k_\alpha : \mathcal{L}_\alpha \rightarrow L_\alpha$  с группой покрывающих преобразований, изоморфной группе голономии  $\Gamma(L_\alpha)$ , и на  $\mathcal{L}_\alpha$  индуцируется псевдориманова метрика. Слой  $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) \in \mathbb{F}$  является приводимым псевдоримановым многообразием, изометричным фактормногообразию  $(\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha) / \Psi_\alpha$  псевдориманова произведения  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha$  по группе изометрий  $\Psi_\alpha$ , изоморфной  $\Gamma(L_\alpha)$ .

Псевдориманова метрика  $d$  на группоиде голономии  $G(F)$ , удовлетворяющая Теореме 1, называется *индуцированной метрикой*.

Напомним, что  $G_\delta$ -подмножеством торологического пространства называется пересечение счетного семейства открытых всюду плотных подмножеств. Если  $(M, F)$  — слоение, то подмножество многообразия  $M$  называется  $F$ -насыщенным, если его можно представить в виде объединения некоторых слоев слоения.

**Определение 1.** Свойство слоения  $(M, F)$  называется *типичным*, если им обладают все слои некоторого  $G_\delta$ -подмножества  $M_0$  многообразия  $M$ .

Слой из  $M_0$  называется *типичным слоем* слоения.

Следующее утверждение указывает типичное свойство слоев индуцированного слоения на группоиде голономии.

**Следствие 1.** Существует всюду плотное  $\mathbb{F}$ -насыщенное  $G_\delta$ -подмножество в  $G(F)$ , каждый слой которого  $(\mathbb{L}_\alpha, d|_{\mathbb{L}_\alpha})$  изометричен псевдориманову произведению  $L_\alpha \times L_\alpha$  псевдоримановых многообразий  $(L_\alpha, g|_{L_\alpha})$ .

Заметим, что четвертое утверждение в Теореме 1 доказано без использования известной теоремы Ву о разложении полного односвязного невырожденно привердимого псевдориманова многообразия в произведение, поскольку полнота индуцированных метрик на слоях псевдориманова слоения нами не предполагается.

Р. А. Блюменталь и Дж. Дж. Хебда в [3] ввели понятие связности Эресмана для слоения  $(M, F)$  произвольной коразмерности  $q$  как гладкого  $q$ -мерного распределения  $\mathfrak{M}$ , трансверсального слоям, позволяющего переносить интегральные кривые этого распределения вдоль кусочно гладких путей в слоях. Эти авторы также ввели понятие группы  $\mathfrak{M}$ -голономии  $H_{\mathfrak{M}}(L)$  для любого слоя слоения  $(M, F)$  со связностью Эресмана  $\mathfrak{M}$ . Связность Эресмана существенно используется нами при доказательстве Теоремы 2.

Напомним, что псевдориманово слоение  $(M, F)$  называется *трансверсально полным*, если канонический параметр на каждой максимальной ортогональной слоям геодезической определен на всей действительной прямой.

Следующая теорема указывает специфические свойства трансверсально полных псевдоримановых слоений.

**Теорема 2.** Пусть  $(M, F)$  — трансверсально полное псевдориманово слоение на псевдоримановом многообразии  $(M, g)$ ,  $L_0$  — фиксированный слой с тривиальной группой голономии и  $d$  — индуцированная псевдориманова метрика на группоиде голономии  $G(F)$ . Тогда:

1. Индуцированное слоение  $(G(F), \mathbb{F})$  является трансверсально полным псевдоримановым слоением.
2. Ортогональные  $q$ -мерные распределения  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{N}$  являются связностями Эресмана для слоений  $(M, F)$  и  $(G(F), \mathbb{F})$  соответственно, причем для каждого слоя  $L_\alpha \in F$  и  $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha)$  группы голономии  $\Gamma(L_\alpha)$ ,  $H_{\mathfrak{M}}(L_\alpha)$ ,  $\Gamma(\mathbb{L}_\alpha)$  и  $H_{\mathfrak{N}}(\mathbb{L}_\alpha)$  изоморфны.
3. Канонические проекции  $p_i : G(F) \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$ , образуют локально тривиальные расслоения с одним и тем же стандартным слоем  $L_0$ .
4. Каждый слой  $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) \in \mathbb{F}$  является приводимым псевдоримановым многообразием, изометричным фактор-многообразию  $(L_0 \times L_0) \Psi_\alpha$  псевдориманова произведения  $L_0 \times L_0$  по группе изометрий  $\Psi_\alpha$ , изоморфной группе  $\Gamma(L_\alpha)$ .

**Следствие 2.** Если  $(M, F)$  — трансверсально полное псевдориманово слоение на псевдоримановом многообразии  $(M, g)$  и  $d$  — индуцированная псевдориманова метрика на группоиде голономии  $G(F)$ , то:

1. Существует псевдориманово многообразие  $L_0$  такое, что типичный слой слоения  $(M, F)$  имеет тривиальную ростковую группу голономии и изометричен  $L_0$ .
2. Типичный слой слоения  $(G(F), \mathbb{F})$  имеет тривиальную ростковую группу голономии и изометричен псевдориманову произведению  $L_0 \times L_0$ .

### 3. Группоиды надстроечных псевдоримановых слоений на замкнутых трехмерных многообразиях

В качестве приложения Теоремы 2 мы описываем структуру группоидов голономии некоторого класса одномерных слоений на замкнутых трехмерных многообразиях.

Как известно, существуют плоские лоренцевы метрики  $g_0$  на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ , группы изометрий  $\mathcal{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$  которых содержат ановский автоморфизм  $f_A$ , заданный гиперболической матрицей  $A$ . Указанные метрики охарактеризованы в [4]. Зафиксируем одну из таких метрик и зафиксируем ановский автоморфизм  $f_A \in \mathcal{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$ .

Пусть  $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \mathcal{I}so(\mathbb{R}^2, g)$  — гомоморфизм фундаментальной группы окружности  $\mathbb{S}^1$  в группу изометрий  $\mathcal{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$ , заданный на образующей  $a$  группы  $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ , изоморфной  $\mathbb{Z}$ , равенством  $\rho(a) := f_A$ . Тогда определено надстроечное слоение  $(M, F) := \text{Sus}(\mathbb{T}^2, \mathbb{S}^1, \rho)$  коразмерности два на замкнутом трехмерном многообразии  $M := \mathbb{T}^2 \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^1$ .

Обозначим через  $p : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  ассоциированное расслоение. При этом сужение  $p|_L : L \rightarrow \mathbb{S}^1$  — регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе голономии  $\Gamma(L)$  этого слоя. Требованием, чтобы это накрывающее отображение было римановым, мы наделяем каждый слой  $L$  слоения  $(M, F)$  локально евклидовой метрикой. Благодаря этому на  $M$  определена плоская лоренцева метрика  $g$ , относительно которой  $(M, F)$  — лоренцево слоение, ортогональное слоям субмерсии  $p$ . В силу компактности  $M$  и известного результата И. Карьера, эта метрика полная. Следовательно, лоренцево слоение  $(M, F)$  на  $(M, g)$  является трансверсально полным и к нему применимы Теорема 2 и Следствие 2.

Подчеркнем, что согласно Теореме 1 из [2] слои субмерсии  $p : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  образуют вполне геодезическое слоение на  $(M, g)$ .

Так как группа изометрий  $\mathcal{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$ , действует несобственно на торе  $\mathbb{T}^2$  [4], то  $(M, F)$  не является римановым слоением.

Группоид голономии  $G(F)$  слоения  $(M, F)$ , наделенный индуцированной метрикой  $d$ , представляет собой четырехмерное хаусдорфово лоренцево многообразие, на котором индуцировано слоение  $(G(F), \mathbb{F})$  коразмерности 2. Опишем структуру его слоев. Типичный слой  $L_0$  слоения  $(M, F)$  имеет тривиальную голономию и изометричен  $\mathbb{R}^1$ . Следовательно, согласно Следствию 2, типичный слой  $\mathbb{L}_0$  индуцированного слоения  $(G(F), \mathbb{F})$  изометричен риманову произведению  $\mathbb{L}_0 \cong L_0 \times L_0 \cong \mathbb{R}^2$  и имеет тривиальную группу голономии. Остальные слои  $L_\alpha$  слоения  $(M, F)$  диффеоморфны окружности  $\mathbb{S}^1$ , а их группа голономии изоморфна  $\mathbb{Z}$ . Более того, каждый слой  $\mathbb{L}_\alpha := p_1^{-1}(L_\alpha)$  слоения  $(G(F), \mathbb{F})$  с нетривиальной группой голономии диффеоморфен цилиндру  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

Отметим, что оба слоения  $(M, F)$  и  $(G(F), \mathbb{F})$  являются вполне геодезическими лоренцевыми слоениями на многообразиях  $(M, g)$  и  $(G(F), d)$ . Кроме того,  $M$  и  $G(F)$  представляют собой пространства Эйленберга-Маклейна типа  $K(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2)$ , т.е.  $\pi_n(M) = \pi_n(G(M)) = 0 \quad \forall n \geq 2$ ,  $\pi_1(M) = \pi_1(G(F)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ .

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00312) и ЦФИ НИУ ВШЭ в 2018 году (проект № 95).



## Литература

1. Connes A. *Noncommutative Geometry*. – Boston, MA: Academic Press, 1994. – 654 p.
2. Dolgonosova A.Yu., Zhukova N.I. *Pseudo-Riemannian foliations and their graphs* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, № 1. – P. 54–64.
3. Blumenthal R.A., Hebda J.J. *Ehresmann connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – Vol. 33, № 4. – P. 597–611.
4. Жукова Н.И., Рогожина Е.А. *Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий* // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 1292–1309.

### ON A STRUCTURE OF THE HOLONOMY GROUPOID OF PSEUDO-RIEMANNIAN FOLIATIONS

A.Yu. Dolgonosova, N.I. Zhukova

*We investigate the structure of the holonomy groupoids of pseudo-Riemannian foliations of arbitrary codimension on  $n$ -dimensional pseudo-Riemannian manifolds. The structure of leaves of induced foliations on the holonomy groupoids is described. Clarified specifics of the holonomy groupoids of transversally complete pseudo-Riemannian foliations.*

Keywords: pseudo-Riemannian foliation, holonomy groupoid of a foliation, Ehresmann connection of a foliation.

УДК 519.711.4

### ВЕСОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ПОЧТИ АФИННЫХ КОДОВ

К.А. Дьячков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ollkorrecat@gmail.com*; Северный (Арктический) федеральный университет, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем

*В статье обобщаются результаты, известные для линейных кодов, о формуле весового распределения на более широкий класс – почти афинные коды. Почти афинные коды, как и их частный случай в виде линейных кодов, могут использоваться в схемах определения и коррекции ошибок. Так как почти афинные коды обобщение линейных, то они позволяют реализовывать более эффективные алгоритмы кодирования и декодирования информации.*

**Ключевые слова:** почти афинные коды, весовое распределение, матроиды.

Для начала дадим определение почти афинного кода.

**Определение 1.** Для некоторого конечного алфавита  $F$  размерности  $q$  почти линейным кодом  $C \subseteq F^n$  называется такой код, что для любого  $X \subset \{1, \dots, n\} = E$  проекция  $C_X$  имеет мощность  $q^s$ , где  $s$  неотрицательное положительное целое число.

Кодовое слово имеет вес  $w$  если оно отличается от слова  $\bar{c}$  в  $w$  позициях.

**Определение 2.** Назовём  $A_{C,j}$  количество кодовых слов веса  $j$  из  $C$ , где  $0 \leq j \leq n$ .

**Определение 3.** Числовая последовательность  $\{A_{C,j}\}_{j=0}^n$  называется весовым распределением кода  $C$ .

**Определение 4.** Для фиксированного  $\bar{c}$  и  $U \subseteq E$  имеем  $S_U = \{\underline{w} \in C \mid \underline{w}|_U = \bar{c}|_U\}$ .

Известно, что  $|S_U| = q^{k-r(U)}$ , где  $r$  это ранк-функция матроида соответствующего данному почти афинному коду и  $r(E) = k$ .

Для начала найдём  $A_{C,n}$ :

$$A_{C,n} = |C| - \left| \bigcup_{i=1}^n S_i \right|$$

Мы знаем что  $|C| = q^k$ , для второго слагаемого используем формулу включений-исключений и получим

$$A_{C,n} = q^k - \sum_{i=1}^n |S_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |S_i \cap S_j \cap S_k| + \dots + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n|.$$

Для  $U \subseteq E$  и  $U \neq \emptyset$  имеем:

$$S_U = \bigcap_{u \in U} S_u.$$

Для  $U = \emptyset$  определим  $S_\emptyset = C$ , получим

$$\begin{aligned} A_{C,n} &= \sum_{|U|=0} |S_U| - \sum_{|U|=1} |S_U| + \sum_{|U|=2} |S_U| - \sum_{|U|=3} |S_U| + \dots + (-1)^n \sum_{|U|=n} |S_U| = \\ &= \sum_{U \subseteq E} (-1)^{|U|} \cdot |S_U| = \sum_{U \subseteq E} (-1)^{|U|} \cdot q^{k-r(U)}. \end{aligned}$$

Также отметим, что  $k - r(U) = r(E) - r(U) = |E - U| - r^*(E - U) = n^*(E - U)$ , и формула принимает конечный вид:

$$A_{C,n} = \sum_{U \subseteq E} (-1)^{|U|} \cdot q^{n^*(E-U)} = (-1)^n \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \cdot q^{n^*(X)}. \quad (1)$$

Для нахождения  $A_{C,j}$  при  $j < n$  мы рассмотрим почти афинный код  $C_1$ , являющийся проекцией искомого на  $X \subset E$ . Этот код имеет свой матроид  $M_1 = (X, r_1)$  и его двойственную нулиту функцию  $n_1^*$ . Пусть  $a_{C,X} = |\{\underline{w} \in C \mid \text{Supp}(\underline{w}) = X\}|$ , но для построенного кода  $C_1$   $X$  совпадает с  $E$ , тогда применим (1), получим

$$a_{C,X} = (-1)^{|X|} \sum_{U \subseteq X} (-1)^{|U|} \cdot q^{k-r(E-X)-r_1(U)} = (-1)^{|X|} \sum_{U \subseteq X} (-1)^{|U|} \cdot q^{n_1^*(U)}$$

**Лемма.** Для  $U \subseteq X \subseteq E$  имеем  $n_1^*(U) = n^*(U)$  (Доказательство см. в [3], лемма 134).

Применяя данную лемму и суммируя по всем  $|X| = m$ , получим финальную формулу распределения весов для почти афинного кода  $C$ :

$$A_{C,m} = (-1)^m \cdot \sum_{|X|=m} \sum_{U \subseteq X} (-1)^{|U|} \cdot q^{n^*(U)}, \quad 1 \leq m \leq n$$

## Литература

1. Simonis J., Ashikhmin A. *Almost Affine Codes* // Des. Codes Cryptogr. – 1998. – V. 14. – P. 179–197.
2. Johnsen T., Verdure H. *Generalized Hamming weights for almost affine codes* // IEEE Transactions on Information Theory. – 2017. – V. 63, № 4. – P. 1941–1953.
3. Diachkov K. *Almost Affine Codes and Matroids*. – Master's thesis, University of Tromsø, 2017.
4. Johnsen T., Roksvold J.N., Verdure H. *A generalization of weight polynomials to matroids* // Discrete Mathematics, arXiv 1311.6291. – 2016. – V. 339, № 2.

### WEIGHT DISTRIBUTION FOR ALMOST AFFINE CODES

К.А. Diachkov

*In this paper we generalize well known weight distribution formula for linear codes to larger class of codes such as almost affine codes. Almost affine codes can be used in error correcting schemes as well as linear codes. Since linear codes is special case of almost affine codes the second ones can be used for developing more efficient algorithms of coding and decoding.*

Keywords: almost affine codes, weight distribution, matroids.

УДК 372.851

### ВЛИЯНИЕ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA НА УРОВЕНЬ РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ

А.Э. Дюпина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [anastasiya.dupina@yandex.ru](mailto:anastasiya.dupina@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье представлен подход к обучению студентов курсу элементарной планиметрии с использованием программы GeoGebra для повышения уровня геометрического мышления. Методической основой для разработки подходов использования программы GeoGebra стала теория уровней геометрического мышления ван Хиле, в соответствии с которой были организованы занятия. Эффективность применения программы в развитии геометрического мышления студентов доказывается полученными экспериментальными данными.*

**Ключевые слова:** геометрическое мышление, планиметрия, подготовка будущих учителей, GeoGebra.

Геометрия является важной отраслью научного знания и показывает учащимся как математика находит свое применение в реальной жизни. Несмотря на тесную взаимосвязь предмета с жизненным опытом, учащиеся испытывают большие трудности при решении геометрических задач. В связи с этим возникает потребность повышения качества геометрического образования на всех этапах обучения. Геометрическое мышление является одним из компонентов математического образования, поэтому повышение его качества напрямую связано с развитием этого вида мышления.

Наиболее известными теориями, описывающими геометрическое мышление, являются теория стадий Пиаже и модель ван Хиле. Теория Пиаже связывает раз-

витие геометрического мышления с возрастными особенностями ребенка, опираясь на детскую психологию. В основе лежит идея о том, что мысленное восприятие детьми пространства отличается от восприятия того, что находится вокруг них [1]. Согласно Пиаже [8,9], ребенок начинает мыслить топологически, постепенно двигаясь к евклидовой геометрии, что противоречит историческому пути развития науки, которая прошла путь от евклидовой геометрии к топологии. Модель ван Хиле описывает непосредственно стадии обучения геометрии, поэтому данная модель была взята за основу исследования.

Согласно теории ван Хиле, геометрическое мышление можно измерить. Ученными были выделены пять уровней геометрического мышления, которые имеют строгую иерархию и способны прогнозировать успеваемость в геометрии: визуальный, аналитический, неформальная дедукция (или абстрактный), дедуктивный и строгий.

1 уровень – визуальный – учащиеся способны называть объект, распознают фигуры только по внешнему виду, часто сопоставляя их с уже известными, свойства фигур не воспринимаются. Школьники принимают решение на основе восприятия, а не рассуждения.

2 уровень – аналитический – учащиеся рассматривают фигуры как объекты, обладающие определенным набором свойств, способны распознавать и называть свойства геометрических фигур, но они не выявляют связи между этими свойствами. При описании объектов учащиеся могут перечислять известные им все свойства, однако не осознают, какие свойства являются необходимыми и (или) достаточными для описания объекта.

3 уровень – неформальная дедукция (абстрактный) – учащиеся понимают отношения между фигурами и их свойствами, могут формулировать определения фигур, а также аргументировать свои рассуждения. Устанавливают логические связи и осознают принадлежность конкретной фигуры к какому-либо классу (квадрат – это тип прямоугольника). Однако они не понимают роль и значение формальной дедукции.

4 уровень – дедуктивный – учащиеся могут проводить доказательство, понимают роль аксиом и определений, осознают важность необходимых и достаточных условий, способны проводить доказательства самостоятельно, подобно тем, что представлены в школьных учебниках геометрии.

5 уровень – строгий – учащиеся способны сравнивать различные системы аксиом, формулировать теоремы и проводить доказательства, мышление не привязано к реальным объектам и образам, оно абстрактно.

Стоит отметить, что уровни не являются дискретными по своей природе, поэтому наслаиваются друг на друга. Например, второй уровень геометрического мышления неразрывно связан со свойствами объектов первого уровня, который выступает в роли базиса. Затем отношения между свойствами составляют основу третьего уровня и так далее. Этим объясняется иерархичность построения уровней. Позже в исследованиях Клемента и Батиста [3, 1992, С. 429] был предложен еще один уровень – уровень предварительного распознавания или базовый уровень, находясь на котором дети не могут распознавать многие формы, объекты должны быть конкретными, видимыми и осязаемыми.

Пьер и Дина ван Хиле считают, что развитие геометрического мышления может быть ускорено с помощью специальных инструкций (алгоритмов) [10]. В исследованиях Фрихольма [4, 1994] сделан вывод о том, что ни гендерный признак, ни класс, ни отметки не имеют прямого отношения к уровню ван Хиле [6, С. 21]. Кроме того, Фьюиз [5] обнаружил, что уровень геометрического мышления больше зависит от самой инструкции к заданию, а не от возраста. Это важный вывод, доказывающий эффективность применения инструкций. Эксперимент, проведенный с семиклассниками в Бразилии, показал, что экспериментальная группа превзошла контрольную в вопросах, требующих аргументации и обоснования ответа [7, 1995], что подтверждает эффективность обучения в соответствии с теорией уровней ван Хиле. Нассер подчеркнул необходимость преодоления разрыва между тактильными ощущениями в преподавании геометрии в начальной школе и формальными вычислениями в средней и старшей школе [6, С. 21].

Учителю необходимо организовать деятельность учащихся таким образом, чтобы исследование геометрических объектов и их свойств предшествовало логическому мышлению. Обсуждение идей, попытка убедить остальных в правильности мышления поможет учащимся развить язык, необходимый для освоения уровней. Использование программного продукта GeoGebra в качестве инструмента обучения может помочь обучающимся укрепить знания на одном уровне и перейти к следующему, а также предоставит студентам среду для проведения исследования.

В рамках проводимого исследования «Использование программы GeoGebra для повышения уровня геометрического мышления студентов педагогического отделения» [2] для подготовки будущих учителей по планиметрии со студентами Педагогического отделения второго курса Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ проводятся занятия в соответствии с теорией уровней геометрического мышления ван Хиле с использованием программы GeoGebra.

На занятиях при решении задач учащиеся неоднократно проходили через все уровни ГМ, начиная с построения чертежа в программе GeoGebra (визуальный уровень) и заканчивая формулированием и доказательством выдвинутых гипотез (дедуктивный и строгий уровни). Кроме того, в конце первого семестра (27.12.2017г.) студенты были протестированы по методике ван Хиле. В тестировании приняли участие 32 студента из них: на уровне 2 находились 7 студентов, на 3 уровне – 15 студентов, на 4 уровне – 5 студентов, пятый уровень освоили 5 студентов. Стоит отметить, что на момент тестирования студенты уже в течении семестра обучались с использованием программы GeoGebra, однако ни один студент не справился с тестом на 100%.

Об эффективности применения программы GeoGebra на занятиях в соответствии с теорией ван Хиле свидетельствуют результаты контрольных тестов (2 попытки, вопросы не дублировались), которые учащиеся проходили до и после работы с программой по каждой теме курса: всего 9 тестов по 10 баллов за каждый. Полученные данные свидетельствуют о том, что количество правильных ответов не только не уменьшилось (значит варианты ответа выбирались осознанно), но и повысилось для большинства студентов. Студенты с низкими результатами по тесту ван Хиле (менее 50% правильных ответов) имеют положительную динамику по 9 тестам планиметрии, средний балл студентов по всем тестам составил 6,45 из 10.

Наибольший разрыв между первой и второй попытками тестов составил +4 балла, что свидетельствует о более глубоком понимании материала, изученного с применением компьютерного эксперимента и доказывает его эффективность.

## Литература

1. Боровских А.В., Рейхани Э., Розов Н.Х. *Развитие геометрического мышления школьников* // [Электронный ресурс]: Режим доступа: [fpo.msu.ru/open\\_files/borovskikh/razv\\_geom\\_mish.doc](http://fpo.msu.ru/open_files/borovskikh/razv_geom_mish.doc)
2. Фалилеева М.В., Дюпина А.Э. *Обучение курсу «Элементарная математика» с использованием программы GeoGebra* // В сборнике: Преподавание математики и компьютерных наук в высшей школе. Материалы международной научно-методической конференции. Научный редактор Е.К. Хеннер. – 2017. – С. 88-92. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29943037>
3. Clements D.H., Battista M.T. (1992). *Geometry and spatial reasoning* / In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. – New York: MacMillan, 1992. – P. 420-464.
4. Frykholm J.A. *The significance of external variables as predictors of van Hiele levels in algebra and geometry students*. – Madison: University of Wisconsin-Madison, 1994. – ERIC Document Reproduction Service No. ED 372 924.
5. Fuys D., Geddes D., Tischler R. *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* // *Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3*. – Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
6. July Raquel Andrea *Thinking in three dimensions: Exploring students' geometric thinking and spatial ability with the Geometer's Sketchpad*. – ProQuest ETD Collection for FIU. AAI3018479, 2001. <http://digitalcommons.fiu.edu/dissertations/AAI3018479>
7. Nasser L. (1995). *Long term effects of a geometry course based on the van Hiele theory* // L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the annual conference of the international group for the psychology of mathematics education (19th. Recife Brazil. July 22-27')*. – 1995. – Vol 1. – P. 213.
8. Piaget J., Inhelder B. *The Childs Conception of Space*. – New York: Norton, 1967.
9. Piaget J., Inhelder B., Szeminski A. *The Childs Conception of Geometry*. – London: Routledge & Kegan Paul, 1960.
10. Pierre M. van Hiele. *Structure and insight: a theory of mathematics education*. – Academic Press, 1986. – 246 p.

## THE EFFECTS OF GEOGEBRA ON DEVELOPMENT OF STUDENTS' GEOMETRIC THINKING

A.E. Dyupina

*The article presents an approach to teaching students the course of elementary planimetry using the GeoGebra program to increase the level of geometric thinking. The theory of geometric thinking levels by van Hiele, in accordance with which the classes were organized, became the methodological basis for developing approaches to using the GeoGebra program. The effectiveness of the application of the program in the development of students' geometric thinking is proved by the obtained experimental data.*

Keywords: geometric thinking, plane geometry, training future teacher, GeoGebra.

УДК 517.537

## КРИТЕРИЙ СОВМЕСТИМОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

А.Е. Егорова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> anegorova94@bk.ru; Башкирский государственный университет

*В данной работе вводится понятие совместимости комплексной последовательности с ограниченной выпуклой областью и формулируется критерий совместимости, выраженный в терминах геометрических характеристик. Полученный результат может быть использован для упрощения задачи о базисе в инвариантном подпространстве, являющейся непосредственным продолжением проблемы фундаментального принципа Эйлера.*

**Ключевые слова:** комплексная последовательность, ограниченная выпуклая область, совместимость, базис, инвариантное подпространство.

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — выпуклая область,  $H(D)$  — пространство функций, аналитических в  $D$ , с топологией равномерной сходимости на компактах, и  $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$  — последовательность комплексных чисел  $\lambda_k$  и их кратностей  $n_k$  такая, что система  $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$ ,  $k \geq 1$ ,  $n = 0, \dots, n_k - 1$ , не полна в  $H(D)$ . Без ограничения общности будем считать, что точки  $\lambda_k$  упорядочены по возрастанию модулей. Через  $W(\Lambda, D)$  обозначим замыкание в  $H(D)$  линейной оболочки системы  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Тогда  $W(\Lambda, D)$  — нетривиальное замкнутое подпространство в  $H(D)$ , инвариантное относительно оператора дифференцирования ( $\Lambda$  — его кратный спектр, а  $\mathcal{E}(\Lambda)$  — совокупность собственных и присоединенных функций в  $W(\Lambda, D)$ ). По построению  $\mathcal{E}(\Lambda)$  полна в  $W(\Lambda, D)$ . В этом случае  $W(\Lambda, D)$  допускает спектральный синтез.

Каждая функция  $g \in W(\Lambda, D)$  есть предел последовательности линейных комбинаций элементов  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Возникает задача представления  $g$  в виде ряда по элементам системы  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Первым результатом в данном направлении является фундаментальный принцип Эйлера, согласно которому каждое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является линейной комбинацией элементарных решений из  $\mathcal{E}(\Lambda)$ . Исходя из этого, задача представления функций из  $W(\Lambda, D)$  рядом

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z). \quad (1)$$

есть проблема фундаментального принципа в инвариантном подпространстве. Известно [4] решение проблемы фундаментального принципа (и двойственной к ней задачи интерполяции) для произвольной выпуклой области  $D \subset \mathbb{C}$  при одном ограничении:  $n_k/|\lambda_k| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . В случае ограниченной области это ограничение можно снять. Так, в работе [2] получен критерий фундаментального принципа для  $W(\Lambda, D)$  в ограниченной выпуклой области  $D$ . Он состоит из двух условий: точки  $\Lambda$  должны быть в некотором смысле «отделены» друг от друга (более точно,  $S_\Lambda = 0$ , где  $S_\Lambda$  — специальным образом построенный индекс конденсации), а также  $\Lambda$  должна быть частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа и регулярного роста, сопряжённая диаграмма которой совпадает с замыканием  $D$ .

В случае, если  $S_\Lambda \neq 0$ , иногда удается получить представление элементов  $W(\Lambda, D)$  в виде ряда (1) «со скобками»:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z) \right).$$

Так возникла задача о базисе в инвариантном подпространстве, которая формулируется следующим образом: при каких условиях можно осуществить разбиение  $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$  последовательности  $\Lambda$  на группы  $U_m$  и выбрать внутри этих групп фиксированные линейные комбинации  $e_{m,j}$ ,  $j = \overline{1, N_m}$ , элементов  $\mathcal{E}(\Lambda)$  так, что семейство экспоненциальных многочленов  $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}\}_{m,j=1}^{\infty, N_m}$  становится базисом в  $W(\Lambda, D)$ ? Если указанный базис существует, то возникает еще целый ряд вопросов. Как осуществить разбиение  $U$  и можно ли описать все подходящие разбиения? Как составлять линейные комбинации внутри группы и можно ли описать все подходящие комбинации? Насколько малым можно сделать диаметр групп  $U_m$ ? Как описать пространство коэффициентов рядов по системе  $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ ? Статья [3] содержит исторический обзор исследований по проблеме базиса, а также критерий его существования в подпространстве  $W(\Lambda, D)$ , построенным по разбиению  $U$  на «относительно малые» группы  $U_m$ .

Этот критерий состоит из одного условия: совместимость последовательности  $\Lambda$  с областью  $D$ . Следовательно, для решения проблем фундаментального принципа и базиса в инвариантном подпространстве необходимо найти условия совместимости  $\Lambda$  и  $D$ . Именно этому посвящена данная работа. Критерий совместимости  $\Lambda$  с ограниченной выпуклой областью  $D$  формулируется исключительно в терминах геометрических характеристик  $\Lambda$  и  $D$ .

Введём необходимые понятия и обозначения.

Символом  $n(r, \Lambda)$  обозначим число точек  $\lambda_k$  с учетом кратностей, попавших в открытый круг  $B(0, r)$ . Пусть  $\bar{n}(\Lambda)$ ,  $\underline{n}(\Lambda)$  и  $n^0(\Lambda)$  обозначают соответственно верхнюю, нижнюю и максимальную плотность последовательности  $\Lambda$ , т.е.

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}, \quad \underline{n}(\Lambda) = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r},$$

$$n^0(\Lambda) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda) - n((1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

Последовательность  $\Lambda$  имеет плотность  $n(\Lambda)$ , если  $\bar{n}(\Lambda) = \underline{n}(\Lambda) = n(\Lambda)$ . Легко видеть, что в этом случае  $n^0(\Lambda) = n(\Lambda)$ .

Символом  $n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)$  обозначим число точек  $\lambda_k$  с учетом их кратностей, попавших в сектор  $\{\lambda = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t \in (0, r)\}$ .

Говорят, что последовательность  $\Lambda$  имеет угловую плотность, если для всех  $\varphi_1, \varphi_2$ , за исключением, быть может, не более чем счётного множества значений, существует предел

$$n(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)}{r},$$

при  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ .



Положим

$$n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda) - n(\varphi_1, \varphi_2, (1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

Последовательность  $\tilde{\Lambda} = \{\mu_m, s_m\}_{m=1}^{\infty}$  является пополнением  $\Lambda$ , если существуют натуральные числа  $m(k): \mu_{m(k)} = \lambda_k$  и  $n_k \leq s_{m(k)}, k \geq 1$ .

Множество  $\Lambda$  называется правильно распределенным, если оно имеет угловую плотность и выполнено условие Линделёфа, т. е. существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Пусть  $K$  — выпуклый компакт и  $z_1, z_2$  — точки его границы  $\partial K$ . Через  $s(z_1, z_2, K)$  обозначим ориентированную длину дуги  $\partial K$ , соединяющей  $z_1$  и  $z_2$ . Причем за положительное направление примем обход по часовой стрелки. Для  $\varphi \in \mathbb{R}$  пересечение  $\Gamma(\varphi)$  опорной прямой  $l(\varphi) = \{z : Re(ze^{i\varphi}) = H_K(e^{i\varphi})\}$  и границы  $\partial K$  является либо точкой  $z(\varphi)$  либо отрезком. Множество  $\varphi(K)$  направлений  $\varphi$ , для которых  $\Gamma(\varphi)$  — отрезок, не более чем счетно. Положим

$$S_K(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{z_1 \in \Gamma(\varphi_1), z_2 \in \Gamma(\varphi_2)} s(z_1, z_2, K).$$

Если  $\varphi_1, \varphi_2 \notin \varphi(K)$ , то  $S_K(\varphi_1, \varphi_2) = s(z(\varphi_1), z(\varphi_2), K)$ .

Последовательность  $\Lambda$  назовём совместимой с ограниченной выпуклой областью  $D$ , если она является частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа и регулярного роста, сопряжённая диаграмма которой совпадает с  $\bar{D}$ .

**Теорема.** Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$  и  $K$  — выпуклый компакт. Тогда эквивалентны утверждения:

1. существует  $\gamma > 0$  такое, что для всех  $\varphi_1, \varphi_2 \notin \varphi(K)$  с условием  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$  выполнено неравенство  $n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) \leq S_K(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi$ ;
2. существует пополнение  $\tilde{\Lambda}$  последовательности  $\Lambda$ , которое является правильно распределенным множеством, причём

$$n^0(\varphi_1, \varphi_2, \tilde{\Lambda}) = S_K(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi.$$

**Следствие.** Следующие утверждения равносильны:

1. существует  $\gamma > 0$  такое, что для всех  $\varphi_1, \varphi_2 \notin \varphi(K)$  с условием  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$  выполнено неравенство  $n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) \leq S_{\bar{D}}(\varphi_1, \varphi_2)/2\pi$ .
2.  $\Lambda$  совместима с  $D$ ;

## Литература

1. Кривошеева О. А., Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99. – № 5. – С. 684–697.

2. Кривошеева О. А. *Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анализ и его прил. – 2012. – Т. 46. – № 4. – С. 14–30.
3. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. сб. – 2013. – Т. 204. – № 12. – С. 49–104.
4. Кривошеев А. С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2004. – Т. 68. – № 2. – С. 71–136.
5. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
6. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
7. Pólya G. *Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Virichletsher Reihen* // Sitzungber. Preub. Akad. Wiss. – 1923. – P. 45-50.

CRITERION FOR COMPATIBILITY OF SEQUENCE OF COMPLEX NUMBERS  
AND BOUNDED CONVEX DOMAIN

A.E. Egorova

*In this paper we introduce compatibility of bounded convex domain and sequence of complex numbers. Then we formulate a criterion of such compatibility in terms of geometric characteristics of the domain and the sequence. This result may be used to simplify the problem of basis in invariant subspace.*

Keywords: complex sequence, convex bounded domain, compatibility, base, invariant subspace.

УДК 519.7; 512.581

**АНАЛОГ ПРОТОКОЛА ANSHEL-ANSHEL-GOLDFELD НА ПЛАТФОРМЕ 2-ГРУПП**

К.И. Емельянов<sup>1</sup>

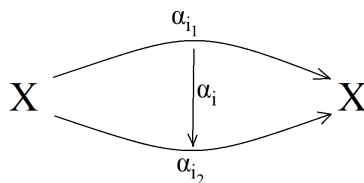
<sup>1</sup> kirillemelyanov11041995@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Описан аналог протокола формирования общего секретного ключа Anshel-Anshel-Goldfeld на алгебраической платформе 2-групп.*

**Ключевые слова:** криптография, протокол Аншель-Аншель-Голдфелд, 2-группа.

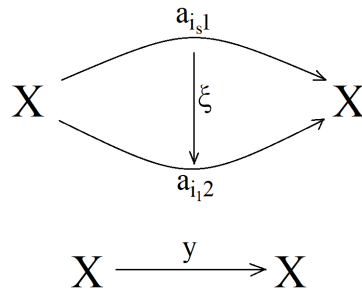
Данная работа продолжает заметку [1] (см. также [2]). Сохраняются введенные в [1] обозначения и соглашения. Мы переносим идею работы [3] на случай алгебраической платформы 2-групп [4].

Дана 2-группа  $\mathfrak{G}$  (открытая), в ней семейство 2-морфизмов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  вида

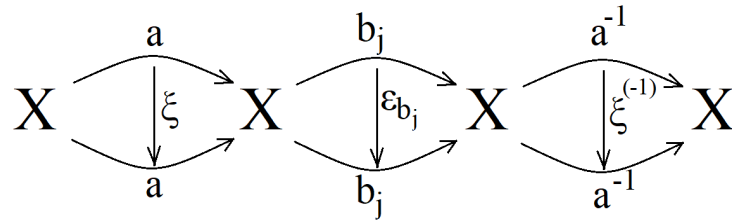


и семейство 1-морфизмов  $b_1, \dots, b_l : b_l X \rightarrow X$ . Всё открыто.

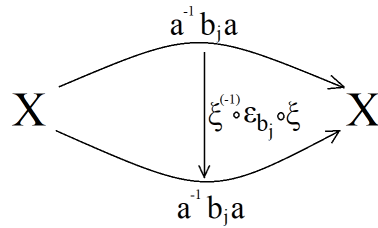
1. Алиса некоторым образом формирует композицию (вертикальную)  $\xi = \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_s}$ . Для простоты пусть  $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = a$ .



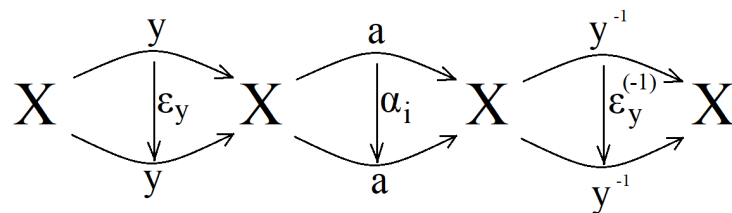
- 2. Боб некоторым случайным образом формирует композицию:  $y = b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_l}$
- 3. Алиса вычисляет  $\xi \circ \varepsilon_{b_j} \circ \xi^{(-1)}$ ,  $1 \leq j \leq l$ , и посылает эти 2-морфизмы Бобу



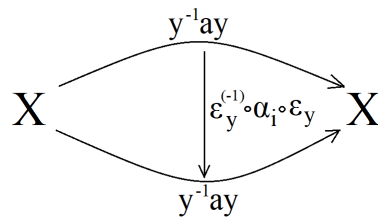
Результат:



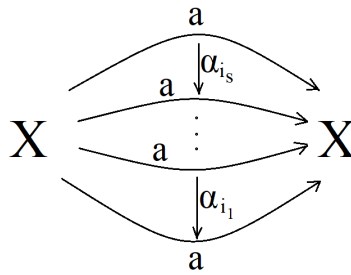
- 4. Боб вычисляет  $\varepsilon_y \circ \alpha_i \circ \varepsilon_y^{(-1)}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , и посылает эти 2-морфизмы Алисе



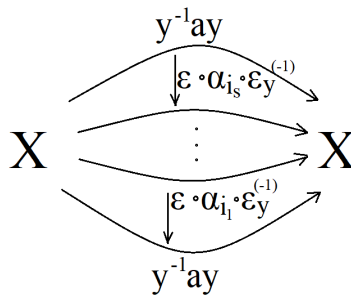
Результат:



- 5. Алиса заменяет в  $\xi$  все  $\alpha_i$  на  $\varepsilon_y \circ \alpha_i \circ \varepsilon_y^{(-1)}$ .
- Исходный  $\xi$ :



Фактически важна секретная последовательность номеров  $i_1, i_2, \dots, i_s$ .  
 В этой же последовательности компонуются  $\varepsilon_y \circ \alpha_i \circ \varepsilon_y^{(-1)}$  вертикально.



$$(\varepsilon_y \circ \alpha_{i_1} \circ \varepsilon_y^{(-1)}) \cdot (\varepsilon_y \circ \alpha_{i_2} \circ \varepsilon_y^{(-1)}) \cdot \dots \cdot (\varepsilon_y \circ \alpha_{i_s} \circ \varepsilon_y^{(-1)}) = \varepsilon_y \circ (\alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_s}) \circ \varepsilon_y^{(-1)} = \varepsilon_y \circ \xi \circ \varepsilon_y^{(-1)}$$

6. У Боба есть  $y = b_{j_1} b_{j_2} b_{j_t}$ . Здесь тоже важная секретная последовательность номеров  $j_1, j_2, \dots, j_t$ .

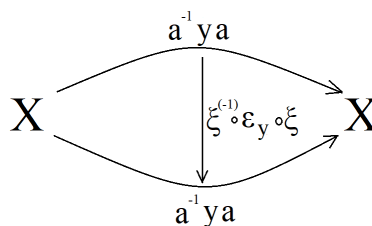
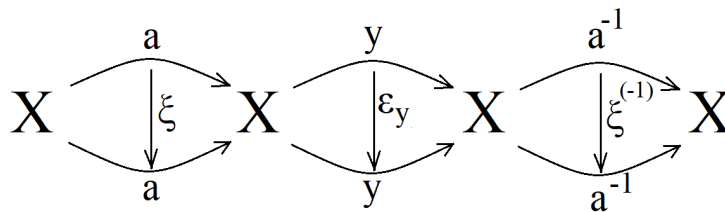
В соответствии с этой последовательностью Боб образует:

$$(\xi \circ \varepsilon_{b_{j_1}} \circ \xi^{(-1)}) \circ (\xi \circ \varepsilon_{b_{j_2}} \circ \xi^{(-1)}) \circ \dots \circ (\xi \circ \varepsilon_{b_{j_t}} \circ \xi^{(-1)}) = \xi \circ (\varepsilon_{b_{j_1}} \circ \dots \circ \varepsilon_{b_{j_t}}) \circ \xi^{(-1)}$$

На стыках  $\xi^{(-1)} \circ \xi = \varepsilon$  – горизонтальная единица.

$$\varepsilon_{b_{j_1}} \circ \dots \circ \varepsilon_{b_{j_t}} = \varepsilon_{b_{j_1} \dots b_{j_t}} = \varepsilon_y$$

Результат:  $\xi \circ \varepsilon_y \circ \xi^{(-1)}$



Итак, у Алисы есть  $\varepsilon_y \circ \xi \circ \varepsilon_y^{(-1)}$  и Алиса знает  $\xi$ .

У Боба есть  $\xi \circ \varepsilon_y \circ \xi^{(-1)}$  и Боб знает  $y$ , а, значит, и  $\varepsilon_y$ .

7. Алиса вычисляет  $(\varepsilon_y \circ \xi \circ \varepsilon_y^{(-1)}) \circ \xi^{(-1)} = \varepsilon_y \circ \xi \circ \varepsilon_y^{(-1)} \circ \xi^{(-1)}$

8. Боб вычисляет  $(\xi \circ \varepsilon_y \circ \xi^{(-1)}) \circ \varepsilon_y^{(-1)} = \xi \circ \varepsilon_y \circ \xi^{(-1)} \circ \varepsilon_y^{(-1)}$

Теперь Боб должен вычислить обратный элемент относительно горизонтальной композиции:

$$(\xi \circ \varepsilon_y \circ \xi^{(-1)})^{(-1)} = \varepsilon_y \circ \xi \circ \varepsilon_y^{(-1)} \circ \xi^{(-1)}$$

Таким образом, получаем общий секретный ключ  $\varepsilon_y \circ \xi \circ \varepsilon_y^{(-1)} \circ \xi^{(-1)}$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{yay^{-1}a^{-1}} & \\ \mathbf{X} & \begin{array}{c} \downarrow \varepsilon_y \circ \xi \circ \varepsilon_y^{(-1)} \circ \xi^{(-1)} \\ \downarrow \end{array} & \mathbf{X} \\ & \xleftarrow{yay^{-1}a^{-1}} & \end{array}$$

Здесь  $a$  — открытый 1-морфизм,  $y$  — секретный морфизм (знает Боб),  $yay^{-1}a^{-1}$  знают Алиса и Боб.

## Литература

1. Емельянов К. И. *О маскировке алгебраических платформ в криптографии с открытым ключом* – Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т.55. Лобачевские чтения – 2017: материалы Шестнадцатой молодежной научной школы-конференции (Казань, 24- 29 ноября 2017 г.). – Казань: Из-во Казан. ун-та, 2017 – с. 46-49.
2. Емельянов К. И. *О некоторых криптографических протоколах, конструируемых с использованием техники 2-категорий*. – Магистерская диссертация, 2018. – 33 с.  
[https://kpfu.ru/student\\_diplom/10.160.178.20\\_2608223\\_0\\_nekotoryh\\_kriptograficheskikh\\_protokolah\\_konstruiruemyh\\_s\\_ispolzovaniem\\_tehniki\\_2\\_kategorij.pdf](https://kpfu.ru/student_diplom/10.160.178.20_2608223_0_nekotoryh_kriptograficheskikh_protokolah_konstruiruemyh_s_ispolzovaniem_tehniki_2_kategorij.pdf)
3. Anshel I. Anshel M. Goldfeld D. *An algebraic method for public-key cryptography* // Math. Res. Lett. – 1999. – V. 6. – P. 287–291.
4. Baez J.C., Dolan J. *n-categories and Algebra of Opetopes* // Advances in Mathematics. – 1998. – V. 135, P. 145-206.

ANALOGUE OF THE PROTOCOL ANSHEL-ANSHEL-GOLDFELD ON THE 2-GROUP PLATFORM

K.I. Emelyanov

*We described the key exchange protocol Anshel-Anshel-Goldfeld on the algebraic platform of 2-groups.*

Keywords: cryptography, protocol Anshel-Anshel-Goldfeld, 2-group.

УДК 51.7

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФУТБОЛЕ**В.А. Ерушкин<sup>1</sup><sup>1</sup> *erushkin.vlad@mail.ru*; Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского

*В работе ставится задача применения математического моделирования в футболе, а именно провести сравнение шансов команд и определение результата матча между ними. Работа включает в себя выбор статистических параметров, разработку программы, реализованной на языке C-Sharp в среде Visual Studio. Проведены расчёты рейтинга команд, определения исходов футбольных матчей.*

**Ключевые слова:** вычисление рейтинга, стимуляторы, дестимуляторы, статистические модели.

В данной работе рассмотрена и решена задача прогнозирования результата футбольного матча на основе метода взвешенной суммы (МВС) показателей. Математика стандартного варианта метода взвешенных сумм довольно интересна. Оценка альтернативы (в МВС они обычно называются объектами) на данном уровне – линейная «свёртка» оценок объекта. Это скалярное произведение вектора весов критериев на вектор оценок альтернатив. Оценка имеет вид:

$$U = \sum_{i=1}^N W_i \cdot X_i \quad (1)$$

где  $W_i$  – вес (важность)  $i$ -го критерия, назначаемый лицом, принимающим решение;  $X_i$  – оценка альтернативы по  $i$ -му критерию. В других вариантах МВС используются различные формулы нелинейных свёрток. Сумма весов критериев в методе взвешенной суммы должна быть нормирована:

$$\sum_{i=1}^N W_i = 1 \quad (2)$$

Весы могут определяться по статистике или экспертными методами.

Метод взвешенных сумм – давно известный и активно применяемый метод. Широкая его распространенность вызвана целым рядом причин. Одни из них обусловлены привлекательными достоинствами МВС: метод представляется понятным, он удобен для расчетов, он применим для решения задач принятия решений в разных постановках: выбрать один наилучший или несколько лучших вариантов, упорядочить и все варианты по предпочтительности, и т.п.

В последнее время спорт привлекает все большее количество людей, аккумулирует значительные финансовые, материальные и интеллектуальные ресурсы и постепенно превращается в важный элемент экономики. Прогнозирование результатов спортивных соревнований само по себе является значимой задачей, составляющей основу букмекерского бизнеса. Помимо этого, данная задача может служить хорошим полигоном для тестирования различных способов прогнозирования результатов процессов в условиях ограниченного статистического материала при большом количестве влияющих факторов, некоторые из которых заранее неизвестны.

Построим модель, в которой приводится рейтинговая оценка двух футбольных клубов, принимающих участие в матче, используя метод взвешенных сумм.

Этапы выполнения работы:

1. Выбор показателей, формирующих рейтинг футбольной команды
2. Анализ показателей:
  - Выделение стимуляторов/дестимуляторов;
  - Формирование весовых коэффициентов;
3. Построение математической модели:
  - Приведение показателей к сопоставимому виду;
  - Расчет интегрального показателя рейтинга команд;
4. Формирование лингвистической интервальной шкалы.
5. Оценка точности модели (итеративный этап):
  - Подготовка статистических данных;
  - Расчет показателей точности модели;
6. Формирование выводов о целесообразности применения модели на практике.

Итак, в первую очередь перед нами ставится задача выбора показателей, формирующих рейтинг футбольной команды. Мы остановили свой выбор на следующих параметрах: количество набранных очков, количество забитых мячей, количество ударов по воротам, количество точных ударов в створ, количество передач, количество точных передач, выиграно угловых, процент владения мячом, выиграна борьба за позицию, отдых, сухие матчи(подряд), забитые голы в матчах подряд, домашний матч, место в турнирной таблице, количество пропущенных мячей, количество пропускающих матч игроков

Среди вышеприведенных показателей есть как стимуляторы, так и дестимуляторы. Стимуляторами называются показатели, увеличение которых приводит к увеличению рейтинга команды, а дестимуляторы — это показатели, уменьшение которых приводит к росту рейтинга футбольного клуба. Отметим, что среди выделенных нами показателей дестимуляторами являются следующие: место в турнирной таблице, количество пропущенных мячей, количество пропускающих матч игроков;

Остальные показатели являются стимуляторами.

Для интерпретации полученного рейтинга команд необходимо ввести так называемую лингвистическую интервальную шкалу. Для исхода "победа" значение рейтинга команды должен быть больше, чем 52.72. Для исхода "ничья" значение рейтинга команды должен быть лежать в промежутке от 47.20 до 52.71. Для исхода "поражение" значение рейтинга команды должен быть меньше, чем 47.2

Далее нам необходимо подобрать всю статистику по параметрами и определиться с весовыми коэффициентами. Определившись с показателями и весовыми коэффициентами, можем приступать к расчету рейтинга команд. Для этого нам необходимо выполнять ряд действий:

1. Рассчитаем относительный вес показателя для каждой команды. Для этого воспользуемся формулой для показателей-стимуляторов и формулой 2 для

показателей-дестимуляторов:

$$Brel_i = \frac{B_i}{\sum_{j=1}^2 B_j} \quad (3)$$

где  $B$  – исходное значение показателя,  $i$  – команда,  $Brel$  – относительное значение показателя.

$$Breal_i = 1 - \frac{B_i}{\sum_{j=1}^2 B_j} \quad (4)$$

Рассчитаем рейтинг команд:

$$Ra_i = Mrel_i^T \cdot W \quad (5)$$

где  $W$  – матрица весовых коэффициентов,  $Mrel$  – матрица, содержащая относительные значения показателей  $Brel$  для каждой команды,  $i$  – команда,  $Ra$  – рейтинг команды. Для удобства сравнения сделаем нормировку рейтинга команд на единицу по формуле

$$Rrel_i = \frac{Ra_i}{\sum_{j=1}^2 Ra_j} \quad (6)$$

где  $Ra$  – абсолютный рейтинг команды,  $i$  – команда,  $Rrel$  – рейтинг команды, нормированный на единицу.

Разработанную математическую модель можно использовать для прогнозирования исхода футбольного матча. Однако стоит учитывать, что данный подход подразумевает настройку параметров модели аналитиком непосредственно перед каждым матчем. Проведя анализ статистических показателей команд и руководствуясь собственным опытом, прогнозист должен подобрать весовые коэффициенты, а также, возможно, исключить некоторые показатели из расчета.

Итоги:

- 1) Из 160 матчей РФПЛ 2017/ 2018 верны 126 из 160.
- 2) Вероятность точного прогноза примерно равна 0.79.
- 3) Программа имеет практическое применение.

## Литература

1. Подиновский В. В. *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений*. – М.: Физматлит, 2007. – 306 с.
2. Бехтер Л. В., Клевец Н. И. *Прогнозирование исхода футбольных матчей. // Социально-экономическое развитие АР Крым: проблемы и перспективы. Сб. науч. трудов. Вып. 6. – Симферополь.: НАПКС, 2012. – 252 с.*

## MATHEMATICAL MODELING IN FOOTBALL

V.A. Erushkin

*The paper aims to consider the use of mathematical modeling in football, to compare the chances of the teams and the determine the result of the match between them. The work consists of selection of statistical parameters, development of the program implemented in the C-Sharp language in the Visual Studio environment. The calculations are made to rank the teams and determine the outcomes of football matches.*

Keywords: rankings, stimulants, destimulate, statistical models.



УДК 519.254

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ В НЕФТЕНОСНЫХ ПЛАСТАХ С ПОМОЩЬЮ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

А.А. Заикин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [kaskrin@gmail.com](mailto:kaskrin@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе приводится статистическая модель взаимосвязи нагнетающих и добывающих скважин на едином разрабатываемом нефтеносном горизонте. Модель в некоторой мере основана на процессах перетекания жидкости, происходящих в пласте, и является одной из модификаций модели калмановского фильтра. Разработан EM-алгоритм для оценивания параметров этой модели.*

**Ключевые слова:** заводнение нефтяных месторождений, статистическое моделирование, фильтр Калмана, EM-алгоритм.

### **Введение.**

При разработке нефтяных месторождений широко применяется метод заводнения пласта — в пласт посредством нагнетающих станций (скважин) закачивается вода, которая должна вытеснить нефть из пласта, таким образом повышая добычу нефти в добывающих скважинах. Однако, сложная внутренняя структура породы нефтеносного пласта, конфигурация и положение пластов в пространстве усложняют процесс построения точной математической модели.

В настоящее время существуют модели, которые описывают процессы течения жидкости в пласте. В первую очередь, это многие модели фильтрации, которые основаны на дифференциальных уравнениях. Они довольно успешно описывают внутреннюю структуру пласта, однако эффективность модели дается ценой высокой вычислительной стоимости. Кроме того, в последнее время [1], [2] стали популярными модели, основанные на ансамбльных калмановских фильтрах. Это стохастические модели, основанные на уравнениях фильтрации, и они дают удовлетворительную аппроксимацию фильтрационного решения с меньшими вычислительными затратами.

Одним из интересов разработчиков месторождения является установление эффективности работы тех или иных нагнетательных скважин с целью установления эффективного заводнения пласта. На основе модели фильтрации трудно делать выводы о влиянии тех или иных нагнетательных скважин на конкретные добывающие скважины.

В этой работе предлагается подход, основанный на простом калмановском фильтре, который слабо основан на процессах фильтрации, однако статистическая и вычислительные задачи поставлены так, что легко находить зависимость между работой нагнетающих скважин и работой добывающих.

### **Постановка задачи.**

Пусть на пласте работает  $M$  добывающих и  $L$  нагнетающих скважин. Для каждой скважины известны координаты перфорации  $x$  и  $y$  на плоскости горизонта в некоторой декартовой системе координат. В модели на данный момент не учитывается разница по высоте над уровнем моря между скважинами. Для каждой добывающей скважины известна помесечная история добычи в тоннах нефти  $z_m(t)$  и воды

$w_m(t)$ , а также период работы скважины в сутках  $p_m(t)$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $t = 1, \dots, t_{max}$ . В случае, если скважина простаивает в месяц  $t$ , эти величины равны 0. Нагнетающие скважины закачивают  $u_l(t)$  тонн воды в месяц  $t$ ,  $t = 1, \dots, t_{max}$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Обозначим  $v(t) = (z_1(t), \dots, z_m(t), w_1(t), \dots, w_m(t))^T$  — вектор-столбец наблюдаемых переменных (верхний индекс  $T$  означает операцию транспонирования).

### Вероятностная модель.

Моделирование процессов, происходящих в пласте мы начнем с построения прямоугольной сеткой размером  $n_x \times n_y$  узлов. Узлы сетки находятся в целочисленных координатах от 1 до  $n_x$  по оси абсцисс, и с 1 до  $n_y$  по оси ординат. Узлы сетки нумеруются от 1 до  $N = n_x n_y$  согласно некоторому заранее заданному порядку. Все скважины привязываются к ближайшему узлу сетки, так что будем обозначать  $n(m)$ ,  $m = 1, \dots, M$  или  $n(l)$ ,  $l = 1, \dots, L$  индексы ближайшего узла сетки к добывающей скважине  $m$  или нагнетающей скважине  $l$ . Без ограничения общности будем считать, что система координат выбрана так, что для каждого узла привязано не более одной добывающей скважины (стоит заметить, что некоторые добывающие скважины могут быть переоборудованы в нагнетающие). Обозначим  $ne(n)$  множество индексов узлов-соседей по сетке у узла с индексом  $n$ .

Приведем теперь вероятностную модель процесса переноса жидкости в пласте. Так, для узла сетки с индексом  $n$  обозначим количество воды (например, в тоннах) в момент времени  $t$  как  $h_n^w(t)$  и количество нефти в момент времени  $t$  как  $h_n^z(t)$ . Жидкости перетекают между узлами линейно пропорционально разнице между уровнями жидкости в узлах, причем коэффициент пропорциональности между узлами  $k$  и  $n$  равен  $\theta_{k \sim n}^z$  и  $\theta_{k \sim n}^w$  для нефти и воды соответственно ( $\theta_{k \sim n}^r = \theta_{n \sim k}^r$ ,  $r = w, z$ ). Вода прибывает в узлах  $n$  с нагнетающими скважинами в количестве  $\sum_{l:n(l)=n} u_l(t)$ . Жидкость уходит из узла  $n$  посредством добывающих скважин в количестве  $\eta_m^z h_n^z(t) p_m(t)$  нефти и  $\eta_m^w h_n^w(t) p_m(t)$  воды для той скважины  $m$ , что  $n(m) = n$ . Для стабилизации результата мы вводим белый шум  $\varepsilon_n^r(t)$ ,  $r = z, w$  на каждом узле  $n$  сетки, который распределен нормально со средним 0 и дисперсией  $\sigma_h^2$ .

Таким образом, динамика количества жидкости в узле  $n$  происходит в соответствии со следующими стохастическими уравнениями:

$$h_n^r(t) = h_n^r(t-1) + \sum_{k \in ne(n)} \theta_{k \sim n}^r [h_k^z(t-1) + h_k^w(t-1) - h_n^z(t-1) - h_n^w(t-1)] + \\ + \sum_{l:n(l)=n} I\{r = w\} u_l(t) - \eta_m^r h_n^r(t-1) p_m(t-1) + \varepsilon_n^r(t), r = z, w$$

Если ввести обозначение  $h(t) = (h_1^z(t), \dots, h_N^z(t), h_1^w(t), \dots, h_N^w(t))^T$ , то последние выражения можно представить в виде

$$h(t) = A(t)h(t-1) + C(t) + \varepsilon(t) \quad (1)$$

для вектора белого шума  $\varepsilon(t)$ , для некоторой матрицы  $A(t)$ , зависящей от неизвестных параметров, и некоторого вектора  $C(t)$ , полностью известного. Выражение (1) представляет собой уравнение авторегрессии для  $h$ .

Количество добываемой жидкости для скважины  $m$  представляется в следующем виде:

$$z_m(t) = \eta_m^z p_m(t) h_{n(m)}^z + \delta_m^z(t),$$

$$w_m(t) = \eta_m^w p_m(t) h_{n(m)}^w + \delta_m^w(t),$$

где  $\delta_m^r(t)$ ,  $r = w, z$  — нормально распределенный белый шум с дисперсией  $\sigma_v^2$ . Совместно эти два уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$v(t) = B_t h(t) + \delta(t), \quad (2)$$

где  $\delta(t)$  — вектор белого шума и  $B_t$  — некоторая матрица, зависящая от неизвестных параметров  $\eta$ .

Уравнения (1) и (2) представляют собой модель Калмановского фильтра, или скрытой авторегрессии. Переменные  $h(t)$  не наблюдаются, и поэтому именуются скрытыми. Параметрами модели являются вектора  $\theta, \eta, \sigma$  (вектора, неким образом составленные из соответствующих параметров модели).

#### Обучение модели. EM-алгоритм.

Применим EM-алгоритм с классическим E-шагом для обучения модели.

Пусть даны начальные приближения  $\theta_0, \eta_0, \sigma_0$  для параметров  $\theta, \eta, \sigma$ . Алгоритм заключается в поочередном повторении E- и M- шагов. Пусть на шаге  $s = 0, 1, \dots$  имеются оценки параметров  $\theta_s, \eta_s, \sigma_s$ . Классический E-шаг заключается в вычислении условного распределения (функции плотности  $f$ )

$$q(h(1), \dots, h(t_{max})) = f(h(1), \dots, h(t_{max}) | v(1), \dots, v(t_{max}), \theta_s, \eta_s, \sigma_s)$$

при фиксированных параметрах  $\theta_s, \eta_s, \sigma_s$ . M-шаг состоит в максимизации

$$\int q(h(1), \dots, h(t_{max})) \ln f(h(1), \dots, h(t_{max}), v(1), \dots, v(t_{max}), \theta, \eta, \sigma) dh(1) \dots dh(t_{max}) \quad (3)$$

относительно параметров  $\theta, \eta, \sigma$  с использованием вычисленной на E-шаге функции  $q$ .

Сходимость метода определяется по абсолютной разнице соседних итераций.

#### E-шаг.

Для модели фильтра Калмана условное распределение  $h(t)$  при известных  $v(1), \dots, v(t_{max})$  является нормальным с некоторым вектором средних  $g_t$  и некоторой ковариационной матрицей  $G_t$ . Это обуславливается линейностью уравнений (1) и (2) и нормальностью шумов  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Для вычисления  $g_t$  и  $G_t$  были использованы точные формулы [3]. Однако, для этого требуется задать начальные значения  $g_0$  и  $G_0$ . Вектор  $g_0$  может задаваться исходя из данных геологической разведки количества жидкости в пласте в данном узле. Матрицу  $G_0$  можно положить равной нулевой матрице, и в таком случае  $h(0) = g_0$ .

Сразу отметим, что средние значения  $g_t$  могут использоваться для оценки значений  $h(t)$ .

#### M-шаг.

В выражении (3) используется совместная функция плотности  $h$  и  $v$ . Эту функцию плотности представить в следующем виде (мы опускаем запись зависимости от  $\theta, \eta, \sigma$ ):

$$f(h(1), \dots, h(t_{max}), v(1), \dots, v(t_{max})) = \prod_{t=1}^{t_{max}} f(v(t) | h(t)) f(h(t) | h(t-1)).$$

Выражения для  $f(v(t)|h(t))$  и  $f(h(t)|h(t-1))$  задаются напрямую из уравнений (2) и (1) соответственно. Так как каждая из этих условных плотностей есть функция плотности нормального распределения, то логарифм функции плотности есть неким образом нормированная сумма квадратов линейных функций от  $h$ . Из этого, в свою очередь, следует то, что для вычисления интеграла (3) достаточно знать  $g_t$ ,  $G_t$ , а также математическое ожидание  $E_q\{h(t)h(t-1)^T\}$  (математическое ожидание относительно плотности  $q$ ). Последнее можно получить при реализации E-шага [3].

Заметим, что (1) и (2) можно переписать в виде  $h(t) = H_t\theta - F_t\eta + C(t) + \varepsilon(t)$ ,  $v(t) = F_t\eta + \delta(t)$  с некоторыми матрицами  $H_t$  и  $F_t$ , состоящими из элементов векторов  $h(t)$  и  $h(t-1)$ . Это является следствием линейности уравнений по  $\theta$  и  $\eta$ .

Таким образом, с точностью до некоторой аддитивной константы и некоторого отрицательного множителя выражение (3) примет вид

$$E_q \left[ \sum_{t=1}^{t_{max}} (h(t) - H_t\theta + F_t\eta - C(t))^T (h(t) - H_t\theta + F_t\eta - C(t)) \sigma_h^{-2} + (v(t) - F_t\eta)^T (v(t) - F_t\eta) \sigma_v^{-2} + t_{max} 2N \log \sigma_h^2 + t_{max} 2M \log \sigma_v^2 \right]. \quad (4)$$

Итак, задача M-шага — минимизировать (4). Для решения этой задачи мы применили метод покоординатного спуска: мы поочередно находим оптимум (4) по  $\sigma$  при фиксированных  $\theta$  и  $\eta$ , и оптимум (4) по  $\theta$  и  $\eta$  при фиксированных  $\sigma$ . Первая задача решается очевидно, в то время как вторая задача является квадратичной, и ее оптимум находится как решение системы линейных уравнений. Однако эта система оказывается плохо обусловленной, и для регуляризации решения используется сингулярное разложение матрицы с понижением ранга приближенного решения. Сходимость этого покоординатного определяется по абсолютной разности соседних итераций.

### Результаты.

Данный метод был применен на сетке  $n_x = 5$ ,  $n_y = 10$  для  $M = 13$  добывающих и  $L = 3$  нагнетающих скважин на площади около с историей в  $t_{max} = 533$  месяцев добычи (нагнетающие скважины начинают работу где-то с  $t = 300$  месяца). Коэффициент детерминации  $R^2$  для прогноза добычи на год для данной модели составил 0.8293176. В качестве меры зависимости между скважинами берутся коэффициенты корреляции между количествами различных жидкостей соответствующих узлов сетки. Для определения зависимости между скважинами пока что предлагается использовать эти корреляции посредством ручной обработки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00094.

### Литература

1. Aanonsen, S. I., Nævdal, G., Oliver, D. S., Reynolds, A. C., Valès, B. *The ensemble Kalman filter in reservoir engineering — a review* // SPE Journal. – 2009. – V. 14. – № 03. – P. 393–412.
2. Wen, X.-H., Chen, W.H. *Real-Time Reservoir Model Updating Using Ensemble Kalman Filter With Confirming Option* // SPE Journal. – 2006. – V. 11. – № 4. – P. 431–442.

3. Einicke, G.A. *Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future*. – Rijeka, Croatia: Intech, 2012. – 286 pp.

## SIMULATION OF FLUID FLOW IN OIL RESERVOIRS USING KALMAN FILTER

A.A. Zaikin

*The paper presents a statistical model of the relationship of injection and production wells in a single developed oil-bearing horizon. The model is loosely based on the processes of fluid flow in the reservoir, and is one of the modifications of the Kalman filter model. An EM-algorithm has been developed for estimating the parameters of this model.*

Keywords: waterflooding of oil fields, statistical modeling, Kalman filter, EM-algorithm.

УДК 510.5

## ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННАЯ СВОДИМОСТЬ МНОЖЕСТВ И $\Sigma$ -ОПРЕДЕЛИМОСТЬ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Д.Х. Зайнетдинов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> dzajnetd@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Работа посвящена изучению предельно монотонных множеств, а также исследованию основных структурных свойств предельно монотонной сводимости между множествами. В работе получено описание алгоритмической зависимости между предельно монотонной сводимостью множеств, определенной в терминах  $\Sigma$ -сводимости семейств начальных сегментов натуральных чисел, и  $\Sigma$ -определимостью абелевых групп специального вида.*

**Ключевые слова:** предельно монотонная функция, предельно монотонное множество, предельно монотонная сводимость, семейство подмножеств натуральных чисел,  $\Sigma$ -сводимость,  $\Sigma$ -определимость, абелева группа, наследственно конечная надстройка.

Одной из методологических проблем современной теории моделей является оценка сложности исследуемого объекта таким образом, чтобы представленная алгебраическая структура наследовала эффективные свойства этого объекта. К одному из таких объектов исследования относится класс неубывающих по последнему аргументу вычислимых трёхместных функций. С помощью этих функций Н.Г. Хисамиевым [1] был доказан критерий конструктивизируемости абелевых групп специального вида.

Определения предельно монотонной функций и предельно монотонного множества, которые используются в настоящей работе, можно найти в статье [2]. Основные сведения, полученные при изучении предельно монотонных функций, множеств и последовательностей можно найти в работах [2–4]. По части основных обозначений, встречающихся в работе, мы будем придерживаться [5] и [6].

И.Ш. Калимуллин и В.Г. Пузаренко в работе [6] ввели понятие  $\Sigma$ -сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, согласованное с понятием  $\Sigma$ -определимости в допустимых множествах, и которое позволяет рассматривать се-

мейство само по себе, не фиксируя при этом его представление с помощью натуральных чисел.

**Определение 1.** Пусть дано семейство  $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ .  $\mathcal{S}$ -кортежем называется множество вида  $\langle n, k \rangle \oplus (X_1 \oplus \dots \oplus X_n)$ , где  $n, k \in \mathbb{N}$  и  $X_i \in \mathcal{S}$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Через  $K_{\mathcal{S}}$  будем обозначать множество всех  $\mathcal{S}$ -кортежей.

**Определение 2.** Семейство  $\mathcal{S}_0 \subseteq 2^{\mathbb{N}}$   $\Sigma$ -сводится к семейству  $\mathcal{S}_1 \subseteq 2^{\mathbb{N}}$  (обозначается как  $\mathcal{S}_0 \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}_1$ ), если  $\mathcal{S}_0 \cup \{\emptyset\} = \{\Phi(X \oplus Y \oplus E(\mathcal{S}_1)) \mid X \in K_{\mathcal{S}_1}\}$  для некоторого оператора перечисления  $\Phi$  и множества  $Y \in K_{\mathcal{S}_1}$ .

Здесь  $E(\mathcal{S}) = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists F \in \mathcal{S}) [D_n \subseteq F]\}$ , где через  $D_n$  обозначаем конечное множество с каноническим индексом  $n$ .

Пусть даны множества  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ . Определим для них семейства начальных сегментов  $\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\}$  и  $\mathcal{S}(B) = \{\mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B\}$  соответственно. Доказательство следующего результата, устанавливающего алгоритмическую зависимость между предельно монотонной сводимостью множеств и  $\Sigma$ -сводимостью семейств начальных сегментов натуральных чисел, можно найти в работе [7].

**Теорема 1.**  $A \leq_{lm} B$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(B)$ .

Рассмотрим теорию Крипке – Платека с праэлементами ( $\mathbf{KPU}_{\sigma}$ ) для произвольной сигнатуры  $\sigma$ , расширяющей сигнатуру  $\sigma_1 = \{\emptyset; \epsilon^2\}$ . Определение аксиом данной теории можно найти, например, в [8]. Данная теория является слабым фрагментом теории Цермело-Френкеля ( $\mathbf{ZF}$ ) с праэлементами, позволяющая иметь дело с ординалами, которые определяются аналогично тому, как и в теории  $\mathbf{ZF}$ . В структуре  $\mathfrak{M} = \langle A, \emptyset^A, \epsilon^A, \dots \rangle$  этой теории элементы основного множества  $A$  разбиваются на два непересекающихся класса  $S(A)$  и  $U(A)$ , а именно  $A = S(A) \cup U(A)$  и  $S(A) \cap U(A) = \emptyset$ . Элементы из  $S(A)$  называются «множествами», а элементы из  $U(A)$  «праэлементами».

Под допустимым множеством будем понимать  $\mathbf{KPU}$ -модель, в которой отношение принадлежности ( $\epsilon$ ) вполне упорядочивает семейство всех ординалов данной модели.

Допустимые множества обозначаются через  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ , а их носители – через  $A, B$  соответственно. Структуры обозначаем через  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$  Одним из важнейших классов допустимых множеств являются наследственно конечные надстройки. В работе мы рассматриваем наследственно конечные надстройки над структурами, то есть наименьшие по включению допустимые множества, которые содержат (как подмножества) в качестве праэлементов носители рассматриваемых структур.

Пусть  $\mathfrak{M} = \langle M, \dots \rangle$  – алгебраическая структура с носителем  $M$  и некоторой предикатной сигнатуры  $\sigma$  и  $\sigma \cap \{\emptyset, \epsilon^2, U^1\} = \emptyset$ . Рассмотрим элементы из основного множества  $M$  как праэлементы и определим индукцией следующую последовательность множеств

$$HF_0(M), HF_1(M), HF_2(M), \dots, HF_n(M), \dots$$

для всех натуральных  $n \in \mathbb{N}$  по правилу:

$$HF_0(M) = M, \dots, HF_{n+1}(M) = HF_n(M) \cup \mathcal{P}_{\omega}(HF_n(M)),$$

где  $\mathcal{P}_{\omega}(M)$  – множество всех конечных подмножеств множества  $M$ .

Пусть

$$HF(M) \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}} HF_n(M).$$

Тогда  $HF(M)$  – семейство всех наследственно конечных множеств; элементы из  $HF(M)$  называются *наследственно конечными множествами* над  $M$ . На  $HF(M)$  определим естественным образом структуру  $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$  сигнатуры  $\sigma' = \sigma \cup \{\emptyset, \epsilon^2, U^1\}$ , называемую *наследственно конечной надстройкой над структурой  $\mathfrak{M}$* , причём  $U^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M$ .

Пусть  $\mathfrak{A}$  – структура с носителем, являющимся подмножеством  $A$  множества  $HF(M)$ . Каждой формуле  $\Psi(a_1, \dots, a_n)$  сигнатуры структуры  $\mathfrak{A}$  с параметрами  $a_1, \dots, a_n \in A$ , имеющей гёделев номер  $m \in \mathbb{N}$ , можно сопоставить элемент  $(m, (a_1, \dots, (a_{n-1}, a_n) \dots))$  множества  $HF(M)$ . Здесь  $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ . Следовательно, под *атомной диаграммой* структуры  $\mathfrak{A}$  будем понимать некоторое подмножество  $HF(M)$ .

**Определение 3.** Алгебраическая структура  $\mathfrak{A}$   $\Sigma$ -определима в наследственно конечной надстройке  $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$  (записывается как  $\mathfrak{A} \leq_{\Sigma} \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ ), если

- 1) существует изоморфная копия структуры  $\mathfrak{A}$ , носитель которой является подмножеством  $HF(M)$ ;
- 2) атомная диаграмма структуры  $\mathfrak{A}$  определима в  $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$  с помощью некоторой  $\Sigma$ -формулы.

В.Г. Пузаренко [9] была исследована  $\Sigma$ -определимость в наследственно конечных надстройках над алгебраическими структурами. В следующей теореме приводится описание  $\Sigma$ -сводимости семейств подмножеств натуральных чисел (см. определение 2) в терминах операторов перечисления.

**Теорема 2.** (И.Ш. Калимуллин, В.Г. Пузаренко [6]). Для семейств  $\mathcal{S}_0$  и  $\mathcal{S}_1$  следующие условия эквивалентны:

- (1)  $\mathcal{S}_0 \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}_1$ ;
- (2)  $\mathcal{S}_0$  вычислимо в  $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_1})$  для структуры  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_1}$ ;
- (3) для структуры  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_1}$  найдётся такая структура  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0}$ , что  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0} \leq_{\Sigma} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_1})$ ;
- (4) для любой структуры  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_1}$  найдётся структура  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0}$ , что  $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0}) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_1})$ ;
- (5) для любого допустимого множества  $\mathbb{A}$  из вычислимости  $\mathcal{S}_1$  в  $\mathbb{A}$  следует существование структуры  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0}$  такой, что  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0} \leq_{\Sigma} \mathbb{A}$ ;
- (6) для любого допустимого множества  $\mathbb{A}$  из вычислимости  $\mathcal{S}_1$  в  $\mathbb{A}$  следует существование структуры  $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0}$  такой, что  $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_0}) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathbb{A}$ .

Пусть дано множество  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Рассмотрим абелеву группу  $G(A) = \bigoplus_{n \in A} \left( \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} p^n \right)$ , где  $p$  принадлежит множеству простых чисел. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть дано множество  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Пусть  $\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \upharpoonright n : n \in A\}$  – семейство начальных сегментов натуральных чисел и  $G(A) = \bigoplus_{n \in A} \left( \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} p^n \right)$  – абелева группа, определенные для множества  $A$ . Тогда  $\mathcal{S}(A) \leq_{\Sigma} \mathbb{HF}(G(A))$ , то есть семейство  $\mathcal{S}(A)$   $\Sigma$ -определимо в наследственно конечной надстройке  $\mathbb{HF}(G(A))$  над группой  $G(A)$ .

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, дающая описание предельно монотонной сводимости множеств на языке  $\Sigma$ -определимости абелевых групп специального вида.

**Теорема 4.** Пусть  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ . Пусть  $G(A) = \bigoplus_{n \in A} \left( \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n} \right)$  и  $G(B) = \bigoplus_{k \in B} \left( \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^k} \right)$  – абелевы группы специального вида, определенные для множеств  $A$  и  $B$  соответственно. Тогда  $A \leq_{lm} B$ , если и только если группа  $G(A)$   $\Sigma$ -определима в наследственно конечной надстройке  $\text{HF}(G(B))$ .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научных проектов № 18-31-00420, № 18-01-00574 и № 17-51-18083.

## Литература

1. Хисамиев Н. Г. Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических  $p$ -групп // Известия АН Казахской ССР, серия физико-математическая. – 1981. – Т. 98, № 1. – С. 51–55.
2. Khoussainov B., Nies A., Shore R. *Computable models of theories with few models* // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – Т. 38, № 2. – С. 165–178.
3. Kalimullin I. Sh., Khoussainov B., Melnikov A. *Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 141, № 9. – P. 3275–3289.
4. Downey R. G., Kach A. M., Turetsky D. *Limitwise monotonic functions and their applications* // Proceedings of the 11th Asian Logic Conference. World Scientific. – 2011. – P. 59–85.
5. Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D. *Maximality and Minimality under Limitwise Monotonic Reducibility* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 333–338.
6. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г. *О сводимости на семействах* // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 1. – С. 31–53.
7. Зайнетдинов Д. Х.  *$\Sigma$ -сводимость и  $lm$ -сводимость множеств и последовательностей множеств* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, № 1. – P. 51–65.
8. Ершов Ю. Л. *Определимость и вычислимость*. – М.: Экономика; Новосибирск: Научная книга, 2000. – 318 с.
9. Пузаренко В. Г. *О вычислимости над моделями разрешимых теорий* // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, № 2. – С. 170–197.

## LIMITWISE MONOTONIC REDUCIBILITY OF SETS AND $\Sigma$ -DEFINABILITY OF ABELIAN GROUPS

D.Kh. Zainetdinov

*The paper is devoted to the study of limitwise monotonic sets, as well as to the investigation of the main structural properties of limitwise monotonic reducibility between sets. In this paper, we obtain a description of the algorithmic dependence between the limitwise monotonic reducibility of sets, which defined in terms of the  $\Sigma$ -reducibility of the families initial segments of natural numbers, and the  $\Sigma$ -definability of abelian groups of a special form.*

Keywords: limitwise monotonic function, limitwise monotonic set, limitwise monotonic reducibility, family of subsets of natural numbers,  $\Sigma$ -reducibility,  $\Sigma$ -definability, abelian group, hereditarily finite superstructure.



УДК 517.95

**ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**Н.В. Зайцева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> n.v.zaiceva@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В работе исследована начально-граничная краевая задача для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области. Доказательство единственности решения задачи проводится методом интегральных тождеств. Решение построено в виде ряда Фурье–Бесселя. Получены достаточные условия относительно начальных условий, которые гарантируют сходимость построенного ряда в классе регулярных решений. Доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной задачи.*

**Ключевые слова:** начально-граничная задача, гиперболическое уравнение, сингулярный коэффициент, единственность, существование, ряд Фурье–Бесселя, равномерная сходимость, устойчивость.

В современной теории дифференциальных уравнений в частных производных одним из важнейших разделов является теория краевых задач для вырождающихся уравнений. Особое место в данной теории занимают исследования уравнений с сингулярными коэффициентами. Важность данного класса уравнений обусловлена их использованием в приложениях к задачам газовой динамики и акустики [12, 13], теории струй в гидродинамике [3], линеаризованным уравнениям Максвелла–Эйнштейна [1, 2], механике, теории упругости и пластичности [4]. Первая граничная задача для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами впервые изучена в работе [6]. Обширное исследование эллиптических и гиперболических уравнений с сингулярным коэффициентом представлено в работах [7] и [14]. Достаточно полный обзор работ, посвященный изучению краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, приведен в монографии [5].

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\square_B u(x, t) \equiv u_{tt} - u_{xx} - \frac{k}{x} u_x = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$ , где  $l, T > 0$ ,  $k \neq 0$  – заданные действительные числа.

В работе [8] впервые и обстоятельно изучены задачи Коши и Коши–Гурса для уравнения (1) при всех  $k \geq 1$  в характеристическом треугольнике, а в работе [9] показана некорректность постановки этих задач при  $k < 0$ . В работе [11] изучена задача Дирихле для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом, у которого гиперболическая часть совпадает с уравнением (1). В работах [10, 15] исследованы на корректность начально-граничные задачи с интегральным условием для уравнения (1).

Поскольку начально-граничные задачи с нелокальным интегральным условием типа Самарского–Ионкина сводятся к смешанным задачам для уравнения (1),

то возникла необходимость более детального изучения начально-граничных задач для уравнения (1). Поэтому в данной работе исследована вторая начально-граничная задача для  $B$ -гиперболического уравнения (1), согласно терминологии [7], в прямоугольной области  $D$  при всех  $k \neq 0$ , а именно:

Найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условиям

$$u(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D), \quad x^k u_x(x, t) \in C(\bar{D}), \quad (2)$$

$$\square_B u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |k| < 1, \quad (6)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k \leq -1, \quad (7)$$

где  $\varphi(x), \psi(x)$  – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям  $\varphi'(l) = \psi'(l) = 0$ .

Методом интегральных тождеств доказана

**Теорема 1.** Если существует решение задачи (2) – (7), то оно единственно.

Решение задачи (2) – (6) построено в виде ряда

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x), \quad (8)$$

где

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t,$$

$$\varphi_0 = l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \varphi(x) x^k dx, \quad \psi_0 = l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \psi(x) x^k dx,$$

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x) x^k X_n(x) dx,$$

$$X_n(x) = \frac{1}{\|\tilde{X}_n(x)\|} \tilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\|\tilde{X}_n(x)\|^2 = \int_0^l \rho(x) \tilde{X}_n^2(x) dx, \quad \rho(x) = x^k, \quad (10)$$

$$\tilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0,$$

$$\tilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь собственные значения  $\lambda_n$  определяются как нули уравнения  $J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0$ ,  $\mu = \lambda l$ .

Решение задачи (2) – (5), (7) построено в виде суммы ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \quad (11)$$

где функции  $u_n(t)$  определяются по формуле (9), функции  $X_n(x)$ :

$$X_n(x) = \frac{\tilde{X}_n(x)}{\|\tilde{X}_n\|} = \frac{1}{\|\tilde{X}_n\|} x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}} \left( \frac{\mu_n x}{l} \right) = \frac{1}{\|\tilde{X}_n\|} x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

собственные значения  $\lambda_n$  есть нули уравнения  $J_{-\frac{k+1}{2}}(\mu_n) = 0$ , а норма задана равенством (10).

В работе показано, что построенные функции (8) и (11) принадлежат классу  $C^2(\bar{D})$  и удовлетворяют всем условиям задач (2) – (6) и (2) – (5), (7), соответственно.

Доказана теорема устойчивости решения поставленной задачи.

**Теорема 2.** Для решения задачи (2) – (7) справедлива оценка  $\|u\| \leq C(\|\varphi\| + \|\psi\|)$ , где постоянная  $C$  не зависит от функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ .

## Литература

1. Бицадзе А.В., Пашковский В.И. *К теории уравнений Максвелла–Эйнштейна* // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 2. – С. 9–10.
2. Бицадзе А.В., Пашковский В.И. *О некоторых классах решений уравнения Максвелла–Эйнштейна* // Тр. МИАН СССР. – 1975. – Т. 134. – С. 26–30.
3. Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости*. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
4. Джаяни Г.В. *Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам*. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1982. – 178 с.
5. Катрахо В.В., Ситник С.М. *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений* // Совр. математика. Фунд. направления. – 2018. – Т. 64, № 2. – С. 211–426.
6. Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области* // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.
7. Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи*. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 208 с.
8. Пулькин С.П. *Некоторые краевые задачи для уравнений  $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$*  // Уч. записки Куйбышевского гос. пед. ин-та. – 1958. – Вып. 21. – С. 3–55.
9. Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. *О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 5. – С. 59–63.
10. Сабитов К.Б., Зайцева Н.В. *Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода* // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 123–135.
11. Сабитов К.Б., Сафина Р.М. *Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2018. – Т. 82, № 2. – С. 79–112.
12. Bers L. *On a class of differential equations in mechanics of continua* // Quart. Appl. Math. – 1943. – V. 5, № 1. – P. 168–188.
13. Bers L. *A remark on an applications of pseudo-analytic functions* // Quart. Appl. Math. – 1956. – V. 78, № 3. – P. 486–496.

14. Carroll R.W., Showalter R.E. *Singular and degenerate Cauchy problems*. – New York: Academic Press, 1976. – 343 p.
15. Zaitseva N.V. *Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind* // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2017. – V. 78, № 1. – P. 162–169.

## SECOND INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENT

N.V. Zaitseva

*In a rectangular domain, we research an initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with singular coefficient. The uniqueness of solution of the problem is established by means of the method of integral identities. The solution is obtained in the form of the Fourier–Bessel series. Sufficient conditions on the functions, defining initial data of the problem, are received. There are proved theorems on existence and stability of the solution.*

Keywords: initial-boundary value problem, hyperbolic equation, singular coefficient, uniqueness, existence, Fourier–Bessel series, uniform convergence, stability.

УДК 003.26

## ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ПОСТКВАНТОВОЙ ЧАСТИЧНО ЗАТЕМНЕННОЙ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ

А.И. Зиятдинова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [alsushka1995.ru@yandex.ru](mailto:alsushka1995.ru@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

*В статье вкратце описывается идея новой частично затемненной цифровой подписи, основанной на решетках.*

**Ключевые слова:** цифровая подпись, затемненная цифровая подпись, решетка, гомоморфное шифрование.

Среди цифровых подписей важное место занимают затемненные подписи (blind signatures), или слепые подписи, подписи вслепую (см., например, [1]). Разновидностью затемненных подписей являются частично затемненные подписи (partially blind signatures). В работе [2] были рассмотрены некоторые новые примеры таких подписей. Будем использовать терминологию из этой работы. В протоколе три участника: Покупатель, Продавец и Банк (подписывающая сторона). Покупатель посылает Банку информацию двух видов: затемненную (например, идентификатор электронной банкноты) и открытую (например, сумму, которую он желает снять со счета). Банк подписывает затемненные данные, используя в подписи открытые данные, и отправляет подпись Покупателю. Покупатель должен иметь возможность снять с подписи затемнение, но у него не должно быть возможности изменить незатемненную информацию. Эта информация потом отправляется Продавцу вместе с подписью и участвует в проверке подписи.

Ввиду того, что достаточно скоро может появиться квантовый компьютер, который может разрушить традиционные криптосистемы, используемые на практике (протоколы, основанные на задаче о дискретном логарифме, и протокол подписи

RSA), особое значение приобретают протоколы, основанные на сложности задач, не поддающихся квантовому компьютеру. На данный момент принято считать, что одними из таких задач являются задачи нахождения кратчайшего вектора решетки и вектора решетки, ближайшего к данному вектору. Информацию о данных задачах можно найти в книгах [3], [4].

Известно несколько подписей, основанных на сложности задач на решетках. На данный момент известна лишь одна частично затемненная подпись [5].

Цель нашей работы — описание еще одной частично затемненной подписи, основанной на решетках. Здесь мы приводим только очень краткое описание, т. к. подробности занимают довольно много места. Идея состоит в том, что Банк располагает решеткой, которая является фактически секретным ключом. Покупатель отправляет Банку открытый параметр, который используется для подстановки в матрицу, задающую решетку. Затемнение производится с помощью технологии гомоморфного шифрования [6], [7]. Затемненная величина является вектором. Подписание — это нахождение вектора параметризованной решетки, ближайшего к затемненному вектору. Банк пересылает его Покупателю. Покупатель, используя свойства гомоморфного шифрования, снимает затемнение прямо из подписи, и при этом полученный вектор оказывается ближайшим к незатемненному исходному вектору. Подписью является вектор решетки, полученный после снятия затемнения. Проверка подписи сводится к поиску вектора решетки, в которую подставлены открытые параметры, ближайшего к подписываемому вектору, и сравнение его с присланным вектором — подписью.

## Литература

1. Епишкина А. В., Шимкив М. Я. *Обзор и анализ криптографических схем, реализующих электронную подпись «вслепую»* // Безопасность информационных технологий. – 2015. – № 3. – С.51–58.
2. Зиятдинова А. И. *Параметризация некоторых затемненных цифровых подписей, аналогичных подписи Эль-Гамала*. – Выпускная квалификационная работа (бакалаврская работа), Казань, 2017. – 32 с.
3. Глухов М. М., Круглов И. А., Пичкур А. Б., Черемушкин А. В. *Введение в теоретико-числовые методы криптографии*. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011. – 400 с.
4. Bremner M. R. *Lattice Basis Reduction. An Introduction to the LLL Algorithm and Its Applications*. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. – xvii+316 pp.
5. Haibo Tian, Fangguo Zhang, Baodian Wei. *A lattice-based partially blind signature* // Security Comm. Networks. – 2016. – V. 9. – Issue 12. – P. 1820–1828.
6. Gentry Craig. *A fully homomorphiv encryption scheme*. // Ph.D. Thesis. Stanford University. – 2009. – 209 pp.
7. Бабенко Л. К., Буртыка Ф. Б., Макаревич О. Б., Трепачева А. В. *Полностью гомоморфное шифрование (Обзор)* // Техническая защита информации. – 2015. – № 3. – С. 3–26.

## ON ONE NEW POST-QUANTUM PARTIALLY BLIND DIGITAL SIGNATURE

A.I. Ziyatdinova

*This paper describes the idea of a new lattice based partially blind digital signature.*

Keywords: digital signature, partially digital signature, lattice, homomorphiv encryption.

УДК 514

## ФРАКТАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР В НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПРИМЕРЕ ТРЕУГОЛЬНИКА СЕРПИНСКОГО

С.К. Зубкова<sup>1</sup>, П.И. Трошин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *zubkova.s.k@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> *paul.troshin@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В работе рассматривается способ построения фракталов в эллиптической геометрии, в частности, построен треугольник Серпинского как аттрактор некоторой системы итерированных функций.*

**Ключевые слова:** система итерированных функций, аттрактор, сфера.

Аппарат систем итерированных функций (СИФ) широко используется во фрактальной геометрии, а также имеет множество практических применений [1]. В частности, СИФ применяются для построения «самоподобных» фракталов — фрактальных множеств

$$A = \bigcup_{i=1}^N f_i(A), \quad (1)$$

где  $A \subset \mathbb{R}^n$  и  $\{f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i=1}^N$  — сжимающие отображения. Несмотря на активное развитие в этой области, фракталы недостаточно исследованы в неевклидовых геометриях. В работе [3] с помощью СИФ построено и изучено семейство фрактальных аттракторов на плоскости Лобачевского. Цель нашего доклада — представить способ построения фракталов в эллиптической геометрии (на поверхности сферы) на примере треугольника Серпинского, получающегося как аттрактор некоторой СИФ (множество вида (1)).

Рассмотрим семейство СИФ  $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f_i(x) = \lambda x + c e_i, \quad (2)$$

где  $e_i = \{-\sin(\frac{2\pi}{3}(i+1)), \cos(\frac{2\pi}{3}(i+1))\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а  $\lambda \in (0, 1)$  и  $c \in (0, \infty)$  — параметры семейства. Аттракторы этого семейства хорошо изучены [3, 4] и представляют собой естественное обобщение треугольника Серпинского.

Наша идея состоит в построении аналогичной СИФ на сфере. Рассмотрим сферу единичного радиуса  $\mathbb{S}^2$  и ее движение, являющееся вращением вокруг оси  $a \in \mathbb{S}^2$ . Это вращение на угол  $\alpha$  задается формулой:

$$U_{a,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} u_1^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & u_1 u_2(1 - \cos \alpha) - u_3 \sin \alpha & u_1 u_3(1 - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha \\ u_1 u_2(1 - \cos \alpha) + u_3 \sin \alpha & u_2^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & u_2 u_3(1 - \cos \alpha) - u_1 \sin \alpha \\ u_1 u_3(1 - \cos \alpha) - u_2 \sin \alpha & u_2 u_3(1 - \cos \alpha) + u_1 \sin \alpha & u_3^2(1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Введем новое преобразование, сжимающее все точки сферы по большим кругам в

направлении выделенной точки  $O \in \mathbb{S}^2$  в  $\lambda \in (0, 1)$  раз:

$$C_{O,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{(o_2x_1 - o_1x_2)^2 + (o_3x_1 - o_1x_3)^2 + (o_3x_2 - o_2x_3)^2}} \times \begin{pmatrix} x_1A + (o_1(1 - x_1^2) - x_1(o_2x_2 + o_3x_3))B \\ x_2A + (o_2(1 - x_2^2) - x_2(o_1x_1 + o_3x_3))B \\ x_3A + (o_3(1 - x_3^2) - x_3(o_1x_1 + o_2x_2))B \end{pmatrix},$$

где  $A = \sqrt{1 - o_1^2x_1^2 - o_2^2x_2^2 - o_3^2x_3^2 - 2(o_1o_2x_1x_2 + o_1o_3x_1x_3 + o_2o_3x_2x_3) \cos((\lambda - 1) \arccos(o_1x_1 + o_2x_2 + o_3x_3))}$ ,  $B = \sin(1 - \lambda) \arccos(o_1x_1 + o_2x_2 + o_3x_3)$ .

Сопоставим отображению (2) отображение  $F_i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ :

$$F_i(x) = U_{a_i,\alpha}(C_{O,\lambda}(x)), \quad (3)$$

где  $a_i = \{0, \cos \frac{(2i-3)\pi}{3}, \sin \frac{(2i-3)\pi}{3}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а  $(\alpha, \lambda) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$  — параметры. Таким образом, получим семейство СИФ на сфере.

Мы показали, что преобразование  $C_{O,\lambda}$  не является сжимающим (хотя  $d(C_{O,\lambda}(x), C_{O,\lambda}(y)) < d(x, y)$  в некоторой окрестности  $O$  в стандартной метрике на сфере). Тем не менее, СИФ (3) обладает аттрактором при малых  $\alpha$  и  $\lambda$ , и этот аттрактор можно построить стандартными алгоритмами построения аттракторов СИФ [1]. Примеры полученных аттракторов см. на рис. 1.

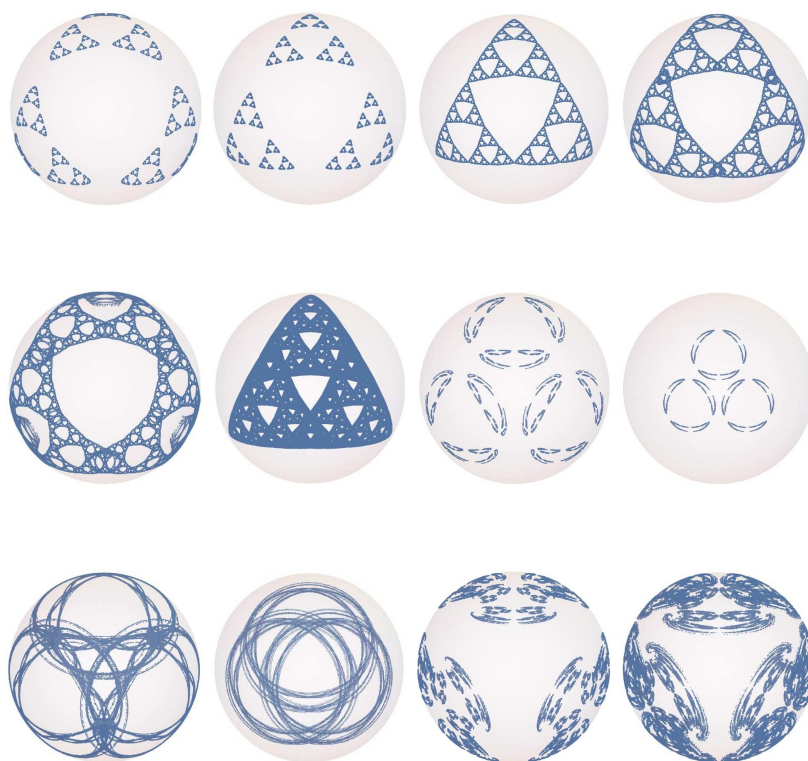
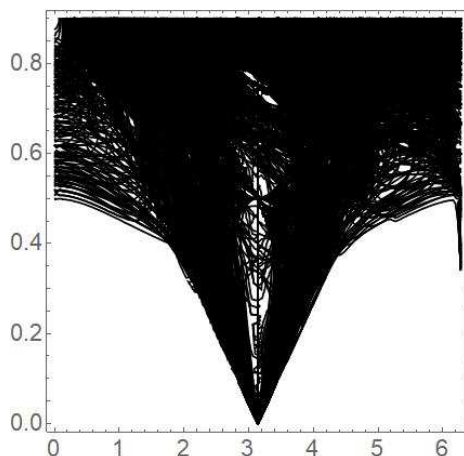


Рис. 1. Примеры аттракторов семейства (2).

Важным вопросом в теории СИФ является связность аттракторов. Пусть  $A = A(\alpha, \lambda)$  — аттрактор СИФ (3). Тогда  $A$  связан тогда и только тогда, когда  $F_1(A) \cap$

$F_2(A) \neq \emptyset$ . На рис. 2 мы приводим рассчитанное нами примерное изображение множества Мандельброта  $\mathcal{M} = \{(\alpha, \lambda) : A(\alpha, \lambda) \text{ — связное множество}\}$  для этого семейства СИФ.



**Рис. 2.** Множество Мандельброта: параметры  $(\alpha, \lambda) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ , при которых аттрактор связан.

Случай сферы также интересен тем, что преобразование  $U_{a,\alpha}$  здесь является периодическим с периодом  $2\pi$ , в отличие от параллельного переноса в  $\mathbb{R}^2$  и на плоскости Лобачевского. Получающиеся аттракторы обладают весьма сложной геометрией и требуют дальнейшего изучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00295).

## Литература

1. Barnsley M. F. *Fractals everywhere*. – Boston: Academic Press, 1988. – P. 394.
2. Troshin P. I. *On generalization of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane* // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2017. – V. 38, Is. 4. – P. 751–762.
3. Broomhead D., Montaldi J., Sidorov N. *Golden gaskets: variations on the Serpiński sieve* // *Nonlinearity*. – 2004. – V. 17. – P. 1455–1480.
4. Jordan T. *Dimension of fat Serpiński gaskets* // *Real Anal. Exchange*. – 2005. – V. 31, Is. 1. – P. 97–110.

## A FRACTAL ATTRACTOR IN NON-EUCLIDEAN GEOMETRY BASED ON THE EXAMPLE OF THE SIERPINSKI TRIANGLE

S.K. Zubkova, P.I. Troshin

*The paper is devoted to the method of constructing fractals in elliptic geometry, in particular, the Sierpinski triangle is constructed as an attractor of a system of iterated functions.*

Keywords: a system of iterated functions, an attractor, a sphere.



УДК 532.546, 519.635

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

И.З. Ибрагимов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ilmir.soap@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

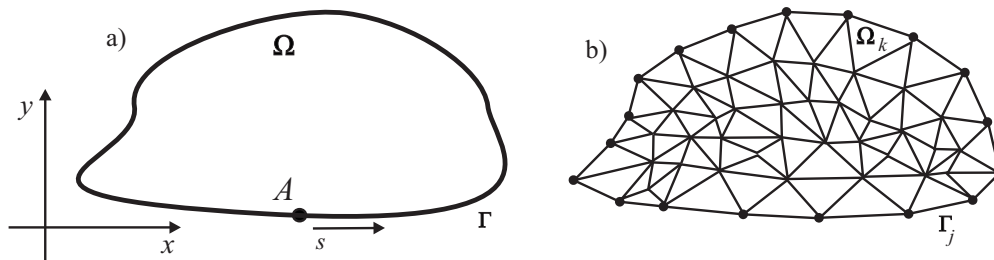
*В работе решена задача о течении в пористой среде с пространственно неоднородной проницаемостью. Для решения использован метод граничных элементов с включением площадных элементов. Сравнение результатов расчета с аналитическим решением тестовой задачи показало эффективность использованного метода и хорошую точность полученного численного решения.*

**Ключевые слова:** метод граничных элементов, фильтрация, модель Дарси.

Модели теории фильтрации жидкостей в пористых средах в большинстве случаев основывается на предположении об однородной проницаемости. Вместе с тем, часто возникают задачи о течении в средах с пространственно неоднородной проницаемостью. В этом случае модели течений включают в себя зависимость проницаемости от пространственных координат, что усложняет соответствующую математическую задачу.

Традиционный метод граничных элементов (МГЭ) используется для решения линейных, однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае неоднородных уравнений с переменными коэффициентами или уравнений с производными первого порядка применяются МГЭ с включением площадных элементов – Boundary Domain Integral Method (BDIM) [1–3].

В настоящей работе BDIM развит для решения задачи о течении в пористой среде с пространственно неоднородной проницаемостью.



**Рис. 1.** Расчетная область (а); площадные и граничные элементы (б).

**Постановка задачи.** Рассмотрим функцию тока  $\psi(x, y)$  течения в пористой области  $\Omega$ , ограниченной контуром  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n$  (Рис. 1, а). Функция тока  $\psi(x, y)$  описывается законом Дарси и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{P^2} \frac{\partial P^2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{P^2} \frac{\partial P^2}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где  $P(x, y) = R_c \sqrt{k(x, y)}$ ,  $k(x, y)$  – пространственно неоднородная проницаемость,  $R_c$  – масштаб линейного размера. На части границы  $\Gamma_d$  задается граничное условие Дирихле:

$$\psi|_{\Gamma_d} = \psi_d(s), \quad (2)$$

на части границы  $\Gamma_n$  задается граничное условие Неймана

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\Gamma_n} = \psi_n(s), \quad (3)$$

где  $s$  – дуговая абсцисса, отсчитываемая от некоторой точки  $A$  так, что расчетная область  $\Omega$  остается слева. Требуется определить функцию тока  $\psi(x, y)$ .

**Решение задачи методом BDM.** Для решения поставленной задачи (1) – (3) используем подход, примененный в работе [1] к решению неоднородного уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Перепишем соотношение (1) в форме уравнения Пуассона

$$\Delta \psi = g_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - g_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4)$$

где  $g_1 = \frac{1}{p^2} \frac{\partial P^2}{\partial x}$ ,  $g_2 = \frac{1}{p^2} \frac{\partial P^2}{\partial y}$ . Для уравнения Пуассона (4) можно записать известное интегральное соотношение Релея-Грина

$$\begin{aligned} \chi(x, y) \psi(x, y) = & \int_{\Gamma} \left( \psi(s) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y, s) - \frac{\partial \psi}{\partial n}(s) G(x, y, s) \right) ds - \\ & - \int_{\Omega} \left( g_1(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi, \eta) + g_2(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial y}(\xi, \eta) \right) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\chi(x, y) = 2\pi$  для внутренних точек области  $\Omega$ ,  $\chi(x, y) = \beta$  для точек  $\Gamma$  ( $\beta$  – внутренний к области  $\Omega$  угол в точке границы). Функция Грина для уравнения Пуассона  $G = \ln \rho$ , где  $\rho$  – расстояние от расчетной точки с координатами  $(x, y)$  до текущей точки интегрирования.

В правой части соотношения (5) в подынтегральном выражении интеграла по области  $\Omega$  стоят неизвестные функции  $\partial \psi / \partial x$  и  $\partial \psi / \partial y$ . Для получения замкнутой системы уравнений продифференцируем (5) по переменным  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \chi(x, y) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = & \int_{\Gamma} \left( \psi(s) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial G(x, y, s)}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi(s)}{\partial n} \frac{\partial G(x, y, s)}{\partial x} \right) ds - \\ & - \int_{\Omega} \left( g_1(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi, \eta) + g_2(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial y}(\xi, \eta) \right) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(x, y) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = & \int_{\Gamma} \left( \psi(s) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial G(x, y, s)}{\partial y} \right) - \frac{\partial \psi(s)}{\partial n} \frac{\partial G(x, y, s)}{\partial y} \right) ds - \\ & - \int_{\Omega} \left( g_1(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi, \eta) + g_2(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial y}(\xi, \eta) \right) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} d\xi d\eta. \quad (7) \end{aligned}$$

Следуя МГЭ, представим границу  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$  в виде набора прямолинейных отрезков  $\Gamma_j$ , а область  $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$  в виде набора треугольников  $\Omega_k$  (Рис. 1, б). Функции  $\psi(s)$ ,  $\partial \psi(s)$  аппроксимируем кусочно-постоянными функциями со значениями

$\psi_j, \psi'_j$  на отрезках  $\Gamma_j$ , а функции  $g_1(x, y), g_2(x, y), \partial\psi/\partial x(x, y)$  и  $\partial\psi/\partial y(x, y)$  – кусочно-постоянными функциями со значениями  $g_{1k}, g_{2k}, \psi_{xk}$  и  $\psi_{yk}$  в треугольниках  $\Omega_k$ . Тогда соотношения (5) – (7) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для неизвестных значений функции  $\psi_j$  и ее производных  $\psi'_j, \psi_{xk}, \psi_{yk}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \{A_{ij}\psi_j + B_{ij}\psi'_j\} + \sum_{k=1}^n \{C_{ik}\psi_{xk} + D_{ik}\psi_{yk}\} &= a_i, \quad i = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n \{E_{lj}\psi_j + F_{lj}\psi'_j\} + \sum_{k=1}^n \{G_{lk}\psi_{xk} + H_{lk}\psi_{yk}\} &= b_l, \quad l = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^n \{I_{lj}\psi_j + J_{lj}\psi'_j\} + \sum_{k=1}^n \{K_{lk}\psi_{xk} + L_{lk}\psi_{yk}\} &= c_l, \quad l = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (8)$$

Полученную СЛАУ (8) из  $(n + 2m)$  уравнений относительно  $(2n + 2m)$  неизвестных  $(\psi_i, \psi'_j, j = \overline{1, n}, \psi_{xk}, \psi_{yk}, k = \overline{1, m})$  замкнем  $n$  соотношениями из граничных условий (2), (3), записанных в точках  $(x_{ci}, y_{ci})$  центров отрезков  $\Gamma_i$  и решим численно. В итоге, функцию тока  $\psi$  в точке области с координатами  $(x, y)$  определим по формуле

$$\begin{aligned} \chi(x, y)\psi(x, y) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G}{\partial n}(x, y, s) ds - \psi'_j \int_{\Gamma_j} G(x, y, s) ds \right\} - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n (g_{1k}\psi_{xk} + g_{2k}\psi_{yk}) \int_{\Omega_k} G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

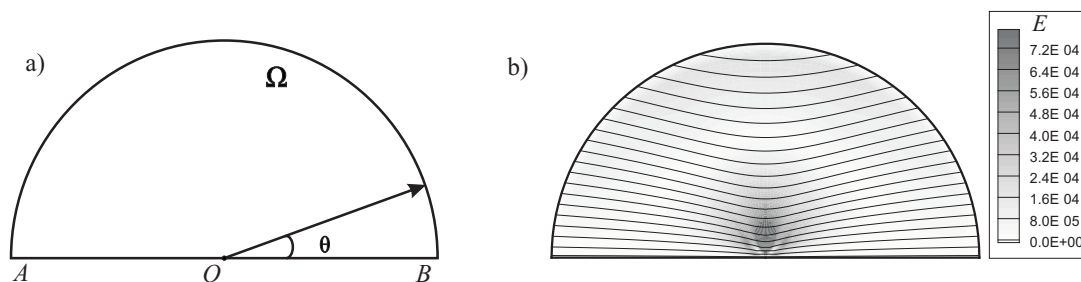
**Аналитическое решение.** Рассмотрим течение в круговой ячейке единичного радиуса (Рис. 2, а) с неоднородной проницаемостью. Введем полярную систему координат  $(r, \theta)$ . Пусть проницаемость меняется вдоль радиуса по закону  $P^2 = P^2(r) = r^{-\beta}$ . Для функции тока  $\psi(x, y)$ , удовлетворяющей в области течения уравнению (1), поставим следующие граничные условия: на прямолинейной границе  $y = 0$ , являющейся линией тока, потребуем  $\psi = 0$ ; на круговой границе  $r = 1$  зададим  $\psi(r, \theta) = \sin\theta$ . Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\psi_a(r, \theta) = f(r) \sin\theta, \quad (9)$$

который автоматически удовлетворяет граничному условию на прямолинейном участке  $y = 0$ . Подставив соотношение (9) в уравнение (1) и в граничные условия, получим, что функция  $f(r)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f'' + f' \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{P^2} \frac{dP^2}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} f = 0 \quad (10)$$

с краевыми условиями  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . Аналитическим решением краевой задачи для уравнения (10) будет  $f(r) = r^\alpha, \alpha = (\beta + \sqrt{\beta^2 + 4})/2$ .



**Рис. 2.** Пористая круговая ячейка (а); линии тока (черные линии) и распределение абсолютной погрешности  $E(x, y)$  (b).

**Результаты расчетов.** Проведем решение этой задачи методом BDIM. На рисунке 2, b) линиями показаны рассчитанные линии тока для случая  $\beta = -1$ , цветом – распределение абсолютной погрешности  $E(x, y) = |\psi(x, y) - \psi_a(x, y)|$ , где  $\psi_a(x, y)$  – аналитическое решение задачи, а  $\psi(x, y)$  – численное (количество граничных элементов  $n = 99$ , количество площадных элементов  $m = 1117$ ). Относительная погрешность  $\varepsilon = \frac{\max E(x, y)}{\max |\psi(x, y)|}$  составила  $\varepsilon = 1.5016 \cdot 10^{-3}$ .

**Заключение.** Сравнение результатов расчета с аналитическим решением тестовой задачи показало эффективность и хорошую точность. Преимуществом рассмотренного метода BDIM является то, что все одномерные и двумерные интегралы, определение которых необходимо для нахождения коэффициентов СЛАУ и вычисления искомой функции в произвольной точке области, вычисляются аналитически.

## Литература

1. Mardanov R. F., Zaripov S. K. *Solution of Nonhomogeneous Helmholtz Equation with Variable Coefficient Using Boundary Domain Integral Method* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Т. 39. – №. 6. – С. 783–793.
2. Mardanov R. F., Dunnett S. J., Zaripov S. K. *Modeling of fluid flow in periodic cell with porous cylinder using a boundary element method* // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2016. – Т. 68. – С. 54–62.
3. Mardanov R. F. et al. *A Stokes–Brinkman model of the fluid flow in a periodic cell with a porous body using the boundary element method* // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2018. – Т. 88. – С. 54–63.

## SOLVING THE PROBLEM OF FLOW IN A POROUS MEDIUM WITH SPATIALLY INHOMOGENEOUS PERMEABILITY BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

I.Z. Ibragimov

*The problem of fluid flow in a porous medium with spatially inhomogeneous permeability is solved. The boundary element method with the inclusion of areal elements for solving boundary value problem is used. The comparison of the calculation results with analytical solutions of the test problem showed the efficiency and good accuracy of the numerical solution.*

Keywords: boundary element method, boundary-domain integral method, filtration, Darcy's model.

УДК 514.822

**КОНГРУЭНЦИИ И УНИТАРНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ В ТЕОРИИ МАТРИЦ**Х.Д. Икрамов<sup>1</sup><sup>1</sup> [ikramov@cs.msu.ru](mailto:ikramov@cs.msu.ru); Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*В отличие от теории матричных преобразований подобия, факты параллельной теории конгруэнций (канонические и компактные формы, специальные классы матриц) сравнительно мало известны. В докладе будет дан обзор этой теории и сформулированы некоторые ее нерешенные задачи. Например, известно, что задача о проверке подобия матриц с элементами из поля  $F$  может быть решена алгоритмом, рациональным над  $F$ . Верно ли то же самое для задачи о проверке эрмитовой конгруэнтности комплексных матриц?*

**Ключевые слова:** Т-конгруэнции, \*-конгруэнции, унитарные конгруэнции, сопряженно-нормальные матрицы, теорема Yula, рациональный алгоритм.

## CONGRUENCES AND UNITARY CONGRUENCES IN MATRIX THEORY

Kh.D. Ikramov

*Unlike the theory of matrix similarity transformations, the facts of the parallel theory of congruences (canonical and condensed forms, special classes of matrices) are relatively little known. In this talk, we undertake a survey of this theory and state some of its open problems. For instance, the problem of verifying similarity between matrices with entries in a field  $F$  is known to be solvable with a rational algorithm over  $F$ . Is the same true for the problem of verifying that given complex matrices are congruent?*

Keywords: T-congruences, \*-congruences, unitary congruences, conjugate-normal matrices, Yula theorem, rational algorithm.

УДК 517.927

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ**С.В. Исраилов<sup>1</sup>, А.А. Сагитов<sup>2</sup><sup>1</sup> [segitov@mail.ru](mailto:segitov@mail.ru); Чеченский государственный университет, Чеченский государственный педагогический университет, КНИИ РАН ЧР<sup>2</sup> [segitov@mail.ru](mailto:segitov@mail.ru); Чеченский государственный университет

*Краевая задача Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков изучена во многих работах, когда уравнения разрешены относительно старшей производной.*

*В данной статье такая задача рассматривается для общего дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, не разрешенного относительно старшей производной, путем введения одной новой функции, позволяющей представить данное уравнение в квази-разрешенном виде относительно старшей производной. Это позволяет свести задачу*

Валле-Пуссена к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , которая исследуется в пространстве  $n$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $y(x)$ . Доказываются две теоремы: о существовании единственного решения и о существовании по крайней мере одного решения.

**Ключевые слова:** задача Валле–Пуссена, не разрешенное относительно старшей производной дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, теорема о существовании единственного решения, теорема о существовании хотя бы одного решения.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

с условиями задачи Валле–Пуссена [1–4]:

$$y_{(a_k)}^{(i-1)} = 0, \quad i = 1, \tau_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m+1,$$

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = a_{m+1} = b, \quad \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{m+1} = n,$$

$$m \in \{0, 1, \dots, n-2\}, \quad \tau_k \in \{1, 2, \dots, n-2\},$$

в предположении, что функция  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  непрерывна по всем аргументам в области  $D: \{x \in [a, b], |y^{(i)}| \leq d_i, i = 0, \dots, n\}$  и имеет непрерывную частную производную  $\frac{\partial F(x, y, y', \dots, y^{(n)})}{\partial y^{(n)}}$ , отличную от нуля во всех точках области  $D$ .

Краевая задача Валле–Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков изучена во многих работах, когда уравнения разрешены относительно старшей производной.

В данной статье такая задача рассматривается для общего дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, не разрешенного относительно старшей производной, путем введения одной новой функции, позволяющей данное уравнение представить в квазиразрешенном виде относительно старшей производной. Это позволяет свести задачу Валле–Пуссена к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно  $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ , которая исследуется в пространстве  $n$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $y(x)$ . Доказываются две теоремы: о существовании единственного решения и о существовании по крайней мере одного решения.

## Литература

1. Ешуков Л.Н., Веков А.А., Степанов Л.Н. *Проблемы и библиография теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений* // Тр. Рязанского радиотехнического ин-та. – 1972. – Вып. 42. – С. 164–192.
2. Васильев Н.И., Клюков Ю.Л. *Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений*. – Рига: Зинетне, 1978. – 184 с.
3. Покорный Ю.В. *Вопросы качественной теории краевой задачи Валле–Пуссена* // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Л., 1980.
4. Кигурадзе И.Т. *О сингулярной задаче Валле–Пуссена* // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1969. – Т. 54, № 3. – С. 525–528.

ON A METHOD OF INVESTIGATION OF THE VALLÉE POUSSIN PROBLEM  
FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS UNSOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHEST DERIVATIVE

S.V. Israilov, A.A. Sagitov

*The Vallée–Poussin boundary value problem for higher-order ordinary differential equations is studied in many papers when the equations are resolved with respect to the highest derivative.*

*In this paper, such a problem is considered for the general differential equation of the  $n$ -th order, unsolved with respect to the higher derivative. Introducing a new function allows this equation to be presented in a quasi-resolved form with respect to the higher derivative. This allows the Vallée–Poussin problem to be reduced to a system of integro-differential equations with respect to  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , which is investigated in the space of  $n$  times continuous differentiable functions  $y(x)$ . Two theorems are proved: on existence of a unique solution and on existence of at least one solution.*

Keywords: Vallée–Poussin problem, unsolved relative to the higher derivative differential equation of the  $n$ -th order, theorem on existence of a unique solution, theorem on existence of at least one solution.

УДК 517.986

**ОБ ОБРАТИМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ  
ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБР**

М.В. Кабанко<sup>1</sup>, Е.Л. Мягченкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [kabankom@gmail.com](mailto:kabankom@gmail.com); Курский государственный университет

<sup>2</sup> [lena.4755@mail.ru](mailto:lena.4755@mail.ru); Курский государственный университет

*В статье рассматриваются случаи обратимости операторов, действующих в гильбертовой паре. Для этого рассмотрены некоторые “удобные” представления алгебры операторов, действующих в гильбертовой паре с разреженными весами.*

**Ключевые слова:** операторные алгебры, представление операторных алгебр.

Как известно (см. напр. [3]), представлением операторной алгебры  $A$  называется пара  $(H_\theta, \theta)$ , где  $H_\theta$  – некоторое гильбертово пространство, называемое пространством представления, а  $\theta$  – некоторый гомоморфизм вида:

$$\theta : A \rightarrow B(H_\theta).$$

Представление будем называть точным, если  $\theta$  инъективен. Представление операторной алгебры  $A$  называется топологически неприводимым, если в  $H_\theta$  нет замкнутых приводящих подпространств относительно  $\theta(A)$  отличных от  $\{0\}$  и  $H_\theta$ .

Пусть задана гильбертова пара  $\{H_0, H_1\}$ , и  $A$  – алгебра операторов в этой паре. Естественным является построение отображения  $\pi$  из алгебры  $A$  в алгебру операторов  $B(H_\pi)$ , где  $H_\pi$  – интерполяционное гильбертово пространство в регулярной гильбертовой паре  $\{H_0, H_1\}$  и  $\pi(B) = B|_{H_\pi}$ ,  $B \in A$ . Тогда очевидна следующая теорема [2].

**Теорема 1.** *Пара  $(H_\pi, \pi)$  является точным и топологически неприводимым представлением алгебры операторов  $A$  в гильбертовой паре.*

В работах [3], [4] ранее рассматривалась регулярная гильбертова пара с “разреженными” весами  $\bar{H} = \{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1})\}$ , где  $\omega = 2^{2^n}$ , и было показано (см. [3]), что элементы из алгебры операторов, действующих в этой паре, представимы в пространстве  $l_2$ , являющемся интерполяционным в этой паре, в виде суммы диагонального и ядерного оператора. Отсюда получаем следующий результат:

**Теорема 2.** *Любой оператор вида  $I + S$ , где  $S$  – внедиагональная часть оператора действующего в паре  $\bar{H}$ , обратим в  $l_2$ .*

## Литература

1. Кабанко М. В., Овчинников В. И. О неприводимых представлениях алгебры операторов в гильбертовой паре // Труды матем. факульт. ВГУ: Воронеж. – 2001. – № 5 (Новая серия). – С. 52–60.
2. Кабанко М. В. Об алгебре операторов в шестерке гильбертовых пространств // Труды молодых ученых физ.-мат. факульт. – Курск. – 2001. – С. 34–40.
3. Мерфи Дж. Д.  $C^*$ -алгебры и теория операторов. – М.: Факториал, 1997. – 324 с.
4. Овчинников В. И. Интерполяция в симметрично -нормированных идеалах операторов, действующих в различных гильбертовых пространствах // Функциональный анализ и его прил. – 1994. – Т. 28, № 2. – С. 80–82.

## ON INVERTIBILITY OF ELEMENTS IN REPRESENTATIONS OF CERTAIN OPERATOR ALGEBRAS

M.V. Kabanko, E.L. Myagchenkova

*The paper deals with cases of invertibility of operators acting in a Hilbert couple. We consider some “convenient” representations of the algebra of operators acting in a Hilbert couple with sparse weights.*

Keywords: operator algebras, representations of operator algebras.

УДК 534.11

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАКРЕПЛЕНИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ПО НЕМУ ЖИДКОСТЬ

Б.Е. Кангужин<sup>1</sup>, Ж. Мадибайулы<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [kanbalta@mail.ru](mailto:kanbalta@mail.ru); Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы Казахстан  
<sup>2</sup> [zhumabaymadibaiuly@gmail.com](mailto:zhumabaymadibaiuly@gmail.com); РГП на ПХВ “Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова” КН МОН РК, Алматы, Казахстан

*Казахстан обладает огромными подтвержденными запасами нефти и газа. Для транспортировки углеводородов в республике используется около 10715 км нефте- и газопроводов. Тем не менее, перед страной сегодня стоит ряд нерешенных проблем, связанных с поставкой нефти на внутренний и международный рынки. Проблемы, касающиеся внутреннего рынка, заключаются в том, что большинство запасов и основные объемы добычи нефти сосредоточены на западе, в то время как ее потребители (крупные города и промышленные центры) находятся на юго-востоке и индустриальном севере. В настоящее время несколько проектов, направленных на улучшение сложившейся ситуации, находятся на различных этапах развития, при этом наиболее*



значительным из них является трубопровод Каспийского трубопроводного консорциума.

При эксплуатации инженерных структур транспортировки приходится сталкиваться с природными и иными взаимодействиями. В результате различных внешних факторов (подвижки грунта, вибраций от техногенных процессов, сейсмической активности и других), а также собственной неустойчивости, трубопроводы отклоняются от своего проектного положения. Исследование процессов изменения трассы трубопроводов и разработка методов диагностики состояния профиля является одной из актуальных проблем современной механики сплошной среды. Это обусловлено интенсивным развитием сети подземных и подводных трубопроводов, необходимостью поиска новых подходов к методам их контроля, повышением требований к безопасности ввиду возросшей активности эксплуатации, а также тяжелыми последствиями возможных аварий. Прямой контроль состояния трубопровода путем прохождения его трассы — практически единственный, очень дорогостоящий метод диагностики.

Следует отметить что, во многих исследовательских работах рассматриваются задачи с прямыми трубопроводами и закрепление на концах трубопроводов приводится 16 видов закреплений: заделка-заделка, заделка-свободное опирание и т.д.

Итак, несомненна актуальность задач о совместном движении трубопровода и заполняющей его жидкости в различных постановках, ввиду большой прикладной ценности и теоретической важности. Аналогичные исследования можно найти в работе М.А. Ильгамова [1], а также в монографии Дж. Томсона [2]. В работах А.М. Ахтямова [3, 4] рассматриваются случаи при неподвижности жидкости.

В настоящей работе изучены случаи как прямолинейных, так и криволинейных осевых линии трубопровода при его изгибных колебаниях с протекающей в нем жидкостью. В первой части работы исследуется зависимость частот изгибных колебаний трубопровода от формы закрепления его концов, скорости протекающей жидкости. В заключительной части работы изучается возможность восстановления условий граничных закреплений трубопровода по конечному набору частот.

**Ключевые слова:** идентификация, закреплений трубопровода, прямолинейные и криволинейные, осевые линии, протекающая жидкость, частота изгибных колебаний.

## Литература

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. — М.: Наука, 1969. — 182 с.
2. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. — М.: Мир, 1985. — 254 с.
3. Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. — 2016. — Т. 21, № 1. — С. 21–26.
4. Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация закрепления трубопровода с использованием минимального количества собственных частот // Математические структуры и моделирование. — 2018. — Т. 45, № 1. — С. 95–107.

IDENTIFICATION OF THE FASTENING OF A CURVED PIPE  
WITH LIQUID FLOWING THROUGH IT

B.E. Kanguzhin, Zh. Madibaiuly

*Kazakhstan has huge proven reserves of oil and gas. About 10715 km of oil and gas pipelines are used to transport hydrocarbons in the republic. Nevertheless, the country today faces a number of unresolved problems associated with the supply of oil to the domestic and international markets. The problems concerning the domestic market are that most of the reserves and the main volumes of oil production are concentrated in the west, while its consumers (major cities and industrial centers) are located in the southeast and the industrial north. Currently, several projects aimed at improving the current situation are at different stages of development, with the most significant of them being the pipeline of the Caspian Pipeline Consortium.*

*During the operation of transportation engineering structures one has to deal with natural and other interactions. As a result of various external factors (ground movement, vibrations from technogenic processes, seismic activity and others), as well as their own instability, pipelines deviate from their design position. The study of processes for changing the pipeline route and the development of methods for diagnosing the state of a profile is one of the urgent problems of modern continuum mechanics. This is due to the intensive development of the network of underground and underwater pipelines, the need to find new approaches to their control methods, increased safety requirements due to increased operational activity, as well as the dire consequences of potential accidents. Direct control of the state of the pipeline by passing its route is practically the only, very expensive, diagnostic method.*

*It should be noted that, in many research works, tasks with straight pipelines and fixing at the ends of pipelines are given 16 types of fixings: embedment-embedment, embed-free support, etc.*

*So, the urgency of the tasks of joint movement of the pipeline and its filling fluid in various productions is undoubtedly due to its great practical value and theoretical importance. Similar studies can be found in the work of M. Ilgamov. [1], as well as in the monograph by J. Tomson [2]. In the works of Akhtyamov A.M. [3, 4] cases with immobility of a liquid are considered.*

*In this paper, we have studied the cases of both straight and curvilinear axial lines of a pipeline during its bending vibrations with a fluid flowing through it. In the first part of the work, the frequency dependence of the flexural vibrations of the pipeline on the form of fixing its ends, the velocity of the flowing fluid is investigated. In the final part of the work we study the possibility of restoring the conditions of boundary fixations of a pipeline over the final set of frequencies.*

Keywords: identification, pipeline fixings, rectilinear and curvilinear, axial lines, flowing fluid, bending vibration frequency.

УДК 539.3, 534.1

**ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ МОДЕЛЕЙ**Д.В. Капитанов<sup>1</sup>, А.Г. Бобыльков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *dis-kdv@mail.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> *bobylykoff007@gmail.com*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

*Приведено решение задачи на проблему собственных значений для прямых стержней при различных краевых условиях, позволяющее получить собственные значения и соответствующие им формы деформации, представленные функциями Крылова. Предложен подход нахождения функций сравнения в полиномиальном виде. Представлен программный комплекс для нахождения собственных значений и собственных форм дефор-*

мации стержня.

**Ключевые слова:** стержень, проблема собственных значений, собственные функции, формы деформации, функции Крылова.

В технике, приборостроении, машиностроении и строительстве одними из основных элементов конструкций являются стержни. Повышение долговечности этих конструкций в значительной мере определяет выбор оптимальных решений, параметров и режимов эксплуатации. Исследование устойчивости таких систем довольно часто представляет собой задачи, аналитическое решение которых получить невозможно в силу сложности описывающих их математических моделей. В этих случаях используются приближённые численные методы, основанные на представлении решения с использованием конечного числа базовых функций, например, метод Бубнова–Галеркина.

Рассмотрим малые плоские низкочастотные изгибные колебания прямого стержня. Использование вариационного принципа Гамильтона – Остроградского позволяет получить кроме самого уравнения движения также краевые условия в альтернативной форме:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \delta y \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad \left( EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \delta y \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $y(x, t)$  – поперечные смещения стержня,  $m$  – приходящаяся на единицу длины масса стержня,  $EI$  – изгибная жесткость стержня,  $P$  – сжимающая нагрузка,  $l$  – длина стержня,  $\xi$  – коэффициент вязкого трения.

В качестве граничных условий (2) представлены следующие случаи: шарнирное и жесткое закрепление границ стержня, свободные концы, а также свободные концы с наложенным ограничением на поворот.

Метод разделения переменных позволяет получить задачу на проблему собственных значений [1], в результате решения которой находятся собственные значения и соответствующие им моды деформации, представленные функциями Крылова. Решение задачи (1)–(2) проведено при всех возможных сочетаниях краевых условий на концах стержня, получаемых из выражения (2). Результаты подтверждаются справочными данными [2].

Стоит отметить, что использование собственных функций, представленных функциями Крылова, при решении задач на устойчивость методом Бубнова–Галеркина приводит к некоторым затруднениям. Это связано со сложным математическим представлением форм колебаний. В работе предлагается альтернативный вид функций сравнения, представленных в полиномиальном виде. Степень полиномов выбрана с учетом определенности задачи при согласовании форм с краевыми условиями. Для нахождения коэффициентов используется условие ортонорми-

рованности форм:

$$\int_0^l Y_i(x) \cdot Y_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Для поставленной задачи при различных сочетаниях граничных условий разработанный программный комплекс позволяет определить собственные значения и функции сравнения в двух представлениях. Интерфейс программы также позволяет получить наглядный вид форм деформации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-19-10279).

## Литература

1. Смирнов Л.В., Капитанов Д.В. *Динамика упругого сжатого стержня при потере устойчивости: Учебно-методическое пособие*. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 20 с.
2. Корнев Б.Г., Рабинович И.М. *Справочник по динамике сооружений*. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.

### THE OWN VALUES PROBLEM FOR ROD MODELS

D.V. Kapitanov, A.G. Bobylkov

*The solution of the problem on the eigenvalues for straight rods under different boundary conditions is given, which allows one to obtain eigenvalues and the corresponding deformation forms represented by the Krylov functions. The approach of finding the comparison functions in a polynomial form is proposed. A software package for finding eigenvalues and eigenforms of the rod deformation is presented.*

Keywords: rod, eigenvalue problem, own values, deformation forms, Krylov functions.

УДК 519.635.1+517.956.223

### ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик<sup>1</sup>

<sup>1</sup> karachik@susu.ru; Южно-Уральский государственный университет

*В работе получено разложение функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре в ряд по бигармоническим полиномам.*

**Ключевые слова:** бигармоническое уравнение, функция Грина, задача Дирихле.

В работе исследуется разложение функции Грина  $G_4(x, \xi)$  задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре в ряд по бигармоническим полиномам. Ранее, в работе [1] была построена функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, в работах [2-4] найден оператор Грина задачи Дирихле для бигармонического и полигармонического уравнения в единичном шаре при полиномиальных данных, в [5] найдено представление функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в единичном шаре.

Пусть  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  – единичный шар в  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 4$ ) и  $f \in C^1(\bar{S})$ . Рассмотрим в  $S$  однородную задачу Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$u|_{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = 0, \quad (2)$$

где  $\nu$  – единичная внешняя нормаль к сфере  $\partial S$ .

Введем элементарное решение бигармонического уравнения

$$E_4(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)(n-4)} |x-\xi|^{4-n}, & n > 4, n = 3, \\ -\frac{1}{4} \ln |x-\xi|, & n = 4, \\ \frac{|x-\xi|^2}{4} (\ln |x-\xi| - 1), & n = 2. \end{cases}$$

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 3$ . Функция Грина задачи Дирихле (1), (2) имеет вид

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right),$$

где  $E(x, \xi)$  – элементарное решение уравнения Лапласа.

Пусть  $\{H_k^{(i)}(x) : i = 1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$  – полная система однородных степени  $k$  ортогональных сферических гармоник (см., например, [6]), нормированных так, что  $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(\xi))^2 ds_\xi = \omega_n$ , где  $h_k$  – размерность базиса однородных гармонических многочленов степени  $k$ , а  $\omega_n$  – площадь единичной сферы  $\partial S$ .

**Теорема 2.** Пусть  $n > 4$ . Функция Грина  $G_4(x, \xi)$  задачи Дирихле (1), (2) при  $|\xi| < |x|$  может быть записана в виде

$$G_4(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2} \left( \frac{|x|^2}{2k+n-4} - \frac{|\xi|^2}{2k+n} \right) - \frac{1}{2k+n-2} \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{2k+n-4} - \frac{|x|^2|\xi|^2}{2k+n} + \frac{|x|^2-1}{2} (|\xi|^2-1) \right) \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi).$$

При  $|x| < |\xi|$  в формуле выше переменные  $\xi$  и  $x$  следует поменять местами.

Теорему 1 дополняет следующий результат.

**Теорема 3.** Функция

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \left( E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) + \frac{1}{2} \right)$$

является функцией Грина задачи Дирихле (1), (2) при  $n = 2$ .

## Литература

1. Kal'menov T. Sh., Koshanov B. D., Nemchenko M. Yu. Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Dokl. Math. – 2008. – V. 421, № 3. – P. 528–530.
2. Карачик В. В., Антропова Н. А. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. XV, № 2. – С. 86–98.
3. Карачик В. В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1038–1047.

4. Карачик В. В. *Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 4-2. – С. 550–558.
5. Карачик В. В., Турметов Б. Х. *О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона* // Математические труды. – 2018. – № 1. – С. 17–34.
6. Karachik V.V. *On one set of orthogonal harmonic polynomials* // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – V. 126, № 12. – P. 3513–3519.

ON ONE REPRESENTATION OF THE GREEN'S FUNCTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR BIHARMONIC EQUATION IN A BALL

V.V. Karachik

*In the paper a series expansion of the Green's function of the Dirichlet problem for biharmonic equation in the unit ball is obtained.*

Keywords: biharmonic equation, Green's function, Dirichlet problem.

УДК 517.53

ОБ ОДНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ  
С НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ НОСИТЕЛЕМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Б.А. Кац<sup>1</sup>, Д.Б. Кац<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *katsboris877@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> *katzdavid89@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Мы вводим понятие обобщенного интегрирования по неспрямляемым путям на комплексной плоскости и применяем его для исследования краевых задач комплексного анализа. В частности, решена краевая задача Римана на неспрямляемой спиралеобразной дуге с высокой скоростью закручивания.*

**Ключевые слова:** неспрямляемая кривая, криволинейный интеграл, краевая задача Римана.

Пусть на комплексной плоскости зафиксировано компактное множество без внутренних точек  $\Gamma$ , а на его дополнении  $D$  задана функция  $U(z)$ , обладающая следующими свойствами.

1. Эта функция имеет компактный носитель.
2. Она имеет в  $D$  непрерывные производные первого порядка.
3. Вблизи  $\Gamma$  эти производные интегрируемы в некоторой степени, большей единицы.

С каждой такой функцией свяжем распределение

$$C^\infty(\mathbb{C}) \ni \theta \mapsto - \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial U \theta}{\partial \bar{z}} q dz d\bar{z}.$$

Если  $\Gamma$  – кривая, а функция  $U(z)$  имеет на ней скачок  $u$ , то это распределение можно рассматривать как обобщение интегрирования плотности  $u$  по кривой  $\Gamma$ . Такое

обобщение необходимо для решения краевых задач (см., напр., [1]– [3]) на кривой  $\Gamma$  в случае, когда эта кривая неспрямляема.

Нами установлены условия существования этих распределений, в том числе для плотностей  $u$  с разрывами на рассматриваемой кривой, и даны их приложения для решения различных краевых задач комплексного анализа в областях с неспрямляемыми границами: краевой задачи Римана для аналитических и бианалитических функций, а также для решений некоторых уравнений Бельтрами в различных постановках.

В частности, для ряда интересных случаев решена краевая задача Римана для аналитических функций на спиралеобразной дуге с высокой скоростью закручивания. Примером такой дуги может служить

$$\Gamma = \{z = r \exp(2\pi i r^{-p}) : 0 < r \leq 1\}$$

при достаточно большом  $p$ . Краевые задачи на таких дугах примыкают к задачам с бесконечным индексом [4]; их полное решение до сих пор не известно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00060).

## Литература

1. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977.
2. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1962.
3. Lu Jian-Ke *Boundary Value Problems for Analytic Functions*. – Singapore: World Scientific, 1993.
4. Говоров Н. В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом*. – М.: Наука, 1986.

## ON A DISTRIBUTION WITH NON-RECTIFIABLE SUPPORT AND ITS APPLICATIONS

B.A. Kats, D.B. Katz

*We introduce a concept of generalized integration over non-rectifiable paths on the complex plane. Then we apply it for study of boundary-value problems of complex analysis. For instance, we obtain solutions of the Riemann boundary-value problem on non-rectifiable spiral arcs with high rate of rotation.*

Keywords: non-rectifiable curve, curvilinear integral, Riemann boundary-value problem.

УДК 517.988

## РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.М. Кокурин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *kokurin@nextmail.ru*; Марийский государственный университет, физико–математический факультет

*Единообразно построены и исследованы разностные методы решения абстрактных задач Коши для линейных однородных дифференциально–операторных уравнений с*

самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве, включая некорректные задачи Коши для уравнений первого и второго порядка по времени, а также корректные абстрактные задачи Коши для уравнений с дробной производной Капуто. Найдены оценки скорости сходимости данных методов. Для некорректных задач Коши найдены оценки погрешности в зависимости от уровня погрешности входных данных, а также получены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости в терминах показателя истокорпредставимости искомого решения.

**Ключевые слова:** задача Коши, некорректные задачи, дифференциально-операторные уравнения, разностная схема, скорость сходимости, оценка погрешности, самосопряжённый оператор, условие истокорпредставимости, дробная производная Капуто.

Изучаются задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений первого, второго и дробного порядка по времени

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = f \in D(A); \quad (1)$$

$$\ddot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = f \in D(A), \quad \dot{x}(0) = 0; \quad (2)$$

$$\partial^\alpha x(t) = -Ax(t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad x(0) = f \in D(A). \quad (3)$$

Здесь  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  — неограниченный самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве  $H$  со строго положительным спектром. В уравнении (3),

$\partial^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s) ds}{(t-s)^\alpha}$  есть дробная производная Капуто порядка  $\alpha \in (0, 1)$ . Известно, что задачи (1), (2), (3) могут иметь не более одного классического решения, при этом задачи (1) и (2) некорректно поставлены, а задача (3) корректна [2], [3]. Существование классического решения предполагается.

Заметим, что задача (2) с общими начальными условиями  $x(0) = f \in D(A)$ ,  $\dot{x}(0) = g \in D(A^{1/2})$  элементарно приводится к корректной задаче  $\dot{y}(t) = Ay(t)$ ,  $y(T) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = g$  и задаче относительно  $u(t) = x(t) - y(t)$ , имеющей вид (2):  $\ddot{u}(t) = Au(t)$ ,  $u(0) = f - y(0)$ ,  $\dot{u}(0) = 0$ .

Для приближённого решения задачи (1) построены однопараметрический класс одношаговых методов

$$\begin{aligned} -x_n + x_{n+1} &= \Delta t A((1 + \beta)x_n - \beta x_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ x_0 &= f \quad (\beta > 0) \end{aligned} \quad (4)$$

и двухпараметрический класс двушаговых методов

$$\begin{aligned} (-2\gamma_1 + 3)x_n + (2\gamma_1 - 4)x_{n+1} + x_{n+2} &= \Delta t A((\gamma_2 - 2)x_n + \\ &+ (3\gamma_1 - 2\gamma_2)x_{n+1} + (\gamma_2 - \gamma_1)x_{n+2}), \quad 0 \leq n \leq N-2, \\ x_0 &= f, \quad x_1 = 2f - (E + \Delta t A)^{-1} f \quad (\gamma_1 \in (1, 2), 0 \leq \gamma_2 < \gamma_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Для аппроксимации решения задачи (2) предлагается однопараметрический класс двушаговых методов

$$\begin{aligned} x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} &= (\Delta t)^2 A(-\beta x_n + (1 + 2\beta)x_{n+1} - \beta x_{n+2}), \\ 0 \leq n \leq N-2, \quad x_0 &= f, \quad x_1 = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}(E + (\Delta t)^2 A)^{-1} f \quad (\beta > 0). \end{aligned} \quad (6)$$



Наконец, для решения задачи (3) построен разностный метод

$$\sum_{j=0}^n a_{jn} x_j = -(\Delta t)^\alpha A x_n, \quad 1 \leq n \leq N, \quad x_0 = f, \quad (7)$$

где

$$a_{0n} = -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} b_{1n}, \quad a_{nn} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{b_{nn}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} \right),$$

$$a_{jn} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{b_{jn}}{j^\alpha - (j-1)^\alpha} - \frac{b_{j+1,n}}{(j+1)^\alpha - j^\alpha} \right), \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad 1 \leq n \leq N$$

$$b_{jn} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{ds}{s^{1-\alpha} (n\Delta t - s)^\alpha}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq n \leq N.$$

В формулах (4)–(7),  $\Delta t = T/N$  есть шаг временной дискретизации,  $x_n \in H$  — приближение к значению  $x(n\Delta t)$  искомой функции  $x(t)$  в  $n$ -м узле дискретизации,  $E$  — единичный оператор в  $H$ .

Разностные методы (4)–(7) исследуются с помощью единого подхода, включающего рассмотрение скалярных аналогов этих методов, в которых оператор  $A$  заменён на комплексный параметр  $\lambda$ .

Если  $x(t)$  — классическое решение задачи (1) или (2), то элемент  $x(T)$  допускает истокообразное представление  $x(T) = A^{-p} w$  с некоторыми  $p \geq 1$ ,  $w \in H$ . Следующие теоремы устанавливают достаточные условия степенной по  $\Delta t$  сходимости методов (4)–(6) в зависимости от показателя истокопредставимости  $p$  соответствующего решения в условиях точных данных.

**Теорема 1.** Для разностных методов (4) решения задачи (1) справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_1(\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2 \\ C_1 \Delta t, & p \geq 2 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_1 = C_1(p).$$

**Теорема 2.** Для разностных методов (5) решения задачи (1) имеет место оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_2(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3 \\ C_2(\Delta t)^2, & p \geq 3 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_2 = C_2(p).$$

**Теорема 3.** Для разностных методов (6) решения задачи (2) справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_3(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \leq p < 3/2 \\ C_3(\Delta t)^2, & p \geq 3/2 \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_3 = C_3(p).$$

Теоремы 1–3 относятся к случаю, когда входные данные  $f$  известны точно. При изучении некорректных задач более актуален случай, когда вместо элемента  $f$  задано его приближение  $f_\delta$ ,  $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ . В этом случае количество отрезков дробления

$N$  в (4)–(6) выступает в роли параметра регуляризации и должно выбираться в зависимости от  $\delta$ .

**Теорема 4.** Для разностных схем (4)–(6) в условиях приближённых входных данных при подходящем выборе зависимости  $N = N(\delta)$  справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_4 \ln^{-q} \frac{1}{\delta}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_4 = C_4(p),$$

где показатель  $q$  совпадает с показателем степени при  $\Delta t$  в соответствующей теореме 1, 2 или 3.

Справедливы следующие теоремы, обратные к теоремам 1–3.

**Теорема 5.** Пусть для решения задачи (1) с некоторым элементом  $f$  применяется разностный метод класса (4), и для него справедлива оценка  $\|x_N - x(T)\| \leq C_5(\Delta t)^q$ . Тогда существует истокообразное представление вида  $x(T) = A^{-p}w$  с любым  $p \in (0, 2q)$ . Более того, если  $q > 1$ , то  $f = 0$  и  $x(t) \equiv 0$ .

**Теорема 6.** Пусть для решения задачи (1) с некоторым элементом  $f$  применяется разностный метод класса (5), и для него справедлива оценка  $\|x_N - x(T)\| \leq C_6(\Delta t)^q$ . Тогда существует истокообразное представление вида  $x(T) = A^{-p}w$  с любым  $p \in (0, 3q/2)$ . Более того, если  $q > 2$ , то  $f = 0$  и  $x(t) \equiv 0$ .

**Теорема 7.** Пусть для решения задачи (2) с некоторым элементом  $f$  применяется разностный метод класса (6), и для него справедлива оценка  $\|x_N - x(T)\| \leq C_7(\Delta t)^q$ . Тогда существует истокообразное представление вида  $x(T) = A^{-p}w$  с любым  $p \in (0, 3q/4)$ . Более того, если  $q > 2$ , то  $f = 0$  и  $x(t) \equiv 0$ .

Для разностного метода (7) решения задачи (3) установлена устойчивость и поточечная сходимость, а также найдена оценка скорости сходимости:

**Теорема 8.** Для всех  $t \in [0, T]$  имеет место стремление  $x_{[t/\Delta t]}^N \rightarrow x(t)$  при  $N \rightarrow \infty$  в смысле нормы пространства  $H$ , причём элементы  $x_n = x_n^N$ , доставляемые методом (7) с количеством отрезков дробления  $N$ , ограничены по норме равномерно по  $N$  и  $n$ . Справедливы оценки

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_9 n^{-s(\alpha)}, \quad 1 \leq n \leq N; \quad \|x_N - x(T)\| \leq C_{10}(\Delta t)^{s(\alpha)},$$

где  $s(\alpha) = \alpha$  при  $\alpha \in (0, 1/2)$  и  $s(\alpha) = 1 - \alpha - \varepsilon$  со сколь угодно малым  $\varepsilon > 0$  при  $\alpha \in [1/2, 1)$ .

Теорема 8 справедлива также для задач вида (3) с секториальными операторами в банаховых пространствах. Теоремы 1–7 также допускают частичное обобщение на случай задач (1), (2) с секториальными операторами в банаховых пространствах. Некоторые из приведённых здесь результатов изложены в [3–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00039а), поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9) и стипендией Президента РФ молодым учёным и аспирантам (СП-5252.2018.5).

## Литература

1. Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И. Дифференциально–операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1995. – 176 с.

2. Кочубей А. Н. *Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка* // Дифф. уравн. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1359–1368.
3. Кокурин М. М. *Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши* // Вычисл. методы и прогр. – 2013. – Т. 14. – С. 58–76.
4. Кокурин М. М. *Необходимые и достаточные условия степенной сходимости метода квазиобращения и разностных методов решения некорректной задачи Коши в условиях точных данных* // ЖВМиМФ. – 2015. – Т. 55, № 12. – С. 2027–2041.
5. Кокурин М. М. *Оценки скорости сходимости и погрешности разностных схем решения линейной некорректной задачи Коши второго порядка* // Вычисл. методы и прогр. – 2017. – Т. 18. – С. 322–347.

## FINITE DIFFERENCE METHODS FOR SOLVING CAUCHY PROBLEMS RELATED TO DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATIONS

M.M. Kokurin

*We uniformly build and explore finite difference methods for solving abstract Cauchy problems related with linear homogenous differential operator equations with selfadjoint operators in a Hilbert space. In particular, we consider ill-posed Cauchy problems for the equations of the first and the second order in time and well-posed abstract Cauchy problems for the equations with fractional Caputo derivative. We establish rate-of-convergence estimates for the methods. For the ill-posed Cauchy problems, we obtain error estimates of the finite difference methods in dependence of the error level of the input data. Also we establish necessary and sufficient conditions, close to each other, for convergence of these methods with a certain rate, in terms of the sourcewise index.*

Keywords: Cauchy problem, ill-posed problems, differential operator equations, finite difference scheme, rate of convergence, error estimate, selfadjoint operator, sourcewise condition, fractional Caputo derivative.

УДК 517.54

## КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВОЙ МНОГОУГОЛЬНИК С ГРАНИЧНОЙ НОРМИРОВКОЙ

И.А. Колесников<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [ia.kolesnikov@mail.ru](mailto:ia.kolesnikov@mail.ru); Национальный исследовательский Томский государственный университет

*В работе решается задача построения конформного отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник при наличии граничной нормировке.*

**Ключевые слова:** конформное отображение, уравнение Шварца, круговой многоугольник, акцессорные параметры.

Пусть  $\Gamma(t) = \{w : w = \varphi(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$  – кусочно-гладкая кривая, состоящая из  $\frac{n+1}{2}$  ( $n$  – нечетное натуральное число) дуг окружностей  $\Gamma_*(t) = \{w : w = \varphi(\tau), t_{\frac{n-1}{2}} \leq \tau \leq t\}$ ,  $\Gamma_k = \{w : w = \varphi(\tau), t_{k-1} \leq \tau \leq t_k\}$ ,  $k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ . Здесь  $w = \varphi(\tau)$  – траектория,  $0 \leq t_0 \leq \tau \leq t \leq t_{\frac{n+1}{2}}$ . Обозначим вершины кругового многоугольника  $\Delta(t) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma(t)$  через  $A_0 = \varphi(t)$ ,  $A_1, \dots, A_n$ , возрастание индекса соответствует положительному обходу границы кругового многоугольника  $\Delta(t)$ ,  $\varphi(t_k) = A_{\frac{n+1}{2} \pm k}$ ,  $k = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$ .

Пусть семейство отображений  $w = f(z, t)$ , переводящее верхнюю комплексную полуплоскость  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  на семейство круговых многоугольников  $\Delta(t)$ ,  $f : \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$ ,  $t_2 \leq t \leq t_{\frac{n+1}{2}}$ , удовлетворяет граничной нормировке  $f(0, t) = w_0$ ,  $f(1, t) = w_1$ ,  $f(\infty, t) = w_\infty$ ,  $t_2 \leq t \leq t_{\frac{n+1}{2}}$ ,  $w_0, w_1, w_\infty \in \partial\Delta(t_2)$ . Будем считать, что точки  $w_0, w_1, w_\infty$  не совпадают с вершинами кругового многоугольника  $\Delta(t_2)$ . Прообразы вершин  $A_k$  обозначим через  $a_k$ ,  $a_k = a_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $a_0 = \lambda = \lambda(t)$ . Угол при вершине  $A_k$  обозначим через  $\alpha_k \pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Пусть  $0 < \alpha_k < 2$ ,  $k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ . Заметим, что  $\alpha_0 = \alpha_{\frac{n+1}{2}} = 2$ ,  $\alpha_k = 2 - \alpha_{n+1-k}$ ,  $k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ .

Семейство отображений  $w = f(z, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению Шварца

$$\frac{f'''(z, t)}{f'(z, t)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(z, t)}{f'(z, t)} \right)^2 = \sum_{k=0}^n \left( \frac{L_k}{(z - a_k(t))^2} + \frac{M_k(t)}{z - a_k(t)} \right),$$

где  $L_k = \frac{1}{2}(1 - \alpha_k^2)$ ,  $M_k$  – акцессорные параметры. В настоящей работе решается задача определения параметров  $a_k = a_k(t)$ ,  $M_k = M_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , семейства отображений  $f = w(z, t)$ , удовлетворяющего граничной нормировке при  $t_2 \leq t \leq t_{\frac{n+1}{2}}$ , из верхней полуплоскости на семейство круговых многоугольников  $\Delta(t)$  (без нулевых углов). В работах [1,2] рассмотрен случай отображения полуплоскости на круговой многоугольник при наличии смешанной нормировки. Идея метода восходит к работе [3]. Отображения из полуплоскости на многоугольники с границей из отрезков прямых при наличии граничной нормировке рассмотрены в работе [4].

Пусть при  $t$  стремящемся к  $t_{\frac{n+1}{2}}$  конец  $\varphi(t)$  кривой  $\Gamma = \Gamma(t)$  замыкается на конец  $\varphi(t_0)$  (или на другую точку кривой  $\Gamma$ ). Тогда семейство областей  $\Delta(t)$  имеет два ядра, одно из них – ограниченный круговой многоугольник – обозначим через  $\Delta$ , второе ядро относительно бесконечно удаленной точки – круговой многоугольник  $\Delta_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \cup \Gamma(t_{\frac{n+1}{2}}))$ . Если при замыкании кривой  $\Gamma$  точки границы  $w_0, w_1, w_\infty$  семейства областей  $\Delta(t)$  принадлежат границе многоугольника  $\Delta$  ( $\Delta_\infty$ ), то, согласно теореме Каратеодори [4], семейство отображений  $w = f(z, t)$  сходится к отображению  $f$  верхней полуплоскости на многоугольник  $\Delta$  (соответственно на многоугольник  $\Delta_\infty$ ). Таким образом, решая задачу определения параметров семейства  $w = f(z, t)$ , можем найти отображений полуплоскости на произвольный круговой многоугольник (в том числе многоугольник с жордановой границей).

Будем решать задачу определения параметров семейства  $w = f(z, t)$  пошагово. На первом шаге рассматриваем семейство  $w = f(z, t)$ ,  $t_2 \leq t \leq t_3$ . Заметим, что отображение  $w = f(z, t_2)$  можно записать через элементарные функции. На шаге  $\frac{n+1}{2} - 2$  рассматриваем семейство  $w = f(z, t)$ ,  $\frac{n-1}{2} \leq t \leq \frac{n+1}{2}$ , при этом параметры отображения  $w = f(z, t_{\frac{n-1}{2}})$  известны из предыдущего шага. При  $t_{\frac{n-1}{2}} \leq t \leq t_{\frac{n+1}{2}}$  параметры  $a_k$ ,  $M_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , описывают гладкую кривую, являющуюся интегральной кривой

для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a'_k(t) = \frac{a_k(t)(a_k(t) - 1)}{a_k(t) - \lambda(t)}, & k = 1, \dots, n, \\ \lambda'(t) = 2\lambda(t) - \lambda(t)(\lambda(t) - 1)M_0(t) - 1, \\ M'_k(t) + M_k(t) + \lambda(t)(\lambda(t) - 1) \left( \frac{2L_k}{(a_k(t) - \lambda(t))^3} - \frac{M_k(t)}{(a_k(t) - \lambda(t))^2} \right) = 0, & k = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=0}^n M'_k(t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система имеет на сегменте  $\left[ t_{\frac{n-1}{2}}, t_{\frac{n+1}{2}} \right]$  голоморфное решение относительно  $\tau = \sqrt{t - t_{\frac{n-1}{2}}}$ :

$$\begin{aligned} a_0(\tau) &= \lambda(\tau) = \sigma + \lambda_1\tau + \lambda_2\tau^2 + \lambda_3\tau^3 + \dots, \\ a_k(\tau) &= a_{k0} + a_{k1}\tau + a_{k2}\tau^2 + a_{k3}\tau^3 + \dots, \quad k = 1, \dots, n, \\ M_k(\tau) &= m_{k0} + m_{k1}\tau + m_{k2}\tau^2 + m_{k3}\tau^3 + \dots, \quad k = 2, \dots, n-1, \\ M_k(\tau) &= \frac{m_{k,-1}}{\tau} + m_{k0} + m_{k1}\tau + m_{k2}\tau^2 + \dots, \quad k = 0, 1, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Значения  $a_{10} = a_{n0} = \sigma$ ,  $a_{k0}$ ,  $m_{k0}$ ,  $k = 2, \dots, n-1$ , известны, если известно отображение  $w = f\left(z, t_{\frac{n-1}{2}}\right)$ .

Можем определить коэффициенты рядов (2), подставляя их в систему (1), используя равенство

$$\lambda_2 = (2\sigma - 1) \left( 1 + \frac{\lambda_1^2}{2\sigma(\sigma - 1)} \right) + \sigma(\sigma - 1) \sum_{k=1}^n m_{k0}.$$

и условие

$$|f(z, t) - c| = r, \quad t_{\frac{n-1}{2}} \leq t \leq t_{\frac{n+1}{2}}$$

где  $c$  – центр окружности  $\Gamma_*$ ,  $r$  – ее радиус.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00190\18

## Литература

1. Байбарин Б. Г. Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые многоугольники // Труды Томск. гос. ун-та. – 1966. – Т. 189. – С. 123–136.
2. Kolesnikov I. A. On the problem of determining parameters in the Schwart equation // Probl. Anal. Issues Anal. – 2018. – Vol. 7(25), Special Issue. – P. 49–61
3. Куфарев П. П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля // ДАН СССР. – 1947. – Т. 57, № 6. – С. 535–537.
4. Gutlyanskii V. Ya., Zaidan A. O. On conformal mapping of polygonal regions // Ukr. Math. J. – 1993. – Vol. 45, № 11. – P. 1669–1680.

5. Насыров С. Р. *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей*. – Казань: Магариф, 2008. – 276 с.

#### CONFORMAL MAPPING FROM THE HALF-PLANE ONTO A CIRCULAR POLYGON WITH BOUNDARY NORMALIZATION

I.A. Kolesnikov

*We solve the problem of constructing a conformal mapping from the upper half-plane onto a circular polygon with a boundary normalization.*

Keywords: conformal mapping, Schwarz equation, circular polygon, accessory parameters.

УДК 512.74

#### АБЕЛЕВЫ ПОВЕРХНОСТИ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ С ЗАДАННЫМ ДЕЙСТВИЕМ ФРОБЕНИУСА НА ГРУППУ $L$ -КРУЧЕНИЯ

Н.С. Колесников<sup>1</sup>, С.А. Новоселов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [nikolesnikov@stud.kantiana.ru](mailto:nikolesnikov@stud.kantiana.ru); Балтийский федеральный университет им. И. Канта

<sup>2</sup> [snovoselov@kantiana.ru](mailto:snovoselov@kantiana.ru); Балтийский федеральный университет им. И. Канта

*В статье рассматриваются абелевы поверхности с действием Фробениуса на группе  $l$ -кручения, задаваемым симплектической матрицей. Благодаря исследованию свойств группы симплектических матриц, накладывается ряд ограничений на характеристический многочлен Фробениуса самой поверхности, что позволяет эффективнее производить его вычисление и, как следствие, ускорить алгоритмы для подсчета точек на абелевых поверхностях.*

**Ключевые слова:** абелевы поверхности, эндоморфизм Фробениуса, подсчёт числа точек, симплектические матрицы.

Одним из актуальных направлений современной криптографии является построение криптосистем с применением абелевых многообразий, главным образом якобианов кривых. Однако сдерживающим фактором практической реализации таких криптосистем является недостаточно ясная картина структуры якобианов и трудности подсчета точек в них. Обе эти проблемы в настоящее время решены для частных случаев (например, для случая малой характеристики  $p$  конечного поля  $\mathbb{F}_p$ ).

Наиболее быстрым алгоритмом подсчета точек на эллиптических кривых является алгоритм Шуфа-Элкиса-Аткина [3]. Алгоритм Шуфа был обобщен в [2] до абелевых многообразий. В случае якобианов кривых рода 2 существует специальный алгоритм Годри-Шоста. Алгоритм Шуфа и его обобщения предполагают вычисление характеристического многочлена Фробениуса с помощью китайской теоремы об остатках по известным многочленам действия Фробениуса на подгруппы  $l$ -кручения якобиана. Нахождение последних может быть выполнено перебором всех возможных многочленов. В статье будет приведен способ оптимизации такого перебора.

Перечислим основные теоретические результаты, на которые опираются алгоритмы подсчета точек.

**Теорема (Тейта-Хонды).** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  - абелевы многообразия, определенные над полем  $\mathbb{F}_q$ , их характеристические многочлены Фробениуса равны  $\chi_{\mathcal{A}}$  и  $\chi_{\mathcal{B}}$  соответственно. Тогда:

1.  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{B}}$ ;
2.  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}} | \chi_{\mathcal{B}}$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – абелево многообразие размерности  $g = 2$ , т.е. абелева поверхность, над конечным полем  $k = \mathbb{F}_p$ . В этом случае характеристический многочлен Фробениуса  $\chi_{\mathcal{A}} \in \mathbb{Z}[T]$  имеет вид [3], [5]:

$$\chi_{\mathcal{A}} = T^4 + a_1 T^3 + a_2 T^2 + a_1 p T + p^2, \quad (1)$$

причем согласно теореме Тейта-Хонды, указанный многочлен определяет абелево многообразие с точностью до  $k$ -изогении. Обозначим через  $\text{Hom}_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ,  $\text{End}_k(\mathcal{A})$  - группу  $k$ -гомоморфизмов из  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{B}$ , и кольцо  $k$ -эндоморфизмов многообразия  $\mathcal{A}$  соответственно. Выберем простое число  $l \neq p$  и рассмотрим модуль Тейта [4]  $T_l(\mathcal{A})$  многообразия  $\mathcal{A}$ .

**Теорема (Тейта).** Существует изоморфизм  $\mathbb{Z}_l$ -модулей

$$\text{Hom}_k(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \otimes \mathbb{Z}_l \cong \text{Hom}_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(T_l(\mathcal{A}), T_l(\mathcal{B})). \quad (2)$$

Известно, что  $\mathcal{A}[l] \cong (\mathbb{F}_l)^{2g}$ . Поэтому эндоморфизм Фробениуса действует как линейный оператор на  $\mathbb{F}_l$ -векторном пространстве. Сначала рассмотрим матрицы действия Фробениуса  $(\chi_{\mathcal{A}})_l$  на модуль Тейта  $T_l(\mathcal{A})$ . В [3] описана структура таких матриц. Это матрицы  $F_l \in GL(4, \mathbb{Z}_l)$ , удовлетворяющие следующим свойствам:

1.  $M_l^T F_l M_l = p \cdot M_l$ ;
2.  $M_l$  - кососимметричная матрица;
3.  $\det(M_l)$  - единица в  $\mathbb{Z}_l$ .

Теперь перейдем от модуля  $T_l(\mathcal{A})$  к подгруппе  $l$ -кручения  $\mathcal{A}[l]$ , применяя теорему Тейта. Заметим, что в случае  $p \equiv 1 \pmod{l}$  ограничения на матрицу  $F_l$  примут вид:

1.  $M_l^T F_l M_l = M_l$ ;
2.  $M_l$  - кососимметричная матрица;
3.  $\det(M_l) = 1$ .

Указанные условия означают, что матрица  $F_l \in Sp(4, \mathbb{F}_l)$  – симплектическая матрица. При этом действие Фробениуса на подгруппу  $l$ -кручения задается тем же многочленом  $(\chi_{\mathcal{A}})_l$ . Следовательно, он равен характеристическому многочлену матрицы  $F_l$ . Таким образом, последовательный перебор коэффициентов в (1) можно свести к перебору характеристических многочленов симплектических матриц  $Sp(4, \mathbb{F}_l)$  при малых  $l = 2, 3, 5, \dots$ , таких, что  $p \equiv 1 \pmod{l}$ .

Следует отметить, что для обобщения методов Элкиеса и Аткина для эллиптических кривых на кривые больших родов нам необходимо находить порядки действия Фробениуса  $\phi$  на группу  $l$ -крючения. Причем порядок действия  $r$  определяется как порядок  $F_l$  в  $PSp(4, \mathbb{F}_l)$ , т.к. в этом случае  $\phi^r$  действует как скалярная матрица. Поэтому мы строим и далее рассматриваем группу проективных симплектических матриц  $PSp(4, \mathbb{F}_l)$ .

**Свойство 1.** Характеристический многочлен матрицы  $F_l \in PSp(4, \mathbb{F}_l)$  реверсивен, т.е. имеет вид

$$\chi(F_l) = T^4 + a_1 T^3 + a_2 T^2 + a_1 T + 1. \quad (3)$$

**Свойство 2.** Порядок проективной симплектической группы:

$$\#PSp(2g, \mathbb{F}_l) = l^{g^2} \cdot \frac{\prod_{i=1}^g (l^{2i} - 1)}{\text{НОД}(2, l-1)}. \quad (4)$$

Исходя из свойства 1, всего возможно  $l^2$  вариантов характеристических многочленов. Далее мы рассмотрим порядки матриц  $F_l$  как элементов группы  $PSp(4, \mathbb{F}_l)$ . Несмотря на большое количество делителей порядка (4), возможных порядков в симплектической группе значительно меньше и количество элементов, имеющих тот или иной порядок, распределено неравномерно. Это распределение можно предварительно вычислить. Приведем его для  $l = 2, 3, 5, \dots$

Табл. 1. Характеристические многочлены матриц  $Sp(4, \mathbb{F}_2)$ .

Хар. многочлен	Порядки матриц	Количество матриц	Общее количество
$x^4 + 1$	1	1	256
	2	75	
	4	180	
$x^4 + x^2 + 1$	3	40	160
	6	120	
$x^4 + x^3 + x + 1$	3	40	160
	6	120	
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	5	144	144



Табл. 2. Характеристические многочлены матриц $Sp(4, \mathbb{F}_3)$ .			
Хар. многочлен	Порядки матриц	Количество матриц	Общее количество
$x^4 + 1$	4	6480	6480
$x^4 + x^2 + 1$	2	90	7290
	6	7200	
$x^4 + 2x^2 + 1$	2	540	4860
	6	4320	
$x^4 + x^3 + x + 1$	1	1	6561
	3	800	
	9	5760	
$x^4 + 2x^3 + 2x + 1$	1	1	6561
	3	800	
	9	5760	
$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$	4	540	4860
	12	4320	
$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$	4	540	4860
	12	4320	
$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$	5	5184	5184
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	5	5184	5184

**Заключение.** Приведенные в таблицах многочлены соответствуют многочленам действия Фробениуса на подгруппу  $l$ -кручения при  $p \equiv 1 \pmod{l}$ . Для ускорения работы алгоритма Годри-Шоста необходимо предварительно подобрать такие  $l$ , затем осуществлять перебор возможных многочленов  $(\chi_{\mathcal{A}})_l$  в порядке увеличения вероятности их отыскания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00244.

## Литература

1. Pila J. *Frobenius maps of abelian varieties and finding roots of unity in finite fields* // Mathematics of Computation. – 1990. – Vol. 55, № 192. – P. 745-763.
2. Rück H.-G. *Abelian surfaces and jacobian varieties over finite fields* // Compositio Mathematica. – 1990. – Vol. 76, № 3. – P. 351-366.
3. Schoof R. *Counting points on elliptic curves over finite fields* // J. Theor. Nombres Bordeaux. – 1995. – Vol. 7, № 1. – P. 219-254.
4. Tate J. *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields* // Invent. Math. – 1966. – Vol. 2. – P. 134-144.
5. Waterhouse W. *Abelian varieties over finite fields* // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1969. – V. 4, № 2. – P. 521-560.

## ABELIAN SURFACES OVER A FINITE FIELD WITH PRESCRIBED FROBENIUS ACTION ON $L$ -TORSION SUBGROUP

N.S. Kolesnikov, S.A. Novoselov

*In this paper we study abelian surfaces over finite fields with symplectic action of Frobenius on its  $l$ -torsion. We obtain some restrictions on the Frobenius polynomial of a general abelian surface by*

*observing specific properties of symplectic matrices. It makes a computation of a Frobenius polynomial faster.*

Keywords: Abelian surfaces, Frobenius endomorphism, symplectic matrices, point counting.

УДК 519.6

## ОБ УСКОРЕНИИ ПРОЦЕССА ВЫХОДА НА СТАЦИОНАР РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ВЯЗКОГО ГАЗА

А.А. Корнев<sup>1</sup>, М.А. Ложников<sup>2</sup>

<sup>1</sup> kornev@mech.math.msu.su; МГУ им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> lozhnikovma@gmail.com; МГУ им. М.В. Ломоносова

*Для полуявной разностной схемы, аппроксимирующей систему уравнений динамики одномерного вязкого баротропного газа, получены явные формулы для алгоритма стабилизации по начальным данным к стационарному решению методом нулевого приближения. Для соответствующей линеаризованной на стационарном решении задачи исследован спектр и найдены теоретические оценки сходимости. Для нелинейной задачи проведены численные эксперименты, подтверждающие работоспособность метода, и отражающие зависимость скорости стабилизации от параметров исходной задачи и параметров алгоритма.*

**Ключевые слова:** газовая динамика, разностные схемы, стабилизация, начальные данные, метод нулевого приближения, численное проектирование.

В настоящей работе теоретически и численно решена задача стабилизации конечно-разностных нелинейных уравнений динамики вязкого баротропного газа по начальным данным методом нулевого приближения. Данная работа является продолжением [1]. Рассмотрим систему уравнений динамики вязкого баротропного газа

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} (\rho, u)|_{t=0} &= (\rho_0, u_0), \quad x \in \Omega = [0, L]; \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Здесь искомые величины — плотность  $\rho$ , давление  $p$  и скорость  $u$  являются функциями переменных Эйлера  $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ , а величина  $\mu$  характеризует вязкость газа. Связь между давлением и плотностью положим степенной, т.е.  $p = C_p \rho^\gamma$ , где  $C_p$  — некоторая положительная константа,  $\gamma \geq 1$  — показатель адиабаты Пуассона.

Для данной задачи построим полуявную разностную схему типа А.Г. Соколова [2] на смещенных сетках В.И. Лебедева с шагом  $h$  по пространству и шагом  $\tau$

по времени:

$$\begin{cases} \rho_t + (\{\hat{\rho}, u\}u)_x = 0, & i = 0, \dots, M-1; \\ (\bar{\rho}u)_t + \frac{1}{4} \left( (\{\hat{\rho}, u\}(\hat{u} + \hat{u}_{(-1)})u)_x + (\{\hat{\rho}, u\}(\hat{u} + \hat{u}_{(+1)})u)_{\bar{x}} \right) + C_p D_p(\hat{\rho}, u) - \\ - \mu \hat{u}_{x\bar{x}} = 0, & i = 1, \dots, M-1, \end{cases}$$

где  $\bar{\rho} = (\rho_i + \rho_{i-1})/2$ ,

$$\{\zeta, u\}_i = \begin{cases} \zeta_i, & u_i < 0; \\ \zeta_{i-1}, & u_i \geq 0, \end{cases} \quad D_p(\rho, u) = \begin{cases} \{\rho, u\}(\ln \rho)_{\bar{x}}, & \gamma = 1; \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \{\rho, u\}(\rho^{\gamma-1})_{\bar{x}}, & \gamma > 1. \end{cases}$$

Линеаризация этой схемы в окрестности стационарного решения  $(\rho_{st}, 0)$  имеет вид

$$\begin{cases} \rho_t + \sigma_\rho u_x = 0, & i = 0, \dots, M-1; \\ u_t + \sigma_u \hat{\rho}_{\bar{x}} - \mu \hat{u}_{x\bar{x}} = 0, & i = 1, \dots, M-1, \end{cases}$$

где  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_u$  — некоторые постоянные величины.

Метод нулевого приближения заключается в том, чтобы заменить задачу стабилизации нелинейной системы, на задачу стабилизации ее линеаризации в окрестности стационарного решения  $(\rho_{st}, 0)$ . Специфика смещенных сеток позволяет найти решение  $\mathbf{w}_m^n = (\rho_m^n, u_m^n)$  линеаризованной сеточной задачи методом Фурье в виде

$$\rho_m^n = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^n \cos\left(\frac{\pi k(m + \frac{1}{2})h}{L}\right), \quad u_m^n = \sum_{k=1}^{M-1} b_k^n \sin\left(\frac{\pi kmh}{L}\right).$$

Подставив данное разложение в линеаризованную разностную задачу, получим, что для каждого  $k = 1, \dots, M-1$  система распадается на отдельные подсистемы размерности  $2 \times 2$  относительно вектора искомых коэффициентов  $a_k^n, b_k^n$ :

$$(E - \tau A) \begin{pmatrix} a_k^{n+1} \\ b_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k^n \\ b_k^n \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} \tau \sigma_\rho \sigma_u r_k^2 & -\sigma_\rho r_k (1 + \tau \mu r_k^2) \\ \sigma_u r_k & -\mu r_k^2 \end{pmatrix},$$

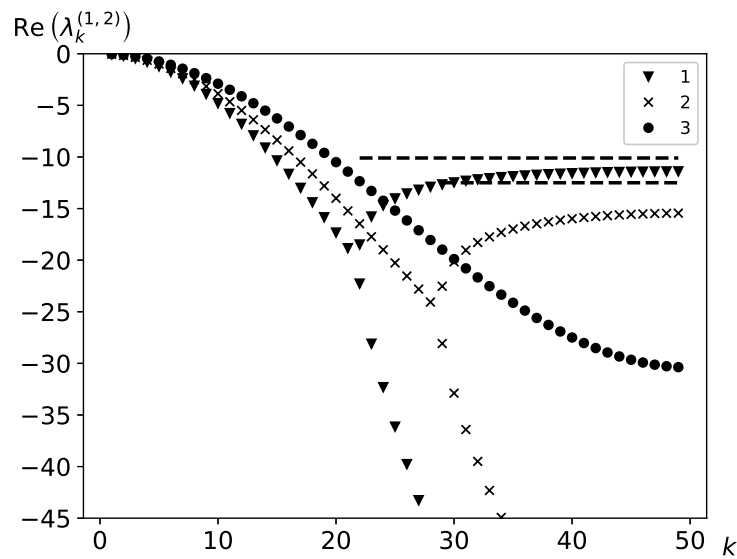
$r_k = \frac{2}{h} \sin \frac{\pi kh}{2L}$ . На рис. 1 изображены действительные части спектра  $\Lambda$  матрицы  $A$  при различных значениях шага по времени  $\tau$ .

Опишем процедуру увеличения скорости выхода на стационар линеаризованной задачи. Перенумеруем собственные значения матрицы  $A$  таким образом, что для некоторого фиксированного  $i_0$  были выполнены следующие соотношения:

$$\text{Re } \lambda_1^+ \geq \text{Re } \lambda_2^+ \geq \dots \geq \text{Re } \lambda_{i_0}^+ = -\delta, \quad \text{и} \quad \text{Re } \lambda_j^- < -\delta \text{ при } j > i_0.$$

Тогда множество собственных значений  $\Lambda$  можно разбить на два непересекающихся подмножества  $\Lambda_+ = \{\lambda_0^+ = 0, \lambda_j^+, j = 1, \dots, i_0\}$  и  $\Lambda_- = \{\lambda_j^-, j > i_0\}$ . Следовательно исходное пространство  $H$  сеточных функций, определенных в узлах сетки  $\Omega_h$ , раскладывается в прямую сумму подпространств:  $H = H_+ \oplus H_-$ , где

$$H_+ = \text{span} \langle \Psi_j^+ : \lambda_j^+ \in \Lambda_+ \rangle, \quad H_- = \text{span} \langle \Psi_j^- : \lambda_j^- \in \Lambda_- \rangle,$$



**Рис. 1.** Спектр  $\Lambda$  при  $\sigma_\rho = \sigma_u = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $M = 50$ : 1 –  $\tau = 0.001$ , 2 –  $\tau = 0.02$ , 3 –  $\tau = 0.04$ .

$\Psi_j$  является собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda_j$ . Таким образом, для обеспечения скорости выхода на стационар, равной  $\ln(1 - \tau\delta)$ , необходимо спроектировать начальные условия на подпространство  $H_-$ , то есть вырезать из начальных данных  $i_0$  гармоник  $\Lambda_+$ .

В заключение представим численные результаты на примере задачи стабилизации исходной нелинейной сеточной задачи с начальными условиями типа скачок скорости. Положим

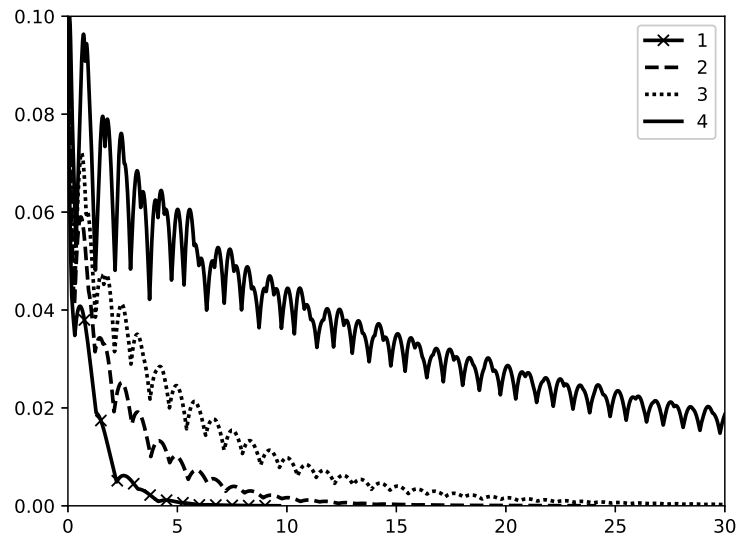
$$\rho_m^0 = 1, \quad m = 0, \dots, M-1; \quad u_m^0 = \begin{cases} 0.1, & |x_m - L/2| < \pi/14; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad m = 1, \dots, M-1.$$

Данная задача имеет стационарное решение  $\mathbf{w}_{st} = (1, 0)$ . Функции сдвига, используемые при численном проектировании, определим на промежутке  $[0, X_1] \cup [X_2, L]$ ,  $0 < X_1 < X_2 < L$ , перепроектирование решения на устойчивое подпространство  $H_-$  линеаризованной задачи будем производить на каждом шаге по времени.

На рисунке 2 изображена зависимость нормы  $\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_{st}\|_{h,\infty}$  решения нелинейной разностной задачи с начальными условиями типа скачок скорости от времени при различных значениях вязкости  $\mu$ . В данном эксперименте используются следующие параметры:  $M = 400$ ,  $L = 1.6\pi$ , число вырезаемых гармоник  $i_0 = 5$ ,  $X_1 = 0.3\pi$ ,  $X_2 = 1.3\pi$ ,  $C_p = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\tau = 0.005$ .

## Литература

1. Жуков К. А., Корнев А. А., Попов А. В. Об ускорении процесса выхода на стационар решений линеаризованной системы динамики вязкого газа. I, II // Вестник МГУ. – 2018. – № 1. – С. 26–32; № 3. – С. 3–8.
2. Имранов Ф. Б., Кобельков Г. М., Соколов А. Г. О разностной схеме для уравнений баротропного газа // Докл. РАН. – 2018. – Т. 478, № 4. – С. 388–391.



**Рис. 2.** Норма  $\|w^n - w_{st}\|_{h,\infty}$  в зависимости от времени: кривая 1 соответствует  $\mu = 0.5$ , 2 —  $\mu = 0.2$ , 3 —  $\mu = 0.1$ , 4 —  $\mu = 0.02$ .

#### ON ACCELERATION OF THE PROCESS OF REACHING THE STEADY STATE SOLUTION OF VISCOUS GAS

A.A. Kornev, M.A. Lozhnikov

*The explicit formulae of the algorithm of the stabilization for a semi-implicit difference scheme for 1D viscous isentropic gas by initial conditions to the steady solution by means of the zero approximation method are established. The spectrum of the linearized problem is investigated and the theoretical estimates of the convergence of the linearized problem are obtained. The numerical experiments verifying the method and showing the dependence of the stabilization rate on the parameters of the initial problem and the parameters of the method are carried out.*

Keywords: gas dynamics, difference schemes, stabilization, initial conditions, zero approximation method, numerical projection.

УДК 510.532

#### АВТОМАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СВЕРХСЛОВ СО СВОЙСТВАМИ ПРЕФИКСНОЙ И БЮХИ-РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ КОНТЕКСТНО-СВОБОДНЫХ ЯЗЫКОВ

Н.Н. Корнеева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [natalia.korneeva@kpfu.ru](mailto:natalia.korneeva@kpfu.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

*В работе рассматриваются автоматные сводимости на сверхсловах, для которых разрешимы некоторые алгоритмические задачи. Рассматриваются задачи префиксной и Бюхи-разрешимости относительно некоторых естественных классов языков. Разрешимость таких задач связана с разрешимостью некоторых теорий второго порядка сверхслов.*

**Ключевые слова:** автоматные преобразования, автомат Мили, асинхронный автомат, морфизм, префиксная разрешимость, Бюхи-разрешимость.

В [1] было введено понятие префиксной и Бюхи-разрешимости сверхслов. Сверхслово называется префиксно разрешимым ([1]), если для любого регулярного языка можно определить, существует ли префикс сверхслова, принадлежащий этому языку. Сверхслово называется Бюхи-разрешимым ([1]), если для любого регулярного языка можно определить, бесконечно ли пересечение данного языка и множества префиксов сверхслова. Очевидно, что Бюхи-разрешимые сверхслова являются префиксно разрешимыми. Известно, что Бюхи-разрешимые сверхслова – это в точности сверхслова с разрешимой монадической теорией второго порядка ([2]), т. е. теорией второго порядка, в которой разрешены переменные и кванторы по этим переменным только для унарных предикатов. В данной работе понятия префиксной и Бюхи-разрешимости вводятся для класса контекстно-свободных языков и некоторых его подмножеств.

Контекстно-свободные языки – это в точности языки, распознаваемые недетерминированными автоматами с магазинной памятью. В случае автоматов с магазинной памятью класс языков, распознаваемых недетерминированными автоматами, шире класса языков, распознаваемых детерминированными автоматами. Кроме того, для автоматов с магазинной памятью различают распознаваемость по допускающему состоянию и по пустому магазину, что в детерминированном случае также приводит к разным классам распознаваемых языков. В работе рассматриваются классы языков, распознаваемых разными типами автоматов с магазинной памятью. Все необходимые определения и соотношения между классами языков можно найти, например, в [3].

Обозначим через  $\mathcal{L}_{\mathcal{C}\mathcal{F}}$  класс контекстно-свободных языков,  $\mathcal{L}_{AS}(\subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{C}\mathcal{F}})$  – класс языков, распознаваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью по допускающему состоянию,  $\mathcal{L}_{NS}(\subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{C}\mathcal{F}})$  – класс языков, распознаваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью по пустому магазину.

**Определение 1.** Сверхслово называется  $\mathcal{L}$ -префиксно разрешимым (где  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{C}\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{L}_{AS}$  или  $\mathcal{L}_{NS}$ ), если для любого языка из  $\mathcal{L}$  можно определить, существует ли префикс сверхслова, принадлежащий этому языку.

**Определение 2.** Сверхслово называется  $\mathcal{L}$ -Бюхи-разрешимым (где  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{C}\mathcal{F}}$  или  $\mathcal{L}_{AS}$ ), если для любого языка из  $\mathcal{L}$  можно определить, бесконечно ли пересечение данного языка и множества префиксов сверхслова.

Полагая в определениях 1 и 2, что  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{R}}$  – класс регулярных языков, получим определения из [1].

Поскольку языки задаются при помощи автоматов, их распознающих, то можно считать, что сверхслово  $\mathcal{L}$ -префиксно разрешимо, если по любому автомату с магазинной памятью (недетерминированному/детерминированному, распознающему язык по допускающему состоянию/детерминированному, распознающему язык по пустому магазину) можно определить, проходит ли он при чтении сверхслова через допускающее состояние (соответственно, в третьем случае – опустошает ли он магазин). Аналогично, сверхслово  $\mathcal{L}$ -Бюхи-разрешимо, если по любому автомату с магазинной памятью (недетерминированному/детерминированному, рас-

познающему язык по допускающему состоянию) можно определить, проходит ли он при чтении сверхслова через допускающее состояние бесконечно часто. Случай  $\mathcal{L}_{NS}$ -Бюхи-разрешимости не рассматривается, так как после первого опустошения магазина автомат останавливается. Известно, что  $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{F}}$ -Бюхи-разрешимость сверхслова эквивалентна разрешимости теории второго порядка этого сверхслова, в котором разрешены переменные и кванторы по ним только для бинарных предикатов специального вида, названных "сопоставлениями" ([4]).

Будем рассматривать действие автоматных преобразователей на сверхслова с указанными свойствами разрешимости. Автоматные преобразования определяются при помощи конечных автоматов Мили или конечных асинхронных автоматов.

**Определение 3.** Конечным асинхронным автоматом называется набор  $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$ , где  $S, \Sigma, \Sigma'$  – конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно;  $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$  – функция переходов;  $\delta : S \times \Sigma \rightarrow (\Sigma')^*$  – функция выходов. Если выделено начальное состояние  $s_0$ , то автомат  $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$  называется инициальным.

В случае автомата Мили отличается только функция выхода –  $\delta : S \times \Sigma \rightarrow \Sigma'$ , т. е. автомат Мили каждой букве входного слова ставит в соответствие одну букву выходного слова, а асинхронный автомат каждой букве входного слова ставит в соответствие слова из символов выходного алфавита произвольной длины (в том числе и пустое слово).

Очевидно, что действие асинхронного автомата можно представить как суперпозицию действия автомата Мили и морфизма. При этом морфизм может быть реализован автоматом (асинхронным) с одним состоянием. В работе доказано, что при действии асинхронного автомата упомянутые выше свойства разрешимости сверхслов сохраняются. Доказательство проводится в два этапа – доказываемся сохранение свойств разрешимости сначала при действии конечного автомата Мили, потом – при действии автомата, реализующего морфизм. Таким образом, доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$  – конечный инициальный автомат Мили или конечный инициальный асинхронный автомат,  $x \in \Sigma^\infty$  –  $\mathcal{L}$ -префиксно разрешимое сверхслово (где  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{L}_{AS}$  или  $\mathcal{L}_{NS}$ ). Тогда  $\omega(s_0, x) \in (\Sigma')^\infty$  –  $\mathcal{L}$ -префиксно разрешимое сверхслово.

**Теорема 2.** Пусть  $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$  – конечный инициальный автомат Мили или конечный инициальный асинхронный автомат,  $x \in \Sigma^\infty$  –  $\mathcal{L}$ -Бюхи разрешимое сверхслово (где  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{F}}$  или  $\mathcal{L}_{AS}$ ). Тогда  $\omega(s_0, x) \in (\Sigma')^\infty$  –  $\mathcal{L}$ -Бюхи разрешимое сверхслово.

Аналогичные результаты для  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ -префиксно разрешимых сверхслов получены в [5], для  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ -Бюхи-разрешимых сверхслов – в работах [6] и [7] соответственно для сводимости, определяемой автоматами Мили и асинхронными автоматами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00420 мол\_а).

## Литература

1. Вялый М. Н., Рубцов А. А. Алгоритмическая разрешимость задач о поведении автоматов на сверхсловах // Дискретн. анализ и исслед. опер. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 3–18.

2. Buchi J.R. *On a decision method in restricted second-order arithmetic* // Proc. Int. Congress Logic, Methodology, and Philosophy of Science. – Palo Alto: Stanford Univ. Press, 1962. – P. 1–11.
3. Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Дж. *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2002. – 528 с.
4. Lautemann C., Schwentick Th., Therien D. *Logics for context-free languages* // In: Pacholski L., Tiuryn J. (eds) Computer Science Logic. CSL 1994. Lecture Notes in Computer Science. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. – V. 933. – P. 205–216.
5. Корнеева Н. Н. *Автоматные преобразования префиксно разрешимых и разрешимых по Бюхи сверхслов* // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 7. – С. 55–65.
6. Байрашева В. Р. *Степени автоматных преобразований почти периодических сверхслов и сверхслов с разрешимой монадической теорией* // Казань, 1989. – 29 с. – Деп. в ВИНТИ 11.05.1989 № 3103–В89.
7. Корнеева Н. Н. *Об автоматных преобразованиях и монадических теориях бесконечных последовательностей* // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 8. – С. 90–93.

#### AUTOMATA TRANSFORMATIONS OF SUPERWORDS WITH PROPERTIES OF PREFIX AND BUCHI-DECIDABILITY FOR CONTEXT-FREE LANGUAGES

N.N. Korneeva

*In the paper we consider automata reducibilities on superwords with some decidable algorithmic problems. We consider prefix and Buchi-decidability problems for some natural classes of languages. The decidability of such problems is associated with decidability of some second order theories of superwords.*

Keywords: automata transformations, Mealy automaton, asynchronous automaton, morphism, prefix decidability, Buchi-decidability.

УДК 534.015.1; 534-6

#### АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ДВУМЕРНОЙ МЕМБРАНЫ БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАТЯЖЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И.П. Королева<sup>1</sup>, И.Н. Дворянинов<sup>2</sup>, Л.И. Маневич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> irakikotx@gmail.com; Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва

<sup>2</sup> dezork@yandex.ru; МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

<sup>3</sup> manevitchleonid3@gmail.com; Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва

*В статье обсуждается асимптотический подход к анализу динамики двумерной мембраны, который применим, когда правые части редуцированных уравнений движения не содержат линейных членов. Рассмотрен наиболее важный предельный случай, соответствующий доминированию резонансных низкоэнергетических поперечных колебаний. Поскольку такие колебания описываются приближенными уравнениями, которые содержат лишь кубические члены, фактически поперечная динамика реализуется в условиях акустического вакуума. В работе проанализированы нелинейные нормальные моды редуцированной системы, их устойчивость и возможность энергообмена между частями системы. Результаты, полученные при асимптотическом анализе, подтверждаются численным интегрированием исходной нелинейной системы.*

**Ключевые слова:** асимптотический анализ, нелинейная динамика, нелинейные нормальные моды, акустический вакуум.



## 1. Введение

Нелинейная динамика систем, функционирующих в условиях акустического вакуума или близких к ним, интересна в связи с возможностью их использования в качестве энергетических ловушек повышенной эффективности с широким спектром частот [1, 2]. Системы такого рода могут иметь различную размерность и конфигурацию; так, авторами рассматривались: две частицы с подложкой [3, 4], струна без подложки [5], струна с подложкой [6, 7], струна с изгибной жесткостью [8, 9]. Общее для таких систем - отсутствие линейных членов в редуцированных уравнениях движения. Благодаря этому частоты колебаний определяется только их амплитудой, что позволяет существенно расширить область резонансных взаимодействий энергетической ловушки и защищаемой конструкции (подобная ловушка, соединенная с испытывающей действие интенсивных импульсов линейной системой, неизбежно резонирует с последней при уменьшении амплитуды ее колебаний из-за диссипации энергии), обеспечивая эффективный перенос колебательной энергии к ловушке. Сколь-нибудь заметный обратный ее поток также отсутствует вследствие вызванного диссипацией энергии уменьшения амплитуды колебаний ловушки (поскольку парциальная частота колебаний ловушки определяется их амплитудой). Данный сценарий подтверждается как численным моделированием, так и натурными экспериментами [10].

## 2. Уравнения движения и их сведение к акустическому вакууму

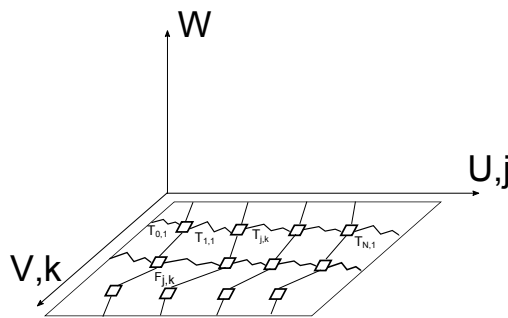


Рис. 1. Схематическое изображение двумерной мембраны

Запишем уравнения движения двумерной мембраны

$$\begin{aligned}
 m\ddot{U}_{j,k} &= T_{j,k} \cos \theta_{j,k} \cos \varphi_{j,k} - T_{j-1,k} \cos \theta_{j-1,k} \cos \varphi_{j-1,k} + \\
 &\quad F_{j,k-1} \cos \zeta_{j,k-1} \sin \psi_{j,k-1} - F_{j,k-1} \cos \zeta_{j,k} \sin \psi_{j,k} \\
 m\ddot{V}_{j,k} &= T_{j,k} \cos \theta_{j,k} \sin \varphi_{j,k} - T_{j-1,k} \cos \theta_{j-1,k} \sin \varphi_{j-1,k} + \\
 &\quad F_{j,k-1} \cos \zeta_{j,k-1} \cos \psi_{j,k-1} - F_{j,k} \cos \zeta_{j,k} \cos \psi_{j,k} \\
 m\ddot{W}_{j,k} &= T_{j,k} \sin \theta_{j,k} - T_{j-1,k} \sin \theta_{j-1,k} + F_{j,k-1} \sin \zeta_{j,k-1} - F_{j,k} \sin \zeta_{j,k}
 \end{aligned}$$

Здесь  $j$  – порядковый номер частицы в одном направлении,  $k$  – в другом  $j, k = 1, 2$  (см. рис. 1). Силы натяжения определяются законом Гука:

$$T_{j,k} = \frac{K_1}{l} \left[ \sqrt{(U_{j+1,k} - U_{j,k} + l)^2 + (V_{j+1,k} - V_{j,k})^2 + (W_{j+1,k} - W_{j,k})^2} - l \right]$$

$$F_{j,k} = \frac{K_2}{l} \left[ \sqrt{(V_{j,k+1} - V_{j,k} + l)^2 + (U_{j,k+1} - U_{j,k})^2 + (W_{j,k+1} - W_{j,k})^2} - l \right]$$

Данная система очень сложна и не допускает аналитического решения. Однако наиболее интересны для применений низкочастотные, низкоэнергетические колебания в направлении, перпендикулярном плоскости мембраны, когда амплитуда поперечных колебаний много меньше равновесного расстояния между частицами  $l$ . Таким образом, мы можем ввести малый параметр  $\varepsilon = a/l$ . Проводя асимптотический анализ, выделяя малые величины разных порядков и вводя нормированные смещения  $W_{j,k} = \varepsilon w_{j,k}$ ,  $k = \frac{K}{2ml^3}$  и медленное время  $\tau_0 = \varepsilon t$ , получаем следующие уравнения для поперечных колебаний:

$$\frac{d^2 w_{j,k}}{d\tau_0^2} + \frac{k}{2N(N+1)} \sum_{\text{allbonds}} (w_{s+1,k} - w_{s,k})^2 [4w_{j,k} - w_{j-1,k} - w_{j+1,k} - w_{j,k-1} - w_{j,k+1}] = 0. \quad (1)$$

Далее мы рассматриваем данную систему в случае мембраны  $2 \times 2$ . Более подробно эта методика описана в статьях [3–5].

### 3. Нелинейные нормальные моды и их устойчивость

Нелинейные нормальные моды в мембране  $2 \times 2$  аналогичны модам системы двух осцилляторов, то есть синфазной и антифазной, однако в связи с увеличением размерности их число возрастает до четырех. Введем модальные координаты следующим образом:

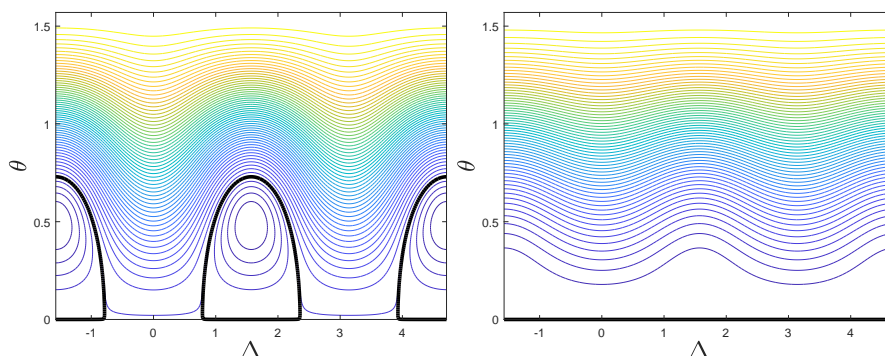
$$A_1 = w_{1,1} + w_{1,2} + w_{2,1} + w_{2,2}, A_2 = w_{1,1} + w_{1,2} - w_{2,1} - w_{2,2}$$

$$A_3 = w_{1,1} - w_{1,2} + w_{2,1} - w_{2,2}, A_4 = w_{1,1} - w_{1,2} - w_{2,1} + w_{2,2}$$

Предположим, что система совершает колебания на некоторой несущей частоте  $\omega_0$ , при этом амплитуда изменяется во времени (модуляции). Таким образом, будем искать решение в виде  $A_j + i\omega_0 \dot{A}_j = \phi_j(\tau_1) e^{i\omega_0 \tau_0}$ . Здесь  $\tau_1 = \varepsilon \tau_0$  – сверхмедленное время. Асимптотический анализ позволяет получить систему ОДУ для комплексных амплитуд  $\phi_j(\tau)$ . Для каждой пары мод можно рассмотреть двухмодовое многообразие и в полученной системе ввести угловые переменные  $\theta, \Delta$  следующим образом:

$$\phi_k = \sqrt{N} \cos \theta e^{i\delta_1}, \phi_m = \sqrt{N} \sin \theta e^{i\delta_2}, \Delta = \delta_2 - \delta_1, N = |\phi_k|^2 + |\phi_m|^2 = \text{const.}$$

Методика использования угловых переменных подробно описана в работах [3–5], основной смысл этих переменных следующий:  $\text{tg} \theta$  описывает соотношение амплитуд,  $\Delta$  – разность фаз. Фазовая плоскость в этих переменных представлена на рис. 2. Видны два различных сценария. На левом рисунке представлена фазовая плоскость для 2 и 4 моды (аналогичную топологию имеет фазовая плоскость для мод 3 и 4, 1 и 2, 1 и 3), когда существует равновесная точка. В этом случае возможен энергообмен



**Рис. 2.** Фазовая плоскость в угловых переменных для двухмодового приближения. Левый рисунок - 1 и 2(3), 2(3) и 4 моды, когда существует равновесная точка и возможен энергообмен; правая - 1 и 4, когда нет точки равновесия.

между 2-ой модой (т.е.  $\theta = 0$ ) и 4-ой ( $\theta = \pi/2$ ). В этом случае 2-ая мода оказывается неустойчивой и может обмениваться энергией с 4-ой модой. На правом рисунке показан случай, когда равновесной точки нет и энергообмен невозможен. Этот вариант реализуется для 1-ой и 4-ой моды. Таким образом, при начальном возбуждении одной из мод идет каскадный перенос энергии на более высокоэнергетические моды, что наблюдалось ранее для одномерной цепочки с подложкой ([7]). Данный сценарий подтверждается также численным интегрированием системы акустического вакуума (1).

#### 4. Выводы

В данной работе проводится асимптотический анализ динамики двумерной мембраны при отсутствии предварительного натяжения и доминирования поперечных (ортогональных плоскости мембраны) колебаний. Кратко описана методика многомасштабного разложения по времени. Рассмотрены нелинейные нормальные моды системы и исследована их устойчивость. Данные результаты являются важным шагом на пути построения эффективной энергетической ловушки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-38-00789 мол\_а), Программы фундаментальных исследований Российской академии наук (проект № 0082-2014-0013, государственный регистрационный номер ААААА17-117042510268-5).

#### Литература

1. Vakakis A.F., Gendelman O.V., Kerschen G., Bergman L.A., McFarland M.D., Lee Y.S. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. – Springer, 2008.
2. Gammaitoni L., Neri I., Vocca H. *Nonlinear oscillators for vibration energy harvesting* // Applied Physics Letters. – 2009. – V. 94, № 16. – P. 164102.
3. Kikot I.P., Manevitch L.I. *Coupled oscillators on elastic support in conditions of acoustic vacuum* // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2014. – V. 10. – P. 245–263, 2014.
4. Koroleva(Kikot) I.P., Manevitch L.I., Vakakis A.F. *Non-stationary resonance dynamics of a nonlinear sonic vacuum with grounding supports* // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – P. 349–364.

5. Manevitch L.I., Vakakis A.F. *Nonlinear oscillatory acoustic vacuum* // SIAM Journal. – 2014. – V. 74, P. 1742–1762.
6. Koroleva(Kikot) I.P., Manevitch L.I. *Oscillatory chain with grounding support in conditions of acoustic vacuum* // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2015. – V. 11, № 3. – P. 487–502.
7. Zhen Zhang, Koroleva I., Manevitch L.I., Bergman L.A., Vakakis A.F. *Nonreciprocal acoustics and dynamics in the in-plane oscillations of a geometrically nonlinear lattice* // Physical Review E. – 2016. – V. 94, № 3. – P. 032214.
8. Silina K.G., Kikot I.P., Manevitch L.I. *Energy exchange and localization in the planar motion of a weightless beam carrying two discrete masses* // Regular and Chaotic Dynamics. – 2015. – V. 20, № 2. – P. 109–122.
9. Koroleva I.P., Manevitch L.I. *Is energy localization possible in the conditions of non-local acoustic vacuum?* // Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials. – Springer, 2019, P. 25–38.
10. Kevorkov S.S., Koroleva(Kikot) I.P. et al. *Efficiency of a Three-particle Energy Sink: Experimental Study and Numerical Simulation* // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2018. – V. 14, № 3. – P. 355–366.

#### ANALYSIS OF DYNAMICS OF 2D DISCRETE MEMBRANE WITHOUT PRELIMINARY STRETCHING USING ASYMPTOTIC ANALYSIS

I.P. Koroleva, I.N. Dvoryaninov, L.I. Manevitch

*This paper considers essentially nonlinear dynamics of 2D square isotropic discrete membrane in the most important case corresponding to absence of preliminary stretching and to domination of resonance low-amplitude oscillations. Since such oscillations are described by equations lacking linear term, the dynamics of the system is realised in conditions of acoustic vacuum. Nonlinear normal modes are analyzed with respect to their stability. The analytical results are confirmed numerically by the integration of both asymptotic and initial equations of motion.*

Keywords: nonlinear dynamics, acoustic vacuum, nonlinear normal modes, asymptotic analysis.

УДК 37.014

#### ОБ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И СТАНОВЛЕНИЯ ЕГЭ

Т.И. Косенкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> rapirafe@mail.ru; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, механико – математический факультет

*Единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике уже около 10 лет, ежегодно он проходит через систему разнообразных усовершенствований, но по-прежнему остается предметом споров среди политиков, педагогов различных уровней образования, родителей и учащихся. Статья посвящена основным этапам становления ЕГЭ, охватывающим период со второй половины XIX века до начала XXI века; подробно рассмотрен период образовательных реформ девяностых годов XX века.*

**Ключевые слова:** математическое образование, история математического образования, единый государственный экзамен, экзамен на зрелость.

Истоки единого государственного экзамена (ЕГЭ) уходят корнями в ту историческую эпоху (XIX век), когда выпускной экзамен признавался экзаменом на зрелость [1], целью которого была «итоговая проверка умственного развития гимназиста с целью определения возможности его дальнейшего образования в высших

учебных заведениях. Выдержавший эти экзамены гимназист получал аттестат (свидетельство) зрелости, дающее право на поступление в любое высшее учебное заведение страны без экзамена, абсолютно на любой факультет, а также предоставляющий преимущества по гражданской и военной службе» [2, с. 89].

Новейшая история с учётом опыта российской системы образования второй половины XIX века даёт возможность проследить истоки современной версии единого экзамена [3], к которым мы относим, в первую очередь, образовательные реформы начала 1990-х годов по массовой дифференциации школ на гимназии, лицеи, школы с углубленным изучением отдельных предметов. Ленинградские педагоги-математики Марк Иванович Башмаков и Александр Поэлевич Карп в газете «Математика в школе» формулируют следующую проблему: «Сегодня, когда разрушается единообразие среднего образования, когда стремительно возрастает число всевозможных гимназий, лицеев, школ при вузов и т.п., приходит время всерьез задуматься над тем, что же объединяет различные типы учебных заведений. Есть нужда в организации итоговых экзаменов, задающих уровень подготовки по основным предметам, достижение которого (самыми различными путями) и означает приобретение среднего образования. Заметим, что в Западной Европе сложилась система таких экзаменов, успешная сдача которых дает и право поступления в вуз» [4, с. 60]. Попытки решения данной проблемы в конечном итоге привели отечественную систему общего образования к единому государственному экзамену. Этому предшествовали следующие эпохальные для отечественного образования события (перечислим их в хронологическом порядке).

Ленинградское математическое общество «ЛМО» выступает с инициативой проведения в специализированных школах экспериментального выпускного экзамена, и с разрешения руководства Минпроса РСФСР в 1990-1998 гг. в некоторых школах Москвы, Московской области и Санкт-Петербурга (до 1991 года – Ленинград) организуется экспериментальное проведение письменного экзамена по алгебре и началам анализа. Первый экспериментальный экзамен состоялся в мае 1990 года примерно в 30 ведущих школ Ленинграда; в целом выпускники сдали его весьма успешно; многие ведущие вузы засчитали его в качестве вступительного. Новая нетрадиционная форма его проведения показалась тогда весьма удачной: «Из предлагаемых 5 задач две первые надо было решить обязательно, а из «сюжетов на выбор» учащийся мог рассмотреть какой-либо один. Таким образом, каждый выпускник составлял «свой» вариант из 12 пунктов (по 4 пункта – а, б, в, г – в каждом из заданий 1, 2, и 3). Так достигался учет особенностей программ в различных школах при сохранении общего базиса. Продолжительность экзамена составила 4 ч. (240 мин.). Для получения оценки «отлично» требовалось верно выполнить любые 10 пунктов из выбранных 12» [4, с. 60].

В 1993 году в лицеях, гимназиях, колледжах и других общеобразовательных учреждениях с углубленным изучением предмета, кроме экзаменов по обязательным предметам (литературе, алгебре и началам анализа), проводится итоговая аттестация по профильным предметам; кроме того, в общеобразовательных учреждениях, работающих с ВУЗами в составе различных учебных комплексов, становится возможным совмещение итоговой аттестации по программе среднего (полного) общего образования и вступительных экзаменов в ВУЗ [5].

В 1996 году в общеобразовательных учреждениях, взаимодействующих с высшими учебными заведениями (вузами), допускается совмещение итоговой аттестации выпускников за курс среднего (полного) общего образования и вступительных испытаний в вуз – единые экзамены. Проведение единых экзаменов предусматривается договором между обоими образовательными учреждениями. Единые экзамены проводятся в соответствии с требованиями положения об итоговой аттестации выпускников и правилами приема в вуз, на добровольной основе по письменному заявлению выпускника. Для разработки экзаменационных материалов и приема единых экзаменов формируются предметные экзаменационные комиссии из учителей общеобразовательного учреждения и преподавателей вуза, состав которых утверждается в порядке, предусмотренном для обоих образовательных учреждений. Лица, выдержавшие единые экзамены, подают заявления о приеме в вуз и о засчитывании результатов единых экзаменов в качестве вступительных на основании прилагаемого к нему сертификата [6].

С 1997 года итоговая аттестация выпускников может проводиться с использованием средств массовой информации с предварительным согласованием с Министерством общего и профессионального образования. Форма проведения экзаменов по выбору может быть различной: по билетам, собеседование, защита реферата, тестирование. На основании Приказа Минобрнауки России от 26.12.96 № 537 «О централизованном тестировании выпускников общеобразовательных учреждений Российской Федерации» педагогическим советам общеобразовательных учреждений предоставляется право засчитывать по желанию обучающихся результаты централизованного тестирования, указанные в сертификатах Центра, в качестве результатов итоговой аттестации по общеобразовательным предметам, кроме устанавливаемых Минобрнауки России в качестве обязательных по итоговой аттестации [7].

Государственное централизованное тестирование выпускников образовательных учреждений поначалу было дополнительной платной услугой. В соответствии с приказом Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию от 17.02.95 № 223 «О создании Центра тестирования выпускников общеобразовательных учреждений Российской Федерации» на базе Московского педагогического государственного университета им. В. И. Ленина создается Центр тестирования, которому поручено проведение, начиная с 1996 года, централизованного государственного тестирования выпускников общеобразовательных учреждений по всей территории Российской Федерации. Создается сеть региональных представительств Центра, охватившая около 35 регионов Российской Федерации. Школьники получают возможность вместо однократных экзаменов тестироваться по несколько раз (с марта по май), пока не достигнут желаемого уровня знаний и количества баллов. По результатам централизованного тестирования выдается сертификат общероссийского государственного образца. Вузам России «Порядком приема в государственные образовательные учреждения высшего профессионального образования (высшие учебные заведения) Российской Федерации» разрешено засчитывать результаты централизованного тестирования в качестве вступительных испытаний [8]. Идею независимой объективной оценки знаний выпускников школ одобряли в то время практически все заинтересованные стороны: школьники (и их родители),

которые хотели знать свой уровень подготовки и конкурентоспособности при поступлении в вуз; вузы, у которых значительно упрощалась работа приёмных комиссий, и, главное, появилась возможность получения оценки подготовленности абитуриентов независимой от субъективной оценки преподавателей; органы управления образованием всех уровней и администрация школ, которые могли использовать статистические данные централизованного тестирования для анализа и принятия управленческих решений и т.д. И это понятно: педагогическое тестирование как метод контроля учебных достижений отвечает главным обобщённым критериям оценки учебных достижений: научность, технологичность и эффективность [9, с. 91].

Итак, все характерные особенности ЕГЭ: (а) включает в вариант задания, посвященные практически всем вопросам школьного курса математики; (б) задаёт уровень подготовки по предметам; (в) предоставляет каждому учащемуся возможность сдачи экзамена, соответствующего специфике полученного им математического образования (возможность выбора заданий из числа имеющихся); (г) совмещает итоговую аттестацию выпускников за курс среднего (полного) общего образования и вступительные испытания в вуз; (д) использует педагогическое тестирование как метод контроля учебных достижений; – были заложены и апробированы в последнее десятилетие XX века.

В новом XXI веке в поисках новых форм выпускных экзаменов по математике чиновники обращаются к опыту западных стран: рассматривается возможность полной замены письменного и устного экзамена тестами по математике, а также совмещения выпускного и вступительного экзаменов.

## Литература

1. Перцев В.В. *Экзамен по математике на аттестат зрелости в русской гимназии второй половины XIX века* // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. – 2018. – № 1. – С. 91-95.
2. Воробьев В.Я. *Роль Орловской гимназии начала XX века в образовании и воспитании юношества* // Первые Денисьевские чтения: Материалы науч. практ. конф. по проблемам истории, теории и практики библ. дела, библиогр. и книговедения. – Орел : Издательский дом «Орлик», 2004. – С. 88-95.
3. Косенкова Т.И. *Об истории возникновения ЕГЭ* // Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки: сборник научно-методических статей. – Саратов: ООО «Издательский центр «Наука». – 2018. – Вып.16. – С. 20-28.
4. Башмаков М.И., Карп, А.П. *Об экспериментальном выпускном экзамене в школах Ленинграда* // Математика в школе. – 1991. – № 4. – С. 60-61.
5. Положение об итоговой аттестации выпускников государственных, муниципальных и негосударственных общеобразовательных учреждений Российской Федерации в 1992/1993 учебном году (утв. Минобрнауки РФ 16.02.1993 n 27-М) (с изм. от 14.05.1993) (Зарегистрировано в Минюсте РФ 02.03.1993 n 167).
6. О рекомендациях по организации и проведению единых экзаменов для выпускников общеобразовательных учреждений, взаимодействующих с образовательными учреждениями высшего профессионального образования (высшими учебными заведениями) : Письмо Госкомвуза РФ от 15.03.1996 n 10-34-055ин/018.
7. Рекомендации по проведению выпускных экзаменов в IX, XI (XII) классах общеобразовательных учреждений Российской Федерации (Письмо Минобрнауки РФ от 18.03.1997 n 267/14-12).

8. О проведении государственного централизованного тестирования выпускников общеобразовательных учреждений Российской Федерации : Письмо Министерства образования РФ № 152/11 от 2 февраля 1996 г. / Учительская газета, сентябрь 1996, № 5 от 27 февраля.

9. Михалёва Т. *Двадцать лет централизованному тестированию в России. Что дальше?* // Педагогические измерения. – 2011. – № 1. – С. 88-105.

#### THE HISTORY OF DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION OF THE GENERAL STATE EXAMINATION

T.I. Kosenkova

*Unified State Exam USE in Mathematics has been holding for about 10 years in our country. This exam is being improved annually, but it's still a matter of dispute among politicians, teachers, parents and students (or pupils). This article focuses on milestones of development of USE from the latter half of the 19th century to the beginning of the 21st century. There's also detail consideration of education reforms of the nineties years of the 20th century.*

Keywords: mathematical education, history of mathematical education, uniform state examination, general certificate of secondary educate.

УДК 517.52

#### ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ Л.А. РУБЕЛЯ

А.Ф. Кужаев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [arsenkuzh@outlook.com](mailto:arsenkuzh@outlook.com); Башкирский государственный университет, Уфимский государственный нефтяной технический университет

*В работе идёт речь об обобщении результата, полученного Л. А. Рубелем в 1956 г. Сама же теорема Рубеля является, в свою очередь, обобщением известного результата Карлсона о целых функциях. Последний гласит, что если некоторая целая функция экспоненциального типа обращается в нуль на всех натуральных числах и имеет индикаторную диаграмму шириной, строго меньшей  $2\pi$ , то тогда она – тождественный нуль. Обобщение, о котором пойдёт речь в данной работе, заключается в том, что рассматриваются целые функции, обращающиеся в нуль на произвольных положительных числах, необязательно на целых. Также обсуждаются условия на последовательность нулей, при которых справедливо указанное обобщение.*

**Ключевые слова:** целая функция, плотность, нули целой функции.

Напомним, что целой функцией экспоненциального типа называется такая целая функция, которая во всей плоскости удовлетворяет неравенству

$$\ln |f(z)| \leq A|z| + B, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В 1914 г. Ф. Карлсоном был опубликован следующий результат (см. [2]).

**Теорема 1** (F. Carlson, 1914). Пусть  $f$  — некоторая целая функция экспоненциального типа, для которой при любых  $y \in \mathbb{R}$  выполнено  $|f(iy)| \leq Ce^{b|y|}$  при некотором  $C > 0$  и  $b < \pi$ . Тогда, если  $f(n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $f \equiv 0$ .



Сформулированная теорема является одной из первых теорем типа единственности, которые по общей схеме можно формулировать так: если некоторая целая функция, которая “не очень быстро растёт на бесконечности”, обращается в нуль на некотором множестве, то она есть тождественный нуль.

Л.А. Рубель в [3] ослабил условия, которые нужно наложить на последовательность нулей, чтобы утверждение теоремы Карльсона осталось справедливым, а именно, им была получена

**Теорема 2** (Л.А. Rubel, 1956). Пусть  $A$  — некоторая неограниченная подпоследовательность натуральных чисел. Для того чтобы для любой целой функции  $f$  из условий

$$\begin{aligned} \ln |f(z)| &\leq \tau |z| + K, \quad z \in \mathbb{C}, \tau < \infty, \\ \ln |f(iy)| &\leq c |y| + K, \quad y \in \mathbb{C}, c < \pi, \\ f(n) &= 0, \quad n \in A \end{aligned}$$

следовало бы, что  $f \equiv 0$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{n}(A) = 1.$$

Здесь через  $K$  обозначена некая константа, а  $\bar{n}(A)$  обозначает верхнюю плотность множества  $A$ , то есть

$$\bar{n}(A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{n \leq t, n \in A} 1. \quad (1)$$

Таким образом, Рубелем было показано, что необязательно требовать, чтобы функция обращалась в нуль на всех натуральных числах. Достаточно лишь рассматривать некоторую подпоследовательность натуральных чисел, но её верхняя плотность должна быть равна единице. Отметим, что для верхняя плотность множества натуральных чисел равна единице, и, более того, в этом случае, вместо верхнего предела в (1) можно писать просто предел (т. е. он существует). Такие последовательности положительных чисел называют измеримыми, а предел (1) называется плотностью.

Для того чтобы сформулировать результат, о котором говорилось в аннотации, дадим некоторые определения.

Будем говорить, что функция  $f$  обращается в нуль на последовательности  $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , если  $f(\lambda_k) = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$  с кратностью, не меньшей, чем  $n_k$ . Обозначать это будем так:  $f(\Lambda) = 0$ . Считаем, что все числа  $\lambda_k$  образуют строго возрастающую последовательность положительных чисел, а  $n_k$  — натуральные числа.

Для таких последовательностей помимо введённой выше верхней плотности рассмотрим следующие характеристики, называемые максимальной плотностью и логарифмической блок-плотностью соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{n}_0(\Lambda) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\delta t} \sum_{t(1-\delta) < \lambda_k \leq t} n_k, \\ \bar{L}(\Lambda) &:= \inf_{a > 1} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(at) - \lambda(t)}{\ln a}, \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_k \leq t} \frac{n_k}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Согласно [3, §3, гл. IV] предел при  $\delta \rightarrow 0+$  всегда существует, так что максимальная плотность определена корректно.

Также будем говорить, что некоторая последовательность чисел  $\Lambda$  является последовательностью (множеством) единственности для некоторой целой функции  $f$ , если из  $f(\Lambda) = 0$  следует, что  $f \equiv 0$ .

Индикатором целой функции экспоненциального типа называют функцию

$$h_f(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r}, \quad \theta \in [-\pi; \pi).$$

Индикатор характеризует рост функции  $f$  вдоль луча  $\theta$ .

Используя результаты работы [4], можем доказать следующие два утверждения.

**Теорема 3** Пусть последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\lambda_n > 0$  имеет конечную максимальную плотность  $\bar{n}_0(\Lambda) = \Delta < \infty$ . Пусть  $f$  — целая функция экспоненциального типа, с индикатором, удовлетворяющим условию  $h_f(\pm\pi/2) < \Delta\pi$ . Для того чтобы последовательность  $\Lambda$  была множеством единственности для функции  $f$ , необходимо и достаточно выполнение равенства  $\bar{n}(\Lambda) = \Delta$ .

**Теорема 4** Утверждение теоремы 3 останется верным, если вместо  $\bar{n}(\Lambda) = \Delta$  потребовать, чтобы  $\bar{L}(\Lambda) = \Delta$ .

## Литература

1. Carlson F. *Sur une classe de series de Taylor*. – Dissertation, Upsala, Sweden, 1914. – P. 76.
2. Rubel L.A. *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 83. – P. 417-429.
3. Koosis P. *The logarithmic integral I*. – Cambridge University Press, 1997. – 625 p.
4. Кривошеев А.С., Кузаев А.Ф. *Об одной теореме Леонтьева-Левина* // Уфимский матем. журнал. – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 89–101.

## ON A GENERALIZATION OF THE THEOREM OF L.A. RUBEL

A.F. Kuzhaev

*In 1914, F.D. Carlson proved that if any given entire function vanishes on the set  $\mathbb{N}$  of all natural numbers and has indicator diagram of width strictly less than  $2\pi$ , then it vanishes identically. In 1956, L.A. Rubel strengthened this result by considering subsets of  $\mathbb{N}$ . In this paper, we consider entire functions vanishing on arbitrary sequence of positive numbers. We also discuss conditions for such sequence under which our generalization holds.*

Keywords: entire function, density, zeros of entire function.

УДК 514.84

**ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В  
КВАНТОВОМ СОСТОЯНИИ С НЕНУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ,  
В ДЛИННОЙ ГОРЛОВИНЕ**

Д.С. Лисенков<sup>1</sup>, А.А. Попов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> lesman1985@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> arorov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе показано, что в пространстве-времени называемом "длинной горловиной" эффект поляризации вакуума скалярного поля, находящегося в квантовом состоянии с ненулевой температурой, не зависит от условий на бесконечности. Это означает, что в рассматриваемой ситуации  $\langle \varphi^2 \rangle$  является локальной величиной для любой конечной массы  $m$  квантованного поля, включая  $m = 0$ .*

**Ключевые слова:** поляризация вакуума, скалярное поле, кротовая нора.

Исследование эффектов поляризации вакуума в сильных гравитационных полях является актуальным, поскольку такие эффекты могут играть роль в теории эволюции Вселенной и построение самосогласованной модели испарения черных дыр. Эти эффекты могут быть учтены при решении уравнений полуклассической теории гравитации

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (1)$$

где  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  – это вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса квантованных полей.

Основная трудность полуклассической теории гравитации состоит в том, что эффекты квантования гравитационного поля не учитываются. Широко известное решение этой проблемы заключается в том, что для оправдания игнорирования гравитационного вклада рассматривается предел большого числа полей, в котором вклад гравитационного поля незначителен. Другая проблема заключается в том, что эффект поляризации вакуума определяется топологическими и геометрическими свойствами пространства-времени в целом или выбором квантового состояния, в котором вакуумные средние рассматриваются. Это означает, что вычисление функциональной зависимости  $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$  от метрического тензора в произвольном пространстве-времени представляет большую трудность. Только в некоторых пространствах-времени с высокой степенью симметрии для конформно инвариантных полей  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  может быть вычислены и уравнения (1) могут быть решены точно [1–5]. Подчеркнем, что единственным параметром размерности длины в такой задаче является планковская длина  $l_{pl}$ . Это означает, что характерный масштаб  $l$  кривизны пространства-времени (который соответствует решению уравнений (1) может отличаться от  $l_{pl}$  только при наличии большого дополнительного параметра. В качестве примера такого параметра можно рассматривать число полей, поляризация вакуума которых является источником кривизны пространства-времени (предполагается, конечно, что характерный масштаб изменения фонового гравитационного поля много больше, чем  $l_{pl}$ , так что само понятие классического пространство-времени все ещё имеет смысл). Для квантованного скалярного поля таким параметром может быть константа связи  $\xi$  скалярного поля с кривизной пространства-

времени. В случае  $|\xi| \gg 1, \xi < 0$  вакуумные флуктуации квантованного скалярного поля могут определять кривизну так называемого пространства-времени *длинной горловины* [6].

В этой работе исследуется влияние на эффект поляризации вакуума скалярного поля в пространстве-времени длинной горловины, температуры квантового состояния, в котором поле находится.

## Литература

1. Starobinsky A.A. *A new type of isotropic cosmological models without singularity* // Phys. Lett. B. – 1980. – Vol. 91, Is. 1. – P. 99-102.
2. Mamaev S.G., Mostepanenko V.M. *Isotropic cosmological models determined by vacuum quantum effects* // Sov. Phys. JETP. – 1980. – Vol. 51, № 1. – P. 9-13.
3. Кофман Л.А., Сахни В., Старобинский А.А. *Анизотропная космологическая модель, создаваемая квантовой поляризацией вакуума* // ЖЭТФ. – 1983. – № 85 (6). – С. 1876-1886.
4. Kofman L.A., Sahni V. *New self-consistent solution of the Einstein equations with one-loop quantum gravitational corrections* // Phys. Lett. B. – 1983. – Vol. 127. – P. 197-200.
5. Kofman L.A., Sahni V. *Some self-consistent solutions of the Einstein equations with one-loop quantum gravitational corrections:  $G_{ik} = 8\pi G < T_{ik} >_{vac}$*  // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 117. – P. 275-278.
6. Popov A.A. *Long throat of a wormhole created from vacuum fluctuations* // Classical and Quantum Gravity – 2005. – Vol. 22, № 24. – P. 5223-5230.

### VACUUM POLARIZATION OF A QUANTIZED SCALAR FIELD IN THE THERMAL STATE IN A LONG THROAT

D.S. Lisenkov, A.A. Popov

*In this work we have shown that in a long throat the effect of vacuum polarization of a quantized scalar field in the thermal state does not depend on temperature and conditions at infinity. This implies that in considered situation  $\langle \varphi^2 \rangle$  is a local quantity for any finite mass  $m$  of the quantized field, including  $m = 0$ .*

Keywords: vacuum polarization, scalar field, wormhole.

УДК 514.7

### НЕЕВКЛИДОВ АНАЛОГ АТТРАКТОРА ПАРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Д.С. Лисенков<sup>1</sup>, П.И. Трошин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> lesman1985@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> paul.troshin@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе предложены аналоги системы линейных отображений комплексной плоскости для неевклидовых пространств (для плоскости Лобачевского и сферы) на основе композиций соответствующих операций параллельного переноса, поворота, и введенного нами сжатия в рассматриваемых пространствах.*

**Ключевые слова:** фрактал, аттрактор, неевклидова геометрия, пространство Лобачевского, риманова геометрия, пара линейных отображений, система итерированных функций.

Одним из важнейших способов получения фрактальных множеств является механизм систем итерированных функций (СИФ) [1]. Это набор сжимающих отображений  $\{f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i=0}^{N-1}$ , обладающих совместным аттрактором  $A = \bigcup_{i=0}^{N-1} f_i(A)$ . СИФ широко используются на практике для сжатия изображений, фрактальной интерполяции, в компьютерной графике, их также начинают применять в исследованиях по медицине, ботанике, турбулентности.

Простейшей представляющей интерес СИФ в пространствах размерности  $n \geq 2$  является система аффинных отображений комплексной плоскости (см. обзор в [2])

$$\begin{cases} f_0(z) = qz - 1, \\ f_1(z) = qz + 1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $q, z \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |q| < 1$ . Существует единственное инвариантное множество  $A = f_0(A) \cup f_1(A)$ . При различном выборе параметра  $q$  можно получить множество разнообразных аттракторов от канторовой пыли до плиток Розы, замощающих плоскость. Легко показать, что аттрактор СИФ  $\{f_0(z) = qz + a, f_1(z) = qz + b\}$  при  $a \neq b$  подобен аттрактору СИФ (1).

В неевклидовых пространствах системы итерированных функций используются реже. В работе [3] при помощи СИФ был построен аналог треугольника Серпинского на плоскости Лобачевского, при этом использовались сжимающие отображения без вращений. Мы продолжаем исследование в этом направлении, добавляя оператор вращения и предлагаем рассмотреть сразу два примера: плоскость Лобачевского  $\Lambda^2$  и сферу  $\mathbb{S}^2$ .

Рассмотрим на плоскости Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна следующие операции:

$$g_a(x) = \frac{((a, x)(1 - \sqrt{1 - a^2}) + a^2)a + a^2\sqrt{1 - a^2}x}{a^2(1 + (a, x))} \text{ — параллельный перенос на вектор } a,$$

$u_\phi(x)$  — поворот на угол  $\phi$  вокруг начала координат в положительном направлении,

$$\lambda(x) = \frac{x}{|x|} \operatorname{th}(\lambda \operatorname{arth} x) \text{ — сжатие по лучам к началу координат в } 0 < \lambda < 1 \text{ раз.}$$

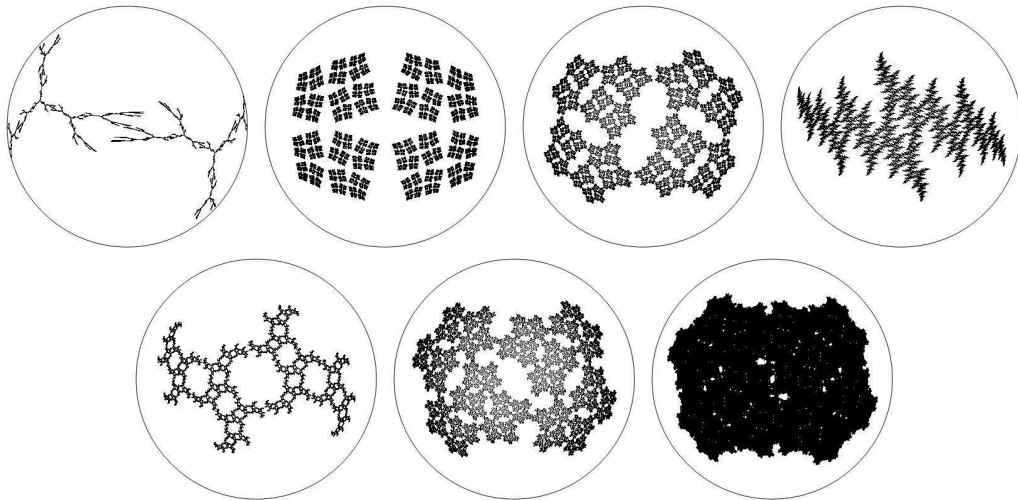
Тогда можно предложить аналог отображений (1) для  $\Lambda^2$ :

$$\begin{cases} f_0(x) = g_{c\{-1,0\}}(u_\phi(\lambda(x))), \\ f_1(x) = g_{c\{1,0\}}(u_\phi(\lambda(x))), \end{cases} \quad (2)$$

где  $c \in (0, 1)$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  — параметры.

Для сферы единичного радиуса рассмотрим следующие операции:

$$U_{u,\alpha}(x) = ((1 - \cos \alpha)uu^T - \sin \alpha \star u + \cos \alpha E)x \text{ — поворот вокруг оси } u \in \mathbb{S}^2 \text{ на угол } \alpha,$$



**Рис. 1.** Примеры аттракторов семейства (2) на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}^2$ .

$$\lambda_O(x) = U_{\frac{x \times O}{|x \times O|}, (1-\lambda) \arccos(x, O)}(x)$$

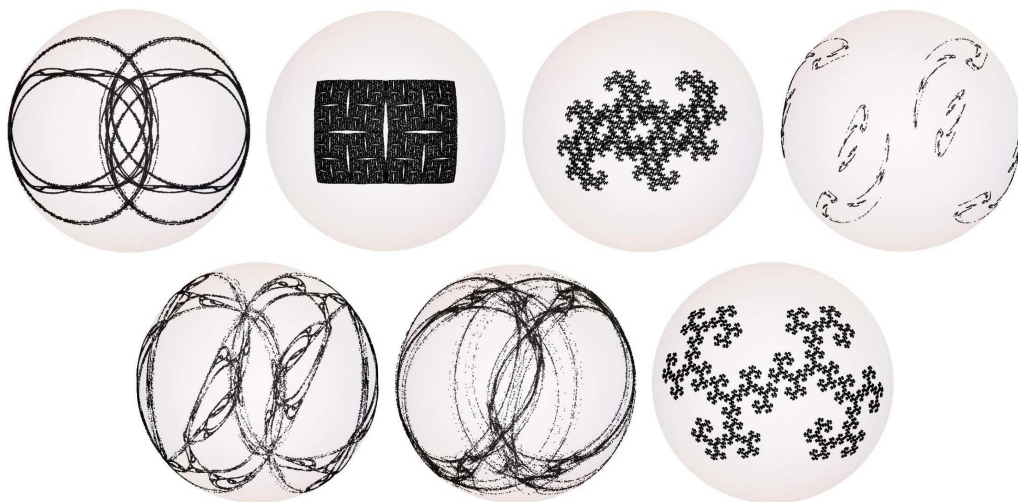
— сжатие к точке  $O \in \mathbb{S}^2$  вдоль больших кругов в  $0 < \lambda < 1$  раз,

здесь  $E$  — единичная матрица,  $\star$  — звезда Ходжа,  $\times$  — векторное произведение.

Тогда аналогом (1) для  $\mathbb{S}^2$  будет СИФ

$$\begin{cases} f_0(x) = U_{\{0,0,1\}, \alpha}(U_{\{1,0,0\}, \phi}(\lambda(x))), \\ f_1(x) = U_{\{0,0,1\}, -\alpha}(U_{\{1,0,0\}, \phi}(\lambda(x))), \end{cases} \quad (3)$$

где  $\alpha \in (0, \pi)$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  — параметры.



**Рис. 2.** Примеры аттракторов семейства (3) на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ .

В случае сферы, отображения  $f_0$  и  $f_1$  не являются сжимающими, однако аттрактор такой системы удастся построить. Интересно изучить множество Мандельброта для предложенных нами СИФ: множество параметров этих отображений, при которых аттрактор является связным множеством. Также интересным вопросом являет-

ся возможность приведения СИФ (2) и (3) к более общему виду аналогично тому, как это делается в случае аффинных отображений в  $\mathbb{C}$ . Нелинейный характер указанных преобразований в неевклидовых пространствах создает большое препятствие на пути к этому.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00295.*

## Литература

1. Barnsley M.F. *Fractals everywhere* // Boston: Academic Press. – 1988. – P. 394.
2. Troshin P.I. *Code Structure for Pairs of Linear Maps with Some Open Problems, frontiers in the study of chaotic dynamical systems with open problems* // World Scientific Series on Nonlinear Science: Series B. – 2011. – Vol. 16. – P. 175–194.
3. Troshin P.I. *On generalization of Sierpiński gasket in Lobachevskii plane* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, № 4. – P. 751–762.

### NON-EUCLIDEAN ANALOGUE TO THE ATTRACTOR OF THE PAIR OF LINEAR MAPS ON THE PLANE

D.S. Lisenkov, P.I. Troshin

*We propose some analogues to the system of linear maps on complex plane in the setting of non-Euclidean geometry (for the Lobachevskii plane and the sphere), based on compositions of the respective operations of parallel translation, rotation and (newly established) contraction in the spaces under consideration.*

Keywords: fractal, attractor, non-Euclidean geometry, Lobachevskii plane, Riemannian geometry, pair of linear maps, iterated function system.

УДК 514.822

### АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С СОСТАВНЫМИ ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В.Л. Лобов<sup>1</sup>, И.И. Латыпов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> vs\_lobov@mail.ru; Бирский филиал Башкирского государственного университета

<sup>2</sup> latypovii@rambler.ru; Бирский филиал Башкирского государственного университета

*В докладе ставится задача аналитического исследования функции Грина сингулярно возмущенной краевой задачи уравнения теплопроводности в области с составными подвижными границами.*

**Ключевые слова:** асимптотика, нестационарное уравнение теплопроводности, сингулярно возмущенная краевая задача, функция Грина, подвижная граница.

Математическое моделирование многих практических задач сводятся к рассмотрению краевых задач в областях со сложной геометрией. Обычно для этих задач характерны нелинейности, связанные как со сложными процессами внутри области, так и условиями взаимодействия на границах области. В докладе ставится за-

дача аналитического исследования функции Грина сингулярно возмущенной краевой задачи уравнения теплопроводности в двумерной области с составными подвижными границами. Математическая модель в безразмерных переменных записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(x, t; y, s)}{\partial t} &= Fo \cdot \frac{\partial^2 \Gamma(x, t; y, s)}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega, \\ \Gamma(x, t; y, s) &= \delta(x, y), \quad t \searrow s, \\ \alpha_{ki} \cdot \frac{\partial \Gamma(x, t; y, s)}{\partial x} - \beta_{ki} \cdot \Gamma(x, t; y, s) &= 0, \quad x = \varphi_{k,i}(t), \\ (x, t) \in \Omega &= \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad i = 1, 2; \quad k = \overline{1, 4}, \quad i < k, \quad 0 \leq Fo \ll 1, \\ \Omega_1 &= \{ (x, t) : \varphi_{11}(t) < x < \varphi_{21}(t), \quad s \leq t < s_0 \}, \\ \Omega_2 &= \{ (x, t) : \varphi_{32}(t) < x < \varphi_{42}(t), \quad s_0 \leq t < t_0 \}, \end{aligned}$$

где  $Fo$  – малый параметр;  $s_0$  – точка пересечения графиков функций  $\varphi_{11}(s_0) = \varphi_{32}(s_0)$  или  $\varphi_{21}(s_0) = \varphi_{42}(s_0)$ , в предположении, что эти точки совпадают.

Выбор коэффициентов  $\alpha_{ki}, \beta_{ki}$ , где  $\alpha_{ki} = \{0, 1\}$ ,  $\beta_{ki} = \{0, 1\}$ , приводит к граничным условиям первого, второго и третьего родов, а также к граничным условиям смешанного типа.

Функция Грина в области  $\Omega$  определяется следующим образом [2]:

$$\Gamma(x, t; y, s) = \begin{cases} \Gamma_{12}(x, t; y, s), & s < t \leq s_0, \\ \Gamma^*(x, t; y, s), & s \leq s_0 < t, \\ \Gamma_{34}(x, t; y, s), & s_0 < s \leq t, \end{cases}$$

где  $\Gamma_{12}(x, t; y, s)$ ,  $\Gamma_{34}(x, t; y, s)$  – асимптотики функции Грина соответственно в областях  $\Omega_1, \Omega_2$ ;  $\Gamma^*(x, t; y, s)$  определяется следующим выражением:

$$\Gamma^*(x, t; y, s) = \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_{12}(z, s_0; y, s) \cdot \Gamma_{34}(x, t; z, s) dz, \quad x_0 = \varphi_{11}(s_0), \quad x_1 = \varphi_{21}(s_0).$$

Асимптотики функций Грина строятся на основе асимптотического анализа интегралов в интегральном представлении функции Грина, записываемых с помощью соответствующих тепловых потенциалов [3, 3]. В результате получаем асимптотическое разложение функции Грина по степеням малых параметров  $Fo^n, \left\{ \frac{x - \varphi_{ki}(t)}{Fo} \right\}^n, Fo \rightarrow 0$ .

В качестве примера рассмотрим вторую краевую задачу ( $\alpha_{ki} = 1, \beta_{ki} = 0$ ) для областей с линейными подвижными границами

$$\varphi_{11}(t) = k_1 \cdot t + H_1, \quad \varphi_{21}(t) = k_2 \cdot t + H_2, \quad \varphi_{32}(t) = k_3 \cdot t + H_3, \quad \varphi_{42}(t) = k_4 \cdot t + H_4.$$

Тогда имеем  $x_0 = k_1 \cdot s_0 + H_1, x_1 = k_2 \cdot s_0 + H_2, s_0 = \frac{H_3 - H_1}{k_1 - k_3} = \frac{H_4 - H_2}{k_2 - k_4}$ .

В этом случае функция Грина выписывается в явном виде [2]:

$$\Gamma(z, t; y, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}(s_0 - s)} \exp\left\{-\frac{[z - y]^2}{4Fo(s_0 - s)}\right\} +$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}(s_0 - s)} \cdot \exp\{\Phi_{12} - \Phi_{11}\} + \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}(s_0 - s)} \left[ \exp\{-\Phi_{21} - \Phi_{22}\} + \exp\{\Phi_{32} - \Phi_{31}\} + \exp\{-\Phi_{41} - \Phi_{42}\} \right] - \\
& - \frac{(m+1)(k_2 - k_1) - k_2}{2Fo} \cdot e^{\Phi_{12}} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\Phi_{11}} \right\} - \frac{(m+1)(k_2 - k_1) + k_1}{2Fo} \cdot e^{-\Phi_{22}} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\Phi_{21}} \right\} + \\
& + \frac{(m+1)(k_2 - k_1)}{2Fo} \left[ \exp\{\Phi_{32}\} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\Phi_{31}} \right\} - \exp\{-\Phi_{42}\} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\Phi_{41}} \right\} \right] \left. \right\} = \\
& = G_{12}^{(0)}(z, s_0; y, s) + \tilde{\Gamma}_{12}(z, s_0; y, s),
\end{aligned}$$

$$A_1 = z - k_1 s_0 - H_1, \quad A_2 = k_2 s_0 + H_2 - z, \quad B_1 = y - k_1 s - H_1, \quad B_2 = k_2 s + H_2 - y,$$

$$\Phi_{i1} = \frac{[A_i + B_i + 2m(B_1 + B_2)]^2}{4Fo(s_0 - s)}, \quad \Phi_{i2} = \frac{B_i + m(B_1 + B_2)}{Fo} \left[ k_i + (-1)^i m(k_2 - k_1) \right], \quad i = 1, 2;$$

$$\Phi_{i1} = \frac{[A_{i-2} - B_{i-2} + 2(m+1)(B_1 + B_2)]^2}{4Fo(s_0 - s)}, \quad i = 3, 4$$

$$\Phi_{i2} = \frac{(m+1)}{Fo} \left( k_{i-2}(B_1 + B_2) + (-1)^i (k_2 - k_1) [(m+1)(B_1 + B_2) - B_{i-2}] \right), \quad i = 3, 4.$$

Тогда для функций  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{34}$  можем записать

$$\Gamma_{12}(z, t; y, s) = G_{12}^{(0)}(z, s_0; y, s) + \tilde{\Gamma}_{12}^{(0)}(z, s_0; y, s),$$

$$\Gamma_{34}(x, t; z, s_0) = G_{34}^{(0)}(x, t; z, s_0) + \tilde{\Gamma}_{34}^{(0)}(x, t; z, s_0).$$

Функцию  $\Gamma^*(x, t; y, s)$  определяем подстановкой явных представлений функций  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{34}$  в подынтегральное выражение

$$\Gamma^*(x, t; y, s) = G^{(0)}(x, t; y, s) + \tilde{\Gamma}(x, t; y, s),$$

где

$$G^{(0)}(x, t; y, s) = \int_{x_0}^{x_1} G_{12}^{(0)}(z, s_0; y, s) \cdot G_{34}^{(0)}(x, t; z, s) dz,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}(x, t; y, s) = & \int_{x_0}^{x_1} G_{12}^{(0)}(z, s_0; y, s) \cdot \tilde{\Gamma}_{34}(x, t; z, s) dz + \int_{x_0}^{x_1} G_{34}^{(0)}(z, s_0; y, s) \cdot \tilde{\Gamma}_{12}(x, t; z, s) dz + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \tilde{\Gamma}_{12}(z, s_0; y, s) \cdot \tilde{\Gamma}_{34}(x, t; z, s) dz.
\end{aligned}$$

В общем случае производим асимптотическую оценку каждого из интегралов по степеням малых параметров, на этой основе получаем асимптотическое разложение решения поставленной задачи в зависимости от “близости” рассматриваемой точки к границе области.

Вывод. Полученные выражения для функции Грина позволяют проводить численное моделирование и изучить влияние составной границы на распределение функции Грина изучаемой искомой задачи [3–6]. Знание асимптотики функции Грина позволяет находить приближенные решения сингулярно возмущенных краевых задач уравнения теплопроводности, рассматриваемых в областях с подвижными составными границами со сложной геометрией.

## Литература

1. Тихонов А.Н. *О функциональных уравнениях Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики* // Бюлл. МГУ. Сер. А. – 1938. – Т.1, № 8. – С. 1–25.
2. Латыпов И.И. *Приближенный расчет распределения температурного поля активного элемента твердотельного лазера* // Труды кафедры экспериментальной и теоретической физики института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН. Вып. 1. – Уфа.: Гилем, 2001. – С. 82–92.
3. Latypov I.I. *Approximate solution to a singular perturbed boundary value problem of thermal shielding* // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – V. 918. – P. 012005.
4. Лобов В.Л., Латыпов И.И. *Исследование явлений переноса в пористых средах* // Новые технологии в материаловедении: материалы I научно-практической конференции с международным участием (г.Уфа, 14 декабря 2015 г.) / отв. ред. У.Ш.Шаяхметов. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. – С. 194–196.
5. Латыпов И.И. *Функция Грина для области с составными подвижными границами ЭВТ в обучении и моделировании*: Сб. науч. тр.: в 2-х ч. / Отв. ред. С.М. Усманов // Всерос. научн. конф. 9-10 июня 2001 г. – Бирск: Бирский ГПИ, 2001. – Ч. 1. – С. 117–121.
6. Латыпов И.И. *Аналитическое исследование сингулярно возмущенной краевой задачи теплообмена в области составными подвижными границами* // Вторая Всероссийская конференция “Необратимые процессы в природе и технике”. Тез. докл. 22-24 января 2003 г. Москва. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – С. 130–132.

## ASYMPTOTICS OF THE GREEN FUNCTION OF NON-STATIONARY EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY IN THE REGION WITH COMPOSITE MOVING BOUNDARIES

V.L. Lobov, I.I. Latypov

*In the paper the problem of analytical study of Green’s function of singularly perturbed boundary value problem of the heat equation in the region with composite moving boundaries is set.*

Keywords: asymptotics, non-stationary equation of heat conductivity, singularly perturbed boundary value problem, Green function, moving boundary.

УДК 519.6

## РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНО ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Д.В. Лукьяненко<sup>1</sup>, А.А. Мельникова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> lukyanenko@physics.msu.ru; МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

<sup>2</sup> melnikova@physics.msu.ru; МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

*В работе рассматривается применение методов асимптотического анализа для решения коэффициентно обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущенных уравнений с кубической нелинейностью. Обратная задача состоит в определении одного из коэффициентов уравнения по известной информации о наблюдаемом положении движущегося фронта во времени. Показано, каким образом асимптотический анализ прямой задачи позволяет свести исходную постановку обратной задачи для нелинейной системы уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений, которые связывают функцию, описывающую наблюдаемое положение движущегося фронта во времени, с параметром (коэффициентом системы уравнений), подлежащими восстановлению. На серии модельных численных экспериментов продемонстрирована эффективность предложенного подхода.*

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенная задача, внутренний слой, уравнение типа реакция-диффузия, коэффициентно обратная задача.

В работе показана возможность применения методов асимптотического анализа для восстановления коэффициента, описывающего свойства среды, при решении коэффициентно обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущенных уравнений с кубической нелинейностью. Входными данными для обратной задачи является информация о наблюдаемом положении движущегося фронта во времени.

Системы, для которых рассматриваются в данной работе обратные задачи, используются для моделирования переходных процессов в газовой динамике, нелинейной теории волн, биофизике, экологии, химической кинетике и других практических приложениях. Например, в работе [1] система параболических уравнений с кубической нелинейностью моделирует динамику фронта урбанизации.

В данной работе рассматривается следующая система [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= (u - \varphi^l(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^0(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^r(v, x, \varepsilon)), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial t} &= \gamma(x)v - \beta(x)u - k(x), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  достаточно мало ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$ ), функции  $u_0, v_0 \in L^\infty([0, l]) \cap L^1((0, l))$  отличны от нуля, а функции  $\varphi^l(v, x, \varepsilon), \varphi^0(v, x, \varepsilon), \varphi^r(v, x, \varepsilon)$  являются непрерывно диф-

ференцируемыми в области  $\{(v, x, \varepsilon) : I_v \times [0; l] \times (0; \varepsilon_0)\}$  ( $I_v$  – некоторый промежуток изменения переменной  $v$ ),  $\gamma(x) > 0$ ,  $\beta(x) > 0$ ,  $k(x) \in C[0; l] \times C^1(0; l)$ .

Параболические уравнения в системе (1) содержат малые параметры при старших производных и являются сингулярно возмущенными. Асимптотический анализ этой прямой задачи проведен в работах [2, 3], где доказана теорема существования решения с внутренним переходным слоем (решения типа фронта), получено приближенное решение и описана локализация фронта в зависимости от времени.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} h(u, v, x, \varepsilon) &\equiv (u - \varphi^l(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^0(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^r(v, x, \varepsilon)), \\ g(u, v, x) &\equiv \gamma(x)v - \beta(x)u - k(x). \end{aligned}$$

Задача (1) рассматривается при следующих условиях.

**Условие С<sub>1</sub>.** В области  $\{(v, x, \varepsilon) : I_v \times [0; l] \times (0; \varepsilon_0)\}$  функции  $\varphi^{l,0,r}(v, x, \varepsilon)$  являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют условиям  $\varphi^l(v, x, \varepsilon) < \varphi^0(v, x, \varepsilon) < \varphi^r(v, x, \varepsilon)$ . Более того,  $h_u(\varphi^{l,r}(v, x, 0), v, x, 0) > 0$  и  $h_u(\varphi^0(v, x, 0), v, x, 0) < 0$ .

**Условие С<sub>2</sub>.** Каждое из уравнений  $g(\varphi^l(v, x, 0), v, x) = 0$  и  $g(\varphi^r(v, x, 0), v, x) = 0$  имеет единственное решение  $v = v^l(x)$  или  $v = v^r(x)$ , соответственно. Функции  $v^{l,r}(x)$  таковы, что  $v^l(x) < v^r(x)$ . Более того,  $\frac{dg}{dv}(\varphi^{l,r}(v, x, 0), v, x)_{v=v^{l,r}(x)} > 0$ .

Известно [3], что при выполнении условий С<sub>1</sub>, С<sub>2</sub> и еще нескольких требований на функции  $h(u, v, x, \varepsilon)$ ,  $g(u, v, x, \varepsilon)$  решение задачи (1) имеет внутренний переходный слой (движущийся фронт), положение которого описывается функцией  $x = f(t)$ . Асимптотический анализ позволяет найти функцию  $x = f(t)$  с заданной точностью по параметру  $\varepsilon$ .

Обратная задача состоит в том, чтобы по известным наблюдаемым экспериментальных данным о движении фронта, то есть по данным о функции  $x = f(t)$  определить неизвестный коэффициент  $\gamma(x)$ , характеризующий свойства среды, в которой движется фронт.

Один из классических подходов к решению обратных задач такого типа заключается в минимизации функционала невязки, что чаще всего требует применения градиентных методов, при реализации которых на каждой итерации градиентного метода требуется решать прямую и сопряженную задачи.

Наличие у решения прямой задачи узких пограничных и/или внутренних слоев (стационарный и/или движущийся фронт) делает задачу чрезвычайно сложной для численного решения. Однако присутствие малого параметра приводит к появлению двух противоположенных эффектов: с одной стороны, чем меньше этот параметр, тем более неустойчивое численное решение будет получено; с другой стороны, чем меньше этот параметр, тем более точную априорную информацию о решении мы можем извлечь с помощью асимптотического анализа. Эти два факта дают возможность объединить асимптотический и численные подходы для построения эффективных методов решения как прямых, так и соответствующих обратных задач.

Идея использования эффективных численных методов для решения обратных задач для сингулярно возмущенных задач была реализована в работе [4], в которой рассмотрена коэффициентно обратная задача для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа реакция-диффузия-адвекция. В указанной работе использовался подход, основанный на строгом асимптотическом анализе и заключаю-

щийся в выделении априорной информации о положении движущегося фронта в решении прямой задачи и пограничных слоях в решении сопряженной задачи для построения специальной адаптированной сетки [5–7]. Предложенный метод позволил значительно оптимизировать численный счёт и существенно улучшить стабильность решения соответствующей обратной задачи.

В настоящей работе предлагается подход к использованию асимптотического анализа для решения обратных задач такого типа. Важной особенностью применения асимптотического подхода к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами является то, что асимптотический анализ позволяет свести исходную прямую нелинейную сингулярно возмущенную задачу к более простой задаче, которая не содержит малых параметров и имеет меньшую пространственную размерность (а иногда и вовсе содержит не дифференциальные, а алгебраические уравнения), получив при этом достаточно точное качественное и количественное описание решения. Таким образом, применение асимптотического анализа дает возможность установить более простые связи между входными данными и параметрами обратной задачи (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и т.п.), которые необходимо определить, что позволяет существенно упростить процедуру решения обратных задач. В данной работе коэффициентно обратная задача для нелинейной системы уравнений в частных производных [2, 3] сводится к существенно более простой задаче, которая связывает наблюдаемое положение движущегося фронта с искомым коэффициентом в уравнении. А именно, если имеется экспериментальная возможность наблюдать движение фронта (фронта ударной волны, фронта реакции или горения и т.д.), то вопрос об определении неизвестного коэффициента в системе уравнений сводится к простому дифференцированию наблюдаемого положения движущегося фронта во времени и последующему решению алгебраической (не дифференциальной) системы.

В работе подробно описана методика асимптотического анализа, которая позволяет получить систему алгебраических уравнений, связывающих входные данные обратной задачи (функцию  $x = f(t)$ ) и коэффициент уравнения  $\gamma(x)$ , который необходимо восстановить, и численные методы решения соответствующей упрощённой постановки обратной задачи. На серии модельных примеров обсуждается эффективность предложенного подхода и его практические ограничения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-31-00204, 18-01-00865).

## Литература

1. Сидорова А.Э., Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н., Семина А.Е. *Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах* // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, Астрономия. – 2016. – № 6. – С. 107–113.
2. Мельникова А.А., Чэнь М. *Существование и асимптотика автоволнового решения системы уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 5. – С. 705–715.
3. Левашова Н.Т., Мельникова А.А. *Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений* // Дифф. ур. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 339–358.

4. Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T. *Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – V. 54. – P. 233–247.
5. Lukyanenko D.V., Volkov V.T., Nefedov N.N. *Dynamically Adapted Mesh Construction for the Efficient Numerical Solution of a Singular Perturbed Reaction-diffusion-advection Equation* // Modeling and Analysis of Information Systems. – 2017. – V. 24, №. 3. – P. 322–338.
6. Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V. *Use of Asymptotics for New Dynamic Adapted Mesh Construction for Periodic Solutions with an Interior Layer of Reaction-Diffusion-Advection Equations* // Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – V. 10187. – P. 107–118.
7. Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D. *Front Dynamics in an Activator-Inhibitor System of Equations* // Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – V. 10187. – P. 492–499.

#### SOLVING THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A NONLINEAR SYSTEM OF REACTION-DIFFUSION TYPE EQUATIONS USING ASYMPTOTIC ANALYSIS METHODS

D.V. Lukyanenko, A.A. Melnikova

*The implementation of asymptotic methods for solving of the coefficient inverse problem for a system of nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion equations with cubic nonlinearity by known the location of moving front data is proposed. It is shown how the asymptotic analysis of the direct problem allows reducing initial statement of the inverse problem to more simple equations which associate the observed location of the moving front to the parameter that has to be identified. Numerical examples show the effectiveness of the proposed method.*

Keywords: singularly perturbed problem, interior and boundary layers, reaction-diffusion equation, coefficient inverse problem.

УДК 519.857

#### ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ВСТРЕЧИ

П.И. Максакова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [polinamaxakova@gmail.com](mailto:polinamaxakova@gmail.com); Челябинский государственный университет, математический факультет

*Рассматривается игровая задача управления, в которой первый игрок управляет вблизи поверхности Луны материальной точкой переменного состава. Вторым игроком управляет точкой, которая движется с ограниченной по величине скоростью. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени сделать как можно меньшим расстояние между точками, расходуя при этом как можно меньше ресурсов. С помощью весовых коэффициентов записывается плата игры, которая содержит как интегральную, так и терминальную составляющие. Вычислена функция цены игры и найдены оптимальные уравнения игроков.*

**Ключевые слова:** управление, игрок, цена дифференциальной игры.

Вблизи поверхности Луны точка переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского [1]

$$\ddot{x} = \mu + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \leq p, \quad (1)$$

преследует точку, которая движется с ограниченной по величине скоростью

$$\dot{y} = bv, \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad b > 0, \quad |v| \leq 1. \quad (2)$$

Здесь вектор  $\mu \in \mathbf{R}^n$  характеризует постоянную внешнюю силу, пропорциональную массе точки; величина  $|\xi|$  относительной скорости отделяющихся частиц топлива является постоянной ( $|\cdot|$  – норма в  $\mathbf{R}^n$ );  $m(t) = m_0 + m_1(t)$  – масса точки, причем  $m_0$  – неизменяемая часть массы,  $m_1(t)$  – реактивная масса;  $p > 0$  – заданный момент окончания процесса управления. Считаем, что тяга ограничена числом  $\gamma > 0$ ,

$$-|\xi| \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} < \gamma.$$

Точкой переменного состава управляет первый игрок. Второй игрок управляет движением второй точки. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в момент времени  $p$  сделать расстояние между точками как можно меньшим и минимизировать при этом расход топлива.

Введем новые переменные [2]

$$z = y - x - (p - t)\dot{x} - \mu \frac{(p - t)^2}{2}, \quad u = -\frac{\xi}{|\xi|}, \quad \varphi(t) = -|\xi| \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \quad (3)$$

Тогда

$$|y(p) - x(p)| = |z(p)|, \quad \int_{t_0}^p \varphi(t) dt = |\xi| \ln \frac{m_0 + m_1(t_0)}{m_0}. \quad (4)$$

Здесь  $m_1(t_0)$  – начальный запас реактивной массы. Используя уравнения (1) и (2), получим, что

$$\dot{z} = -(p - t)\varphi(t)u + bv, \quad |u| = 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad |v| \leq 1. \quad (5)$$

Из формул (4) видно, что сформулированная выше цель первого игрока в переменных (3) означает, что первый игрок минимизирует  $|z(p)|$  и  $\int_{t_0}^p \varphi(t) dt$ . Введем весовой коэффициент  $\alpha > 0$  и рассмотрим показатель качества

$$|z(p)| + \alpha \int_{t_0}^p \varphi(r) dr \longrightarrow \min_{\varphi, u} \max_v. \quad (6)$$

Первый игрок стремится его минимизировать, а второй – максимизировать.

Рассмотренный пример (5), (6) является частным случаем однотипной дифференциальной игры [3]

$$\dot{z} = -a(t)\varphi(t)u + b(t)v, \quad z(t_0) = z_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1. \quad (7)$$

с критерием качества

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p g(t, \varphi(t)) dt \longrightarrow \min_{\varphi, u} \max_v. \quad (8)$$

Здесь  $a(t) \geq 0, b(t) \geq 0$  – интегрируемые при  $t \leq p$  функции. Число  $\gamma > 0$  задано. В задаче (5), (6) выполнены равенства

$$a(t) = p - t, \quad b(t) = b, \quad G(\varepsilon) = \varepsilon, \quad g(t, \varphi(t)) = \alpha\varphi.$$

Для задачи (7), (8) в работе [3] найдены оптимальные управления игроков. Они имеют следующий вид:

$$u_0(z) = v_0(z) = w(z).$$

Здесь

$$w(z) = \frac{z}{|z|}, \quad \text{при } z \neq 0, \quad w(0) - \text{любое } w \text{ с } |w| = 1.$$

Оптимальная функция  $\varphi_0(t)$  удовлетворяет ряду условий, которые для игры (5), (6) принимают следующий вид. Существуют неубывающая функция  $\theta : [t_0, p] \rightarrow [0, 1], \theta(t_0) = 0$ , числа  $\lambda \geq 0$  и  $\varepsilon_0 \geq 0$  такие, что

$$\int_{t_0}^p (b - \varphi_0(t)(p - t)) dt + |z(t_0)| - \varepsilon_0 \leq 0,$$

$$\max_{t_0 \leq \tau \leq p} \int_{\tau}^p (b - \varphi_0(t)(p - t)) dt - \varepsilon_0 \leq 0,$$

$$\lambda \left( \int_{t_0}^p (b - \varphi_0(t)(p - t)) dt + |z(t_0)| - \varepsilon_0 \right) = 0,$$

$$\int_{t_0}^p \theta(t)(b - \varphi_0(t)(p - t)) dt = \theta(p)\varepsilon_0,$$

$$(1 - \lambda - \theta(p))(\varepsilon_0 - \varepsilon) \leq 0 \text{ при любом } \varepsilon \geq 0,$$

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \gamma, & \alpha/(p - t) < \theta(t) - \theta(p) + 1, \\ [0, \gamma], & \alpha/(p - t) = \theta(t) - \theta(p) + 1, \\ 0, & \alpha/(p - t) > \theta(t) - \theta(p) + 1. \end{cases}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными для оптимальности функции  $\varphi_0(t)$ .

В случае  $b \geq \alpha\gamma$

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \gamma, & t_0 \leq t \leq q, \\ b/(p - t), & q < t \leq p - \frac{b}{\gamma}, \\ 0, & p - \frac{b}{\gamma} < t \leq p. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя точку  $p - b/\gamma$  во вторую формулу (9) можно убедиться, что  $\varphi_0(p - b/\gamma) = \gamma$ .



В случае  $b < \alpha\gamma$

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \gamma, & t_0 \leq t \leq q, \\ b/(p-t), & q < t \leq p - \frac{b}{\gamma}, \\ 0, & p - b/\gamma < t \leq p. \end{cases} \quad (10)$$

Подставляя точку  $p - b/\gamma$  во вторую формулу (10) можно убедиться, что  $\varphi_0(p - b/\gamma) = b/\alpha < \gamma$ .

## Литература

1. Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры*. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
3. Ухоботов В.И. *Линейная задача управления при наличии помехи с платой, зависящей от модуля линейной функции* // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 251–261.

## ABOUT ONE GAME TASK OF MEETING

P.I. Maksakova

*The game task of control in which the first player controls a point of variable composition is considered. The second player controls a point, which moves with a speed restricted on value. The purpose of the first player is in that on the given timepoint to make distance between points as little as possible and spending at the same time as little as possible resources. By means of weight factors the game board registers. Optimus controls of players are found.*

Keywords: control, player, price of a differential game.

УДК 515.124.4+514.177.2

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ КОМПАКТОВ И ПРОБЛЕМА ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ С ЕВКЛИДОВО ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКОЙ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА

О.С. Малышева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [osm95@mail.ru](mailto:osm95@mail.ru); Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*Изучаются непустые компакты, находящиеся в евклидовом пространстве в оптимальном положении (расстояние Хаусдорфа между ними нельзя уменьшить). Показано, что если один из них — одноточечный, то он находится в чебышевском центре второго. Изучается также много других частных случаев. В качестве приложения показано, что каждое трехточечное метрическое пространство изометрично вкладывается в пространство орбит группы сохраняющих ориентацию движений, действующей на компактных подмножествах пространства. Доказано, что для пары оптимально расположенных компактов все компакты, промежуточные в смысле метрики Хаусдорфа, также являются промежуточными и в смысле евклидовой метрики Громова–Хаусдорфа. Показано, что для трехточечной границы, образованной компактными множествами  $\mathcal{X}$ , являющимися окрестностями отрезков, точка Штейнера реализует минимальное заполнение и также принадлежит множеству  $\mathcal{X}$ .*

**Ключевые слова:** двоякопериодические, квазидвоякопериодические, циклические постоянные.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы РФ” (грант №НШ-6399.2018.1) и РФФИ (грант №16-01-00378-а).

## Литература

1. Бурого Д.Ю., Бурого Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
2. Facundo Memoli. *Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces* // Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2008. IEEE Computer Society Conference on. June 2008. 1–8.
3. Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. *Проблема Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств* // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 152–161.
4. Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A. *Local Structure of Gromov–Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space* // Topol. and its Appl., Elsevier BV, Netherlands. 2017. 221. 393–398.

## OPTIMAL POSITION OF COMPACTS AND STEINER’S PROBLEM IN THE SPACES WITH EUCLIDEAN GROMOV–HAUSDORFF METRIC

O.S. Malysheva

*We study nonempty compact subsets of Euclidean space disposed optimally (the Hausdorff distance between them cannot be reduced). We show that if one of them is a singleton, then it coincides with the Chebyshev center of the second one. We also consider many other particular cases. As an application, we show that each three-point metric space can be isometrically embedded in the orbits space of the group of proper motions acting on the compact subsets of Euclidean space. In addition, we prove that for each couple of optimally located compacts, all compacts intermediate in the sense of Hausdorff metric, are intermediate in the sense of Euclidean Gromov–Hausdorff metric as well. We also consider the set  $\mathcal{X}$  of neighbourhoods of segments and show that for three-points boundary where points are elements of  $\mathcal{X}$  the Steiner’s point realizes a minimal filling and belongs to  $\mathcal{X}$  too.*

Keywords: optimal position of compacts, Gromov–Hausdorff metric in Euclidean spaces, Chebyshev center, Steiner’s problem.

УДК 512.772

## О Р-РАНГАХ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ РОДА 3 С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ

Е.М. Мельничук<sup>1</sup>, С.А. Новоселов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [emelnichuk39@gmail.com](mailto:emelnichuk39@gmail.com); Балтийский Федеральный университет им. И. Канта

<sup>2</sup> [snovoselov@kantiana.ru](mailto:snovoselov@kantiana.ru); Балтийский Федеральный университет им. И. Канта

*В статье исследуются  $p$ -ранги гиперэллиптических кривых рода 3 с нетривиальными группами автоморфизмов. Определение  $p$ -ранга гиперэллиптической кривой является одним из актуальных вопросов в современной криптографии.  $p$ -ранг влияет на число точек эллиптической кривой и мощность якобиана гиперэллиптической кривой рода*

$g \geq 2$ . Также важно идентифицировать суперсингулярные гиперэллиптические кривые (все такие кривые имеют  $p$ -ранг 0), так как они имеют приложения в криптосистемах на основе билинейных спариваний и криптосистемах на основе изогений кривых, относящихся к постквантовой криптографии.

**Ключевые слова:** гиперэллиптические кривые, группа автоморфизмов,  $p$ -ранг, матрица Картье-Манина.

В настоящее время перспективным направлением исследования является построение криптосистем на основе гиперэллиптических кривых. Причем для криптосистем, основанных на проблеме дискретного логарифма, требуются кривые рода 1, 2 или 3. Для постквантовой криптографии на изогениях ограничений на род нет. Однако, на сегодняшний день, построены криптосистемы только для кривых рода 1 (эллиптические кривые). Кривые больших родов позволяют использовать ключи меньшего размера при той же степени безопасности, поэтому построение криптосистем на изогениях является актуальной открытой проблемой. Кривые  $p$ -ранга 0 подходят для криптосистем на основе билинейных спариваний и криптосистем на основе изогений.

Для малой характеристики  $p$  существует формула Дойринга-Шафаревича, связывающая мощность группы автоморфизмов и  $p$ -ранг [1]. В данной статье мы будем рассматривать поля большой характеристикой ( $> 2g + 1$ ). Все возможные группы автоморфизмов и соответствующие модели гиперэллиптических кривых рода 3 известны [2], [4]. В данной работе мы определим дополнительные ограничения на  $p$ -ранг данных кривых.

Гиперэллиптическая кривая  $C$  над конечным полем  $\mathbb{F}_p$  рода  $g$  задается уравнением  $y^2 + h(x)y = f(x)$ , где  $h(x), f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  и  $\deg(h(x)) \leq g + 1$ ,  $\deg(f(x)) = 2g + 1$  или  $\deg(f(x)) = 2g + 2$ . Имеем  $J_C[p^e] \cong (\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^r$ , для  $0 \leq r \leq g$  и  $e \geq 1$ . Число  $r$  называется  $p$ -рангом кривой  $C$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать гиперэллиптические кривые рода 3 с нетривиальными группами автоморфизмов. Для определения  $p$ -ранга кривой можно использовать несколько подходов.

**Определение 2:** Пусть  $C/K$  - гиперэллиптическая кривая рода  $g$ . Дзета-функция кривой  $C$  определяется как  $Z(C/K; T) = \frac{L(T)}{(1-T)(1-qT)}$ , где  $L(T) \in \mathbb{Z}[T]$  -  $L$ -многочлен кривой, имеющий вид  $L(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_{2g} T^{2g}$ ,  $a_{2g-i} = q^{g-i} a_i$  для  $i = 0, \dots, g$ .

Дзета-функция и  $L$ -многочлен играют важнейшую роль в подсчете точек гиперэллиптической кривой, так как  $\#J_C(\mathbb{F}_q) = L(1)$ . Связь  $p$ -ранга гиперэллиптической кривой с коэффициентами  $L$ -многочлена данной кривой, описывается следующей теоремой.

**Теорема 3 (Штихтенот):**  $p$ -ранг кривой  $C$  равен  $\max\{i \mid a_i \not\equiv 0 \pmod{p}\}$ .

Также для определения  $p$ -ранга гиперэллиптической кривой можно использовать матрицу Картье-Манина [4], [3].

Рассмотрим теперь  $p$ -ранги кривых рода 3 с нетривиальными группами автоморфизмов. Пусть дана гиперэллиптическая кривая  $C/K$  рода 3 с группой автоморфизмов  $G$ .

**Теорема 4:**  $G \cong C_{14}$ . Пусть  $v = \binom{p-1}{\frac{2}{5(p-1)}} + \binom{p-1}{\frac{2}{3(p-1)}} + \binom{p-1}{\frac{2}{p-1}}$ ,  $w = \binom{p-1}{\frac{2}{5(p-1)}} \cdot \binom{p-1}{\frac{2}{3(p-1)}} + \binom{p-1}{\frac{2}{5(p-1)}} \cdot \binom{p-1}{\frac{2}{p-1}} + \binom{p-1}{\frac{2}{3(p-1)}} \cdot \binom{p-1}{\frac{2}{p-1}}$ . Тогда:

1. если  $p \not\equiv 1 \pmod{7}$ , то кривая  $C$  имеет  $p$ -ранг 0;
2. если  $p \equiv 1 \pmod{7}$ , тогда возможны три случая: (а) если  $v \equiv 0 \pmod{p}$ , то кривая  $C$  имеет  $p$ -ранг 0; (б) если  $v \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $w \equiv 0 \pmod{p}$ , то кривая  $C$  имеет  $p$ -ранг 1; (с) в противном случае, кривая  $C$  имеет  $p$ -ранг 3.

**Теорема 5:**  $G \cong D_{12}$ . Кривая имеет модель  $y^2 = x(x^6 + \alpha x^3 + 1)$ , где  $\alpha \in K$ . Обозначим  $c = P_{\frac{p-1}{2}}(\rho)$ ,  $d = P_{\frac{p-1}{6}}(\rho)$ ,  $e = P_{\frac{p-5}{6}}(\rho)$ , где  $\rho = -\frac{\alpha}{2}$  и  $P_n$  – многочлены Лежандра. Тогда:

1. если  $\alpha = 0$ , то  $p$ -ранг равен 3 при  $p \equiv 1 \pmod{4}$  и равен 0 при  $p \not\equiv 1 \pmod{4}$ ;
2. если  $\alpha \neq 0$ , то
  - (а) при  $p \equiv 1 \pmod{3}$ :
    - i.  $c + 2d \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 0;
    - ii.  $c + 2d \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $c^2 + 2cd \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 1;
    - iii.  $c \equiv 0 \pmod{p}$  и  $d \not\equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 2;
    - iv. в противном случае  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 3;
  - (б) при  $p \equiv 2 \pmod{3}$ :
    - i.  $c \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 0;
    - ii.  $c \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $e \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 1;
    - iii.  $c \equiv 0 \pmod{p}$  и  $e \not\equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 2;
    - iv.  $c \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $e \not\equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 3.

**Теорема 6:**  $G \cong D_8 \times C_2$ . Кривая имеет модель  $y^2 = x^8 + \alpha x^4 + 1$ , где  $\alpha \in K$ . Пусть  $a = P_{\frac{p-1}{4}}(\rho)$ ,  $b = P_{\frac{p-3}{4}}(\rho)$ , где  $\rho = -\frac{\alpha}{2}$  и пусть  $c$  как в теореме 5. Тогда:

1. если  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , то  $p$ -ранг кривой равен 0 при  $a, c \equiv 0 \pmod{p}$ , равен 1 при  $a \equiv 0, c \not\equiv 0 \pmod{p}$ , равен 2 при  $a \not\equiv 0, c \equiv 0 \pmod{p}$  и равен 3 при  $a \not\equiv 0, c \not\equiv 0 \pmod{p}$ .
2. если  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , то  $p$ -ранг кривой равен 0 при  $b, c \equiv 0 \pmod{p}$ , равен 1 при  $b \equiv 0, c \not\equiv 0 \pmod{p}$ , равен 2 при  $b \not\equiv 0, c \equiv 0 \pmod{p}$  и равен 3 при  $b \not\equiv 0, c \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

**Теорема 7:**  $G \cong S_4 \times C_2$ . Пусть  $u = \sum_{i, j \leq \frac{p-1}{2}, i+j=\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{i} \binom{i}{j} 14^{i-j}$ . Тогда, если  $u \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $p$ -ранг кривой  $C$  равен 0. В противном случае  $p$ -ранг равен 3.

**Теорема 8:**  $G \cong V_8$ . Пусть  $s = \binom{p-1}{\frac{2}{3(p-1)}} + \binom{p-1}{\frac{2}{p-1}} + \binom{p-1}{\frac{2}{8}}$ ,  $t = \binom{p-1}{\frac{2}{3(p-1)}} \cdot \binom{p-1}{\frac{2}{p-1}} + \binom{p-1}{\frac{2}{3(p-1)}} \cdot \binom{p-1}{\frac{2}{8}} + \binom{p-1}{\frac{2}{p-1}} \cdot \binom{p-1}{\frac{2}{8}}$ . Тогда

1. если  $p \equiv 1 \pmod{8}$ , то
  - (а) при  $s \equiv 0 \pmod{p}$  кривая имеет  $p$ -ранг 0;

- (b) при  $s \neq 0, t \equiv 0 \pmod p$  кривая имеет  $p$ -ранг 1;
  - (c) при  $s \equiv 0, t \not\equiv 0 \pmod p$  кривая имеет  $p$ -ранг 2;
  - (d) в противном случае кривая имеет  $p$ -ранг 3.
2. если  $p \equiv 3, 7 \pmod 8$ , то кривая имеет  $p$ -ранг 0.
3. если  $p \equiv 5 \pmod 8$  и  $r = \left(\frac{p-1}{\frac{p-1}{4}}\right)$ , то
- (a) при  $r \equiv 0 \pmod p$  кривая имеет  $p$ -ранг 0;
  - (b) при  $r \not\equiv 0 \pmod p$  кривая имеет  $p$ -ранг 1.

Таблица 1: Гиперэллиптические кривые с нетривиальными группами автоморфизмов и их  $p$ -ранги

G	Модель кривой	Условия	p-ранг
$C_2 \times C_2$	$y^2 = x^8 + \alpha_1 x^6 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^2 + 1$	-	0,1,2,3
$D_4 \times C_2$	$y^2 = (x^4 + \alpha_1 x^2 + 1)(x^4 + \alpha_2 x^2 + 1)$	-	0,1,2,3
$U_2$	$y^2 = x(x^2 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + 1)$	$p \equiv 1 \pmod 4$	1,3
		$p \not\equiv 1 \pmod 4$	0,2
$H_2$	$y^2 = (x^4 - 1)(x^4 + \alpha x^2 + 1)$	-	0,1,2,3
$D_8 \times C_2$	$y^2 = x^8 + \alpha x^4 + 1$	$a, c \equiv 0 \pmod p, p \equiv 1 \pmod 4$ $b, c \equiv 0 \pmod p, p \equiv 3 \pmod 4$	0
		$a \equiv 0, c \not\equiv 0 \pmod p, p \equiv 1 \pmod 4$ $b \equiv 0, c \not\equiv 0 \pmod p, p \equiv 3 \pmod 4$	1
		$a \not\equiv 0, c \equiv 0 \pmod p, p \equiv 1 \pmod 4$ $b \not\equiv 0, c \equiv 0 \pmod p, p \equiv 3 \pmod 4$	2
		$a \cdot c \not\equiv 0 \pmod p, p \equiv 1 \pmod 4$ $b \cdot c \not\equiv 0 \pmod p, p \equiv 3 \pmod 4$	3
$D_{12}$	$y^2 = x(x^6 + \alpha x^3 + 1)$	$\alpha = 0, p \equiv 1 \pmod 4$	3
		$\alpha = 0, p \not\equiv 1 \pmod 4$	0
		$\alpha \neq 0, p \equiv 1 \pmod 3,$ $c + 2d \equiv 0 \pmod p$	0
		$\alpha \neq 0, p \equiv 1 \pmod 3,$ $c + 2d \not\equiv 0, c^2 + 2cd \equiv 0 \pmod p$	1
		$\alpha \neq 0, p \equiv 1 \pmod 3,$ $c \equiv 0, d \not\equiv 0 \pmod p$	2
		$\alpha \neq 0, p \equiv 1 \pmod 3,$ $c + 2d \not\equiv 0, c^2 + 2cd \not\equiv 0 \pmod p$	3
		$\alpha \neq 0, p \equiv 2 \pmod 3, c \equiv 0 \pmod p$	0
		$\alpha \neq 0, p \equiv 2 \pmod 3,$ $c \not\equiv 0, e \equiv 0 \pmod p$	1
		$\alpha \neq 0, p \equiv 2 \pmod 3,$ $c \equiv 0, e \not\equiv 0 \pmod p$	2
$\alpha \neq 0, p \equiv 2 \pmod 3, c \cdot e \not\equiv 0 \pmod p$	3		

$U_6$	$y^2 = x(x^6 - 1)$	$p \equiv 1 \pmod{4}$	3
		$p \not\equiv 1 \pmod{4}$	0
$V_8$	$y^2 = x^8 - 1$	$p \equiv 1 \pmod{8}, s \equiv 0 \pmod{p}$	0
		$p \equiv 1 \pmod{8}, s \not\equiv 0, t \equiv 0 \pmod{p}$	1
		$p \equiv 1 \pmod{8}, s \equiv 0, t \not\equiv 0 \pmod{p}$	1
		$p \equiv 1 \pmod{8}, s \not\equiv 0, t \not\equiv 0 \pmod{p}$	3
		$p \equiv 3, 7 \pmod{8}$	0
		$p \equiv 5 \pmod{8}, r \equiv 0 \pmod{p}$	0
		$p \equiv 5 \pmod{8}, r \not\equiv 0 \pmod{p}$	1
$S_4 \times C_2$	$y^2 = x^8 + 14x^2 + 1$	$u \equiv 0 \pmod{p}$	0
		$u \not\equiv 0 \pmod{p}$	3
$C_{14}$	$y^2 = x^7 + 1$	$p \not\equiv 1 \pmod{7}$	0
		$p \equiv 1 \pmod{7}, v \equiv 0 \pmod{p}$	0
		$p \equiv 1 \pmod{7}, v \not\equiv 0, w \equiv 0 \pmod{p}$	1
		$p \equiv 1 \pmod{7}, v \not\equiv 0, w \not\equiv 0 \pmod{p}$	3

**Заключение.** В данной работе мы определили дополнительные ограничения на  $p$ -ранг гиперэллиптических кривых рода 3 с нетривиальными группами автоморфизмов (табл. 1). Как видно из таблицы, данные ограничения дают полную классификацию по  $p$ -рангу для кривых с группами автоморфизмов  $D_8 \times C_2, D_{12}, U_6, V_8, S_4 \times C_2$  и  $C_{14}$  и  $p > 2g + 1$ .

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00244.

## Литература

1. Nakajima S. *On automorphism groups of algebraic curves* // Current trends in number theory. – Hindustan Book Agency, Gurgaon, 2002. – P. 129-134.
2. Lercier R., Ritzenthaler C. *Hyperelliptic curves and their invariants: geometric, arithmetic and algorithmic aspects* // Journal of Algebra. – 2012. – Vol. 372. – P. 595-636.
3. Novoselov S.A. *Hyperelliptic curves, Cartier-Manin matrices and Legendre polynomials* // Прикладная дискретная математика. – 2017. – №. 37.
4. Paulhus J. *Elliptic factors in Jacobians of hyperelliptic curves with certain automorphism groups* // The Open Book Series. – 2013. – Vol. 1, № 1. – P. 487-505.
5. Yui N. *On the Jacobian varieties of hyperelliptic curves over fields of characteristic  $p > 2$*  // Journal of algebra. – 1978. – Vol. 52, № 2. – P. 378-410.

## ON $p$ -RANKS OF GENUS 3 HYPERELLIPTIC CURVES WITH NONTRIVIAL AUTOMORPHISM GROUPS

E.M. Melnichuk, S.A. Novoselov

*In this paper we study  $p$ -ranks of the genus 3 hyperelliptic curves with nontrivial automorphism groups. Determination of  $p$ -rank of hyperelliptic curve is one of the actual problem in modern cryptography.  $p$ -rank influences on a number of point of elliptic curve and cardinality of Jacobian in case of a genus*

$g \geq 2$ . Moreover, it is important to identify supersingular hyperelliptic curves (such curves have  $p$ -rank 0) due to they are suitable in pairing-based cryptosystems and cryptosystems based on isogenies of this curves, which are postquantum cryptosystems.

Keywords: hyperelliptic curves, automorphism group,  $p$ -rank, Cartier–Manin matrix.

УДК 512.812.4

## ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ПОНЯТИЯ “ВНУТРЕННИЙ ИДЕАЛ”

Е.В. Мещерина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [elena\\_lipilina@mail.ru](mailto:elena_lipilina@mail.ru); Оренбургский государственный университет

*В статье обсуждается происхождение и развитие понятия “внутренний идеал” для йордановых алгебр и алгебр Ли. Считается, что внутренний идеал алгебры Ли является аналогом одностороннего идеала ассоциативной алгебры. Внутренние идеалы сыграли важную роль в классификации простых конечномерных алгебр Ли над полями положительной характеристики.*

**Ключевые слова:** алгебры Ли, внутренний идеал йордановой алгебры, внутренний идеал алгебры Ли, первичный радикал алгебры Ли, разрешимая алгебра Ли.

Впервые понятие “внутренний идеал” употребил Натан Джекобсон в 1969 году при рассмотрении теории йордановых алгебр. Это было новое название для введенного Дэвидом Топпингом в 1964 году понятия «квадратичный идеал» [1].

Джекобсон заметил, что пересечение внутренних (внешних) идеалов является внутренним (внешним) идеалом. Также он рассматривал минимальные и максимальные внутренние идеалы. Все эти понятия Джекобсон использовал для построения структурной теории квадратичных йордановых алгебр.

Впоследствии Кевин Маккриммон продолжил изучение внутренних идеалов в квадратичных йордановых алгебрах.

Он составил характеристику всех внутренних идеалов полупростых йордановых алгебр с условием убывающей цепи. Маккриммон заметил, что “внутренние идеалы играют роль в квадратичных йордановых алгебрах, аналогичную роли односторонних идеалов в теории ассоциативных алгебр. В частности йордановы алгебры с условием убывающей цепи на внутренние идеалы тесно связаны с артиновыми ассоциативными алгебрами” [2].

Джон Фолкнер в 1973 году распространил понятие внутреннего идеала на свободный конечномерный модуль для конечномерной алгебры Ли с невырожденной симметрической ассоциативной билинейной формой [3].

Джером Кац в 1973 году исследовал группу автоморфизмов структуры внутренних идеалов простых квадратичных йордановых алгебр, удовлетворяющих условию минимальности на главные внутренние идеалы. В случае, когда йорданова алгебра является простой артиновой алгеброй с эрмитовой инволюцией, он показал, что группа автоморфизмов структуры внутренних идеалов изоморфна группе полулинейных автоморфизмов этой алгебры и определил условия, по которым рассмотренные им примеры йордановых алгебр могут иметь изоморфные структуры внутренних идеалов [4].

Систематическим изучением внутренних идеалов в алгебрах Ли впервые занялась Джорджия Бенкарт.

Она классифицировала минимальные внутренние идеалы и доказала соотношение между  $ad$ -нильпотентными элементами алгебры Ли и ее внутренними идеалами, ввела понятие артиновой алгебры Ли с условием обрыва убывающей цепи внутренних идеалов. Показала что в невырожденной  $inn$ -артиновой простой алгебре Ли все собственные внутренние идеалы абелевы [5].

Также она рассмотрела структуру внутреннего идеала полупервичных ассоциативных колец и skew-элементов первичных колец с инволюцией [6].

А.А. Премет в 1986 году доказал теорему о том, что любая простая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем  $K$  содержит одномерный внутренний идеал [7].

Изучением внутренних идеалов также занимались испанские ученые Антонио Фернандез Лопез, Эстер Гарсия, Мигель Гомез Лозано.

Они рассматривали внутренние идеалы бесконечномерных финитарных простых алгебр Ли над полем характеристики нуль с геометрической точки зрения, изучили, в каких случаях эти внутренние идеалы являются главными или минимальными и охарактеризовали регулярные элементы фон Неймана. В 2006 году они доказали, что любая финитарная центральная простая алгебра Ли над полем характеристики нуль удовлетворяет условию убывающей цепи на главные внутренние идеалы. Они определили условия, при выполнении которых эти алгебры являются артиновыми, доказывая, в частности, что финитарная простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль Артинова, если и только если она конечномерна [8].

Также они изучили структуру внутренних идеалов непорожденных алгебр Ли с естественным цоколем и рассмотрели случай, когда цоколь является артиновым. Они определили цоколь непорожденной алгебры Ли как сумму всех ее минимальных внутренних идеалов [9].

Чуть позже в 2008 году они ввели понятие ядра, подфактора и дополнения внутреннего идеала и доказали, что алгебра Ли является дополняемой если и только если она является прямой суммой простых непорожденных артиновых алгебр Ли. Они классифицировали простые непорожденные артиновы алгебры Ли над полем характеристики нуль или больше чем 7 и описали структуру внутреннего идеала Ли простой алгебры Ли, возникающей из простой ассоциативной алгебры с ненулевым цоколем [10].

Совместно с Эрхард Нэхер они представили метод построения градуировки алгебр Ли. Необходимым условием для этого стало существование “абелевого внутреннего идеала алгебры Ли, подфактор которого Йорданова пара покрыта конечной решеткой и она и производит градуировку алгебры Ли весовой решеткой системы корней, связанной с покрывающей решеткой” [11].

Совместно с Кристиной Драпер Лопез, Гарсия и Лозано в 2012 году классифицировали внутренние идеалы алгебр Ли типа  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  и построили диаграммы Дынкина [12].

Джорджия Бенкарт и Антонио Фернандез Лопез в 2009 году представили полное описание структуры внутреннего идеала Ли простых артиновых колец с инво-



люцией, простых колец с инволюцией и минимальных односторонних идеалов [13].

Антонио Фернандез Лопез в 2011 году разделил внутренние идеалы на «стандартные» и «нестандартные» и доказал теорему о том, что в полупервичной алгебре  $A$  над кольцом скаляров  $\Phi$ , содержащим  $\frac{1}{2}$ , внутренний идеал Ли  $B$  является стандартным тогда и только тогда, когда выполняется условие  $V_B \subset B \subset V_B + Z(A)$ , а также показал путь построения “нестандартных внутренних идеалов” [14].

А.А. Баранов и Дж. Роули в 2013 году доказали, что простая локально конечномерная алгебра Ли имеет ненулевые собственные внутренние идеалы если и только если она имеет диагональный тип в некотором смысле [15].

С.А. Пихтильхов и Е.В. Мещерина в 2012 году доказали теоремы о структуре всех собственных внутренних идеалов алгебр Ли  $sl_2(F)$  [16] и  $sl_3(F)$ . Они показали, что все собственные внутренние идеалы  $H$  алгебры Ли  $sl_n(F)$  над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль удовлетворяют условию:  $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$ . Также они представили независимое доказательство результата Дж. Бенкарт об абелевости собственных внутренних идеалов для специальной линейной алгебры Ли над полем характеристики нуль. С помощью внутренних идеалов алгебры Ли они решили ослабленную проблему А.В. Михалева: первичный радикал  $a$ -артиновой или  $inn$ -артиновой алгебры Ли разрешим, где под  $a$ -артиновостью понимается стабилизация убывающей цепочки подалгебр, а под  $inn$ -артиновостью – стабилизация убывающей цепочки внутренних идеалов алгебры Ли. [17]

## Литература

1. Jacobson N. *Structure theory of quadratic Jordan algebras* // Lecture Notes. – Tata Institute. – Bombay, 1970. – 128 pp.
2. McCrimmon K. *Inner ideals in quadratic Jordan algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 159. – P. 445–468.
3. Faulkner J.R. *On the geometry of inner ideals* // J. Algebra. – 1973. – V. 26. – P. 1–9.
4. Katz J. *Isomorphisms of the lattice of inner ideals of certain quadratic Jordan algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 185. – P. 309–329.
5. Benkart G. *On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras* // Transaction of the American Mathematical Society. – 1977. – V. 232. – P. 61–81.
6. Benkart G. *The Lie inner ideal structure of associative rings* // J. Algebra. – 1976. – V. 43. – P. 561–584.
7. Премет А.А. *Алгебры Ли без сильного вырождения* // Математический сборник. – 1986. – Т. 129 (171), № 1. – С. 140–153.
8. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. *Inner ideals of finitary simple Lie algebras* // J. Lie Theory. – 2006. – V. 16. – P. 97–114.
9. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. *Inner ideal structure of nearly artinian Lie algebras* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2009. – V. 137. – P. 1–9.
10. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. *An artinian theory for Lie algebras* // Journal of Algebra. – 2008. – V. 319, № 3. – P. 938–951.
11. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M., Neher E. *A construction of gradings of Lie algebras* // IMRN Int. Math. Res. Not. – 2007. – V. 16. – Art. ID rnm051. – P. 34. – MR 2353091 (2008j:17057).
12. Draper C., Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. *The inner ideals of the simple finite dimensional Lie algebras* // J. Lie Theory. – 2012. – V. 22, № 4. – P. 907–929.

13. Benkart G., Fernandez Lopez A. *The inner ideal structure of associative rings revisited* // Communications in Algebra. – 2009. – V. 37. – P. 3833–3850.
14. Fernandez Lopez A. *Lie inner ideals are nearly Jordan inner ideals* // Proc. Amer Math. Soc. (to appear)
15. aranov A.A., Rowley J. *Inner ideal of simple locally finite algebras* // Arxiv Math. – 2013. – V. 2. – P. 1–23.
16. Мещерина Е.В., Пихтильков С.А. *О некоторых свойствах внутренних идеалов алгебры Ли* // Вестник ОГУ. – 2013. – № 9 (158). – С. 110–114.
17. Мещерина Е.В., Пихтильков С.А., Пихтилькова О.А. *О собственных внутренних идеалах простых алгебр Ли* // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. – № 6. – Часть 2. – С. 156–162.

## THE HISTORY OF THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF “INNER IDEAL”

E.V. Mescherina

*This article describes the origin and development of the concept of "inner ideal" for Jordan algebras and Lie algebras. It is assumed that the inner ideal of a Lie algebra is an analogue of the one-sided ideal of an associative algebra. Inner ideals played an important role in the classification simple finite-dimensional Lie algebras over fields of positive characteristic.*

Keywords: Lie algebra, inner ideal of a Jordan algebra, inner ideal of the Lie algebra, the prime radical of the Lie algebra, solvable Lie algebra.

УДК 510.5

## ВЫЧИСЛИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ, ОБОГАЩЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯМИ $S_{\mathcal{L}}^N$ , СПЕКТРЫ ЭТИХ ОТНОШЕНИЙ И КАТЕГОРИЧНОСТЬ

Я.А. Михайловская<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [yana.michailovskaya@yandex.ru](mailto:yana.michailovskaya@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Данная работа посвящена исследованию спектров отношений  $S_{\mathcal{L}}^n$  на вычислимом линейном порядке  $\mathcal{L}$ . В работе получены некоторые свойства спектров отношений  $S_{\mathcal{L}}^n$  на вычисляемых линейных порядках, а также была исследована вычисляемая категоричность линейных порядков, в сигнатуру которых добавлено отношение  $S_{\mathcal{L}}^1$ .*

**Ключевые слова:** вычисляемый линейный порядок, спектр отношения, вычисляемая категоричность.

В данной работе рассматриваются вычисляемые линейные порядки, в сигнатуру которых добавлены некоторые дополнительные отношения. Эти отношения обозначаются как  $S_{\mathcal{L}}^n$  и задаются следующим образом:

$$x <_{\mathcal{L}} y, S_{\mathcal{L}}^{2k}(x, y) \Leftrightarrow |(x, y)_{\mathcal{L}}| = 0 \vee = 2 \vee \dots \vee = 2k,$$

$$x <_{\mathcal{L}} y, S_{\mathcal{L}}^{2k+1}(x, y) \Leftrightarrow |(x, y)_{\mathcal{L}}| = 1 \vee = 3 \vee \dots \vee = 2k + 1,$$

здесь  $(x, y)_{\mathcal{L}} = \{z \mid x <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} y\}$ ,  $x <_{\mathcal{L}} y$ .

Путем обобщения результата А. Н. Фролова, В. Харизанова и Дж. Чаб [2] на случай отношений  $S_{\mathcal{L}}^n$ , было доказано следующее предложение:

**Предложение 1.** Пусть  $\mathcal{L}$  – вычислимый линейный порядок, в котором выполнено следующее условие: для любого элемента  $x \in L$  найдутся элементы  $a, b \in L$  такие, что  $S_{\mathcal{L}}^n(a, b)$  истинно и  $x <_{\mathcal{L}} a$ . Пусть  $A$  – невычислимое в.п. множество такое, что  $S_{\mathcal{L}}^n \leq_T A$ . Тогда существует вычислимый линейный порядок  $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}$  такой, что  $S_{\mathcal{M}}^n \equiv_T A$ .

Здесь  $A$  – в.п. множество. Если же в качестве множества  $A$  взять  $n + 1$ -в.п. множество, то получим следующую теорему:

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{L}$  – вычислимый линейный порядок, в котором выполнено следующее условие: для любого элемента  $x \in L$  найдутся элементы  $x_0 <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} x_{n+1} \in L$  такие, что  $S_{\mathcal{L}}^n(x_0, x_{n+1})$  истинно и  $x <_{\mathcal{L}} x_0$ . Пусть  $A$  – невычислимое  $(n + 1)$ -в.п. множество такое, что  $S_{\mathcal{L}}^n \leq_T A$ . Тогда существует вычислимый линейный порядок  $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}$  такой, что  $S_{\mathcal{M}}^n \geq_T A$ .

В ходе изучения свойств отношения  $S_{\mathcal{L}}^1$  и его влияния на вычислимую категоричность линейных порядков была получена следующая теорема:

**Теорема 2.** Пусть вычислимый линейный порядок  $\mathcal{L}$  имеет бесконечно много блоков длины 2 и отношение  $S_{\mathcal{L}}^1$  вычислимо. Тогда существует вычислимый линейный порядок  $\mathcal{R}$  такой, что  $\mathcal{R} \cong \mathcal{L}$ ,  $S_{\mathcal{R}}^1$  вычислимо, но  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$  не вычислимо изоморфны, то есть  $\mathcal{L}$  не вычислимо категоричен.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00174 – Алгоритмические аспекты линейных порядков и отношений на них).

## Литература

1. Chubb J., Frolov A., Harizanov V. Degree spectra of the successor relation of computable linear orderings // Archive for Mathematical Logic. – 2009. – V. 48, № 1. – P. 7–13.

COMPUTABLE LINEAR ORDERS ENRICHED BY THE RELATIONS  $S_{\mathcal{L}}^N$ , THE SPECTRA OF THESE RELATIONS AND CATEGORICITY

Ya.A. Michailovskaya

*This paper is devoted to the study of the spectra of relations  $S_{\mathcal{L}}^n$  on a computable linear order  $\mathcal{L}$ . In this paper, we obtained some properties of the spectra of the relations  $S_{\mathcal{L}}^n$  on computable linear orders, and also a computable categoricity of linear orders with the relation  $S_{\mathcal{L}}^1$  was studied.*

Keywords: computable linear order, spectrum of a relation, computable categoricity.

УДК 517.927.4, 517.58, 519.62

## О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

М.А. Москалева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *m.a.moskaleva1@gmail.com*; Пензенский государственный университет, Политехнический институт

*В статье рассматривается нелинейная задача на собственные значения, возникающая в теории волноводов. Получен результат о глобальной однозначной разрешимости вспомогательной задачи Коши, соответствующей исследуемой задаче на собственные значения. Указанный результат позволяет обосновать метод пристрелки по спектральному параметру для приближенного вычисления собственных значений. Представлены численные результаты.*

**Ключевые слова:** нелинейная задача на собственные значения, нелинейное дифференциальное уравнение, метод пристрелки; нелинейная диэлектрическая проницаемость.

### 1. Постановка задачи

В настоящей работе обоснован метод пристрелки по спектральному параметру, применяемый для численного решения некоторых нелинейных задач на собственные значения, возникающих в теории волноводов [3]– [11]. Ключевым аспектом применения метода пристрелки является глобальная однозначная разрешимость вспомогательной задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Одним из результатов этой работы является утверждение о существовании глобального решения упомянутой задачи Коши.

Пусть  $I = (0, h)$ ,  $\bar{I} = [0, h]$ ,  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ . Рассмотрим нелинейную задачу на собственные значения (типа Штурма – Лиувилля), которая заключается в нахождении тех значений параметра  $\gamma = \hat{\gamma}$ , для которых существуют решения  $u \equiv u(x; \gamma, \alpha)$  уравнения

$$u'' = -(\varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha f(u^2)) u, \quad (1)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u'|_{x=0} = A \neq 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=h} = 0, \quad (3)$$

где  $(x, \gamma, \alpha) \in \bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha, \varepsilon_l \in \mathbb{R}_+$  – постоянные,  $f \in C^1[0, +\infty)$  – монотонно возрастающая функция и  $f(0) = 0$ ,  $A \in \mathbb{R}$  – постоянная (без потери общности  $A > 0$ ),

$$u \in C^2(\bar{I}). \quad (4)$$

В силу того, что (1) зависит от  $\gamma^2$ , достаточно исследовать случай  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ .

**Определение 1.** Число  $\gamma = \hat{\gamma} > 0$  такое, что при фиксированном значении  $u'|_{x=0} > 0$  существует функция  $u \equiv u(x; \hat{\gamma}, \alpha)$ , которая удовлетворяет уравнению (1) и условиям

(2)–(4), будем называть собственным значением задачи (1)–(4), а функцию  $u(x; \hat{\gamma}, \alpha)$ , соответствующую собственному значению  $\hat{\gamma}$ , – собственной функцией задачи (1)–(4).

Задачу (1)–(4) назовем задачей  $P$ , а ее собственные значения обозначим  $\hat{\gamma}$ .

## 2. Основные результаты

Интеграл уравнения (1) при условиях (2) имеет вид

$$u'^2 + (\varepsilon_l - \gamma^2) u^2 + \alpha F(u^2) = A^2, \quad (5)$$

где  $F(u^2) = \int_0^{u^2} f(t) dt$ .

Введем новые переменные:

$$\tau = u^2, \quad \eta = \frac{u'}{u}. \quad (7)$$

Используя обозначения (7), запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{cases} \tau' = 2\tau\eta, \\ \eta' = -(\varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha f(\tau) + \eta^2). \end{cases} \quad (8)$$

Первый интеграл системы (8) при условиях (2) имеет вид

$$(\eta^2 + \varepsilon_l - \gamma^2)\tau + \alpha F(\tau) \equiv A^2. \quad (9)$$

С использованием (8), (9) легко показать, что  $\eta' < 0$  при всех  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Отсюда следует, что функция  $\eta(x)$  является монотонно убывающей. Используя условия (2)–(3) и монотонность функции  $\eta(x)$ , находим  $\eta(0) = +\infty$ . Поскольку формула (9) неявно определяет функцию  $\tau \equiv \tau(\eta; \gamma)$ , то второе уравнение системы (8) можно переписать в виде

$$\eta' = w(\eta; \gamma), \quad (10)$$

где  $w(\eta; \gamma) \equiv \eta^2 + \varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha f(\tau(\eta; \gamma))$ .

Пусть  $u$  имеет  $n$  нулей  $x_i \in I$ , где  $I = (0, h)$  и  $i = \overline{1, n}$ ; при этом  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = h$ . Если  $n = 0$ , то  $u$  не обращается в нуль при  $x \in I$ . Из того, что  $\eta' < 0$  и условий (2) следуют формулы

$$\lim_{x \rightarrow +0} \tau(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \eta(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_i} \tau(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_i \pm 0} \eta(x) = \pm\infty, \text{ где } i = \overline{1, n}.$$

Интегрируя уравнение (10), можем показать, что справедливо

**Утверждение 1.** *Задача Коши (1)–(2) однозначно глобально разрешима при  $x \in \bar{I}$ , а ее классическое решение  $u \equiv u(x; \gamma, \alpha)$  непрерывно зависит от точки  $(x, \gamma, \alpha) \in \bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  и справедлива формула*

$$\int_{\eta(h)}^{+\infty} \frac{ds}{w(s; \gamma)} + n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w(s; \gamma)} = h, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Заметим, что из (3) и монотонности функции  $\eta(x)$  следует, что  $\eta(h) = -\infty$ . Тогда формула (11) при условии  $\eta(h) = -\infty$  дает дисперсионное уравнение задачи  $P$  [9].

Рассмотрим функцию  $F(h, \gamma) := u(h; \gamma, \alpha)$ . Учитывая (3), получаем, что если число  $\gamma = \hat{\gamma}$  таково, что  $F(h, \hat{\gamma}) = 0$ , то  $\hat{\gamma}$  является собственным значением задачи  $P$ .

Пусть  $0 < \gamma_* < \gamma^* < \infty$ ,  $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ , тогда справедлива

**Теорема 1.** Если отрезок  $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset [\gamma_*, \gamma^*]$  таков, что  $F(h, \underline{\gamma})F(h, \bar{\gamma}) < 0$ , то существует по крайней мере одно собственное значение  $\hat{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$  задачи  $P$ .

Утверждение 1 и теорема 1 позволяют обосновать применения метода пристрелки по спектральному параметру для приближенного нахождения собственных значений.

Реализуем такой метод на основе алгоритма половинного деления. Пусть  $0 < h_* < h^* < \infty$  и  $0 < \gamma_* < \gamma^* < \infty$  – некоторые числа. Будем считать, что  $h \in [h_*, h^*]$  и  $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ . Разобьем интервалы  $[h_*, h^*]$  и  $[h_*, h^*]$  на  $n$  и  $m$  частей соответственно. Имеем сетку  $\{h_i, \gamma_j\}$ ,  $i \in \overline{0, n}$ ,  $j \in \overline{0, m}$ , причем  $h_0 = h_*$ ,  $h_n = h^*$ ,  $\gamma_0 = \gamma_*$ ,  $\gamma_m = \gamma^*$ . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -(\varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha f(u_1^2))u_1. \end{cases} \quad (12)$$

Для каждой пары индексов  $(i, j)$  имеем начальные условия

$$u_1(0) = u_{1,ij}, \quad u_2(0) = u_{2,ij}, \quad (13)$$

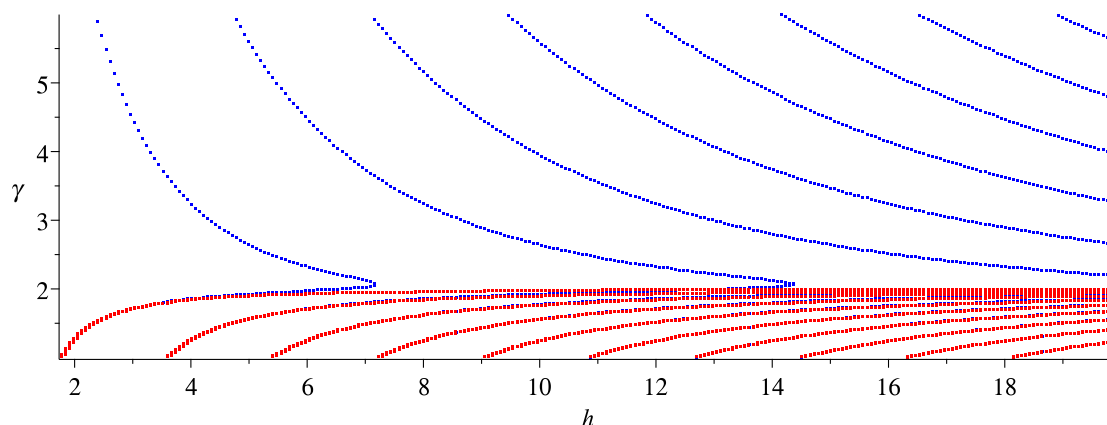
где  $u_{1,ij}^0 = u|_{x=0}$ ,  $u_{2,ij}^0 = u'|_{x=0}$  (несмотря на то что величины  $u_{1,ij}^0$ ,  $u_{2,ij}^0$  не зависят от  $h$  и  $\gamma$ , нам удобно оставить двойную индексацию).

Решая любым численным методом задачу Коши (12)–(13), вычислим  $u_{1,ij}^h = u_1(h_i, \gamma_j)$ . В силу утверждения 1 функция  $F(h, \gamma)$  непрерывно зависит от  $h$  и  $\gamma$ . По существу,  $u_{1,ij}^h$  есть сеточная аппроксимация функции  $F(h, \gamma)$ . Пусть для некоторого  $h_i$  существуют такие  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+1}$ , что  $u_{1,ij}^h u_{1,i,j+1}^h < 0$ . Это значит, что существует  $\hat{\gamma}_j \in (\gamma_j, \gamma_{j+1})$  такое, что  $\hat{\gamma}_j$  является собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн и этому собственному значению соответствует толщина слоя  $h_i$ . Значение  $\hat{\gamma}_j$  может быть найдено с любой степенью точности методом половинного деления [11]. Отметим, что существенным отличием настоящей работы от [11] является то, что в упомянутой работе разрешимость вспомогательной задачи Коши была доказана лишь на отрезке Пеано. В настоящей работе аналогичный результат получен для произвольного (конечного)  $h > 0$ .

Рассматриваемый метод позволит строить графики зависимости постоянной распространения (нормированной)  $\gamma$  от толщины слоя (нормированной)  $h$ . Дисперсионными кривыми в таких задачах называют кривые  $\gamma = \gamma(\omega)$  (или  $\gamma = \gamma(\omega)$ ), где – круговая частота. Поскольку мы работаем в нормированных переменных, то мы будем называть дисперсионной кривой график зависимости  $\gamma = \gamma(h)$ .

На рисунке 1 изображены дисперсионные кривые, то есть зависимости  $\gamma = \gamma(h)$  для нелинейной (синие кривые) и отвечающей ей линейной (красные кривые) задач. Использовались следующие значения параметров  $\varepsilon_l = 4$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $f(u^2) = u^2$ ,  $A = 1$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант №18-71-10015).



**Рис. 1.** Дисперсионные кривые

## Литература

1. Смирнов Ю.Г. *Математические методы исследования задач электродинамики*. – Пенза: Изд-во ПензГУ, 2009. – 268 с.
2. Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache. D. *Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves*. – Elsevier sci. Publ. North-Holland, Amsterdam London New York Tokyo, 1991. – 268 с.
3. Schurmann H.W., Serov V.S., Shestopalov Yu.V. *Solutions to the Helmholtz equation for TE-guided waves in a three-layer structure with Kerr-type nonlinearity* // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – Vol. 35. – P. 10789–10801.
4. Schurmann H.W., Smirnov Yu.G., Shestopalov Yu.V. *Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides* // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 71, № 1. – P. 016614-1–016614-10.
5. Smirnov Yu.G., Valovik D.V. *Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity* // Phys. Rev. A. – 2015. – Vol. 91, № 1. – P. 013840-1–013840-6.
6. Valovik D.V. *Novel propagation regimes for TE waves guided by a waveguide filled with Kerr medium* // J. Nonlinear Opt. Phys. Mater. – 2016. – Vol. 25, № 4. – P. 1650051-1–1650051-17.
7. Valovik D.V. *On the existence of infinitely many nonperturbative solutions in a transmission eigenvalue problem for nonlinear Helmholtz equation with polynomial nonlinearity* // Appl. Math. Modelling. – 2018. – Vol. 53. – P. 296–309.
8. Валовик Д.В., Зарембо Е.В. *Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью* // Журн. выч. мат. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 1. – С. 74–89.

## ON NUMERICAL SOLUTION OF SOME NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS

М.А. Moskaleva

*The paper focuses on a nonlinear eigenvalue problem arising in the theory of nonlinear electromagnetic guided waves. It is proved that an auxiliary Cauchy problem is globally uniquely solvable. To solve numerically the nonlinear eigenvalue problem, one can use a shooting method. Applicability of the shooting method is based on the proved global unique solvability. Numerical results are presented.*

Keywords: nonlinear eigenvalue problem, nonlinear differential equation, shooting method, nonlinear permittivity.

УДК 533

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ С.К. ГОДУНОВА В РАЗНЫХ СРЕДАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И.Н. Мустафин<sup>1</sup>, Т.Ф. Халитова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ildarmn@mail.ru; ИММ — обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН

<sup>2</sup> taliny@mail.ru; ИММ — обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН

*Сопоставляется экономичность расчета задач газовой динамики методом С. К. Годунова в средах программирования Matlab и C++. Среда Matlab отличается от среды C++ тем, что она позволяет создать удобный интерфейс для подготовки начальных данных и визуализации результатов расчетов. В качестве характерной принята задача о распаде разрыва, имеющая аналитическое решение. Продемонстрировано согласование численных решений, полученных в обеих рассматриваемых средах программирования, как между собой, так и с аналитическим. Показано, что для получения численного решения определенной точности в среде Matlab требуется примерно в два раза больше времени, чем в среде C++.*

**Ключевые слова:** эффективность расчетов, задачи газовой динамики, метод С.К. Годунова, распад разрыва, среда программирования, Matlab, C++.

Среди газодинамических задач особый интерес представляют задачи с образованием разрывов решения (взрыв, слет или разлет среды). Одним из популярных методов численного решения таких задач является метод С.К. Годунова [2]. В этом методе используется явная схема, аппроксимирующая интегральные законы сохранения. Классическая схема С.К. Годунова основана на точном решении задачи о распаде произвольного разрыва. Одним из ее важных преимуществ по сравнению со схемами с искусственной вязкостью является отсутствие нефизических осцилляций решения в окрестности разрывов. Это позволяет с уверенностью использовать метод С.К. Годунова для решения задач с разрывами различной сложности в конфигурации.

Анализ сложных математических моделей, при помощи которых исследуются физические процессы, требует создания численных методов решения с использованием вычислительной техники. С одной стороны, применение готовых численных методов и информационных технологий экономит время для создания соответствующих программ. За многие годы накоплены обширные библиотеки научных подпрограмм в различных математических пакетах, предназначенных для реализации разнообразных численных методов и производящих аналитические математические преобразования. Одним из таких наиболее известных сегодня пакетов является MatLab. С другой стороны, использование готовых математических пакетов может снижать скорость выполнения программ по сравнению с их аналогами, созданными с применением менее специализированных языков, например Си++.

В настоящей работе сопоставляется эффективность расчета газодинамических задач методом С. К. Годунова в средах программирования Matlab и C++. Для этого в среде программирования Matlab была создана программа расчета указанных задач с удобным интерфейсом для задания начальных данных и визуализации результатов расчетов. Численное решение задач на языке программирования C++ рассчиты-



валось с применением разработанного ранее программного комплекса, результаты тестирования которого приведены в работе [3]. Алгоритм программы в среде Matlab выбирался максимально близким к алгоритму в среде C++, за исключением тех областей где можно было использовать встроенные функции матричных операций. Сопоставление эффективности проводится на задаче о распаде разрыва, обладающей основными особенностями задач газовой динамики (наличие ударной волны, волны разрежения, контактного разрыва) и имеющая аналитическое решение. Все расчеты проводились на персональном компьютере Intel Core i7-4770 CPU 3.4 ГГц с оперативной памятью 8 Гб.

**Постановка задачи.** До момента времени  $t = 0$  в центре трубы длиной  $l = 1$  имеется перегородка, слева от которой находится газ с параметрами  $p_L = 1, \rho_L = 1, v_L = 0$ , а справа – этот же газ с параметрами  $p_R = 1000, \rho_R = 1, v_R = 0$ . Здесь  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $v$  – скорость вдоль оси трубы  $x$ , нижние индексы  $L$  и  $R$  означают отношение параметров к левой и правой сторонам от перегородки.

В начальный момент времени  $t = 0$  перегородка мгновенно убирается. В силу того, что разрыв является неустойчивым, он сразу распадается. Возникает устойчивая конфигурация из ударной волны и контактного разрыва, распространяющихся влево в область с низким давлением, и волны разрежения, уходящей вправо в область с высоким давлением.

Течение газа описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho e}{\partial x} + \frac{\partial (\rho e v + p v)}{\partial x} = 0.$$

Здесь  $e = \varepsilon + v^2/2$  – полная энергия единицы массы,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия единицы массы. Состояние газа описывается уравнением:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,$$

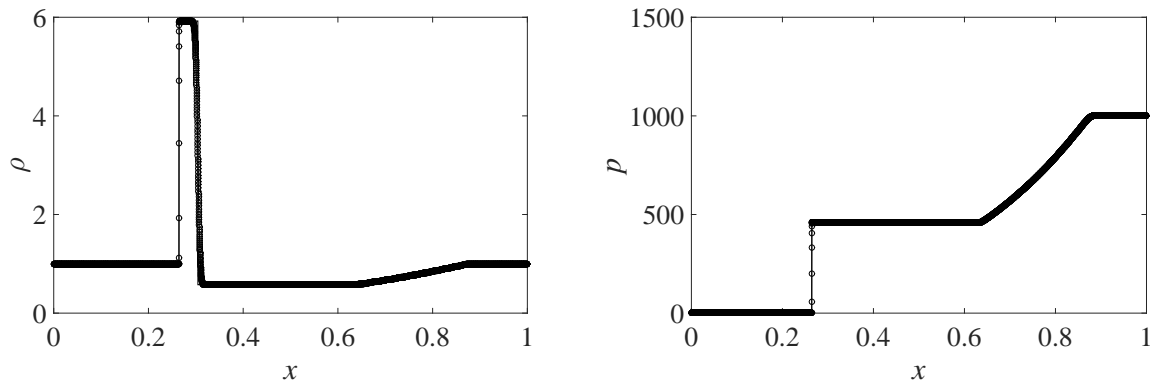
где  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты.

В качестве численного метода решения данной задачи применяется классический вариант метода С.К. Годунова [2]. Число Куранта  $\alpha_{CRT}$  во всех расчетах принимается равным 0.95. Алгоритм программы в среде Matlab выбирался максимально близким к алгоритму в среде C++, за исключением тех областей, где можно использовать встроенные функции матричных операций. В таком случае численные решения, полученные в обеих средах, должны совпадать с точностью до погрешностей округления.

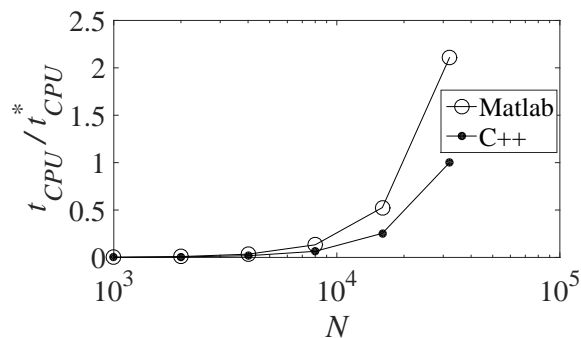
**Результаты.** На рис. 1 представлено сопоставление пространственных распределений плотности и давления в рассматриваемой задаче, рассчитанных в обеих средах программирования на мелкой сетке (с числом ячеек  $N=8000$ ) в один из моментов времени, с соответствующими распределениями в аналитическом решении. Видно их хорошее согласование, что свидетельствует о правильности работы созданных программ.

Рис. 2 иллюстрирует различие затрат процессорного времени на расчет задачи о распаде разрыва в рассматриваемых средах программирования. Видно, что несмотря на то, что в обеих средах используется одинаковый алгоритм численного решения, скорость расчета по мере увеличения числа ячеек все более заметно

различается. При этом, при любом числе ячеек среда C++ позволяет рассчитать задачу с в два раза меньшими потребностями процессорного времени (с точностью до первого знака после запятой). Связано это прежде всего с тем, что вычисления значений на гранях в методе С.К. Годунова порождает циклический вызов подпрограммы, решающей задачу распада разрыва итерационным методом.

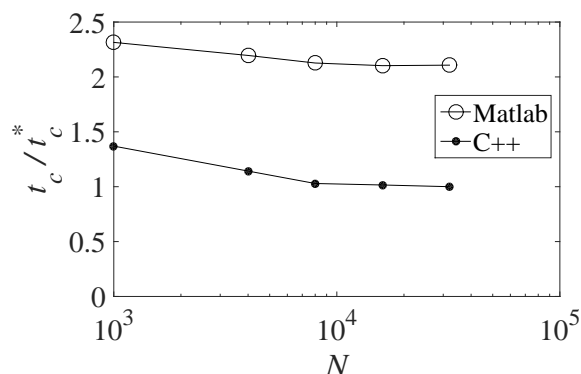


**Рис. 1.** Пространственные распределения плотности (слева) и давления (справа) в решении задачи о распаде разрыва в момент  $t = 0.015$ . Тонкими сплошными линиями показано аналитическое решение, символы соответствуют графически совпадающим численным решениям, полученным на сетке  $N=8000$  в рассматриваемых средах программирования.



**Рис. 2.** Зависимость отношения  $t_{CPU} / t_{CPU}^*$  – безразмерного времени расчета от количества ячеек  $N$  ( $t_{CPU}$  – процессорное время, затраченное на решение задачи,  $t_{CPU}^*$  – процессорное время, затраченное на решение задачи в среде программирования C++ на сетке с  $N = 32000$ ).

Рис. 3 характеризует затраты процессорного времени на расчет задачи в одной ячейке на одном шаге по времени до момента  $t = 0.015$ . Видно, что с ростом разбиения расчетной области  $N$  затраты процессорного времени снижаются в обеих средах программирования. Это связано с тем, что по мере увеличения разбиения численное размазывание ударной волны, контактного разрыва и волны разрежения уменьшается. Поэтому как количество ячеек, на гранях которых решается задача распада разрыва, так и их доля в общем числе ячеек сетки уменьшаются. Кроме того, при увеличении разбиения разница решения в соседних ячейках (за исключением разрывов) уменьшается, в результате чего сходимость итерационного процесса методом Ньютона на гранях достигается быстрее.



**Рис. 3.** Зависимость отношения  $t_c / t_c^*$  от количества ячеек  $N$  ( $t_c$  – процессорное время, затраченное на решение задачи до момента  $t = 0.015$  в одной ячейке на одном шаге по времени,  $t_c^*$  – есть  $t_c$ , вычисленное в среде программирования C++ на сетке  $N = 32000$ ).

Таким образом, несмотря на то, что среда Matlab имеет больше специализированных инструментов для решения математических задач, более универсальная среда C++ позволяет достичь почти в два раза большей скорости расчета газодинамической задачи о распаде разрыва методом С.К. Годунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00214 мол\_а).

## Литература

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
2. Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. *Численное моделирование радиально сходящихся ударных волн в полости пузырька* // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 24. – С. 3-20.
3. Воройский Ф.С. *Интерпретация, Интерпретатор* // Информатика. Энциклопедический словарь-справочник. – М.: Физматлит, 2006. – С. 325.

## EFFICIENCY OF CALCULATION OF GAS DYNAMIC PROBLEMS BY THE METHOD OF S.K. GODUNOV IN DIFFERENT PROGRAMMING ENVIRONMENTS

I.N. Mustafin, T.F. Khalitova

*The efficiency of gas dynamics problems calculation by the method of S.K. Godunov in Matlab and C++ programming environments is compared. In the Matlab environment it is easier to create a convenient interface for preparing initial data and visualizing the results of calculations than in C++. The Riemann problem, which has an analytical solution, is taken as a characteristic one. The agreement of the numerical solutions obtained in both the considered programming environments, both among themselves and with the analytical one, is demonstrated. It is shown that a numerical solution of a certain accuracy in the Matlab environment is calculated two times longer than in the C++ environment.*  
 Keywords: efficiency of calculations, gas dynamics problems, method S.K. Godunov, Riemann problem, programming environment, Matlab, C++.

УДК 517.55

## О ФОРМУЛАХ ВАРИНГА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Е.К. Мышкина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> elfifenok@mail.ru; Сибирский федеральный университет, Институт математики и фундаментальной информатики

*Мы рассматриваем алгебраические и трансцендентные системы уравнений общего вида и определяем вычеты интегралов по циклам, определенными системой. Приведены формулы для их вычисления и установлены многомерные аналоги формул Варинга, т. е. связь степенной суммы корней системы с ее коэффициентами.*

**Ключевые слова:** неалгебраические системы уравнений, вычеты интегралов, формулы Варинга, степенные суммы корней.

Рассмотрим систему  $n$  уравнений от  $n$  неизвестных

$$f_1(z) = \dots = f_n(z) = 0.$$

Левая часть каждого уравнения системы — голоморфная в окрестности начала координат функция. Разложим функции  $f_j(z)$  в ряд Тейлора с центром в начале координат

$$f_j(z) = P_j(z) + Q_j(z), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $P_j(z)$  — младшая однородная часть степени  $m_j$ . Будем предполагать, что система многочленов

$$P_1, \dots, P_n \quad (2)$$

невырождена, то есть ее общим нулем является только начало координат. Тогда известно, что для почти всех малых  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $r_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  множество

$$\Gamma_P(r) = \{z: |P_j(z)| = r_j, j = 1, \dots, n\}$$

является гладким компактным циклом размерности  $n$ .

При некоторых дополнительных условиях на систему многочленов (2) множество  $\Gamma_P(r)$  не пересекает координатные плоскости.

**Лемма [3, Лемма 2].** Пусть система многочленов (2) такова, что на координатной плоскости  $\{z_1 = 0\}$  в ней найдется невырожденная подсистема, состоящая из  $(n - 1)$  многочлена от переменных  $z_2, \dots, z_n$ . Тогда остов полиэдра  $\Gamma_P(r)$  не пересекается с координатной плоскостью  $\{z_1 = 0\}$  для почти всех  $r$ .

**Следствие.** Если для каждой координатной плоскости  $\{z_j = 0\}$  найдется невырожденная подсистема порядка  $(n - 1)$  системы (2), то для почти всех  $r$  остов  $\Gamma_P(r)$  не пересекает координатные плоскости.

В этих условиях определен вычетный интеграл

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_P(r)} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n}.$$

**Теорема 1 [3, Теорема 1].**

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\|\alpha\| \leq \|\gamma\| + n} (-1)^{\|\alpha\|} \int_{\Gamma_P} \left[ \frac{\Delta \cdot Q^\alpha \cdot dz}{z^{\gamma+I} \cdot P^{\alpha+I}} \right],$$

где  $\Delta$  — якобиан системы (1).

Рассмотрим сначала алгебраический случай: когда все функции  $f_j$  являются многочленами. Следуя стратегии статьи [2], мы наложим ряд ограничений на многочлены  $P$  и  $Q$ : 1) система (2) не имеет общих бесконечно удаленных корней в компактификации комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$ ; 2) верны неравенства

$$\deg_{z_j} P_j < \deg_{z_j} Q_j, \deg_{z_k} P_j > \deg_{z_k} Q_j =: s_j^k \text{ при } k \neq j.$$

Сделаем во всех функциях  $f_j(z)$  замену  $z_i = \frac{1}{w_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , предполагая, что все  $w_i \neq 0$ . Получим

$$f_j \left( \frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \frac{1}{w_1^{m_j^1} \dots w_j^{s_j^j} \dots w_n^{m_j^n}} \cdot (\tilde{P}_j(w) + \tilde{Q}_j(w)) = \frac{1}{w_1^{m_j^1} \dots w_j^{s_j^j} \dots w_n^{m_j^n}} \cdot \tilde{f}_j(w).$$

Будем также считать, что система многочленов

$$\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n \tag{3}$$

невырождена (достаточное условие этого факта – лемма 4 [3]). При сделанных ограничениях исходная система имеет конечное число корней ([3, Теорема 2]), и их степенная сумма с отрицательными показателями представляется вычетным интегралом, который в свою очередь выражается через коэффициенты исходной системы. Таким образом, верна

**Теорема 2 [3, Теорема 6].**

$$\sum_{j=1}^p \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} = \sum_{\|K\| \leq \|\gamma\| + n} \frac{(-1)^{\|K\| + n} \prod_{s=1}^n \left( \sum_{j=1}^n k_{sj} \right)!}{\prod_{s,j=1}^n (k_{sj})!} \mathfrak{M} \left[ \frac{w^{\gamma+I} \cdot \tilde{\Delta} \cdot \det A \cdot Q^\alpha \prod_{s,j=1}^n a_{sj}^{k_{sj}}}{\prod_{j=1}^n w_j^{\beta_j N_j + \beta_j + N_j}} \right],$$

где  $p$  – число корней исходной системы, не лежащих на координатных плоскостях,  $K$  пробегает множество целочисленных матриц с неотрицательными элементами  $k_{sj}$ ,

$\|K\| = \sum_{s,j=1}^n k_{sj}$ ,  $\tilde{\Delta}$  – якобиан системы (3),  $A$  – полиномиальная матрица из элементов  $a_{jk}$  представления

$$w_j^{N_j+1} = \sum_{k=1}^n a_{jk} f_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

$\alpha_j = \sum_{s=1}^n k_{sj}$ ,  $\beta_s = \sum_{j=1}^n k_{js}$ , а функционал  $\mathfrak{M}$  сопоставляет многочлену Лорана его свободный член.

Последняя формула является многомерным аналогом формулы Варинга для алгебраических систем уравнений.

**Пример 1.** Рассмотрим систему уравнений от двух переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = z_1 z_2 + b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = 1 + a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0. \end{cases}$$

Выполняя вычисления согласно последней теореме, получим значение вычетного интеграла

$$J_{(0,0)} = 2a_1 a_2 + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1^2 b_2}{b_1} - \frac{a_2^2 b_1}{b_2}.$$

При определенных условиях утверждение последней теоремы верно в трансцендентном случае.

**Пример 2.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = z_1 z_2 + b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = \frac{\sin \sqrt{a_1 z_1 + a_2 z_2}}{\sqrt{a_1 z_1 + a_2 z_2}} = \prod_{s=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2}{s^2 \pi^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Используя результат, полученный выше, и известное разложение, получим, что интеграл  $J_{0,0}$  равен сумме ряда

$$\begin{aligned} J_{(0,0)} &= - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_1^2 b_2}{\pi^4 s^4 b_1} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_2^2 b_1}{\pi^4 s^4 b_2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_2}{\pi^2 s^2 b_2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_1}{\pi^2 s^2 b_1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2a_1 a_2}{\pi^4 s^4} = \\ &= - \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{90 b_1 b_2} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{6 b_1 b_2}. \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00019).

## Литература

1. Kytmanov A.A., Kytmanov A.M., Myshkina E.K. *Residue Integrals and Waring's Formulas for a Class of Systems of Transcendental Equations in  $\mathbb{C}^n$*  // Journal of Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. – V. 63, №. 4.
2. Кытманов А.М., Мышкина Е.К. *Вычетные интегралы и формулы Варинга для алгебраических и трансцендентных систем уравнений* // Известия вузов. Математика (принята к публикации).

## ON WARING'S FORMULA FOR ALGEBRAIC AND TRANSCENDENTAL SYSTEMS OF EQUATIONS

E.K. Myshkina

*We discuss systems of algebraic and non-algebraic equations of a general form and define residue integrals over cycles determined by systems. We give formulas for their computation and establish multidimensional analogs of Waring's formulas, i.e. relations between power sums of roots of a system and their coefficients.*

Keywords: non-algebraic system of equations, residue integrals, Waring formulas, power sums of roots.

УДК 514.763.22

**О ГЕОМЕТРИИ ОРБИТ КОНФОРМНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ**А.Я. Нарманов<sup>1</sup>, Е.О. Ражабов<sup>2</sup><sup>1</sup> narmanov@yandex.ru; Национальный университет Узбекистан<sup>2</sup> rajabov\_-2019@bk.ru; Национальный университет Узбекистан

*Геометрия орбит векторных полей является объектом многочисленных исследований в связи тем, что она играет важную роль во многих разделах математики, таких как динамические системы, теория управления. В статье доказывается, что орбиты конформных векторных полей являются интегральными подмногообразиями распределения, порожденного минимальной алгебры Ли. А также доказывается, что в случае евклидовых пространств орбиты являются замкнутыми подмножествами, если они порождают регулярное слоение.*

**Ключевые слова:** риманово многообразие, конформное векторное поле, орбита векторных полей, конформные преобразования, производная Ли.

Пусть  $M$  – гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $D$  – семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии  $M$ . Семейство  $D$  может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей. Для векторного поля  $X \in D$  через  $X^t(x)$  обозначим интегральную кривую векторного поля  $X$ , проходящую через точку  $x \in M$  при  $t = 0$ . Отображение  $t \rightarrow X^t(x)$  определено в некоторой области  $I(x)$ , которая в общем случае зависит не только от поля  $X$ , но и от начальной точки  $x$ . В дальнейшем всюду в формулах вида  $X^t(x)$  будем считать, что  $t \in I(x)$ . Если для всех точек  $x \in M$  область определения  $I(x)$  кривой  $t \rightarrow X^t(x)$  совпадает с числовой осью, то векторное поле  $X$  называется полным векторным полем. В статье всюду под гладкостью понимается гладкость класса  $C^\infty$ .

**Определение 1.** (см. [1], [10]) *Орбита  $L(x)$  семейства  $D$  векторных полей, проходящая через точку  $x$ , определяется как множество таких точек  $y$  из  $M$ , для которых существуют действительные числа  $t_1, t_2, \dots, t_k$  и векторные поля*

$$X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$$

из  $D$  (где  $k$  произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\dots(X_{i_1}^{t_1})\dots)).$$

Ясно, что, если  $D$  состоит из одного векторного поля, орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием).

Фундаментальным результатом в изучении геометрии и топологии орбит стала теорема Сусманна [10], которая показывает, что существует вполне интегрируемое распределение  $P$  на  $M$  такое, что для каждой точки  $x \in M$  орбита  $L(x)$  совпадает с максимальным интегральным подмногообразием  $P$ , проходящим через точку  $x$ .

Топология орбиты  $L(x_0)$  (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида:

$$(t_1, t_2, \dots, t_k) \rightarrow X_1^{t_1}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}} \dots (X_{i_1}^{t_1}(x_0) \dots))$$

являются непрерывными.

Напомним, что отображение  $P$ , ставящее каждой точке  $x \in M$  некоторое подпространство  $P(x) \subset T_x M$ , называется распределением. Если  $\dim P(x) = k$  для всех  $x \in M$ , то  $P$  называется  $k$ -мерным распределением. Распределение  $P$  называется гладким, если для каждой точки  $x \in M$  существует окрестность этой точки  $U(x)$ , и гладкие векторные поля  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , заданные на  $U(x)$ , такие, что векторы

$$X_1(y), X_2(y), \dots, X_m(y)$$

образуют базис для подпространства  $P(y)$  для каждого  $y \in U(x)$ .

Семейство  $D$  гладких векторных полей естественным образом порождает гладкое распределение, которое каждой точке  $x \in M$  сопоставляет подпространство  $P(x)$  касательного пространства  $T_x M$ , порожденное множеством векторов

$$D(x) = \{X(x) : X \in D\}.$$

Разумеется, размерности подпространств  $P(x)$  могут меняться от точки к точке.

Распределение  $P$  называется вполне интегрируемым, если для каждой точки  $x \in M$  существуют подмногообразие  $N_x$  многообразия  $M$  такое, что  $T_y N_x = P(y)$  для всех  $y \in N_x$ . Подмногообразие  $N_x$  называется интегральным подмногообразием распределения  $P$ . Для векторного поля  $X$  будем писать  $X \in P$ , если  $X(x) \in P(x)$  для всех  $x \in M$ . Распределение  $P$  называется инволютивным, если из  $X, Y \in P$  вытекает, что  $[X, Y] \in P$ , где  $[X, Y]$  – скобка Ли векторных полей  $X, Y$ .

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме Фробениуса ([6], стр. 20, предложение 2.1).

**Теорема 1** (Фробениус). *Для того чтобы распределение  $P$  на многообразии  $M$  было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.*

Множество  $V(M)$  всех гладких векторных полей на многообразии  $M$  является линейным пространством над полем действительных чисел и является алгеброй Ли относительно скобки Ли.

Пусть  $A(D)$  – наименьшая подалгебра Ли, содержащая множество  $D$ ,  $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ . Распределение  $P_D : x \rightarrow A_x(D)$  инволютивно и поэтому если размерности  $\dim A_x(D)$  не зависят от  $x$ , то распределение  $P_D : x \rightarrow A_x(D)$  вполне интегрируемо по теореме Фробениуса. В этом случае для каждой точки  $x$  множество  $L(x)$  является интегральным подмногообразием  $P_D$ . Если размерности  $\dim A_x(D)$  зависят от  $x$ , то как показывает примеры, распределение  $P_D : x \rightarrow A_x(D)$  необязано быть вполне интегрируемым.

Теорема Фробениуса, обобщенная Херманном для распределений непостоянной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интегрируемости конечно порожденных распределений [5].

Напомним, что распределение  $P$  называется конечно порожденной, если существуют векторные поля  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , такие что векторы  $X_1(x), X_2(x), \dots, X_m(x)$  образуют базис для подпространства  $P(x)$  для каждого  $x \in M$ .

**Теорема 2.** (R. Hermann). *Конечно-порожденное распределение  $P$  вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Мы рассмотрим семейство конформных векторных полей. Говорят, что векторное поле  $X$  на  $(M, g)$ , конформно, если  $L_X g = \sigma g$ , где  $\sigma$  есть функция на  $M$ ,  $L_X g$  –



производная Ли. Известно, что векторное поле  $X$  на является конформным тогда и только тогда, когда локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем  $X$ , состоит из конформных преобразований. Локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная конформным векторным полем, состоит из гомотетий если  $\sigma$  – константа, и состоит из изометрий, если  $\sigma = 0$ .

Примерами конформных векторных полей являются векторные поля Киллинга. Напомним, что векторное поле на называется полем Киллинга, если его поток состоит из изометрий риманова многообразия  $M$ , т.е.  $L_X g = 0$ . Изучению геометрии конформных векторных полей посвящены многочисленные исследования [2]- [6], в частности в работе [7] изучена геометрия орбит векторных полей Киллинга. Пусть  $D$  – множество всех гладких конформных векторных полей, определенных на  $M$ . Отметим, что скобка Ли двух конформных векторных полей и линейная комбинация полей конформных векторных полей над полем действительных чисел также являются конформными векторными полями. Поэтому множество всех конформных векторных полей на многообразии  $M$ , обозначаемое через  $D$ , образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того, известно, что алгебра Ли конформных векторных полей связного риманова многообразия  $M$  имеет размерность не более чем  $(n+1)(n+2)/2$ , где  $n = \dim M$ , при  $n \geq 3$  ([6], стр. 284).

Теорема Херманна позволит нам доказать следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть  $n \geq 3$ , множество  $D$  состоит из конформных векторных полей. Тогда каждая орбита семейства  $D$  является интегральным подмногообразием распределения  $P_D : x \rightarrow A_x(D)$ .

**Теорема 4.** Пусть  $M = R^n$ , множество  $D$  состоит из конформных векторных полей и  $\dim A_x(D) = k$  для всех  $x \in R^n$ . Тогда каждая орбита семейства  $D$  является замкнутым подмножеством.

## Литература

1. Azamov A.A. and Narmanov A.Ya. *On the Limit Sets of Orbits of Systems of Vector Fields* // Differential Equations. – 2004. – Vol. 40, № 2. – P. 257-260.
2. Alekseevskii D.V. *Groups of conformal transformations of Riemannian spaces* // Math. USSR-Sb. – 1972. – V. 18, № 2. – P. 285-301
3. Blair D.E. *On the zeros of a conformal vector field* // Nagoya Math. J. – 1974. – Vol. 55. – P. 1-3.
4. Ferrand J. *The action of conformal transformations on a Riemannian manifold* // Math. Ann. – 1996. – V. 304, № 2. – P. 277-291.
5. Hermann R. *The differential geometry of foliations, II* // J. Math. Mech. – 1962. – V. 11. – P. 305-315.
6. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. – New York, London: Interscience, 1963. – Vol. 1. – 329 pp.
7. Narmanov A.Ya., Saitova S.S. *On the Geometry of Orbits of Killing Vector Fields* // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, № 12. – P. 1584-1591.
8. Obata M. *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds* // J. Differ. Geom. – 1971. – V. 6, № 2. – P. 247-258.
9. Deshmukh S. *Geometry of conformal vector fields* // Arab Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 23, Iss. 1. – P. 44-73.

10. Sussman H. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions* // Transactions of the AMS. – 1973. – V. 180. – P. 171-188.

#### ON THE GEOMETRY OF ORBITS OF CONFORMAL VECTOR FIELDS

A.Y. Narmanov, E.O. Rajabov

*Geometry of orbit is a subject of many investigations because it has important role in many branches of mathematics such as dynamical systems, control theory etc. It is proved that orbits of conformal vector fields are integral submanifolds of completely integrable distributions. For Euclidean space, it is also showed that if all orbits have the same dimension, then they are closed subsets.*

Keywords: Riemannian manifold, conformal vector field, orbit of vector fields, conformal transformation, Lie derivative.

УДК 372.851

#### К ВОПРОСУ О РАЗВИТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ

Г.Х. Нигматуллина<sup>1</sup>, Е.Р. Садыкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [guzel-nig@mail.ru](mailto:guzel-nig@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

<sup>2</sup> [sadikova-er@mail.ru](mailto:sadikova-er@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

*В статье рассмотрены вопросы, связанные с развитием пространственного мышления учащихся при изучении стереометрии, предложены задачи на развитие пространственного мышления различных типов.*

**Ключевые слова:** мыслительная деятельность, пространственное мышление, стереометрия, чертеж, графический образ.

В условиях модернизации образования одним из аспектов развития личности является математическое развитие, которое предполагает развитие у современного школьника приемов мыслительной и учебной деятельности, а также пространственного мышления. В исследованиях В.В. Давыдова, А.К. Марковой, Н.Ф. Талызиной, Л.М. Фридмана, И.С. Якиманской рассматриваются вопросы, связанные с мышлением. Пространственное мышление является разновидностью образного мышления и сохраняет его основные черты [3]. Но оно, как компонент в решении практических задач, формируется гораздо раньше, чем образное мышление. В работах С.Л. Рубинштейна, И.С. Якиманской [7], был реализован и экспериментально обоснован подход к изучению пространственного мышления. Согласно этому, формы и уровни пространственного мышления определяются объективным содержанием материала и познавательной активностью субъекта, а уровень активности зависит от овладения средствами деятельности.

По мнению И.С. Якиманской, пространственное мышление – специфический вид мыслительной деятельности, основным содержанием которой является оперирование пространственными образами в процессе решения задач, требующих ориентации как в видимом, так и в воображаемом пространстве [7].

При изучении объемных фигур нужно сформировать у учащихся умение видеть геометрические формы в окружающих телах. По результатам исследований психологов доказано, что представления о геометрических фигурах хорошо развиваются до 15 лет, а с этого возраста учащиеся только начинают изучать стереометрию [2].

Если в начальной школе учащиеся знакомятся только с элементами плоской геометрии, то потом у учащихся лучше развиты объемные представления, чем плоскостные. Психологи считают, что у учащихся 9-11 классов преобладают планиметрические представления, хотя в этом возрасте изучают стереометрические фигуры [5]. Поэтому нужно начинать развивать пространственное мышление с 5-6 классов.

Как показало исследование, на уроках геометрии в 10–11 классах можно предлагать учащимся задачи на развитие пространственного мышления следующих типов.

### 1. Задача на перевод словесных данных в графический образ.

Сделать чертежи по условиям задач, используя данные в них обозначения:

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $MP$ , а плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  пересекаются по другой прямой  $MT$  (рис. 1) [1].

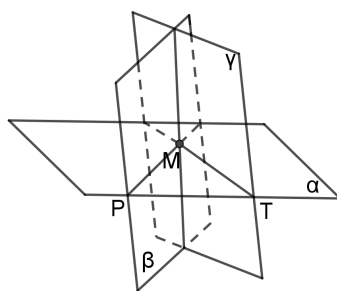


Рис.1

### 2. Задача на выделение существенных признаков геометрических понятий.

Верно ли сделан рисунок, если в нем изображены три попарно пересекающиеся прямые, которые пересекают плоскость  $\alpha$  (рис. 2) [1]? Решение: Прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  ле-

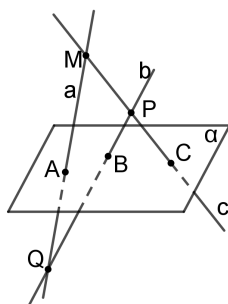


Рис.2

жат в одной плоскости (по аксиоме задания плоскости). Прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  пересекают плоскость  $\alpha$  по прямой, на которой лежат точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  (по аксиоме пересечения плоскостей). Но через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  невозможно провести единственную прямую.

Следовательно, рисунок сделан неверно.

**3. Задача на вычленение фигуры из состава других фигур чертежа.**

Назовите по рисунку (рис. 3): 1. Плоскости, в которых лежат прямые  $PE$ ,  $MK$ ,

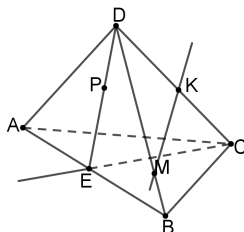


Рис.3

$DB$ ,  $AB$ ,  $AC$ .

2. Точки пересечения прямой  $DK$  с плоскостью  $ABC$ , прямой  $CE$  с плоскостью  $ADB$  [1].

Решение:

$$PE \in (ABD), MK \in (BDC), DB \in (BDC), DB \in (ADB),$$

$$AB \in (ABC), AB \in (ADB), AC \in (ADC), AC \in (ABC),$$

$$DK \cap (ABC) = C, CE \cap (ADB) = E.$$

**4. Задача на сравнение фигур чертежа.**

Сумма всех ребер параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 120 см (рис. 4). Найдите каждое ребро параллелепипеда, если известно, что

$$\frac{AD}{CD} = \frac{4}{5}; \frac{AB}{BB_1} = \frac{5}{6}.$$

Решение:

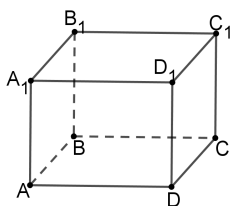


Рис.4

$$AD + AA_1 + AB = 30;$$

$$AA_1 = BB_1 = \frac{6AB}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5AD}{4} = \frac{3AD}{2};$$

$$AB = CD = \frac{5AD}{4};$$

$$AD + \frac{3AD}{2} + \frac{5AD}{4} = 30;$$

$$15AD = 120;$$

$$AD = 8.$$

Отсюда  $AD = 8$ ,  $AA_1 = 12$ ,  $AB = 10$

**5. Задание на построение недостающих фигур чертежа в ходе решения задачи.**

Найдите образующую усеченного конуса, если высота равна 4 см, а радиусы оснований равны 3 см и 6 см (рис. 5) [1].

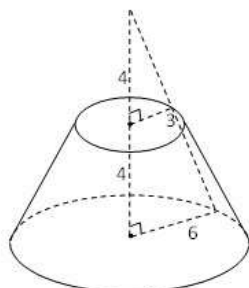


Рис.5

Решение: Достроим усеченный конус до полного и рассмотрим его диагональное сечение. Радиус нижнего основания усеченного конуса вдвое больше радиуса верхнего основания. Следовательно, высота и образующая конуса увеличатся в два раза (по подобию треугольников). Образующая усеченного конуса равна 5 см (по теореме Пифагора).

Пространственное мышление хорошо помогает учащимся представлять и решать объемную задачу. В зависимости от задачи нужно стараться научить ребят видеть взаимное расположение прямой и плоскости, научить понимать, что такое прямая, точка, плоскость и их расположения [4]. Если научить ребят видеть в окружающих предметах образующую их форму геометрические тела, узнавать геометрическую составляющую в предметах, которые окружают их ежедневно, это приведет к успешному решению таких задач [6].

При изучении стереометрии можно использовать прикладные компьютерные программы, строящие трехмерные изображения, например, динамическая математическая программа GeoGebra. Используя эту программу есть возможность показать расположение объектов внутри геометрических тел, проследить с учащимися только динамику построений.

В заключение отметим, что пространственное мышление всегда опирается на систему знаний и обязательно включается в решение различных задач, где используются разнотипные графические изображения, постоянно наблюдается переход от одних зрительных образов, которые отражают пространственные свойства и отношения, к другим. На их основе возникают отдельные образы и их целостная система.

## Литература

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. *Геометрия: 10-11 классы, Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный уровни. 18-е изд.* – М.: Просвещение, 2009. – С. 119–140.
2. Величковский Б.М., Зинченко В.П., Лурия А.Р. *Психология восприятия.* – М.: Изд-во Московского университета, 1973. – 215 с.
3. Выготский Л.С. *Педагогическая психология.* – М.: Педагогика-пресс, 1996. – 98 с.

4. Гусев В.А. *Методика обучения геометрии*. – М.: Академия, 2004. – С. 103–104.
5. Каплунович И.Я. *Показатели развития пространственного мышления школьников* // Вопросы психологии. – 1981. – № 5. – 152 с.
6. Каплунович И.Я. *Развитие структуры пространственного мышления* // Вопросы психологии. – 1986. – № 2. – 56 с.
7. Якиманская И.С. *Развитие пространственного мышления школьников*. – М.: Педагогика, 1980. – 326 с.

## ON THE DEVELOPMENT OF SPATIAL THINKING OF STUDENTS IN THE STUDY OF STEREOOMETRY

G.H. Nigmatullina, E.R. Sadykova

*This paper discusses issues related to the development of students' spatial thinking in the study of stereometry, and suggests tasks for the development of spatial thinking of various types.*

Keywords: mental activity, spatial thinking, stereometry, drawing, graphic image.

УДК 512.8

### О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОДПРОСТРАНСТВ УНИТАРНОГО ПРОСТРАНСТВА

И.А. Николаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [nyashkrymnash@gmail.com](mailto:nyashkrymnash@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье изучаются классы подпространств Фулиса-Рендалла унитарного пространства, а также рассматриваются унитарные пространства Десей и их связь с различными классами подпространств.*

**Ключевые слова:** подпространство Фулиса-Рендалла, квазирасщепляющее подпространство, ортозамкнутое подпространство, расщепляющее подпространство, пространство Десей.

Пусть  $S$  – вещественное или комплексное унитарное пространство,  $H$  – гильбертово пространство, являющееся пополнением  $S$ . Для подпространства  $M$  из  $S$ , ортонормированной системы  $\{u_k\}$  и максимальных ортонормированных систем  $\{e_i\}$  и  $\{v_j\}$  из  $M$  и  $M^\perp$ , определим:

$F(S) = \{M \subset S \mid M^{\perp\perp} = M\}$  – множество всех ортозамкнутых подпространств,

$E(S) = \{M \subset S \mid M^\perp = S\}$  – множество всех расщепляющих подпространств,

$E_q(S) = \{M \subset S \mid M \text{ замкнуто и } M \oplus M^\perp \text{ плотно в } S\}$  – множество всех квазирасщепляющих подпространств,

$D(S) = \{M \subset S \mid \exists \{u_k\} \subseteq M : M = \{u_k\}^{\perp\perp}\}$  – множество всех подпространств Фулиса-Рендалла,

$R(S) = \{M \subset S \mid \forall \{e_i\} \subseteq M : M = \{e_i\}^{\perp\perp}\}$  – множество всех максимальных подпространств Фулиса-Рендалла,

$V(S) = \{M \subset S \mid M = \{e_i\}^{\perp\perp}, M^\perp = \{v_j\}^{\perp\perp}\}$  – множество всех гипермаксимальных подпространств Фулиса-Рендалла.

В работе [1] была получена цепочка включений:

$$E(S) \subseteq E_q(S) \subseteq F(S).$$

**Предложение 1.** Любое сепарабельное ортозамкнутое подпространство является подпространством Фулиса-Рендалла т. е.  $D(S) \subseteq F(S)$ .

**Следствие 1.** Если  $S$  сепарабельно, то  $D(S) = F(S)$ .

**Предложение 2.** Каждое расщепляющее подпространство – это максимальное подпространство Фулиса-Рендала т. е.  $E(S) \subset R(S)$ .

Таким образом, в общем случае справедливы включения:

$$E(S) \subset R(S) \subseteq D(S) \subseteq F(S).$$

В следующих двух теоремах рассматривается вопрос равенства введенных классов.

**Теорема 1.** Пусть  $S$  – унитарное пространство. Подпространство  $M$  из  $S$  является расщепляющим тогда и только тогда, когда  $M = \{u_k\}^{\perp\perp}$  верно для любой МОНС  $\{u_k\}$  из  $M$  т. е.  $E(S) = R(S)$ .

**Теорема 2.** Существует унитарное пространство  $S_1$  такое, что

$$D(S_1) \subsetneq F(S_1).$$

В результате верна следующая цепочка включений:

$$E(S) \subseteq V(S) \subseteq R(S) \subseteq D(S) \subseteq F(S).$$

**Определение 1.** Пусть  $x$  и  $y$  два элемента из  $S$ . ОНС  $\{e_n\}$  из  $S$  будем называть ортонормированной системой Десей, если из  $\{e_n\} \subseteq \{x\}^\perp \cup \{y\}^\perp$  следует, что  $x \perp y$ .

**Определение 2.** ОНС  $\{e_n\}$  из  $S$  будем называть регулярной, если  $\{e_n\} = \{e_{n_i}\} \cup \{e_{n_j}\}$  и  $\{e_{n_i}\} \cap \{e_{n_j}\} = \emptyset$  влечет  $\{e_{n_i}\}^\perp = \{e_{n_j}\}^{\perp\perp}$ .

**Предложение 3.** ОНС  $\{e_n\}$  является ОНС Десей тогда и только тогда, когда  $\{e_n\}$  регулярна.

**Определение 3.** Унитарное пространство  $S$  будем называть унитарным пространством Десей тогда и только тогда, когда любая МОНС в  $S$  является ОНС Десей.

Следующие теоремы устанавливают связь между пространствами Десей и классами подпространств Фулиса-Рендалла.

**Теорема 3.** Пусть  $D(S)$  является ортомодулярным частично упорядоченным множеством, тогда  $S$  – унитарное пространство Десей.

**Теорема 4.** Пусть  $S$  – унитарное пространство. Следующие условия эквивалентны

- 1)  $S$  – пространство Десей;
- 2)  $R(S) = D(S)$ ;
- 3)  $V(S) = D(S)$ ;
- 4)  $R(S) = D(S) = V(S)$ ;

**Предложение 4.** Пусть  $S$  – унитарное пространство. Тогда

- 1)  $S$  – неполное пространство  $\Leftrightarrow R(S) \neq F(S)$ .

2)  $S$  – не сепарабельное пространство, но пространство Десея  $\Leftrightarrow R(S) = D(S) \neq F(S)$ .

3)  $S$  – не сепарабельное пространство и не пространство Десея  $\Leftrightarrow R(S) \neq D(S) \neq F(S)$ .

4)  $S$  – сепарабельное пространство, но не пространство Десея  $\Leftrightarrow R(S) \neq D(S) \neq F(S)$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-31-00218 мол\_а)

## Литература

1. Buhagiar D., Chetcuti E., Dvurecenskij A. *Quasi-splitting subspaces and Foulis-Randall subspaces* // J. of Math. Physics. – 2011. – V. 52, № 12. – P. 1-7.
2. Cattaneo G., Franco G., Marino G. *Ordering of families of subspaces of pre-Hilbert spaces and Dacey pre-Hilbert space* // Boll. Un. Mat. Ital. – 1987. – P. 167-183.
3. Dvurechenskij A., Pulmannova S. *Test Spaces, Dacey Spaces, and Completeness of Inner Product Spaces* // Lett. Math. Phys. – 1994. – № 32. – P. 299-306.

## ON SOME FAMILIES OF SUBSPACES OF PRE-HILBERT SPACE

I.A. Nikolaeva

*This paper explores a Foulis-Randall subspaces of pre-Hilbert spaces as well. We also considere Dacey pre-Hilbert spaces and their connections with different families of subspaces of pre-Hilbert spaces.*

Keywords: Foulis-Randall subspace, splitting subspace, quasi-splitting subspace, orthogonally closed subspace, Dacey pre-Hilbert space.

УДК 514.822

## ИНДУКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА $L_1$

Ан.Ан. Новиков<sup>1</sup>, З. Эскандариан<sup>2</sup>, И.И. Мухаметгалиев<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *a.hobukob@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> *zohreh.eskandarian@ugmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>3</sup> *ilnur.muhametgal@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В работе обсуждается подход к построению предельных пространств на основе индуктивных и проективных пределов. В случае коммутативного оператора  $a$  удаётся однозначно разбить пространство  $L_\infty(a)$  на два таких, для которых существуют индуктивный и проективный пределы соответственно. В общем некоммутативном случае мы имеем диаграмму, которая коммутирует в том и только том случае, если  $a$  обратим.*

**Ключевые слова:** алгебры фон Неймана,  $C^*$ -алгебры, индуктивные пределы, проективные пределы, двойственность.



Пусть  $\mathcal{M}$  – алгебра фон Неймана,  $a$  – положительный оператор, присоединенный к  $\mathcal{M}^+$ ,  $\ker a = \{\vec{0}\}$ . В работе [1] были определены пространства  $L_1(a)$  и  $L_\infty(a)$ . Первое соответствовало пополнению пространства  $\mathfrak{D}_a^h = \mathfrak{D}_a^+ - \mathfrak{D}_a^+$ , где  $\mathfrak{D}_a^+ = \{\varphi \in \mathcal{M}_*^+ \mid \varphi(a) < +\infty\}$ , по норме

$$\|\varphi\|_a = \inf\{\varphi_1(a) + \varphi_2(a) \mid \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}_a^+\},$$

а второе  $L_\infty(a) = (L_1(a))^*$ . В той же работе было показано, что  $L_\infty(a) = a^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} a^{\frac{1}{2}}$ .

Пусть  $a$  ограничен, а  $b$  имеет ограниченный обратный и  $\alpha < \beta$ , тогда

$$\begin{aligned} L_\infty(a^\alpha) &\supset L_\infty(a^\beta) \quad , \quad L_\infty(b^\alpha) \subset L_\infty(b^\beta), \\ L_1(a^\alpha) &\subset L_1(a^\beta) \quad , \quad L_1(b^\alpha) \supset L_1(b^\beta), \end{aligned}$$

и мы можем строить соответствующие пределы, причем предельные пространства сохраняют тотальность друг относительно друга. В общем случае, когда оператор  $a$  не ограничен и не имеет ограниченного обратного, мы можем разложить его в прямую сумму  $a = a_0 \oplus a_\infty$ , где  $a_0$  ограничен, а  $a_\infty$  обладает ограниченным обратным в редуцированной алгебре.

В связи с этим рассматриваются следующие пространства

$$\begin{matrix} a_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} a_0^{\frac{1}{2}} & a_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} a_\infty^{\frac{1}{2}} \\ a_\infty^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} a_0^{\frac{1}{2}} & a_\infty^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} a_\infty^{\frac{1}{2}}. \end{matrix}$$

Случаи пространств, лежащих на главной диагонали, уже рассмотрены, поэтому здесь мы рассматриваем пространства, лежащие на побочной диагонали. При этом, достаточно рассмотреть только один из двух случаев. Имеют место включения

$$\begin{array}{ccccccc} a_0^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{M} a_\infty^{\frac{\alpha}{2}} & \subset & a_0^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{M} a_\infty^{\frac{\beta}{2}} & \subset & \dots & \subset & \mathcal{R}_\alpha(a) \\ \cup & & \cup & & \dots & & \cup \\ a_0^{\frac{\beta}{2}} \mathcal{M} a_\infty^{\frac{\alpha}{2}} & \subset & a_0^{\frac{\beta}{2}} \mathcal{M} a_\infty^{\frac{\beta}{2}} & \subset & \dots & \subset & \mathcal{R}_\beta(a) \\ \cup & & \cup & & \dots & & \cup \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \cup & & \cup & & \ddots & & \cup \\ \mathcal{L}_\alpha(a) & \subset & \mathcal{L}_\beta(a) & \subset & \dots & \subset & \mathcal{RL}(a) \setminus \mathcal{LR}(a) \end{array} .$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00218 мол\_а).

### Литература

1. Novikov A., *L<sub>1</sub>-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2017. – Vol 21, Is. 1. – P. 359-375
2. Novikov A.A, Eskandarian Z., *Inductive and projective limits of Banach spaces of measurable functions with order unities with respect to power parameter* // Russian Mathematics. – 2016. – Vol. 60, Is. 10. – P. 67-71.
3. Eskandarian Z. *Locally Convex Limit Spaces of Measurable Functions with Order Units and Its Dual* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, Is. 2. – P. 195–199.

INDUCTIVE AND PROJECTIVE LIMITS OF NONCOMMUTATIVE  $L_1$  SPACES

An.An. Novikov, Z. Eskandarian, I.I. Mukhamegaliev

*In this work, we suggest an approach for constructing limit spaces based on inductive and projective limits. In the case of commutative operator  $a$ , we are able to decompose  $L_\infty(a)$  into direct sum of two spaces; one of them has inductive limit, and the other has projective limit. In general case, we have a diagram that commutes if and only if  $a$  is invertible.*

Keywords: von Neumann algebras,  $C^*$ -algebras, projective limit, inductive limit, duality.

УДК 517.911+517.983.51

### НОВЫЙ ВИД ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.С. Орлов<sup>1</sup>, В.В. Шеметова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> orlov\_sergey@inbox.ru; Иркутский государственный университет, Институт математики, экономики и информатики

<sup>2</sup> valentina501@mail.ru; Иркутский государственный университет, Институт математики, экономики и информатики

*В статье изучена однозначная разрешимость начальной задачи для линейного дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Применяется теория обобщенных функций (распределений) Соболева–Шварца со значениями в банаховых пространствах. Фундаментальное решение дифференциального оператора построено в виде специальной оператор-функции, которая содержит коммутаторы операторных коэффициентов уравнения, что позволило отказаться от условия перестановочности их суперпозиции. Доказаны существование и единственность обобщенного решения рассматриваемой начальной задачи, указана явная формула для его восстановления.*

**Ключевые слова:** двоякопериодические, квазидвоякопериодические, циклические постоянные.

Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — вещественные банаховы пространства,  $u = u(t)$  — функция аргумента  $t \in \mathbb{R}$  и со значениями в  $E_1$ . Рассмотрим линейный дифференциальный второго порядка  $D_2(u(t)) = Bu''(t) - A_1u'(t) - A_0u(t)$ , где  $B, A_1, A_0$  — замкнутые линейные операторы, действующие из  $E_1$  в  $E_2$ , причем такие, что  $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$ . Рассмотрим также связанную с ним начальную задачу

$$D_2(u(t)) = f(t), t > 0; u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \quad (1)$$

Здесь  $f = f(t)$  — заданная функция со значениями в  $E_2$ . Под классическим решением этой задачи будем понимать функцию  $u = u(t)$  класса  $C([0; +\infty), E_1) \cap C^2((0; +\infty), E_1)$ , которая обращает в тождество уравнение и удовлетворяет начальным условиям.

Дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах представляют интерес для приложений, в частности, они позволяют с общих позиций изучать начально-краевые задачи различных разделов механики сплошных сред. Особо

востребованы с этой точки зрения полные уравнения второго порядка, так как наличие в них слагаемого с первой производной по времени функции состояния процесса дает возможность учитывать такие эффекты, как диссипация энергии, воздействие гироскопических сил и др. Для анализа этих уравнений используют различные подходы: теорию  $M, N$ -функций [1], спектральную теорию квадратичных операторных пучков [2], в том числе, с необратимым операторным коэффициентом при старшем мономе [3], методы преобразования к неполным уравнениям второго порядка [4] и системам уравнений первого порядка [2, 5, 6]. В представляемой работе применяется концепция фундаментального решения [7], найден его вид при условии непрерывной обратимости оператора  $B$ , отличный от полученного ранее в [4].

Пусть  $u = u(t)$  — классическое решение начальной задачи (1). Продолжим его и правую часть  $f = f(t)$  уравнения нулями на интервал  $(-\infty; 0)$  следующим образом:  $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$ ,  $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$ , тогда в классе  $K'_+(E_1)$  распределений с ограниченным слева носителем задача Коши (1) имеет вид сверточного уравнения

$$D_2(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t) \quad (2)$$

с правой частью  $\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + (Bu_1 - A_1u_0)\delta(t) + Bu_0\delta'(t)$ . Здесь и далее  $\theta$  — функция Хевисайда,  $\delta$  — функция Дирака. Единственным решением уравнения (2) в классе  $K'_+(E_1)$  (обобщенным решением задачи Коши (1)) является

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t), \quad (3)$$

где обобщенная оператор-функция  $\mathcal{E}(t)$  удовлетворяет двум условиям

$$\forall v(t) \in K'_+(E_2) \quad D_2(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall w(t) \in K'_+(E_1) \quad \mathcal{E}(t) * D_2(\delta(t)) * w(t) = w(t),$$

и называется *фундаментальной оператор-функцией* [7] или *фундаментальным решением* дифференциального оператора  $D_2(\delta(t))$ . Действительно, распределение вида (3) является решением уравнения (2) в силу первого условия. Существование этого решения следует из существования свертки в классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем, а единственность нетрудно показать от противного. Пусть найдется  $\tilde{v}(t) \in K'_+(E_1)$  такое, что  $\tilde{v}(t) \neq \tilde{u}(t)$  и  $D_2(\delta(t)) * \tilde{v}(t) = \tilde{g}(t)$ , тогда, с учетом второго условия, получим

$$\tilde{v}(t) = \mathcal{E}(t) * D_2(\delta(t)) * \tilde{v}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t) = \tilde{u}(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения (3) сверточного уравнения (2) в классе  $K'_+(E_1)$ . Таким образом, смысл конструкции фундаментальной оператор-функции состоит в следующем. Если известен ее вид, то распределение (3) является единственным обобщенным решением задачи Коши (1).

**Теорема 1.** Пусть линейный оператор  $B$  непрерывно обратим, тогда  $D_2(\delta(t))$  имеет фундаментальную оператор-функцию

$$\mathcal{E}(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_{k-1}(s) ds \theta(t),$$

где  $e^{A_1 B^{-1} t}$  — операторная экспонента, операторно-функциональная последовательность  $\{U_{k-1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$  задается рекуррентно

$$U_k(t) = \int_0^t V(s) U_{k-1}(s) ds, \quad U_0(t) = \mathbb{1}_2, \quad V(t) = e^{-A_1 B^{-1} t} A_0 B^{-1} e^{A_1 B^{-1} t},$$

$\mathbb{1}_1$  и  $\mathbb{1}_2$  — тождественные операторы в  $E_1$  и  $E_2$  соответственно.

Заметим, что  $V'(t) = [V(t), A_1 B^{-1}]$ , т. е. линейные операторы  $V(t)$  и  $A_1 B^{-1}$  образуют пару Лакса [8]. По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [9], оператор-функция  $V(t)$  допускает представление

$$V(t) = A_0 B^{-1} + [A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}] \frac{t}{1!} + [[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}] \frac{t^2}{2!} + \\ + [[[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}], A_1 B^{-1}] \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

в котором выражение  $[A_0 B^{-1}, A_1 B^{-1}] = A_0 B^{-1} A_1 B^{-1} - A_1 B^{-1} A_0 B^{-1}$  означает коммутатор операторов  $A_1 B^{-1}$  и  $A_0 B^{-1}$ . Для членов последовательности  $\{U_{k-1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$  имеют место асимптотические формулы и дифференциальные соотношения

$$U_{k-1}(t) \sim (A_0 B^{-1})^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t \rightarrow 0, \quad U'_k(t) - [U_k(t), A_1 B^{-1}] = U_{k-1}(t) A_0 B^{-1},$$

соответственно. В силу условия  $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$  по теореме о замкнутом графике операторы  $A_1 B^{-1}$  и  $A_0 B^{-1}$  являются ограниченными. Операторно-функциональный ряд, который образует вид фундаментальной оператор-функции  $\mathcal{E}(t)$ , сходится равномерно на любом компакте  $[0; T]$  в топологии  $\mathcal{L}(E_2)$  в силу неравенства

$$\left\| \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_{k-1}(s) ds \right\|_{\mathcal{L}(E_2)} \leq \frac{a_0^k T^{2k-1} e^{(2k-1)a_1 T}}{(k-1)! k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0; T],$$

где  $a_0 = \|A_0 B^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_2)}$ ,  $a_1 = \|A_1 B^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_2)}$ .

**Следствие 1.** Пусть в условиях теоремы 1 композиция линейных операторов  $A_0 B^{-1}$  и  $A_1 B^{-1}$  коммутативна, тогда  $D_2(\delta(t))$  имеет фундаментальную оператор-функцию

$$\mathcal{E}(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} (A_0 B^{-1})^{k-1} {}_1F_1(k; 2k; A_1 B^{-1} t) \theta(t),$$

где  ${}_1F_1(a; b; t)$  — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, представленная в интегральной форме

$${}_1F_1(a; b; t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{t\tau} \tau^{a-1} (1-\tau)^{b-a-1} d\tau,$$

$\Gamma(a)$  — гамма-функция Эйлера фиксированного аргумента  $a > 0$ .

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и  $f(t) \in C([0; +\infty), E_2)$ , тогда задача Коши (1) имеет единственное обобщенное решение

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & B^{-1} \left[ e^{A_1 B^{-1} t} B u_0 + \int_0^t e^{A_1 B^{-1} s} ds B u_1 - \int_0^t e^{A_1 B^{-1} s} ds A_1 u_0 + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} e^{A_1 B^{-1} s} U_k(s) ds (B u_1 - A_1 u_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_k(s) ds B u_0 + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \int_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} \tau} U_{k-1}(\tau) f(s) d\tau ds \right] \theta(t). \end{aligned}$$

В условиях теоремы 1 известен вид фундаментальной оператор-функции линейного дифференциального оператора  $D_2(\delta(t))$  второго порядка, а, значит, как было показано выше, единственным обобщенным решением задачи Коши (1) является распределение (3). В формулировке следствия 2 указан его развернутый вид, с учетом естественного условия сильной непрерывности на луче  $[0; +\infty)$  функции  $f = f(t)$ . Простой анализ показывает, что построенное обобщенное решение представляет собой регулярное распределение вида  $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$ , причем функция  $u = u(t)$  дважды сильно непрерывно дифференцируема на луче  $[0; +\infty)$ , удовлетворяет дифференциально-операторному уравнению и начальным условиям, т. е. является классическим решением задачи Коши (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00643).

## Литература

1. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. *Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи*. – М: Физматлит, 1995. – 176 с.
2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи*. – М: Наука, 1989. – 416 с.
3. Замышляева А.А. *Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычислительные технологии*. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45–54.
4. Гражданцева Е.Ю. *Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах*. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 91 с.
5. Федоров В.Е. *Один класс уравнений соболевского типа второго порядка и вырожденные группы операторов // Вестник ЧелГУ*. – 2011. – № 13. – С. 59–75.
6. Баскалов А.Г., Кацаран Т.К., Смагина Т.И. *Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов // Известия вузов. Математика*. – 2017. – № 10. – С. 38–49.
7. Sidorov N., Loginov B., Sinityn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
8. Абловиц Д., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи рассеяния*. – М: Мир, 1987. – 479 p.
9. Hall B.C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. – New-York: Springer, 2015. – 453 p.

A NEW FORM OF FUNDAMENTAL SOLUTION OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR  
IN BANACH SPACES

S.S. Orlov, V.V. Shemetova

*The article is devoted to the study of the unique solvability of the Cauchy problem for an abstract linear differential equation of second order. The Sobolev–Schwarz theory of distributions with values in Banach spaces is applied to the study of this problem. The fundamental solution of the considered differential operator is constructed in the form of a special operator valued function, which contains the commutators of the operator coefficients of the equation. Commutability of the composition of operator coefficients is not assumed. The existence and uniqueness of the generalized solution of the considered initial value problem are proved, and an explicit formula for construction of this solution is obtained.*

Keywords: Banach space, commutator of operators, distribution, fundamental solution.

УДК 532.5, 531.6

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ,  
СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ**

В.В. Новиков<sup>1</sup>, Е.Е. Семенова<sup>2</sup>, Л.Н. Февральских<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *grigorieva\_ln@mail.ru*; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> *katerina\_semenova15@mail.ru*; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

<sup>3</sup> *grigorieva\_ln@mail.ru*; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

*Рассмотрена стационарная задача о движении несжимаемой вязкой жидкости в пространстве между концентрическими сферами, вращающимися вокруг различных осей. С помощью аппарата шаровых векторов получено аналитическое решение задачи. В зависимости от угла между осями вращения исследована устойчивость движения ограничивающих жидкость тел.*

**Ключевые слова:** некоаксиальные сферы, вязкая жидкость, шаровые векторы, устойчивость вращения.

Рассмотрим течение однородной несжимаемой вязкой жидкости в пространстве между вращающимися концентрическими сферами. Внутренняя сфера радиуса  $r_1$  вращается с угловой скоростью

$$\omega_1 = \omega_{1x} \mathbf{e}_x + \omega_{1y} \mathbf{e}_y + \omega_{1z} \mathbf{e}_z.$$

Внешняя сфера радиуса  $r_2$  имеет угловую скорость  $\omega_2 = \omega_2 \mathbf{e}_z$ . Угол между векторами угловых скоростей обозначим за  $\theta_0$ .

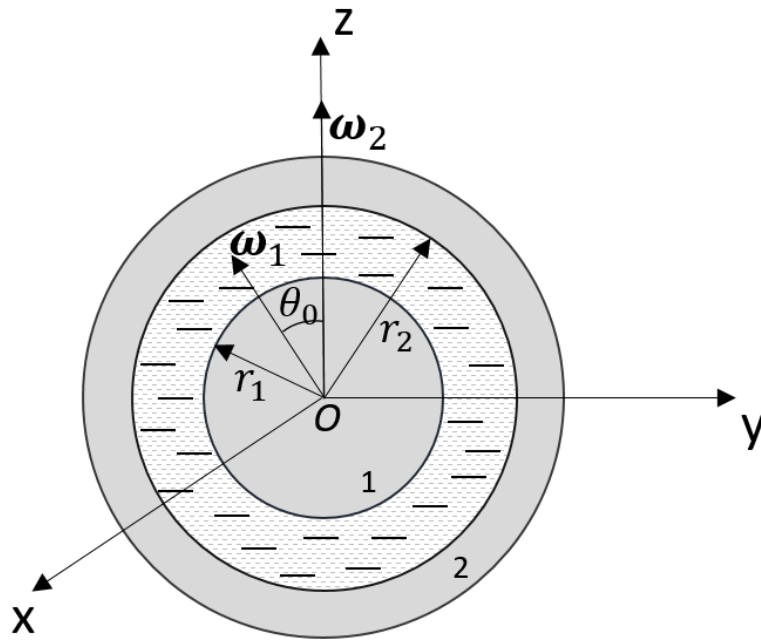


Рис.1. Модель движения твердых тел и вязкой жидкости

Предполагается, что течение ламинарное. В стационарном случае уравнение Навье-Стокса имеет вид:

$$\text{rot}\Delta\mathbf{v} = 0; \tag{1}$$

Скорость движения жидкости должна удовлетворять уравнению неразрывности

$$\text{div}\mathbf{v} = 0; \tag{2}$$

Условия прилипания жидкости к ограничивающим поверхностям:

$$\mathbf{v}(r_1, \theta, \varphi) = r_1(\omega_{1y}\cos\varphi - \omega_{1x}\sin\varphi)\mathbf{e}_\theta + r_1(\omega_{1z}\sin\theta - \omega_{1y}\cos\theta\sin\varphi - \omega_{1x}\cos\theta\cos\varphi)\mathbf{e}_\varphi;$$

$$\mathbf{v}(r_2, \theta, \varphi) = \omega_2 r_2 \sin\theta \mathbf{e}_\varphi; \tag{3}$$

Решение задачи может быть найдено с использованием аппарата шаровых векторов. Шаровые векторы задаются следующими формулами [1]:

$$\mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) = (l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r - \text{grad} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) = l Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r - \text{grad} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) = [\mathbf{e}_r \text{grad} Y_{lm}(\theta, \varphi)],$$

где  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = -l, \dots, 0, \dots, l$ .

Решение  $\mathbf{v}$  ищется в виде ряда:

$$\mathbf{v}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l, |m| \leq l} (K_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + P_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + M_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi)). \tag{4}$$

После подстановки выражения (4) в уравнение движения (1), уравнение неразрывности (2) и в граничные условия (3) задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналитическое решение задачи (1)-(3) имеет вид:

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= \frac{r_1^3(r_1^3 - r_2^3)(\omega_{1y} \cos \varphi - \omega_{1x} \sin \varphi)}{r^2(r_1^3 - r_2^3)}, \\ v_\varphi &= \frac{-r_1^3(r_1^3 - r_2^3)(\omega_{1x} \cos \varphi + \omega_{1y} \sin \varphi) \cos(\theta) + ((-\omega_{1z} + \omega_2)r_2^3 + r_1^3 \omega_{1z})r_1^3 - \omega_2 r_2^3 r_2^3}{r^2 r_1^3 - r_2^2 r_2^3} \sin(\theta) \end{aligned}$$

Полученная скорость имеет две составляющие по  $\theta$  и  $\varphi$ . Радиальная компонента скорости отсутствует. Таким образом, линии тока лежат на семействе концентрических поверхностей. Решение данной задачи используется для исследования устойчивости вращения движения ограничивающих жидкость поверхностей.

Кинетическая энергия и кинетический момент системы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + \rho \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\mathbf{r}, \mathbf{v}] dV; \\ E &= \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \frac{1}{2} \rho \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{v}^2 dV; \end{aligned}$$

где  $I_1 I_2$  – моменты инерции внутреннего тела 1 и внешней оболочки 2 (рис. 1).

Об устойчивости можем судить, используя геометрический подход. Строится кривая, соответствующая сохранению квадрата кинетического момента и семейство поверхностей  $E = const$ . Изменяя значение энергии, можем получить состояние равновесия данной системы. Показано, что устойчивым является соосное вращение тел (поверхностей). Получена зависимость угловых скоростей вращения тел от геометрических характеристик системы.

## Литература

1. Петрашень Г.И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы // Учен. зап. Ленинград. гос. ун-та. Сер. матем. наук. – 1945. – Вып. 17, № 114. – С. 2–27.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. — 3-е изд., перераб.-М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.-736 с. - Т.VI. Гидродинамика.
3. Новиков В.В., Февральских Л.Н. Течение жидкости между неконцентрическими сферами, совершающими дифференциальное вращение // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 129–140.
4. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О течении жидкости между вращающимися поверхностями // Прикл. механика и техн. физика. – 2011. – Т. 52, № 1. – С. 40–46.

## STABILITY OF ROTATION OF SPHERICAL SURFACES CONTAINING A VISCOUS LIQUID

V.V. Novikov, E.E. Semenova, L.N. Fevralskikh

*The stationary motion of incompressible fluid in the space between concentric spheres rotating around different axes is considered. Analytical solution was obtained via spherical vector apparatus. Dependence of solution stability on the angle between axes was researched.*

Keywords: non-coaxial spheres, viscous fluid, spherical vectors, stability of rotation.



УДК 517.2

**КВАНТОВАНИЕ ОДНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ КИМУРЫ**В.А. Павленко<sup>1</sup><sup>1</sup> pva100186@mail.ru; Башкирский государственный аграрный университет

В статье рассматриваются два совместных между собой линейных уравнения с временами  $t_1$  и  $t_2$ , которые зависят только от двух пространственных переменных. Эти уравнения являются аналогами уравнений Шредингера, которые опеределаются гамильтонианами Кимуры. Установлено, что решения гамильтоновой системы  $H^{2+1+1+1}$  Кимуры явным образом задаются совместными решениями  $H^{2+1+1+1}$  Накамуры.

**Ключевые слова:** гамильтоновы системы, уравнения Шредингера, изомонодромные деформации, гамильтонианы, квантование.

Строятся явные решения системы уравнений вида

$$\begin{cases} kY_{t_1} = H_{t_1}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, -k\frac{\partial}{\partial x}, -k\frac{\partial}{\partial y}, X, Y)\Psi, \\ kY_{t_2} = H_{t_2}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, -k\frac{\partial}{\partial x}, -k\frac{\partial}{\partial y}, X, Y)\Psi, \end{cases} \quad (1)$$

где  $k$  — некоторое число,  $H_{t_i}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, p_1, p_2, q_1, q_2)$  — пара гамильтонианов из статьи Кимуры [2].

Имеется система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} = \left( \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-\frac{t_2}{t_1}} + A_\infty \right) Y = AY, \\ \frac{\partial Y}{\partial t_1} = \left( E_2 x + B_1 + \frac{\frac{t_2}{t_1} A_t}{x-\frac{t_2}{t_1}} \right) Y = UY, \\ \frac{\partial Y}{\partial t_2} = -\frac{\frac{1}{t_1} A_t}{x-\frac{t_2}{t_1}} Y = VY. \end{cases}$$

Ее решения построены в работах Накамуры, Каваками и Сакая [3]. Здесь:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \theta_0 + \theta_2^\infty & -u(\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \theta_2^\infty) \\ \frac{1}{u}(\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \theta_0 + \theta_2^\infty) & -\mu_1 \lambda_1 - \mu_2 \lambda_2 - \theta_2^\infty \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \theta^1 - \mu_1 \lambda_1 & u\mu_1 \\ \frac{\lambda_1}{u}(\theta^1 - \mu_1 \lambda_1) & \mu_1 \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$A_t = \begin{pmatrix} \theta^t - \mu_2 \lambda_2 & u\mu_2 \\ \frac{\lambda_2}{u}(\theta^t - \mu_2 \lambda_2) & \mu_2 \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \frac{1}{t_1} \begin{pmatrix} 0 & (A_0 + A_1 + A_t)_{12} \\ (A_0 + A_1 + A_t)_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что замена  $Z = e^{0.5D} Y$  приводит к матрицам с нулевым следом.

Рассмотрим

$$\begin{cases} Z_{t_1} = U(t_1, t_2, \zeta)Z, \\ Z_{t_2} = V(t_1, t_2, \zeta)Z, \\ Z_\zeta = A(t_1, t_2, \zeta)Z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{t_1} = U(t_1, t_2, \eta)Z, \\ Z_{t_2} = V(t_1, t_2, \eta)Z, \\ Z_\eta = A(t_1, t_2, \eta)Z. \end{cases}$$

Образуем матрицу:

$$M = Z^{-1}(t_1, t_2, \zeta)Z(t_1, t_2, \eta)$$

Получено, что матрица  $M$  удовлетворяет уравнениям:

$$M_{t_1} = \frac{\eta(\eta-1)(\zeta-1)(\eta t_1 - t_2)}{t_1(t_1 - t_2)(\zeta - \eta)} M_{\eta\eta} - \frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta t_1 - t_2)(\eta-1)}{t_1(t_1 - t_2)(\zeta - \eta)} M_{\zeta\zeta} + \frac{bM_\eta + cM_\zeta}{t_1(t_1 - t_2)(\zeta - \eta)} + g_1(t_1, t_2, \zeta, \eta, u, \mu_i, \lambda_i)M, \quad (2)$$

где:

$$b(\zeta - \eta) = \eta t_1(\eta^2 - \zeta^2 - 4\zeta\eta + 2\zeta^2\eta + 2\zeta) - t_2(\eta^3 + 2\zeta^2\eta - \zeta\eta^2 - \zeta^2 - \eta^2 + \zeta + \eta - 2\zeta\eta),$$

$$c(\zeta - \eta) = \zeta t_1(\zeta^2 - \eta^2 - 4\zeta\eta + 2\zeta\eta^2 + 2\eta) - t_2(\zeta^3 + 2\zeta\eta^2 - \zeta^2\eta - \zeta^2 - \eta^2 + \zeta + \eta - 2\zeta\eta),$$

$$M_{t_2} = \frac{\eta(\eta-1)(\zeta t_1 - t_2)(\eta t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)(\zeta - \eta)} M_{\eta\eta} - \frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta t_1 - t_2)(\eta t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)(\zeta - \eta)} M_{\zeta\zeta} + \frac{(2\zeta\eta - \zeta - \eta)(\zeta t_1 - t_2)(\eta t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)(\zeta - \eta)^2} (M_\zeta + M_\eta) + g_2(t_1, t_2, \zeta, \eta, u, \mu_i, \lambda_i)M. \quad (3)$$

С помощью замен переменных уравнения (2) и (3) сводятся к уравнениям Кимуры:

$$s_1^2 \Psi'_{s_1} = r^2(r - s_1)\Psi_{rr} + 2r^2\rho\Psi_{r\rho} + r\rho(\rho - s_2)\Psi_{\rho\rho} + \Psi_r[(\kappa_0 + \theta_2 - 1)r^2 + \kappa_1 r(r - s_1) + \gamma s_1\rho + \gamma(r - s_1)] + \Psi_\rho[(\kappa_1 + \kappa_0 - 1)r\rho + \theta_2 r(\rho - s_2) - \gamma(s_2 - 1)\rho] + \kappa r\Psi,$$

$$s_2(s_2 - 1)\Psi'_{s_2} = r^2\rho\Psi_{rr} + 2r\rho(\rho - s_2)\Psi_{r\rho} + \left(\rho(\rho - 1)(\rho - s_2) + \frac{r\rho s_2(s_2 - 1)}{s_1}\right)\Psi_{\rho\rho} + \Psi_r[(\kappa_1 + \kappa_0 - 1)r\rho + \theta_2 r(\rho - s_2) - \gamma(s_2 - 1)\rho] + \Psi_\rho\left((\kappa_0 - 1)\rho(\rho - 1) + \kappa_1\rho(\rho - s_2) + \theta_2(\rho - 1)(\rho - s_2) + \frac{s_2(s_2 - 1)}{s_1}(\theta_2 r + \gamma\rho)\right) + \kappa\rho\Psi.$$

Это позволит нам построить явные решения системы уравнений (1).

## Литература

1. Kimura H. *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure* // Ann. Mat. Pura. Appl. – 1989. – V. 4. – P. 24-74.
2. Kawakami H., Nakamura A., Sakai H. *Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations.* – <http://arXiv:1209.3836v3> [math.CA] 4 Aug 2016.

## QUANTIZATION OF THE HAMILTONIAN OF THE SYSTEM BY KIMURA

V.A. Pavlenko

*The article considers two joint linear equations with times  $t_1$  and  $t_2$ , which only depend on two spatial variables. These equations are analogues of the Schrodinger equations, which are determined by the Hamiltonians of Kimura. It is established, that solutions of the Hamiltonian system  $H^{2+1+1+1}$  by Kimura explicitly specify joint solutions  $H^{2+1+1+1}$  by Nakamura.*

Keywords: Hamiltonian systems, Schrodinger equations, isomonodromy deformations, Hamiltonians, quantization.

УДК 003.26

**ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ РЕШЕТКИ И ЧАСТИЧНЫЕ ЗАТЕМНЕННЫЕ  
ЦИФРОВЫЕ ПОДПИСИ**О.Ю. Петров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [olezhpetrov@gmail.com](mailto:olezhpetrov@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В этой работе конструируется новая частично затемненная цифровая подпись, основанная на сложности задач из теории решеток.*

**Ключевые слова:** частично затемненные подписи, постквантовая криптография, базис решетки, ближайший к данному вектор решетки.

В данной работе продолжают исследования, начатые в [1]; конструируется подпись, основанная на решетках [2],[3]. Этот тип подписей относится к постквантовой криптографии, так как на данный момент есть основания думать, что сложные задачи на решетках (например, нахождение вектора решетки, ближайшего к данному) нельзя эффективно решить с помощью квантового компьютера. Основные принципы конструирования затемненных подписей изложен в [4]. Пока нам известен только один пример частично затемненной цифровой подписи, основанной на решетках (точнее, на сложности задач на решетках) [5]. В нашей работе предлагается другой способ частичного затемнения.

Отметим, что частично затемненные подписи используются в электронном документообороте и в банковской сфере (“электронные деньги” и т.п.). В западной литературе такие систему именуют как “система электронного перевода денежных средств” (The Electronic Funds Transfer Systems (EFTS)). Одна из таких систем – SWIFT1. Ее начали использовать в 70-ых годах XX века. В наши дни системы электронного документооборота широко применяются для обмена коммерческой информацией (EDI) – продажа и бронирование авиационных билетов.

Будем использовать терминологию из [1]. Есть три действующих лица: Банк (подписывающее лицо), Покупатель (лицо, формирующее “сообщение”) и Продавец (адресат). Покупатель посылает Банку информацию двух видов: затемненную (например, идентификатор электронной банкноты) и открытую (например, сумму, которую он желает снять со счета). Банк подписывает затемненные данные, используя в подписи открытые данные, и отправляет подпись Покупателю. Покупатель

должен иметь возможность снять с подписи затемнение, но у него не должно быть возможности изменить не затемненную информацию. Эта информация потом отправляется Продавцу вместе с подписью и участвует в проверке подписи.

Ввиду недостатка места опишем только основные идеи нашей подписи, которыми она отличается от подписи из [5]. Так как подпись основана на сложности задач на решетках, то у Банка должна быть решетка, задаваемая некоторой матрицей. В этой матрице должен содержаться в том или ином виде секретный ключ. Кроме того, мы будем предполагать, что матрица, задающая решетку, имеет семейство параметров. Эти параметры открыто передаются Покупателем Банку, и определяют уникальную решетку, по которой формируется затемненная подпись. Затемнение информации мы осуществляем с помощью одного из протоколов гомоморфного шифрования [6],[7]. Протоколы гомоморфного шифрования позволяют осуществлять операции над зашифрованным текстом так, чтобы соответствующие преобразования осуществились и над не зашифрованным текстом. Это позволяет проводить подписание зашифрованного текста, потом расшифровать результат, и получить подписанный исходный текст. В случае криптографии на решетках текстом является вектор, и затемненным текстом — тоже вектор. Именно в использовании гомоморфного шифрования состоит основное отличие нашей подписи от ранее известных. Кроме того, существенным является способ задания решетки через матрицу с параметрами. Подписью является вектор решетки, ближайший к тому, который подписывается. В нашей работе показано, что после снятия затемнения получается вектор решетки, ближайший к исходному. Подписанное сообщение состоит из трех частей. Это исходный текст (в виде вектора), набор открытых параметров, и вектор решетки, который и является подписью. При проверке подписи сначала по параметрам находится решетка, потом вычисляется (с некоторой точностью) вектор решетки, ближайший к исходному тексту-вектору, и этот вектор сравнивается с вектором-подписью. Подробное описание является довольно длинным, и будет опубликовано в другом месте.

## Литература

1. Петров О. Ю. *О некоторых схемах частичных затемненных подписей, подобных подписи RSA*. // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. – Т. 55. – С. 101–103.
2. Глухов М. М., Круглов И. А., Пичкур А. Б., Черемушкин А. В. *Введение в теоретико-числовые методы криптографии*. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011. – 400 с.
3. Bremner M. R. *Lattice Basis Reduction. An Introduction to the LLL Algorithm and Its Applications*. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. – xvii+316 pp.
4. Епишкина А. В., Шимкив М. Я. *Обзор и анализ криптографических схем, реализующих электронную подпись «вслепую»* // Безопасность информационных технологий. – 2015. – № 3. – С.51–58.
5. Haibo Tian, Fangguo Zhang, Baodian Wei. *A lattice-based partially blind signature* // Security Comm. Networks. – 2016. – V. 9, № 12. – P. 1820–1828.
6. Трубей А.И. *Гомоморфное шифрование: безопасность облачных вычислений и другие приложения(обзор)* // Информатика. – 2015. – № 1. – С. 90-101.
7. Бабенко Л. К., Буртыка Ф. Б., Макаревич О. Б., Трепачева А. В. *Полностью гомоморфное шифрование (Обзор)* // Техническая защита информации. – 2015. – № 3. – С. 3–26.

## PARAMETERIZED LATTICES AND PARTIALLY BLIND DIGITAL SIGNATURES

O.Y. Petrov

*In this paper, a new partially blind digital signature based on the complexity of the lattice theory problems is constructed.*

Keywords: partially blind signatures, post-quantum cryptography, the lattice basis, the closest to the given lattice vector.

УДК 517.988.8

**ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ**

А.А. Петрова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> rezolwenta@mail.ru; Воронежский государственный университет

*В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с нелокальным весовым интегральным условием на решение решается приближённо проекционно-разностным методом с использованием по времени неявного метода Эйлера. Аппроксимация задачи по пространственным переменным ориентирована на метод конечных элементов. Получена оценка приближённого решения. Установлены оценки погрешностей приближённых решений и сходимость приближённых решений к точному решению.*

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, параболическое уравнение, нелокальное весовое интегральное условие, проекционно-разностный метод, неявный метод Эйлера.

### 1. Описание точной и приближённой задач

Пусть задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств  $V \subset H \subset V'$ , где пространство  $V'$  – двойственное к  $V$ , а пространство  $H$  отождествляется со своим двойственным  $H'$ . Оба вложения плотные и непрерывные. На  $V$  определена полуторалинейная форма  $a(u, v)$ . Пусть для всех  $u, v \in V$  выполнены оценки

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$ . Очевидно, что форма  $a(u, v)$  порождает линейный ограниченный оператор  $A: V \rightarrow V'$ , такой что для  $u, v \in V$  выполняется  $a(u, v) = (Au, v)$ . Отсюда следует оценка  $\|A\|_{V \rightarrow V'} \leq M$ . Здесь под выражением типа  $(z, v)$  понимается значение функционала  $z \in V'$  на элементе  $v \in V$ . Для  $z \in H$  выражение  $(z, v)$ , в силу отождествления  $H \equiv H'$ , совпадает со скалярным произведением в  $H$  [1].

В пространстве  $V'$  на  $[0, T]$  рассматривается параболическая задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \int_0^T p(t)u(t) dt = \bar{u}. \quad (2)$$

В (2) заданы функция  $t \rightarrow f(t) \in V'$ , элемент  $\bar{u}$  и функция  $t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^1$ . Производные функций здесь и далее понимаются в обобщённом смысле.

В [2] доказана теорема о существовании слабого решения задачи (2).

**Теорема 1.** Пусть в задаче (2) выполнены условия (1). Пусть также функция  $f(t) \in L_1(0, T; H) \cap L_2(0, T; V')$ , а функция  $p(t)$  является абсолютно непрерывной, невозрастающей и принимает положительные значения на  $[0, T]$ . Предположим, что  $\bar{u} \in D(A) = \{v \in V \mid Av \in H\}$ . Тогда задача (2) имеет единственное решение  $u(t)$ , такое что  $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$ ,  $u' \in L_2(0, T; V')$ .

Отметим, что ранее задача (2) в условиях слабой разрешимости решалась приближённо полудискретным методом Галёркина, сводящим параболическую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. В настоящей статье рассматривается проекционно-разностный метод приближённого решения данной задачи, являющийся методом полной дискретизации. При этом для временной аппроксимации используется неявная схема Эйлера. В этом случае процесс нахождения приближённых решений задачи сводится к нахождению решений конечных линейных систем алгебраических уравнений.

Пусть  $V_h$  – конечномерное подпространство пространства  $V$ . Здесь параметр  $h > 0$ . Отметим, что на  $V_h$  можно рассматривать нормы пространств  $V, H, V'$ . Определим пространство  $V'_h$ , задав на  $u_h \in V_h$  двойственную норму  $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$ , где точная верхняя граница берётся по всем  $v_h \in V_h$ , таким что  $\|v_h\|_V = 1$ . Обозначим через  $P_h$  ортогональный проектор в пространстве  $H$  на  $V_h \subset H$ .  $P_h$  допускает продолжение по непрерывности до оператора  $\bar{P}_h: V' \rightarrow V'_h$ .

По теореме Лакса-Мильграмма [4] для любого элемента  $u \in V$  существует единственный элемент  $u_h \in V_h$ , такой что для любых  $v_h \in V_h$  выполняется равенство  $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$ . Таким образом, определён оператор  $R_h: V \rightarrow V_h$ , называемый проектором Ритца, такой что  $R_h u = u_h$  и для всех  $u \in V$  и  $v_h \in V_h$  выполнено  $a(R_h u, v_h) = a(u, v_h)$ .

В пространстве  $V_h$  рассмотрим приближённую задачу:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \bar{P}_h A u_k^h = f_k^h \quad (k = \overline{1, N}), \quad \sum_{k=1}^N p_k u_k^h \tau = \bar{u}_h. \quad (3)$$

В (3)  $N$  – натуральное число,  $\tau = T/N$ ;  $p_k = p(t_k)$ , где  $t_k$  – точки разбиения отрезка  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , такого что  $t_k - t_{k-1} = \tau$ ;  $f_k^h = \tau^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h f(t) dt \quad (k = \overline{1, N})$ ;  $\bar{u}_h = R_h \bar{u}$ .

**Лемма 1.** В условиях теоремы 1 задача (3) имеет единственное решение.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть  $u_k^h \quad (k = \overline{0, N})$  – решение задачи (3). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left( \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h\|_{V'}^2 \tau + \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V'_h}^2 \tau \right) \leq \\ \leq C \left\{ \|\bar{P}_h A \bar{u}_h\|_H^2 + \left( \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_H \right)^2 \tau^2 + \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_{V'_h}^2 \tau \right\}. \end{aligned}$$

**2. Оценка погрешности и сходимость приближённых решений**

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть  $u(t)$  – слабое решение задачи (2), а  $u_k^h$  ( $k = \overline{0, N}$ ) – решение задачи (3). Обозначим через  $z_k^h = u_k^h - \bar{P}_h u(t_k)$ . Тогда справедлива оценка

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left( \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h\|_{V'}^2 \tau + \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V'_h}^2 \tau \right) \leq C \left\{ \sum_{k=1}^N \|\psi_k^h\|_{V'_h}^2 \tau + \sum_{k=1}^N \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)| ds \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^N \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\bar{P}_h A u(t)\|_H dt \right)^2 \right\},$$

где  $\psi_k^h = \tau^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{P}_h A [u(t) - \bar{P}_h u(t_k)] dt \quad (k = \overline{1, N})$ .

Для обоснования сходимости приближённых решений к точному решению предположим, что в пространстве  $V$  задана последовательность  $\{V_h\}$  конечномерных подпространств, предельно плотная в  $V$ , то есть  $\|(I - Q_h)v\|_V \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  для любого  $v \in V$ . Здесь  $Q_h$  – ортопроектор в пространстве  $V$  на  $V_h$ . Заметим, что такая последовательность  $\{V_h\}$  также предельно плотна в пространствах  $H$  и  $V'$ .

Предположим теперь, что подпространства  $V_h \subset V$  такие, что выполняются аппроксимационные свойства, типичные для метода конечных элементов [4], [5]:

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leq r_1 h \|v\|_V, \tag{4}$$

$$\|v_h\|_V \leq r_2 h^{-1} \|v_h\|_H, \tag{5}$$

где константы  $r_1$  и  $r_2$  не зависят от  $v \in V$ ,  $v_h \in V$  и  $h$ . Условие (5) означает равномерное разбиение области пространственных переменных на конечные элементы. В простейшем одномерном случае такими подпространствами являются, например, подпространства кусочно-линейных на равномерной сетке функций [5]. Из (4) и (5) следует [6] равномерная по  $h$  оценка

$$\|P_h\|_{V \rightarrow V} \leq 1 + r_1 r_2.$$

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть  $\{V_h\}$  – предельно плотная в  $V$  последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (4), (5). Пусть  $\tau h^{-2} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Тогда при  $h \rightarrow 0$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_{V'}^2 dt + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \rightarrow 0. \tag{6}$$

При условии дополнительной гладкости решения  $u(t)$  и правой части  $f(t)$  уравнения (2) требование  $\tau = o(h^2)$  для сходимости можно существенно ослабить.

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия следствия 1. Пусть решение задачи (2)  $u(t)$  обладает дополнительной гладкостью  $u' \in L_2(0, T; H)$ . Пусть также  $f \in L_2(0, T; H)$ . Тогда, если  $\tau h^{-1} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , выполняется сходимост (6).

Сходимост (6) можно получить и без условия дополнительной гладкости функции  $f(t)$ , наложив дополнительное условие на функцию  $p(t)$ .

**Следствие 3.** Пусть выполнены условия следствия 1. Пусть решение задачи (2)  $u(t)$  обладает дополнительной гладкостью  $u' \in L_2(0, T; H)$ . Пусть также  $p' \in L_2(0, T)$ . Тогда, если  $\tau h^{-1} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , выполняется сходимост (6).

Также сходимост приближённых решений к точному можно получить и при стремлении  $\tau$  и  $h$  к нулю независимым образом.

**Следствие 4.** Пусть выполнены условия следствия 1. Пусть  $u(t)$ , решение задачи (2), обладает дополнительной гладкостью  $u' \in L_2(0, T; V)$ , а  $Au \in L_2(0, T; H)$ . Пусть также  $p' \in L_2(0, T)$ . Тогда при  $h \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \rightarrow 0.$$

## Литература

1. Обэн Ж.-П. *Приближённое решение эллиптических краевых задач*. – М.: Мир, 1977. – 384 с.
2. Петрова А. А., Смагин В. В. *Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика, математика. – 2014. – № 4. – С. 160–169.
3. Петрова А. А., Смагин В. В. *Сходимост метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение* // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 8. – С. 49–59.
4. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач*. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
5. Оганесян Л. А., Руховец Л. А. *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений*. – Ереван, 1979. – 236 с.
6. Смагин В. В. *Коэцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений* // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 11. – С. 79–94.

## PROJECTION-DIFFERENCE METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF A PARABOLIC EQUATION WITH A WEIGHTED INTEGRAL CONDITION

A.A. Petrova

*In a Hilbert space, an abstract linear parabolic equation with a nonlocal weight integral condition for the solution is resolved approximately by the projection-difference method, with the help of time-implicit Euler's method. Approximation by spatial variables is oriented on the finite element method. An estimate of approximate solution is obtained. Errors estimations of approximate solutions and convergence of approximate solution to the exact one are established.*

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, nonlocal weighted integral condition, projection-difference method, time-implicit Euler's method.



УДК 517.537

**ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ,  
АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЗАМКНУТОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ,  
РЯДАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ**

А.И. Рафиков<sup>1</sup><sup>1</sup> azat@rafikov.me; Башкирский государственный университет

*В данной работе приводится более слабое достаточное условие разложимости функций, аналитических в ограниченной выпуклой области, в ряд экспоненциальных многочленов специального вида. Отмечается, что требование правильной распределённости показателей можно заменить на ненулевую минимальную плотность.*

**Ключевые слова:** минимальная плотность, интерполяция, выпуклая область, относительно малые группы, экспоненциальные многочлены.

Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k, \nu_k\}$  — последовательность точек  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  и их кратностей  $\nu_k \in \mathbb{N}$  с единственной предельной точкой  $\infty$ . Без ограничения общности считаем, что члены  $\Lambda$  пронумерованы по возрастанию модулей  $\lambda_k$ . Также пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — ограниченная выпуклая область. Символом  $H(\overline{D})$  будем обозначать пространство функций, аналитических в замыкании области  $D$ , с топологией равномерной сходимости на  $\overline{D}$ .

Наша задача — найти представление функций из  $H(\overline{D})$  с помощью рядов экспоненциальных многочленов с показателями  $\lambda_k$ . Широко известно [1, гл. IV, § 6, п. 4, теорема 4.6.8], что когда каноническое произведение  $L(\lambda)$ , построенное по точкам последовательности  $\Lambda$ , имеет хорошие оценки снизу (в частности, является функцией вполне регулярного роста), всякая функция  $f(z)$ , аналитическая в  $\overline{D}$ , представляется рядом экспоненциальных многочленов вида

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, f) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu,$$

где  $\omega_L(\mu, \alpha, f)$  — интерполирующая функция Леонтьева,  $\alpha \in \mathbb{C}$  — параметр, а  $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots$  — неограниченная последовательность радиусов, для которой выполнены условия:  $\rho_{k+1}/\rho_k \rightarrow 1$  при  $k \rightarrow +\infty$  и при любом  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $K(\varepsilon)$ , начиная с которого на окружностях  $\partial B(0, \rho_k)$  выполняется подходящая оценка снизу на  $L(\lambda)$ . Из теоремы о вычетах следует, что получающийся ряд является рядом «со скобками», построенным по кольцам  $\rho_k < |\mu| \leq \rho_{k+1}$ .

Дальнейшие исследования [2] показали, что при применении техник, описанных в статьях [3] и [4], для некоторого класса последовательностей (более точно, последовательностей корней функций экспоненциального типа вполне регулярного роста) допустимо такое разбиение на группы  $\{\lambda_{m,k}\}_{k=1, m=1}^{N_m, +\infty}$ , что становится возможным получить представление вида

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N_m} d_{m,k} e_{m,k}(z).$$

Здесь  $m \in \mathbb{N}$ ,  $N_m = o(|\lambda_{m,1}|)$ ,  $|\lambda_{m,k}|/|\lambda_{m,1}| \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow +\infty$ ;  $d_{m,k} \in \mathbb{C}$  — коэффициенты,  $e_{m,k}$  — специальным образом построенные экспоненциальные многочлены.

Результат данной работы является прямым обобщением теоремы из [2] с применением идей статей [5] и [6]. Для его формулирования введём необходимые понятия и обозначения.

Пусть

$$n(r, \Lambda) = \sum_{|\lambda_k| \leq r} \nu_k$$

— считающая функция  $\Lambda$ . Тогда минимальной плотностью последовательности  $\Lambda$  называется величина

$$\underline{n}^0(\Lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda) - n(r(1-\delta), \Lambda)}{r\delta}.$$

Аналогично определим считающую функцию в угле  $\varphi < \arg z \leq \psi$  как

$$n(r, \varphi, \psi, \Lambda) = \sum_{\substack{|\lambda_k| \leq r \\ \varphi < \arg \lambda_k \leq \psi}} \nu_k.$$

Следуя [7], будем говорить, что  $\Lambda$  имеет угловую плотность, если для всех  $0 \leq \varphi < \psi \leq 2\pi$ , кроме не более, чем счётного (возможно, пустого) набора значений, существует предел

$$n(\varphi, \psi, \Lambda) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \varphi, \psi, \Lambda)}{r}.$$

Теперь сформулируем основной результат.

**Теорема.** Пусть  $D \ni 0$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ ,  $\Lambda$  — кратная последовательность, имеющая угловую плотность, причём  $\underline{n}^0(\Lambda) > 0$ .

Тогда существует такая система  $\{e_{m,k}\}_{m=1, k=1}^{+\infty, N_m}$  экспоненциальных многочленов, что всякая функция  $f(z) \in H(\overline{D})$  раскладывается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N_m} d_{m,k} e_{m,k}(z),$$

абсолютно и равномерно сходящийся в  $\overline{D}$ .

Таким образом, условие правильной распределённости показателей из работы [2] излишне и может быть заменено более слабым требованием ненулевой минимальной плотности.

## Литература

1. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент*. — М.: Наука, 1976. — 536 с.
2. Рафиков А. И. *Разложение в ряд функций, аналитических в ограниченной замкнутой области* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. — Т. 55. — С. 111–112.
3. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 12. — С. 49–104.

4. Кривошеев А. С. *Базисы по „относительно малым группам”* // Уфимск. матем. журн. – 2010. – Т. 2, №. 2. – С. 67–89.
5. Шилова Г. Н. *Теорема о делителях целых функций конечного порядка* // Матем. заметки. – 1990. – Т. 48, № 2. – С. 799–804.
6. Абдулнагимов А. И., Кривошеев А. С. *Правильно распределенные подмножества в комплексной плоскости* // Алгебра и анализ. – 2016. – Т. 28, № 4. – С. 1–46.
7. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

SUFFICIENT CONDITION FOR EXPANDING FUNCTIONS HOLOMORPHIC  
IN BOUNDED CLOSED DOMAIN IN SERIES OF EXPONENTIAL POLYNOMIALS

A.I. Rafikov

*In this paper we discuss a weaker condition for representation functions holomorphic in a bounded convex domain as a series of exponential polynomials. It is also noted that the exponents can be not properly distributed but they must have non-zero minimal density.*

Keywords: minimal density, interpolation, exponential polynomials, convex domain, relatively small groups.

УДК 517.98

**ОБ АЛГОРИТМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ВЕКТОР-СИГНАЛА  
ПО МОДУЛЯМ ИЗМЕРЕНИЙ**

Д.А. Рогач<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ida@ssau.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

*Рассмотрен фрейм конечномерного унитарного пространства, составленный из ортов, их сумм и определенной линейной комбинации. Исследуемый фрейм лежит в основе быстрого алгоритма восстановления сигнала, предложенного М. Штрауссом.*

**Ключевые слова:** фрейм, оператор анализа, оператор синтеза, фреймовый оператор, восстановление сигнала.

Пусть  $\mathbb{C}^M$  — конечномерное унитарное пространство со скалярным произведением  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^M x_k \overline{y_k}$ . Любой вектор  $x \in \mathbb{C}^M$  представим в виде:

$$x = \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle e_m,$$

где  $\{e_m\}_{m=1}^M$  — ортонормированный базис.

**Определение 1.** *Набор элементов  $F = \{f_1, \dots, f_N\} \subset \mathbb{C}^M$  называется фреймом для пространства  $\mathbb{C}^M$ , если существуют положительные числа  $A$  и  $B$  такие, что для любого  $x \in \mathbb{C}^M$*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^N |\langle x, f_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad (1)$$

Числа  $A, B$  из (1) называются нижней и верхней границами фрейма соответственно. Они определены неоднозначно.

Введем определение фреймоого оператора.

**Определение 2.** Фреймовый оператор — положительный, самосопряженный обратимый оператор

$$S: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M, S = \Phi\Phi^*, \quad (2)$$

где  $\Phi^*$  — оператор анализа

$$\Phi^*: x \in \mathbb{C}^M \rightarrow \{\langle x, f_n \rangle\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N.$$

$\Phi$  — оператор синтеза, сопряженный оператор к  $\Phi^*$ , который удовлетворяет:

$$\Phi: \{z_n\}_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N \rightarrow \sum_{n=1}^N z_n f_n \in \mathbb{C}^M;$$

$$G = \Phi^* \Phi.$$

Рассмотрим, следуя [2], систему векторов  $F = \{e_1, e_2, \dots, e_M\} \cup \{e_j + e_k\} \cup \{e_j + ie_k\}_{1 \leq j < k \leq M}$ , где  $\{e_1, e_2, \dots, e_M\}$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{C}^M$ ,  $i$  — мнимая единица.

$$N = M + C_M^2 = M + \frac{M(M-1)}{2} = \frac{M(M+1)}{2}$$

Вычислим фреймовый оператор:

$$S = \Phi\Phi^* = \begin{pmatrix} 2M-1 & 1-i & 1-i & \dots & 1-i \\ 1+i & 2M-1 & 1-i & \dots & 1-i \\ 1+i & 1+i & 2M-1 & \dots & 1-i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+i & 1+i & 1+i & \dots & 2M-1 \end{pmatrix}$$

Перейдем к алгоритму восстановления сигнала, в соответствии с [2]. Как указано в [2], идея алгоритма принадлежит М. Штрауссу.

Возьмем систему  $F = \{e_1, e_2, \dots, e_M\} \cup \{e_j + e_k\} \cup \{e_j + ie_k\}_{1 \leq j < k \leq M}$ . Введем обозначения фреймовых коэффициентов:

$$\langle x, e_m \rangle = a_m, \quad m = 1, \dots, M;$$

$$\langle x, e_j + e_k \rangle = a_l, \quad l = M+1, \dots, C_M^2;$$

$$\langle x, e_j + ie_k \rangle = a_p, \quad p = C_M^2, \dots, N^2.$$

Пусть  $a_j$  — первый ненулевой коэффициент,  $1 \leq j \leq M$ . Введем  $b_k = a_k/a_j$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Для  $b_k$ ,  $j < k \leq N$  справедлива формула [1]:

$$b_k = \frac{1}{2} \left[ |1 + b_k|^2 - \mathbf{i}(|1 + \mathbf{i}b_k|^2) + (\mathbf{i}-1)(1 + |b_k|^2) \right], \quad (3)$$

$$|1 + b_k| = |1 + a_k/a_j| = |(a_j + a_k)/a_j| = |\langle x, e_j + e_k \rangle / a_j| = |a_l / a_j|,$$

$$|1 + ib_k| = |1 + ia_k/a_j| = |(a_j + ia_k)/a_j| = |\langle x, e_j + ie_k \rangle / a_j| = |a_p/a_j|.$$

Представим сигнал в виде суммы и распишем её, используя введённые ранее обозначения:

$$x = \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle e_m = a_1 e_1 + \dots + a_M e_M;$$

$$\frac{x}{a_j} = e_j + \frac{a_{j+1}}{a_j} e_{j+1} + \dots + \frac{a_M}{a_j} e_M = e_j + b_{j+1} e_{j+1} + \dots + b_M e_M; \quad (4)$$

Вычислим нужные значения  $b_j$  и подставим значения в (4). Получим, что

$$x = a_j(e_j + b_{j+1} e_{j+1} + \dots + b_M e_M). \quad (5)$$

**Пример.** Пусть даны модули измерений вектора из  $\mathbb{C}^3$ .

$$|a_1| = 2; |a_2| = \sqrt{2}; |a_3| = |a_7| = |a_8| = |a_9| = 1;$$

$$|a_4| = |a_5| = \sqrt{10}; |a_6| = \sqrt{5}.$$

Используя (3) и (5), получим:

$$x = a_1(e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3), b_2 = \frac{1}{2}(1 - i), b_3 = \frac{1}{2}i.$$

Тогда находим исходный сигнал.

$$x = a_1 \left\{ 1, \frac{1-i}{2}, \frac{i}{2} \right\}.$$

## Литература

1. Новиков С.Я., Лихобабенко М.А. *Фреймы конечномерных пространств*. – УОП СамГУ, 2013. – С. 5-24.
2. Alexeev B., Cahill J., Mixon D.J. *Full spark frames* // Journal of Fourier Analysis and Application. – 2012. – V. 18, № 6. – P. 1167-1194.
3. Casazza P.G. *Custom building finite frames* // Contemporary Math. – 2004. – V. 345. – P. 61–86.
4. Mixon D.J. *SOFT 2016: Summer of Frame Theory*. – URL: <http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory> (15.06.2017).
5. Mixon D.J. *Sparse Signal Processing with Frame Theory*. – PhD. thesis. Princeton: University. 2012. arXiv:1204.5958v1 [math.FA].

### ABOUT THE RECOVERY ALGORITHM OF A COMPLEX VECTOR-SIGNAL FOR MEASUREMENT MODULES

D.A. Rogach

*A frame in a finite-dimensional unitary space is considered. It is composed from unit vectors, their sums and a pre-defined linear combination. The investigated frame underlies the fast algorithm of signal reconstruction, proposed by M. Strauss and stated in [2].*

Keywords: frame, analysis operator, synthesis operator, frame operator, signal reconstruction.

УДК 514.86

## СИНГУЛЯРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

М.Д. Рооп<sup>1</sup>

<sup>1</sup> roop.md14@physics.msu.ru; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

*В статье обсуждаются течения вязкой жидкости или газа, которые описываются уравнениями Навье-Стокса. Приводится алгебра Ли симметрий системы. Построено точное инвариантное решение, отвечающее наличию точечного изотропного источника. Показано, как построенное решение может быть размножено с помощью сдвига вдоль траекторий векторных полей, не использованных для редукции системы.*

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, сингулярные решения, симметрии дифференциальных уравнений.

Движение вязких жидкостей или газов в трехмерном пространстве описывается системой уравнений Навье-Стокса:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \right) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \zeta \right) \text{grad}(\text{div} \vec{v}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{v}(t, \vec{r}) = (v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$  — поле скоростей,  $\rho(t, \vec{r})$  — плотность жидкости,  $p(t, \vec{r})$  — давление,  $\eta$  и  $\zeta$  — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно. Одним из наиболее известных решений системы (1)-(2) является решение Ландау [2]. Решающую роль в его модели играет предположение о несжимаемости  $\rho(t, \vec{r}) = \rho_0$ , которое позволяет построить в сферических координатах точное сингулярное решение, имеющее следующий вид:

$$v_R(\theta, R) = \frac{2\eta}{\rho_0 R} \left( \frac{A^2 - 1}{(A - \cos \theta)^2} - 1 \right), \quad v_\theta(\theta, R) = -\frac{2\eta \sin \theta}{\rho_0 R (A - \cos \theta)}, \quad v_\varphi(\theta, R) = 0,$$

здесь  $R$  — расстояние до источника,  $\theta$  — зенитный угол сферической системы координат. Физически это решение можно интерпретировать как струю, формирующуюся за счет сообщения точечным источником, расположенным в начале координат, импульса в определенном направлении. Частицы окрестной жидкости притекают к источнику из бесконечности и снова удаляются от него (рис. 1).

Заметим, что решение Ландау справедливо только для вязких жидкостей.

Модель Ландау была обобщена Броманом и Руденко [3]. В данной модели допускается переход к идеальной жидкости, а также возможен ненулевой выход массы из точечного источника.

Для построения точных решений системы (1)-(2) будем использовать методы теории симметрий дифференциальных уравнений [3], [4]. Алгебра Ли  $\mathfrak{L}$  симметрий системы порождается векторными полями на пространстве 0-джетов  $J^0(\mathbb{R}^4)$ :

Трансляции

$$X_0 = \partial_t, \quad X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_p.$$

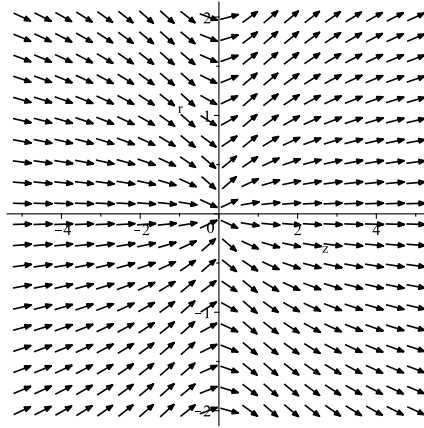


Рис. 1. Струя Ландау

Преобразования Галилея

$$X_5 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_6 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_7 = t\partial_z + \partial_w.$$

Повороты

$$\begin{aligned} X_8 &= -y\partial_x + x\partial_y - v\partial_u + u\partial_v, \\ X_9 &= -z\partial_x + x\partial_z - w\partial_u + u\partial_w, \\ X_{10} &= -z\partial_y + y\partial_z - w\partial_v + v\partial_w. \end{aligned}$$

Масштабные преобразования

$$\begin{aligned} X_{11} &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + u\partial_u + w\partial_w - 2\rho\partial_\rho, \\ X_{12} &= t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - \rho\partial_\rho + \rho\partial_\rho. \end{aligned}$$

Будем искать решения, инвариантные относительно подалгебры  $\mathfrak{g}$ , образованной векторными полями  $X_8, X_9, X_{10}, X_{11} + 2X_{12}$ :

$$\mathfrak{g} = \langle X_8, X_9, X_{10}, X_{11} + 2X_{12} \rangle.$$

Инвариантные решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{xh_2(q)}{t}, \quad v(t, x, y, z) = \frac{yh_2(q)}{t}, \\ w(t, x, y, z) &= \frac{zh_2(q)}{t}, \quad p(t, x, y, z) = \frac{h_1(q)}{t}, \quad \rho(t, x, y, z) = h_3(q) \end{aligned}$$

здесь  $q$  — инвариант преобразований  $\mathfrak{g}$ :

$$q = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t}.$$

Положим  $h_3(q) = \rho_0$ , тогда редуцированные уравнения на функции  $h_j$  примут вид:

$$\left(\eta + \frac{3}{4}\zeta\right)qh_2'' + \left(-\frac{3}{8}qh_2\rho_0 + \frac{5}{2}\eta + \frac{15}{8}\zeta\right)h_2' - \frac{3}{16}\rho_0h_2^2 - \frac{3}{8}h_1' = 0,$$

$$3h_2 + 2qh_2' = 0,$$

их общее решение выражается следующим образом:

$$h_1(q) = -\frac{\rho_0 C_1^2}{2q^2} + \frac{\rho_0 C_1}{4q} + p_0, \quad h_2(q) = \frac{C_1}{q^{3/2}},$$

где  $C_1, p_0$  — произвольные постоянные. Окончательный ответ можно выписать в виде:

$$\vec{v}(t, \vec{r}) = \frac{C_1 \vec{r} \sqrt{t}}{r^3}, \quad p(t, \vec{r}) = p_0 - \frac{C_1^2 \rho_0 t}{2r^4} + \frac{C_1 \rho_0}{2r \sqrt{t}}, \quad \rho(t, \vec{r}) = \rho_0, \quad (3)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $C_1$  — произвольная константа.

В данном решении точечный источник расположен в начале координат и действует изотропно во всех направлениях, константу  $C_1$  можно связать с потоком массы в течении, а интенсивность источника возрастает со временем. Поле скоростей изображено на рис. 2

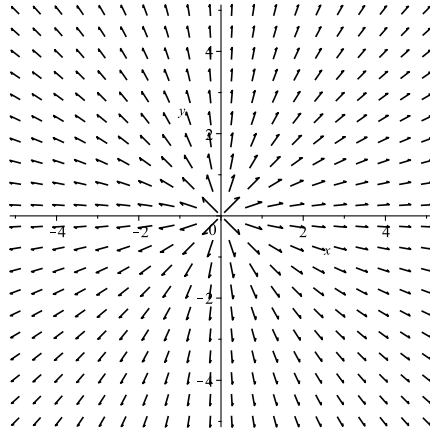


Рис. 2. Поле скоростей

Поскольку инфинитезимальные симметрии сохраняют класс решений системы, то их можно использовать для построения новых решений из уже имеющихся. Если  $X \in \mathfrak{L}$ , то результат действия потока векторного поля  $X$  на какое-либо решение системы снова будет решением. Подалгебра  $\mathfrak{g}$  не включала в себя инфинитезимальные преобразования Галилея:

$$X_5 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_6 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_7 = t\partial_z + \partial_w.$$

Вычислим потоки векторных полей  $X_5, X_6, X_7$ :

$$G_{X_5}: (x, u) \mapsto (x + u_0 t, u + u_0), \quad G_{X_6}: (y, v) \mapsto (y + v_0 t, v + v_0),$$

$$G_{X_7}: (z, w) \mapsto (z + w_0 t, w + w_0).$$

Действие преобразований  $G_{X_j}$  на (3) приводит к новому решению:

$$\vec{v} = -\vec{v}_0 + C_1 \sqrt{t} \frac{\vec{r}'}{(r')^3}, \quad p(t, x, y, z) = p_0 - \frac{C_1^2 \rho_0 t}{2(r')^4} + \frac{C_1 \rho_0}{2r' \sqrt{t}}, \quad \rho(t, x, y, z) = \rho_0,$$



где  $\vec{r}' = (x + u_0 t, y + v_0 t, z + w_0 t)$ ,  $r' = \sqrt{(x + u_0 t)^2 + (y + v_0 t)^2 + (z + w_0 t)^2}$ .

Данное решение соответствует равномерному прямолинейному движению источника и среды с заданной скоростью  $\vec{v}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-29-10013).

## Литература

1. Ландау Л. Д. *Об одном новом точном решении уравнений Навье-Стокса* // Докл. АН СССР. – 1944. – Т. 43, № 2. – С. 299–301.
2. Броман Г. И., Руденко О. В. *Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения* // УФН. – 2010. – Т. 180, № 1. – С. 97–104.
3. Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др.; Под ред. Виноградова А. М. и Красильщика И. С. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 380 с.
4. Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. *Contact geometry and nonlinear differential equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 496 p.

### SINGULAR FLOWS OF VISCOUS FLUIDS: EXACT SOLUTIONS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

M.D. Roop

*This paper describes the flows of viscous fluids, which can be described by the Navier-Stokes equations. The symmetry Lie algebra of the system is provided. Exact invariant solution is constructed, corresponding to the point isotropic source at the origin. It is shown how the solution obtained can be transformed into another solution by translation along the trajectories of vector fields, which were not used for reduction.*

Keywords: Navier-Stokes equations, singular solutions, symmetries of differential equations.

УДК 514.76

### РАЗНЫЕ ПОДХОДЫ ПРИ РАССМОТРЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВЫХ СВЯЗНОСТЕЙ 2-ГО ПОРЯДКА

Н.А. Рязанов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ryazanov-92@mail.ru; Балтийский Федеральный университет им. И. Канта, Институт физико-математических наук и информационных технологий

*Рассмотрена фундаментально-групповая связность 2-го порядка с двух точек зрения. В работе [3] показано, что при задании связности 2-го порядка предполагается, что объект связности содержит объект аффинной связности над многообразием, а в работе Рыбникова [1] этого не предусматривается. В настоящей статье получены дифференциальные сравнения для объекта кривизны связности 2-го порядка Рыбникова, которые имеют тензорный вид. Отмечен особый случай, соответствующий специализации базы главного расслоения как базы расслоенного пространства аффинной связности без кручения. В этом случае оба понятия фундаментально-групповой связности 2-го порядка совпадают.*

**Ключевые слова:** структурные уравнения Лаптева, фундаментально-групповая связность, объект связности 2-го порядка, объект кривизны 2-го порядка.

Рассмотрим главное расслоение  $G_r(M_n)$ , базой которого служит  $n$ -мерное гладкое многообразие, а типовом слое является  $r$ -членная группа Ли  $G_r$ . Связность по Рыбникову в главном продолженном расслоении со структурными уравнениями

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega_i^\alpha, \quad D\omega_i^\alpha = \omega_j^i \wedge \omega_j^\alpha + \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha; \quad (1)$$

$$\omega_\beta^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma, \quad \omega_{[ij]}^\alpha \cong 0 \pmod{\omega^i}; \quad (i, \dots = \overline{1, n}, \alpha, \dots = \overline{n+1, n+r}). \quad (2)$$

задается с помощью поля объекта  $\Gamma^2 = \{\Gamma_i^\alpha, L_{ij}^\alpha\}$ , компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \Gamma_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \Delta L_{ij}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_j^\gamma \omega_i^\beta + \omega_{ij}^\alpha = L_{ijk}^\alpha \omega^k,$$

где, например,

$$\Delta\Gamma_i^\alpha = d\Gamma_i^\alpha + \Gamma_i^\beta \omega_\beta^\alpha - \Gamma_j^\alpha \omega_i^j.$$

Объект  $\Gamma^2$  определяет формы связности Рыбникова

$$\Omega^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma_i^\alpha \omega^i, \quad \Omega_i^\alpha = \omega_i^\alpha - L_{ij}^\alpha \omega^j,$$

удовлетворяющие структурным уравнениям

$$D\Omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j, \quad D\Omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \Omega_j^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega_i^\beta \wedge \Omega_j^\gamma + R_{ijk}^\alpha \omega^j \wedge \omega^k, \quad (3)$$

где компоненты объекта кривизны  $R^2 = \{R_{ij}^\alpha, R_{ijk}^\alpha\}$  выражаются по формуле

$$R_{ij}^\alpha = \Gamma_{[ij]}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_i^\beta \Gamma_j^\gamma, \quad R_{ijk}^\alpha = L_{i[jk]}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha L_{i[j}^\beta \Gamma_{k]}^\gamma.$$

Для нахождения дифференциальных сравнений для компонент объекта  $R^2$ , продолжим структурные уравнения (1<sub>1</sub>, 1<sub>3</sub>):

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \quad \omega_{[jk]}^i \cong 0,$$

$$D\omega_{ij}^\alpha = \omega_i^k \wedge \omega_{ki}^\alpha + \omega_j^k \wedge \omega_{ik}^\alpha + \omega_{ij}^k \wedge \omega_k^\alpha + \omega_{ij}^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha \omega_i^\beta \wedge \omega_j^\gamma + \omega^k \wedge \omega_{ijk}^\alpha, \quad \omega_{i[jk]}^\alpha \cong 0 \pmod{\omega^i}. \quad (4)$$

Тогда компоненты  $R^2$  удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta R_{ij}^\alpha - \Gamma_k^\alpha \omega_{[ij]}^k + \omega_{[ij]}^\alpha \cong 0, \quad \Delta R_{ijk}^\alpha - L_{il}^\alpha \omega_{[jk]}^l - C_{\beta\gamma}^\alpha R_{jk}^\gamma \omega_i^\beta + \omega_{i[jk]}^\alpha \cong 0 \pmod{\omega^i}. \quad (5)$$

С учетом условий (2<sub>2</sub>, 4<sub>4</sub>) дифференциальные сравнения (5) для компонент объекта кривизны связности 2-го порядка примут вид (ср. [3]):

$$\Delta R_{ij}^\alpha \cong 0, \quad \Delta R_{ijk}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha R_{jk}^\gamma \omega_i^\beta \cong 0 \pmod{\omega^i}. \quad (6)$$

**Утверждение.** Дифференциальные сравнения для компонент тензора кривизны  $R^2 = \{R_{ij}^\alpha, R_{ijk}^\alpha\}$  связности 2-го порядка Рыбникова имеют вид (6), т.е. образуют тензор, содержащий подтензор  $R_{ij}^\alpha$  фундаментально-групповой связности 1-го порядка.

**Замечание 1.** В работе [1] автор исследует  $G$ -структуру, названную связностью 2-го порядка. В частности, при исследовании аффинной связности 2-го порядка [2] говорится о квазитензоре кривизны второго порядка, но нет соответствующих дифференциальных уравнений. Это утверждение соответствует дифференциальным сравнениям (5), которые не упрощаются до сравнений (6) в случае неголономного главного расслоения [4]. Однако в этом случае объект кривизны 2-го порядка  $R^2$  нужно объединить с объектом связности Рыбникова  $\{\Gamma_i^\alpha, L_{ij}^\alpha\}$ .

**Замечание 2.** В общем случае уравнения  $(1_1, 3)$  не являются структурными уравнениями главного расслоения со связностью, так как в уравнения  $(3_1)$  входят формы  $\omega_j^i$ . Если же  $\omega_j^i$  формы аффинной связности, то есть расслоение линейных реперов со структурными уравнениями  $(1_1, 4_1)$  является пространством аффинной связности без кручения, то  $\omega_{jk}^i = r_{jkl}^i \omega^l$ ,  $R_{jkl}^i = r_{j[kl]}^i$  — тензор кривизны аффинной связности. Этот особый случай соответствует специализации многообразия  $M_n$  как базы расслоенного пространства аффинной связности без кручения. Тогда уравнения  $(1_1, 3)$  становятся структурными уравнениями пространства фундаментально-групповой связности 2-го порядка [3].

## Литература

1. Рыбников А.К. О связностях и  $G$ -структурах // Обобщенные пространства и их приложения: межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. — 1988. — Вып. 9. — С. 65–76.
2. Рыбников А.К. Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, Вып. 2. — С. 279–290.
3. Рязанов Н.А. Объект кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка // Вестник Балтийского фед. ун-та им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. — Калининград. — 2017. — Вып. №4. — С. 10–15.
4. Шевченко Ю.И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий // Калининград. — 1998. — 83 с.

## DIFFERENT APPROACHES IN CONSIDERING FUNDAMENTAL-GROUP CONNECTIONS OF THE 2ND ORDER

N.A. Ryazanov

*The fundamental-group connection of the second order is considered from two points of view. It is shown in [3] that when defining connectivity of the second order it is assumed that the connection object contains an object of affine connection over a manifold, and this is not provided in [1]. Differential comparisons are obtained for the curvature object of second order Rybnikov connectivity, which are tensor form. A special case corresponding to the specialization of the base of the principal bundle as a base of a fibered space of affine connection without torsion is noted. In this case, both concepts of the fundamental-group connection of the second order coincide.*

Keywords: Laptev structure equations, fundamental-group connection, second-order connectivity object, curvature object of the second order.

УДК 514.764.77

## АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОМПАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНОЙ

О.А. Рязанова<sup>1</sup>, В.Н. Кокарев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> olga.riazanova2011@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева

<sup>2</sup> sko1949@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева

*Описывается поверхность в  $R^3$ , средняя кривизна которой в каждой точке равна значению некоторой гладкой функции. Получено уравнение, описывающее поверхности заданной средней кривизны. Получены условия его разрешимости в неявном виде.*

**Ключевые слова:** средняя кривизна, существование поверхности, квазилинейное дифференциальное уравнение.

Пусть компактная регулярная поверхность  $S$  в  $R^3$  локально задана уравнением  $r = r^S(u, v)$ . Пусть в некоторой окрестности  $S$  задана функция  $H(x, y, z)$ . Мы рассматриваем вопрос о существовании поверхности  $S^f$ , гомеоморфной  $S$ , которая задана уравнением  $r = r^S(u, v) + f(u, v)\bar{n}^S(u, v)$  и в каждой своей точке  $A$  имеет среднюю кривизну, равную  $H(A)$ . Для случая, когда  $S$  является сферой или тором, задача была рассмотрена в [1] (с. 271-303) и в [2].

В окрестности поверхности  $S$  возникает система координат  $(u, v, \rho)$ , где  $(u, v)$  – локальные координаты на  $S$ , а  $\rho$  – величина смещения вдоль перпендикуляра, проведенного к  $S$ .

Наша задача сводится к вопросу о разрешимости некоторого квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка на  $S$  относительно функции  $f(u, v)$ . Для доказательства разрешимости этого уравнения требуются оценки его решения и первых производных решения.

Пусть  $S^\rho$  – поверхность, заданная уравнением  $r = r^S(u, v) + \rho\bar{n}^S(u, v)$ , где  $\rho$  – константа, удовлетворяющая неравенству  $|\rho| < c$ . Здесь  $c = \min_{(A \in S, i=1,2)} \{ \frac{1}{k_i(A)} \}$ , и  $k_i(A)$  – главные нормальные кривизны поверхности  $S$  в точке  $A$ . Средняя кривизна поверхности  $S^\rho$  равна  $H^\rho = \frac{k_1}{1-\rho k_1} + \frac{k_2}{1-\rho k_2}$ .

Функцию  $H$  представим в виде

$$H(u, v, \rho) = H^\rho(u, v, \rho) + h(u, v, \rho).$$

**Теорема.** Если  $a, b$  – константы, такие, что  $-c < a < b < c$ , и если

$$h(u, v, \rho) < 0 \text{ при } \rho < a,$$

$$h(u, v, \rho) > 0 \text{ при } \rho > b,$$

то для функции  $f(u, v)$  имеют место оценки

$$a < f(u, v) < b.$$

## Литература

1. Бакельман И., Вернер А., Кантор Б. *Введение в дифференциальную геометрию в целом*. – М.: Наука, 1973. – 440 с.
2. Голубцова Т. *Оценки гомотопной тору поверхности в  $E^3$  с данной средней кривизной* // Геометрия и топология. – 1974. – № 2. – С. 76–88.

### PRIOR ESTIMATES FOR A COMPACT SURFACE OF GIVEN MEAN CURVATURE

O.A. Ryazanova, V.N. Kokarev

*This paper describes a surface in  $R^3$  with a mean curvature that equals value of some function at each point. Equation which represents surfaces of given mean curvature is obtained. Conditions which enable it to be resolvable is obtained.*

Keywords: mean curvature, surface existence, quasilinear differential equation.

УДК 615.322+66.061.3

### МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИТЕРПЕНОВЫХ КИСЛОТ В ЛИСТЬЯХ ШАЛФЕЯ ЛЕКАРСТВЕННОГО

А.А. Саламатин<sup>1</sup>, А.С. Халиуллина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [arthur.salamatin2@gmail.com](mailto:arthur.salamatin2@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> [anela\\_90@mail.ru](mailto:anela_90@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт фундаментальной медицины и биологии

*В статье обсуждаются результаты лабораторных опытов по экстракции дитерпеновых кислот из листьев шалфея лекарственного петролейным эфиром, селективным в отношении целевой группы соединений. Используется традиционный метод экстракции на водяной бане. Данные опытов позволяют оценить изотерму равновесия экстрагированных (в объеме растворителя) и неэкстрагированных (в объеме сырья) соединений. Соответствующая функциональная зависимость получается в результате варьирования отношения массы навески сырья к объему экстрагента. Анализ чувствительности решения обратной задачи к параметрам модели проводится в рамках обратного метода Монте-Карло.*

**Ключевые слова:** шалфей лекарственный, петролейный эфир, дитерпеновые кислоты, обратный метод Монте-Карло, равновесная концентрация.

В работе исследуется кинетика экстракции дитерпеновых кислот из листьев шалфея лекарственного. Петролейный эфир используется в качестве селективного растворителя. Типичный лабораторный опыт по экстракции организован следующим образом. Измельченное сырье помещается в колбу, содержащую известный объем растворителя. Полученная смесь нагревается на водяной бане и поддерживается при температуре кипения экстрагента (40–60°C). Вода постоянно подводит тепло к системе, и обычно раствор закипает через 3–4 минуты после начала эксперимента [2]. Этот момент принимается за начало отсчета времени,  $t = 0$ . Колба присоединяется к обратному холодильнику, что предотвращает значительное умень-

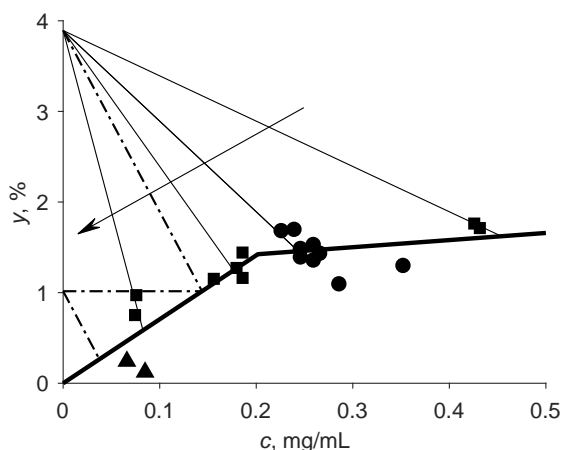
шение объема экстрагента со временем — испарившийся растворитель конденсируется и сливается обратно в колбу. Анализ концентрации раствора в различные моменты времени позволяет установить факт наступления материального равновесия в системе, когда целевые соединения перестают выходить в раствор, омывая сырье. Для более полной экстракции необходимо использование свежей (чистой) порции растворителя.

Результаты лабораторных опытов свидетельствуют о том, что с течением времени в описанной системе наступает равновесие. Целевые соединения перестают выходить в раствор. Так, добиться большей степени экстракции возможно лишь с уменьшением отношения массы навески  $m$  к объему растворителя  $V$ ,  $L = m/V$ . Увеличение времени экстракции перестает влиять на концентрацию раствора при  $t > 20$  мин. Подтверждение сформулированной гипотезы о наступлении равновесия и одновременная идентификация изотермы равновесия являются основными задачами представленной работы.

Хорошего согласия теории [3] с экспериментальными данными позволяет добиться нелинейная изотерма сорбции, определяющая равновесие растворенных веществ в объеме экстрагента с дитерпеновыми кислотами, содержащимися в объеме сырья. Текущее содержание  $y$  соединений в сырье в равновесии с раствором при концентрации  $c_{eq}$  дается следующей формулой

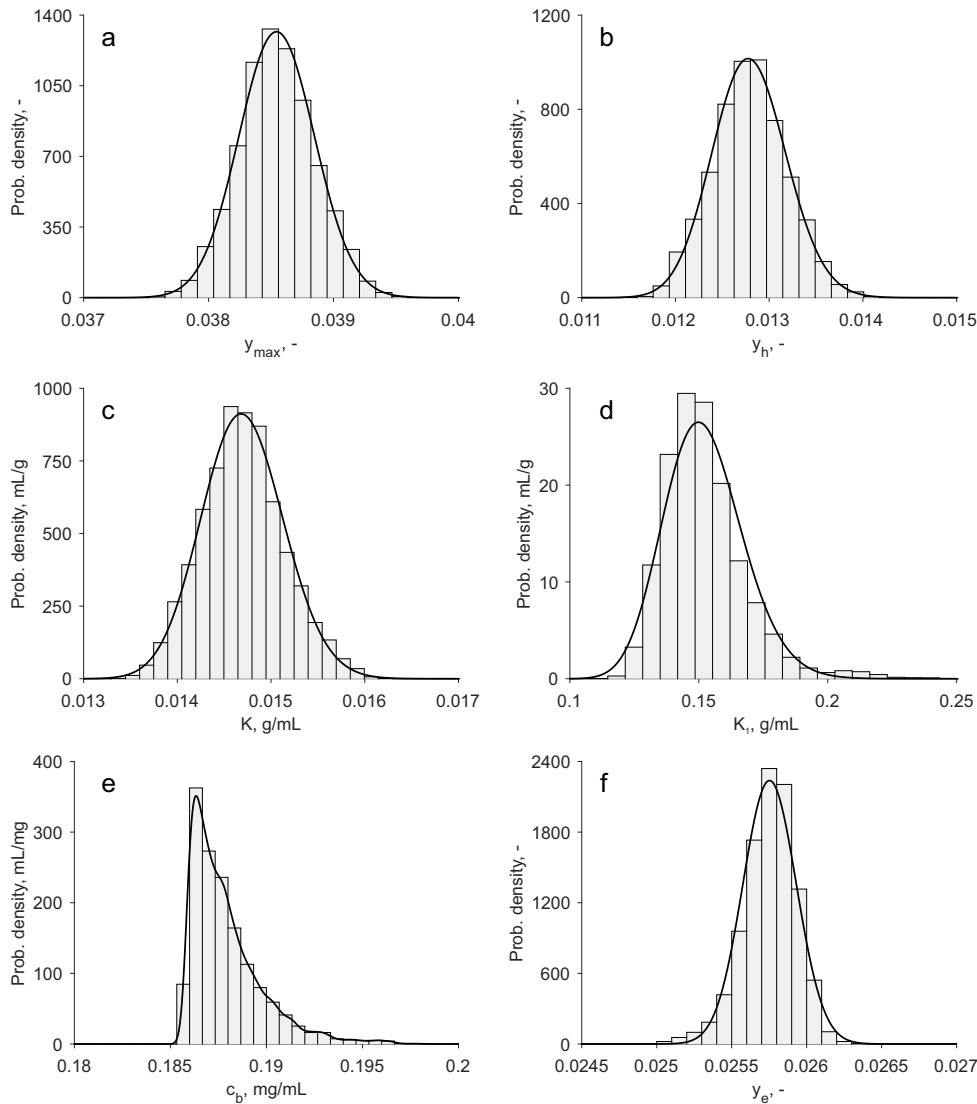
$$y(c_{eq}) = \begin{cases} c_{eq}/K, & c_{eq} < c_b; \\ c_b/K + (c_{eq} - c_b)/K_1 & c_{eq} \geq c_b. \end{cases} \quad (1)$$

Величины  $c_{eq}$  и  $y$  дополнительно связаны условием сохранения полной массы дитерпенов в системе, что позволяет однозначно идентифицировать равновесное состояние по гидромодулю  $L$ .



**Рис. 1.** Сопоставление данных лабораторных опытов с теоретической кривой равновесия (1). Здесь  $K = 1.42E-2$  г/мл,  $K_1 = 1.07E-1$  г/мл,  $c_b = 1.99E-4$  г/мл,  $y_{max} = 3.89E-2$ . Маркеры — данные опытов, тонкие сплошные линии показывают траектории материального баланса при  $L = \{1:50, 1:100, 1:150, 1:200, 1:400\}$  г/мл, стрелка указывает направление убывания  $L$ . Время  $t$  является параметром вдоль каждой кривой. При его стремлении к бесконечности, линия упирается в кривую равновесия. Штрих-пунктирная ломаная кривая демонстрирует эффект от двухкратной экстракции при соотношении  $L = 1:200$  г/мл (каждая).

Параметры изотермы (наклоны прямолинейных участков  $K_1 \gg K$ , промежуточное значение  $c_b$  концентрации, разделяющее два режима), а также полное содержание  $y_{max}$  соединений в сырье являются свободными параметрами, и определяются из согласования теории с экспериментальными данными. Результат представлен на рис. 1. Экспериментальные точки получаются в результате варьирования гидромодуля  $L$  и кратности экстракции [3].



**Рис. 2.** Гистограммы плотности маргинальных функций распределения параметров изотерм равновесия, (a)  $y_{max}$ , (b)  $y_h = c_b/K$ , (c)  $K$ , (d)  $K_1$ , (e)  $c_b$ , (f)  $y_e$ . Сплошные линии в (a)–(d), и (f) – наилучшее приближение логнормальным распределением, и в (e) – метод на основе окон Парцена – Розенблатта.

Обычно линейная изотерма не позволяет дать адекватную интерпретацию данных лабораторных наблюдений. В связи с этим часто рассматриваются нелинейные изотермы [5]. Используемое здесь выражение для изотермы равновесия предполагает, что часть целевых соединений  $0 < y_e < y_{max}$  слабо взаимодействует с развитой внутренней поверхностью сырья и может быть легко растворена экстрагентом. Таким образом, наклон изотермы (1) при высоких концентрациях близок к ну-

лю, означая, что количество извлеченных соединений  $x = y_{max} - y$  слабо зависит от равновесной концентрации  $c_{eq}$ . Растворитель любого уровня чистоты способен растворить эту часть соединений; нет необходимости регулярно подавать новый, чистый экстрагент. С другой стороны, оставшаяся фракция,  $y_h = y_{max} - y_e$ , находится в непосредственном контакте с внутренней развитой поверхностью внутриклеточных мембран, и для ее извлечения требуется повышенная растворяющая способность экстрагента. В связи этим, необходимо регулярно сменять растворитель, чтобы достичь полного истощения сырья. Таким образом, обосновывается необходимость многократной экстракции.

Наилучшее приближение параметров модели (подпись к рис. 1) получено на основе метода наименьших квадратов. Однако, он не позволяет непосредственно оценить соответствующие доверительные интервалы, а также убедиться, что найденные значения действительно отвечают глобальному минимуму невязки. В связи с этим применялся обратный метод Монте Карло, развитый Тарантолой и Мозгардом [4]. Он позволяет получить весьма строгие оценки реальных значений параметров, а также проверить чувствительность модели к изменению значений в окрестности оптимума. Полученные результаты представлены на рис. 2. Интересно, что наибольшая дисперсия наблюдается для параметра  $K_1$ , что свидетельствует о справедливости гипотезы о том, что определенная часть целевых соединений может практически беспрепятственно растворяться в экстрагенте.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Академии наук Республики Татарстан (проект 18-41-160001 p\_a).

## Литература

1. Халиуллина А.С., Хазиев Р.Ш., Саламатин А.А. *Количественное определение дитерпеновых кислот в листьях шалфея лекарственного* // Журнал аналитической химии. – 2017. – Т. 72, № 7. – С. 681–685
2. Salamatin A.A. *Detection of micro-scale mass-transport regimes in supercritical fluid extraction* // Chemical engineering and technology. – 2017. – V. 40, № 5. – P. 829–837
3. Саламатин А.А., Хазиев Р.Ш., Макарова А.С., Иванова С.А. *Кинетика экстракции биологически активных веществ из растительного сырья кипящим растворителем* // Теоретические основы химической технологии. – 2015. – Т. 49, № 2. – С. 206–213.
4. Bucic-Kojic A., Sovova H., Planinic M., Tomas S. *Temperature-dependent kinetics of grape seed phenolic compounds extraction: Experiment and model* // Food Chemistry. – 2013. – V. 136, № 3–4. – P. 1136–1140.
5. Mosegaard K. *Resolution analysis of general inverse problems through inverse Monte Carlo sampling* // Inverse Problems. – 1998. – V. 14. – P. 405–426.

### MONTE CARLO METHOD FOR QUANTITATIVE DETERMINATION OF DITERPENE ACIDS CONTENT IN *SALVIA OFFICINALIS* LEAVES

A.A. Salamatin, A.S. Haliullina

*Results of laboratory experiments of extraction of diterpene acids from ground *Salvia officinalis* leaves using petroleum ether are discussed in the paper. The solvent is selective with respect to the target group of compounds. Observed data allow for the estimation of the equilibrium isotherm between extracted compounds (in the bulk of the solvent) and non-extracted compounds (in the bulk of the raw material). The dependence is obtained when the ratio of plant material mass to the volume of the solvent is varied. The resolution analysis is performed in terms of the Monte Carlo approach.*



Keywords: *Salvia officinalis*, petroleum ether, diterpene acids, inverse Monte-Carlo method, equilibrium concentration.

УДК 532.539

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСПАРЕНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ КАПЕЛЬ В СТРУЕ: МЕТОД МОМЕНТОВ

Р.Р. Салахов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ramms\_92@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Решена задача движения полидисперсного аэрозоля с испаряющимися каплями в струе внутри канала кругового сечения: модель струи аэрозольного ингалятора. Реализован эйлеров метод моментов для логарифмически нормальной функции распределения частиц по площадям поверхности. Для различных начальных значений насыщенности рассчитаны характеристики испаряющейся жидкой фазы.*

**Ключевые слова:** метод моментов, испарение, полидисперсный аэрозоль.

Математическое моделирование многофазных систем имеет ряд приложений в различных областях: химическая инженерия, машиностроение, медицина и др. Во многих случаях многофазная система представляет собой газозвесь, состоящую из капель, взвешенных в среде несущего газа. В двигателях внутреннего сгорания или при движении капель лекарственных аэрозолей в дыхательных путях одним из процессов, вовлеченных в динамику частиц, является испарение. Модели испарения одиночной капли на настоящий момент достаточно хорошо развиты [1]. Однако испаряющиеся капли в реальных ситуациях, как правило, имеют полидисперсное распределение по размерам, и остается актуальным развитие методов моделирования испарения полидисперсных аэрозолей. Основными при этом являются лагранжев метод расчета траекторий отдельных частиц и эйлеров метод решения уравнения переноса для дисперсной фазы. С точки зрения эффективности в плане вычислительной стоимости и возможности учета двухстороннего взаимодействия с несущей средой привлекательным является эйлеров метод моментов [2,3].

В настоящей работе развит метод моментов для моделирования движения полидисперсного аэрозоля в струе внутри канала кругового сечения. Подобная задача возникает при моделировании струи аэрозольного ингалятора. Задача формулируется для функции распределения частиц по площадям поверхности при диффузионном законе испарения отдельной капли.

**Постановка задачи.** В канал кругового поперечного сечения диаметром  $D_t = 22$  mm и длиной  $L = 150$  mm через сопло диаметра  $d_n = 0.6$  mm подается аэрозольная струя температуры  $T_0$  со скоростью  $U_{x0}$ . По кольцевому сечению вне выходного сечения сопла подается струя воздуха температуры  $T_1$  со скоростью  $U_{x1}$ . На рис. 1 дана схема расчетной области. Течение гидродинамической струи описывается осредненными уравнениями Рейнольдса неизотермического турбулентного течения в рамках  $k - \varepsilon$  модели турбулентности. Распределение  $n_a(a, t)$  капель по площадям поверхности  $a$  описывается логарифмически нормальной функцией [4,5].

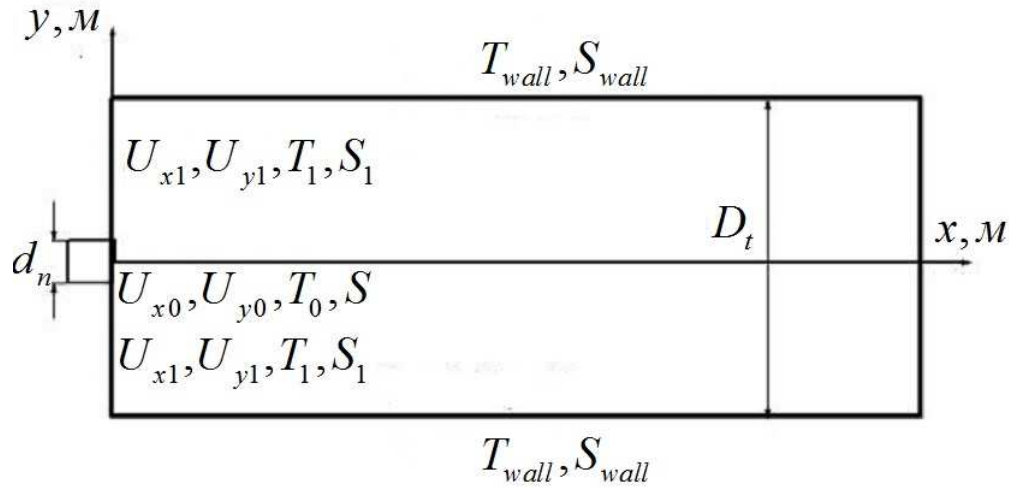


Рис. 1. Схема расчетной области и граничные условия.

$$n_a(a, t) da = \frac{N}{2\sqrt{2\pi} \ln \sigma(t)} \exp\left(-\frac{\ln^2\left(\frac{a}{a_g(t)}\right)}{8 \ln^2 \sigma(t)}\right) \frac{da}{a}$$

где  $\sigma(t)$  – дисперсия распределения,  $a_g(t)$  – средняя площадь капель. Изменение площади поверхности капель в рамках диффузионной модели испарения может быть описано уравнением.

$$\frac{da}{dt} = C_a(s - 1),$$

$$C_a = 8\pi D M p_s / \rho_p R T, \quad s = p_\infty / p_s,$$

где  $D$  – коэффициент диффузии пара,  $M$  – молекулярный вес смеси,  $p_s$  – давление насыщенного пара,  $\rho_p$  – плотность вещества жидкой фазы,  $R$  – удельная газовая постоянная,  $T$  – температура смеси,  $p_\infty$  – парциальное давление пара.

Определим моменты  $M_k$  функции распределения  $n_a(a, t)$ :

$$M_k(t) = \int_0^\infty a^k n_a(a, t) da.$$

Уравнения переноса моментов в поле скоростей струи записываются в виде ( $m_k = M_k / M_0 a_g^k$ )

$$\frac{\partial m_0}{\partial t} + \nabla(m_0 \bar{u}) = D \Delta m_0,$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} + \nabla(m_1 \bar{u}) = D \Delta m_1 - 2C_a(s - 1) \frac{m_0}{a_g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} + \nabla(m_2 \bar{u}) = D \Delta m_2 - 2C_a(s - 1) \frac{m_1}{a_g}.$$

Описанная задача решалась в пакете ANSYS/Fluent с применением UDF функций для системы уравнений (1). Для уравнений несущей среды и переноса моментов приняты граничные условия:

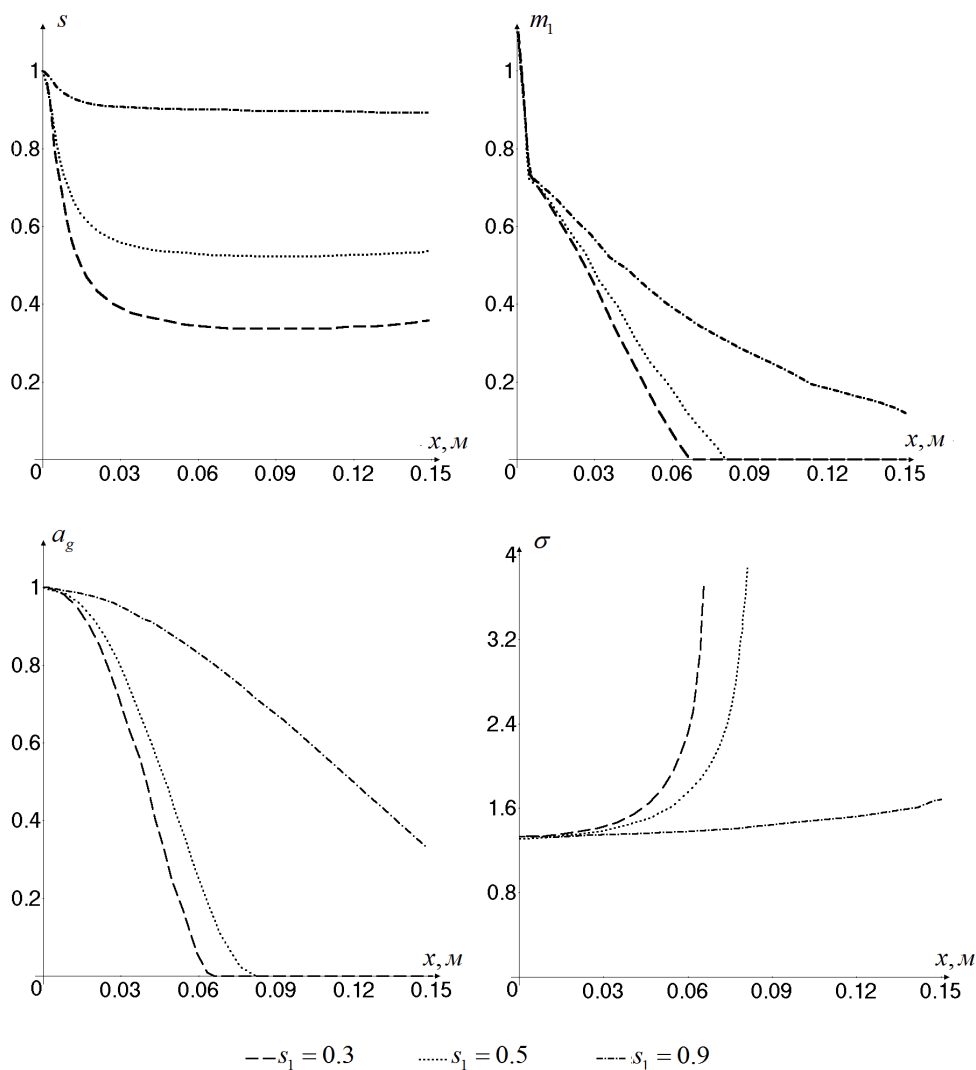
на выходе из сопла:  $U_{x0} = 1$  м/с,  $U_{y0} = 0$  м/с,  $T_0 = 300$  К,  $s = 1$ ,  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = \exp(2\ln^2 \sigma)$ ,  $m_2 = \exp(8\ln^2 \sigma)$ ;

в кольцевом сечении:  $U_{x1} = 0.5$  м/с,  $U_{y1} = 0$  м/с,  $T_1 = 315$  К;

на стенках канала :  $U_{x0} = 0$  м/с,  $U_{y0} = 0$  м/с,  $T_{wall} = 300$  К,  $s_{wall} = 1$ ;

на выходе из канала:  $\partial m_0 / \partial t = 0$ ,  $\partial m_1 / \partial t = 0$ ,  $\partial m_2 / \partial t = 0$ .

Значение насыщенности паровоздушной смеси во входном кольцевом сечении принято равным  $s_1 = 0.3, 0.5, 0.9$ . Рассчитаны распределения скорости, температуры и насыщенности смеси и характеристики испаряющейся полидисперсной аэрозоли – моменты  $m_0, m_1, m_2$ , дисперсия  $\sigma$  и средняя площадь каплей  $a_g$ . Распределения этих величин вдоль оси симметрии приведены на рис. 2. Видно, что при росте начального насыщения  $s$  интенсивность испарения уменьшается.



**Рис. 2.** Распределения насыщенности  $s$ , момента  $m_1$ , средней площади поверхности  $a_g$ , дисперсии  $\sigma$  вдоль оси симметрии.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного

проекта № 18-31-00387.

## Литература

1. Sazhin S. *Droplets and Sprays*. – Springer-Verlag London, 2014. – 178 с.
2. McGraw R. *Description of Aerosol Dynamics by the Quadrature Method of Moments* // *Aerosol Sci. Techn.* – 1997. – Т. 27, № 2. – С. 255–265.
3. Massot M., Laurent F., Kah D., De Chaisemartin S. *High order moment method for polydisperse evaporating sprays with mesh movement: application to internal combustion engines* // *SIAM J. Applied Math.* – 2010. – Т. 70, № 8. – С. 3203–3234.
4. Yamamoto M. *A Moment Method for Evaporation Using a Logarithmic Size Distribution with the Smallest Size* // *Aerosol Sci. Techn.* – 2005. – Т. 39, № 8. – С. 790–798.
5. Yamamoto M. *A Moment Method of the Log-Normal Size Distribution with the Critical Size Limit in the Free-Molecular Regime* // *Aerosol Sci. Techn.* – 2005. – Т. 48, № 7. – С. 725–737.

### MODELING THE EVAPORATION OF POLYDISPERSE DROPLETS: METHOD OF MOMENTS

R.R. Salakhov

*The problem of motion of a polydisperse aerosol with evaporating droplets in a jet inside a circular channel is solved: a model of a jet of an aerosol inhaler. The Euler moment method is implemented for a lognormal particle distribution function over surface areas. For various initial saturation values, the characteristics of the evaporating liquid phase are calculated.*

Keywords: method of moment, evaporation, polydisperse aerosol.

УДК 51

### О ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ГЛАЗАМИ СТУДЕНТОВ

Д.А. Сверкунова<sup>1</sup>, А.С. Черная<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *belosnegka97@mail.ru*; Кубанский государственный Университет

<sup>2</sup> *chernaya.nastya18@gmail.com*; Кубанский государственный Университет

*В статье обсуждается поиск и развитие талантливой молодежи, современный учитель, мероприятия по реализации концепции развития математического образования.*

**Ключевые слова:** одаренная молодежь, концепция математического образования, финансирование.

Являясь студентами четвёртого курса факультета математики и компьютерных наук и думая о предстоящей работе после окончания вуза, связанной, конечно, с математикой, мы, естественно, обеспокоены состоянием математического образования в стране. В связи с этим мы попытались разобраться в сложившейся ситуации на своём уровне понимания и доступной нам информации.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических, гуманитарных исследованиях и, конечно, важна для бизнес – структур. Причина проникновения математики в различные отрасли знаний

заключается в том, что она предлагает весьма четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Проблемы, решение которых раньше считалось невозможным, успешно решаются благодаря применению математики, тем самым расширяются возможности научного познания. Без современной математики с ее развитым логическими и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. Ученые, изобретатели, учителя, которые успешно овладели необходимыми математическими знаниями и навыками, эффективно трудятся, применяя новые технологии для развития государства, улучшения качества жизни и мировой конкуренции. Поэтому очень важную роль играет поиск и развитие талантливой молодежи и одаренных детей. Эта проблема, как и сама математика, является важнейшим приоритетом развития государства и общества, а также научно-технического прогресса. Одарённые, талантливые люди – это высокий потенциал любой страны, позволяющий ей эффективно развиваться и конструктивно решать современные экономические и социальные задачи. Они очень востребованы в развитых странах, об этом свидетельствует непрекращающаяся «утечка умов» из России. Большинство хороших русских ученых, к сожалению, работают за границей. Это влияет на математическое образование, на подготовку студентов, аспирантов.

Математике нужно учить всех, варьируя программы обучения в зависимости от целей обучения и от тех специальностей, по которым идет обучение. Но в современном российском обществе роль математики как науки, недостаточно востребована. Негативное отношение к математике часто отражаются в СМИ и тем самым силой своего влияния на массы не улучшают положение с математическим образованием. Об учителях. Для успешного усвоения математических сведений требуются хорошие пояснения учителя, творческий подход, а также немало самостоятельных усилий самого учащегося. Для того, чтобы обучающийся по-настоящему включился в работу, нужно, чтобы задачи учебной деятельности, были не только понятны, но и внутренне приняты им, т. е. чтобы они приобрели значимость для учащегося и нашли, таким образом, отклик и опорную точку в его переживаниях. От современного преподавателя требуется не только глубокое знание предмета, но и увлечение математикой, умение излагать её просто и интересно. Но творческих преподавателей всегда было не очень много, не многие выпускники педагогических вузов идут преподавать школьникам, около 30 процентов студентов не трудоустраиваются по профессии.

Стимулом для пробуждения потенциальных математических способностей у обучающегося может стать интересная математическая задача, увлекательная книга, связанная с математикой, участие в работе математического кружка и многое другое. Но не всем молодым людям это понятно. И, к сожалению, сейчас развелось множество мероприятий по математике с сомнительными уровнем и целями. Гонка честолюбия родителей за всеми призами и по всем дисциплинам обычно кончается плохо - ребёнок теряет мотивацию, теряет ориентиры/цели этой своей деятельности.

Одним из направлений по развитию молодежи на Кубани является Математический центр Бернулли. Центр открыт в 2004 году на основе достаточно известной

системы математических кружков в Краснодаре. Создал его доцент И.В.Федоренко, который начал работать в КубГУ после окончания аспирантуры по кафедре дифференциальных уравнений МГУ. Сейчас (с сентября 2018 г.) в Центре – около 80 учащихся 4–11 классов школ Краснодара, а также – Крымского, Северского, Славянского на Кубани, Темрюкского, Тимашевского, Тихорецкого районов Краснодарского края. Есть филиалы (учебные группы) в Новороссийске, Сочи. Кроме того, они проводят в Краснодарском крае ряд важных олимпиад – Турнир городов, олимпиада Эйлера, олимпиада Шарыгина, геометрическая олимпиада, две устные московские олимпиады – для 6+7 классов. Для школьников края также проводится своя устная олимпиада им. П.Л. Чебышёва (5–7 кл).

В центре Бернулли работают и сотрудники матфака: О.К. Тен, Г.Н. Тугуз, Г.Н. Титов, а также и других факультетов Кубгу: А.А. Шатохин, Е.Б. Башта и др. Участники центра добились положительных результатов, а именно: участие в чемпионатах мира, в олимпиадах Сербии, Китая и др. странах, 128 медалистов. Главное условие занятий у них – мотивация ребёнка, добровольное желание заниматься математикой. Факультет математики и компьютерных наук КубГУ также открыл образовательное подразделение «Малый математический факультет». Одна из задач малого матфака – улучшение математических знаний и помощь старшеклассникам в подготовке к ЕГЭ по математике и информатике.

В его работе принимают участие ведущие профессора и доценты ФМиКН, такие как Г.Н. Титов, С.В. Гайденко, В.Ю. Барсукова, А.В. Бочаров и др., которые будут проводить занятия по основным разделам школьных курсов математики и информатики. Занятия проводятся по воскресеньям (один раз в две недели) на ФМиКН.

Приведём статистику поступления тех школьников, которые ходили на «Малый матфак» и потом поступили на факультет математики и компьютерных наук за последние четыре года: в 2015 поступили 34 человека, в 2016 – 29, в 2017 – 28, в 2018 – 33, что говорит о мотивации школьников, присутствующих на занятиях, связать свою будущую профессию с математикой. У ребят есть огромное желание работать в будущем в крупных компаниях Яндекс, Google и т. п., в компаниях, которые занимаются многими проблемами: от защиты информации и математическими исследованиями до создания суперкомпьютеров и стандартизации языков программирования.

В 2018 – 2019 учебном году продолжают работу заочная школа математиков (ЗШМ) и Клуб любителей математики при ФМиКН, Обучаясь в заочной школе математиков, школьник сможет расширить свой кругозор в области математики и информатики, развить навыки решения не только обычных школьных, но и «нестандартных» задач, а также получить ценные рекомендации по подготовке к ЕГЭ по этим дисциплинам. В заочной математической школе при проверке школьных работ активно участвуют студенты ФМиКН. Оргкомитет ЗШМ надеется, что учеба в заочной школе математиков поможет углубить и повысить уровень знаний, а также сделать первые шаги в увлекательный мир науки вместе с учеными, преподавателями и студентами факультета. Для участия в работе ЗШМ приглашаются ученики 11-го класса (допускаются и 10-го класса) школ Краснодарского края.

Хорошее математическое или computer science образование всегда было в почете. Главное, не терять веру в себя и свои способности. Как сказал Д. Пойа «Недо-

статочно лишь понять задачу, необходимо желание решить её. Без сильного желания решить трудную задачу невозможно, но при наличии такового возможно. Где есть желание, найдётся путь!» В настоящее время в стране сложилась благоприятная обстановка, чтобы реально изменить отношение всех, или, по крайней мере, большинства активных членов российского общества к математическому образованию.

24 декабря 2013 г. распоряжением № 2506-р Правительства РФ утверждена Концепция развития мат. образования в Российской Федерации. Для реализации положений этой Концепции был разработан и утверждён 3 апреля 2014 г. (Пр. № 265) План мероприятий Минобрнауки России по реализации Концепции.

Для наших проблем принятые правительством документы исключительно важны и полезны, конечно, при ответственном подходе со стороны Правительства, руководителей регионов, руководителей образовательных учреждений, бизнеса, родителей учащихся и самих.

То, что беспокоит нас, студентов настоящего времени.

1. Отсутствие ответственности исполнителей за принятые решения на всех уровнях от правительственных чиновников до учителя и учащегося. Четкое исполнение принятых документов, поручений, обязательств – это одно из главных положений реализации плановых мероприятий.

2. Обеспечение необходимого финансирования государством и бизнес – структурами для успешной реализации мероприятий – важнейшее концептуальное положение изменения отношения к развитию математического образования.

С нашей точки зрения требуется работа с бизнес-сообществом, направленная на вовлечение бизнеса в развитие математического образования. В России есть различные частные и государственные фонды, поддерживающие науку и образование, но было бы полезно создать специальный фонд, нацеленный на реализацию мероприятий Концепции. Необходимо целенаправленно мотивировать бизнес на развитие математики и математического образования. Если же ограничиться только бюджетным финансированием, согласно приказа Правительства №256 от 03.04.2014, высококачественно реализовать мероприятия Концепции не удастся. Это наше мнение.

Есть ещё один источник финансирования мероприятий - самофинансирование. Безусловно, за счёт активизации участников мероприятий, часть мероприятий (выездные школы, конференции, семинары др.) можно провести и, с учётом этого, самофинансирование нужно развивать. Но при таком подходе можно только поддержать какой-то определённый уровень. Мы достаточно подробно остановились на финансировании мероприятий, так как финансовая составляющая любого мероприятия должна показывать насколько оно значимо для общества. К сожалению, достаточно часто недофинансирование проведения мероприятий ведёт к некачественному исполнению, что вызывает отрицательное отношение к самим мероприятиям.

3. Средства массовой информации, издательства, лекции и семинары для родителей, популярные лекции о роли математики в современном мире для студентов в рамках курса «Введение в специальность», привлечение студентов к работе в УИРС, НИР как важнейший механизм популяризации математики и обеспечения устойчивого интереса к её изучению. Пока ещё сохранился опыт тех процессов и пе-

риодов, когда с помощью целенаправленных действий со стороны Правительства – жесточайшей ответственности, необходимых финансовых вливаний и массовой пропаганды за короткий срок удавалось достигать нужных результатов (ядерная физика, вычислительная математика).

В утверждённом плане мероприятий по реализации Концепции развития математического образования определены важнейшие в настоящий момент специальные мероприятия для развёртывания математического просвещения и популяризации математики.

Перечень этих мероприятий с нашими небольшими комментариями:

- Организация разработки навигаторов (информационных образовательных порталов) образовательных услуг в области математики.
- Поддержка созданных на конкурсной основе интерактивных музеев математики, персональных музеев российских математиков. Именно на начальном этапе инициаторам нужна как финансовая помощь, так и методическая.
- Поддержка создания математических интернет порталов и социальных сетей, сервисов для разработки и презентации творческих продуктов и проектов, массовых открытых онлайн курсов в области математики. Для активизации этой работы понадобится поддержка таких структур как деканаты математических факультетов, математических кафедр, НМС по математике Министерства образования и науки РФ и региональных отделений НМС.
- Поддержка создания центров интересной науки. Они привлекут детей разного возраста, создание их возможно, как в городах, так и небольших поселениях, где также нет недостатка в одарённых и любознательных детях.
- Поддержка и распространение успешных практик дополнительного образования (в том числе - кружков), направленных на развитие математических способностей обучающихся. Хорошо известна в этом направлении работа в школах Москвы, Дубны, Звенигорода, Казани, Краснодара, Красноярска, Новосибирска, Петрозаводска, Рязани и. др.
- Организация разработки интерактивных систем тестирования знаний и компетенций в области математики для различных категорий населения. Известно, что использование обучающих компьютерных программ, средств и технологий при обучении математике существенно повышают познавательный интерес к предмету, повышается учебная мотивация, повышается качество знаний обучающихся.
- Организация мероприятий по присвоению образовательным организациям имён известных российских математиков и математического просвещения с целью увековечения их памяти и патриотического воспитания молодёжи.

По нашему мнению, нужен специальный проект (фонд), который бы возродил интерес к математике на всех уровнях. В связи с этим нам хотелось бы привести слова А.Н. Колмогорова: «... пути к серьёзной работе в области математической науки разнообразны. Одним легче даётся решение замысловатых задач, другие сначала не выделяются на этом поприще, но, двигаясь медленно, овладевают глубоко и серьёзно теорией и несколько позднее научаются работать самостоятельно. В конечном счёте при выборе математики как предмета основных интересов и работы на долгое будущее каждый должен руководствоваться собственной самооценкой, а не числом премий и похвальных отзывов на олимпиадах.»



## ON MATHEMATICAL EDUCATION PROBLEMS FROM STUDENT'S POINT OF VIEW

D.A. Sverkynova, A.S. Chernaya

*The article discusses: search and development of talented youth, Modern teacher, Measures to implement the concept of development of mathematical education.*

Keywords: gifted youth, concept of mathematical education, financing.

УДК 512

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ**Л.Р. Секаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [lrsekaeva@kpfu.ru](mailto:lrsekaeva@kpfu.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье рассматриваются примеры, решаемые в программе "МАХИМА".*

**Ключевые слова:** МАХИМА, математика.

В настоящее время требования, предъявляемые к уровню математической подготовки студентов, постоянно растут. К тому же, современное представление о качественном образовании включает в себя свободное владение компьютерными технологиями. Поэтому появляется необходимость использовать в процессе обучения математике комплексные пакеты программ, позволяющие решать задачи как аналитически, так и численно.

Система компьютерной алгебры *Maxima* является бесплатной свободно распространяемой программой и обладает широкими возможностями. Выполняя задания с помощью *Maxima*, студент знакомится с общими принципами работы подобных систем. Появляется возможность решать более трудоемкие и интересные задания, получать наглядные результаты. Это способствует закреплению знаний и умений, полученных на лекционных и практических занятиях.

Для удобства проведения занятий нами были разработаны учебно-методические пособия [1], [2], они предназначены для студентов 1-го и 2-го курса естественных факультетов. В них содержится описание основных приемов работы с компьютерной программой *Maxima* для выполнения алгебраических преобразований, решения систем уравнений, построения разнообразных графиков, для вычисления пределов, производных, неопределенных, определенных, кратных и криволинейных интегралов, для решения дифференциальных уравнений и определения сходимости рядов.

Пособия необходимы для проведения практических занятий и для самостоятельной работы студентов. Для каждого раздела подобраны задачи. Данные учебно-методические пособия могут быть использованы также и на других факультетах, на которых занятия по математике проводятся, с использованием системы компьютерной алгебры *Maxima*.

## Литература

1. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. *Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima*. – Казань.: Казанский университет, 2012. – 72 с.
2. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. *Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima. Часть 2*. – Казань.: Казанский университет, 2013. – 61 с.
3. Малакаев М.С., Секаева Л.Р. *Несколько примеров использования программы “MAXIMA” в работе учителя*. Ежегодный сборник “Математика в образовании”, посвященный памяти Анатолия Вольфовича Мерлина. – 2015. – № 5. – С. 63–66.
4. Секаева Л.Р. *Применение “MAXIMA” для решения задач*. Тезисы XXIII Международной конференции “Математика. Образование. Информатизация”. – Казань: 2015. – С. 78.
5. Секаева Л.Р. *Применение программы “MAXIMA” в учебном процессе*. Материалы VIII Международного научно-практической конференции «Математическое образование в школе и вузе: инновации в информационном пространстве» (MATHEDU-2018). – Казань: Изд-во Казанского университета 2018. – С. 224-235.

### USE OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN EDUCATIONAL PROCESS

L.R. Sekaeva

*In the article, some examples solved in the MAXIMA program are reviewed.*

Keywords: MAXIMA, mathematics.

УДК 514.822

### КРИВИЗНА СУПЕРПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО И ДЕ СИТТТЕРА

А.И. Гарафутдинова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [anzhi-scorpio@mail.ru](mailto:anzhi-scorpio@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт физики

*Обсуждается суперсимметрия как автоморфизм супергеометрической структуры, в частности, как инфинитезимальные суперпреобразования, оставляющие неизменной метрику суперпространства. Следуя Клейновской программе, идея которой заключается в рассмотрении симметрии или группы преобразований как основы определения геометрии пространства, мы определяем метрику как инвариант супергруппы преобразований. Мы расширили конформную алгебру  $so(4,2)$  до супералгебры, реализовав её генераторы в виде супердифференциальных операторов. Мы находим метрику, которая инвариантна относительно супергенераторов, натягивающих нужную подалгебру суперсимметрий. Эта метрика является суперобобщением соответствующей метрики теории Эйнштейна. Мы пришли к неожиданным свойствам кривизны суперпространств из-за наличия “души”, содержащей антикоммутирующие переменные: суперпространство Минковского получает ненулевую кривизну, а “тело” скалярной кривизны суперпространства Де Ситтера (часть, не содержащая антикоммутирующих переменных) оказывается непостоянным:*

$$\alpha + \alpha^3 * \frac{x^a * x_a}{32}.$$

**Ключевые слова:** суперпреобразования, супералгебра, супердифференциальные операторы, кривизна суперпространств.

### Литература

1. Berezin F.A. *The method of second quantization*. – Moscow: Nauka, 1965.
2. Akulov V.P., Volkov D.V. *On Riemannian superspaces of minimal dimension* // ТМР. – 1979. – V. 41, №. 2. – P. 147–151.
3. Leites D.A. *Introduction to the theory of supermanifolds* // UMN. – 1980. – V. 35, № 1 (211).
4. Aminova A.V., Mochalov S.V. *Metric of the Minkowski superspace as an invariant of the Poincare supergroup* // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 1994. – № 3. – P. 10–16.
5. Daniel S. Freed *Five lectures on supersymmetry*. – AMS, 1999.

## CURVATURE OF THE SUPERSPACES OF MINKOWSKI AND DE SITTER

A.I. Garafutdinova

*Supersymmetry is discussed as an automorphism of a supergeometric structure, in particular, as infinitesimal supermappings that leave the metric of superspace unchanged. Following the Klein program, the idea of which is to consider symmetry or a group of mappings as the basis for determining the geometry of space, we define the metric as an invariant of the supergroup of mappings. We extended the conformal algebra so (4,2) to a superalgebra by implementing its generators as superdifferential operators. We have found a metric that is invariant with respect to the supergenerators that pull the desired subalgebra of supersymmetries. This metric is a super-generalization of the corresponding metric of Einstein's theory. We have found the unexpected properties of the superspace curvature due to the presence of "soul" containing anticommuting variables: the Minkowski superspace obtains non-zero curvature and "body" of the scalar curvature of De Sitter's superspace (the part that does not contain anticommuting variables) is impermanent:*

$$\alpha + \alpha^3 * \frac{x^a * x_a}{32}.$$

Keywords: supermappings, superalgebra, superdifferential operators, superspace curvature.

УДК 517.958

## ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.В. Семенко<sup>1</sup>, Т.И. Семенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *semenko54@gmail.com*; Новосибирский государственный технический университет

<sup>2</sup> *semenko\_ti@mail.ru*; Новосибирский государственный технический университет

*В статье излагается метод построения решений начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка в плоскости специального преобразования Фурье. Фактически это хорошо известный метод характеристик, но модифицированный таким образом, что он позволяет строить решения упомянутых задач в виде несложных алгебраических формул. Это сильно облегчает анализ решений, в особенности построение разрывных решений аналогичных задач.*

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, начально-краевая задача, постоянные коэффициенты, преобразование Фурье, аналитические функции.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$By = 0, \quad B = \frac{\partial}{\partial t}E + A_0 + \sum_{j=1}^m A_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где  $y(t, x)$  – искомый вектор-столбец размерности  $n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$  – пространственные переменные размерности  $m$ ,  $E$  – единичная матрица,  $A_j$ ,  $j = 0, m$  – постоянные матрицы. Такой вид, в частности, имеют многие системы уравнений гидродинамики, линеаризованные на постоянном решении: уравнения Эйлера ( $n = m + 2$ ) [1], уравнения Сен-Венана теории мелкой воды ( $n = m + 1$ ) [1] или обобщенные уравнения Сен-Венана, так называемая теория "shear shallow-water flows" ( $n = m + 2$ ) [2]. После преобразования Фурье

$$\hat{y}(\xi, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{m+1}} \int_{\substack{t>0 \\ x \in Q}} y(x, t) e^{i(\omega t - \xi x)} dt dx, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m), \quad \xi x = \sum_{j=1}^m \xi_j x_j, \quad (2)$$

система примет вид  $\hat{B}\hat{y} = \hat{H}$ , где  $\hat{B} = -\omega E - iA_0 + \sum A_j \xi_j$ , а вектор  $\hat{H}(\xi, \omega)$  и область интегрирования  $Q$  определяется постановкой задачи – набором начальных и граничных условий. Отметим, что функция  $\hat{y}(\xi, \omega)$  вида (2) будет аналитична по  $\omega$  в верхней полуплоскости и

$$\widehat{\partial y / \partial t} = -i\omega \hat{y} - \frac{\hat{y}_0(\xi)}{2\pi}, \quad \hat{y}_0(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} y(x, 0) e^{-i\xi x} dx,$$

т. е.  $\hat{y}_0$  есть преобразование Фурье начального условия.

Покажем, как в терминах собственных чисел и векторов матрицы  $\hat{B}$  можно построить решения начально-краевых задач для уравнения (1) и установить некоторые их свойства. Ограничимся случаями  $x \in \mathbb{R}^m$  (задача Коши),  $x_1 > 0$  или  $x_1 < 0$  (односторонняя краевая задача) и  $x_1 \in [0, L]$  (двусторонняя задача).

Пусть матрица  $\hat{B}$  обладает полным набором различных собственных чисел  $\lambda_j(\xi, \omega)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Введем собственные векторы: столбцы  $e_{0j}(\xi, \omega)$  ( $\hat{B}e_j = \lambda_j e_j$ ) и строчки  $g_{0j}(\xi, \omega)$  ( $g_j \hat{B} = \lambda_j g_j$ ),  $j = \overline{1, n}$ . Очевидно,  $\lambda_j = \omega_j(\xi) - \omega$ ,  $j = \overline{1, n}$ , а собственные векторы зависят только от переменной  $\xi$  и образуют биортогональную систему:  $g_{0j}e_{0k} = 0$ ,  $j \neq k$  и  $g_{0j}e_{0j} = 1$  (условие нормировки), т.е. имеем разложение по собственным векторам

$$\sum e_{0j} \otimes g_{0j} = \sum \Omega_{0j} = E,$$

здесь  $\otimes$  – знак тензорного произведения и  $\Omega_{0j}(\xi)$  – проекторы на соответствующие одномерные собственные подпространства. Тогда  $\hat{B} = \sum \lambda_j \Omega_{0j}(\xi)$ , откуда  $\hat{B}^{-1} = \sum \Omega_{0j}(\xi) / (\omega_j(\xi) - \omega)$ .

**Решение задачи Коши.** Если в (2)  $Q = \mathbb{R}^m$ , то в плоскости Фурье уравнение (1) имеет вид  $\hat{B}\hat{y} = \hat{y}_0(\xi) / (2\pi i)$ . Разложив начальные данные по базису  $e_0(\xi)$ :

$$\hat{y}_0(\xi) = \sum_{j=1}^n \beta_{0j}(\xi) e_{0j}(\xi); \quad \beta_{0j} = g_{0j} \hat{y}_0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

получим решение

$$y = y^0(x, t) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^m} \left[ \sum_{\text{Im} \omega_j(\xi) < 0} \beta_{0j}(\xi) e_{0j}(\xi) e^{-it\omega_j(\xi)} + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im} \omega_j(\xi) = 0} \beta_{0j}(\xi) e_{0j}(\xi) e^{-it\omega_j(\xi)} \right] e^{i\xi x} d\xi. \quad (4)$$

**Односторонняя краевая задача.** Далее будем обозначать  $x = (x_1, \tilde{x})$ ,  $\xi = (\xi_1, \tilde{\xi})$ . Если в преобразовании Фурье (2)  $Q = \{\pm x_1 < 0\}$ , то функция  $\hat{y}(\xi, \omega)$  аналитична и по  $\xi_1$  в верхней (при  $x_1 < 0$ ) или в нижней (при  $x_1 > 0$ ) полуплоскости и

$$\widehat{\partial y / \partial t} = -i\omega \hat{y} - \frac{\hat{y}_0(\xi)}{2\pi}, \quad \widehat{\partial y / \partial x_1} = i\xi_1 \hat{y} \pm \frac{\hat{y}_\Gamma(\tilde{\xi}, \omega)}{2\pi}, \quad \pm x_1 < 0,$$

где

$$\hat{y}_\Gamma(\tilde{\xi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m-1} \\ t > 0}} y(0, \tilde{x}, t) e^{i(\omega t - \tilde{\xi} \tilde{x})} d\tilde{x} dt$$

есть преобразование граничного значения искомой функции при  $x_1 = 0$ . Система дифференциальных уравнений (1) принимает вид

$$\hat{B}\hat{y} = (\hat{y}_0(\xi) \mp A_1 \hat{y}_\Gamma(\tilde{\xi}, \omega)) / (2\pi i). \quad (5)$$

Легко видеть, что при  $\xi_1 \rightarrow \infty$   $\omega_j(\xi_1, \tilde{\xi}) / \xi_1 \rightarrow c_j = \text{const}$ , где  $c_j$  – собственные числа матрицы  $A_1$ . Пусть собственные числа  $A_1$  отличны от нуля, что соответствует, в частности, не звуковому (до- или сверхзвуковому) случаю для уравнений Эйлера или некритическому случаю для уравнений мелкой воды. Тогда функции  $\omega_j(\xi_1, \tilde{\xi})$  имеют обратные  $\xi_1 = \xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и матрица  $\hat{B}^{-1}$  имеет вид

$$\hat{B}^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_{0j}(\xi)}{\omega_j(\xi) - \omega} = \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_j(\tilde{\xi}, \omega)}{\xi_1 - \xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)},$$

$$\Omega_j(\tilde{\xi}, \omega) = \Omega_{0j}(\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)) \frac{d\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)}{d\omega} = e_j(\tilde{\xi}, \omega) \otimes g_j(\tilde{\xi}, \omega), \quad j = \overline{1, n}.$$

Здесь векторы  $e_j, g_j, j = \overline{1, n}$  также образуют биортогональный базис с матрицей  $A_1$

$$g_j A_1 e_k = \delta_{jk} \implies \sum_{j=1}^n e_j \otimes g_j A_1 = E.$$

Пусть при каждом  $\omega$  в верхней полуплоскости имеется ровно  $k \leq n$  корней  $\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)$  в области аналитичности (т.е.  $\text{Im} \xi_j^1 > 0$  при  $x_1 < 0$  и  $\text{Im} \xi_j^1 < 0$  при  $x_1 > 0$ ). Тогда на правую часть системы (5) имеется  $k$  условий разрешимости. Если использовать разложение начальных данных (3) и разложить граничное значение  $\hat{y}_\Gamma$  по базису  $e$ :

$$\hat{y}_\Gamma(\tilde{\xi}, \omega) = \sum_{j=1}^n \beta_j(\tilde{\xi}, \omega) e_j(\tilde{\xi}, \omega); \quad \beta_j = g_j A_1 \hat{y}_\Gamma, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

то условия разрешимости примут вид

$$\beta_j(\tilde{\xi}, \omega) = \pm \beta_{0j}(\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega), \tilde{\xi}), \quad j = \overline{1, k}; \quad \pm x_1 < 0.$$

Эти условия позволяют выразить часть слагаемых в граничном разложении (6) через начальные данные. Это определяет постановку начально-краевой задачи: если  $k = n$ , то граничное условие полностью выражается через начальное и достаточно задать только начальные данные; если  $0 < k < n$ , то следует дополнительно задавать (произвольно) часть слагаемых в граничном разложении:  $\sum \beta_j e_j, j = k+1, n$ ; наконец если  $k = 0$ , то следует полностью задавать граничные значения искомым величин. В итоге решение начально-краевой задачи имеет вид

$$y(x, t) = y^0(x, t) + \int_{\substack{\omega \in \mathbb{R} \\ \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{m-1}}} \sum_{j=k+1}^n \beta_j(\tilde{\xi}, \omega) e_j(\tilde{\xi}, \omega) e^{i(\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)x - \omega t)} d\omega d\tilde{\xi} = y^0(x, t) + y^\Gamma(x, t),$$

где  $y^0(x, t)$  есть решение вида (4) (начальное решение, вызвано только начальными данными при нулевых дополнительных граничных), а  $y^\Gamma(x, t)$  есть решение, вызванное только дополнительными граничными значениями, при нулевых начальных данных.

Подобные представления решений, в частности, используются при построении решений задач об ударной волне, см. например [3].

**Двусторонняя краевая задача.** В преобразовании Фурье возьмем  $Q = \{x_1 \in [0, L]\}$ . Тогда функция  $\hat{y}(\xi, \omega)$  будет целой функцией по переменной  $\xi_1$  и

$$\widehat{\partial y / \partial t} = -i\omega \hat{y} - \frac{\hat{y}_0(\xi)}{2\pi}, \quad \widehat{\partial y / \partial x_1} = i\xi_1 \hat{y} + \frac{\hat{y}_2(\tilde{\xi}, \omega) e^{-i\xi L} - \hat{y}_1(\tilde{\xi}, \omega)}{2\pi},$$

где

$$\hat{y}_1(\tilde{\xi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m-1} \\ t > 0}} y(0, \tilde{x}, t) e^{i(\omega t - \tilde{\xi} \tilde{x})} d\tilde{x} dt, \quad \hat{y}_2(\tilde{\xi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\substack{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m-1} \\ t > 0}} y(L, \tilde{x}, t) e^{i(\omega t - \tilde{\xi} \tilde{x})} d\tilde{x} dt$$

есть преобразования граничных значений искомой функции при  $x_1 = 0, L$ . Система дифференциальных уравнений (1) принимает вид

$$\hat{B}\hat{y} = \frac{\hat{y}_0(\xi) + A_1(\hat{y}_1(\tilde{\xi}, \omega) - \hat{y}_2(\tilde{\xi}, \omega)e^{-i\xi L})}{2\pi i}, \quad (7)$$

и теперь уже все корни  $\xi_j^1, j = \overline{1, n}$ , дают условия разрешимости. Если использовать для граничных значений  $\hat{y}_{1,2}$  разложения (6)  $y_{1,2} = \sum \beta_j^{1,2} e_j$ , то условия разрешимости примут вид

$$\beta_{0j}(\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega), \tilde{\xi}) + \beta_j^1(\tilde{\xi}, \omega) - \beta_j^2(\tilde{\xi}, \omega)e^{-iL\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)} = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (8)$$

что позволяет, в принципе, выразить, например, все граничные значения при  $x = L$  (т.е.  $\beta_j^2$ ) через граничные при  $x = 0$  ( $\beta_j^1$ ) и начальные ( $\beta_{0j}$ ), или наоборот, или, наконец, выразить граничные значения через начальные и  $k$  слагаемых в разложении (6) граничного значения  $y_1$  при  $x = 0$  и  $n - k$  оставшихся слагаемых в разложении (6) граничного значения  $y_2$  при  $x = L$ . Следует однако иметь в виду, что коэффициенты  $\beta_j(\tilde{\xi}, \omega)$  должны быть ограничены по  $\omega$  в верхней полуплоскости, т.е. используя равенства (8), следует учитывать асимптотику  $\xi_j^1$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , которая (см. ранее) определяется собственными числами  $c_j, j = \overline{1, n}$  матрицы  $A_1: \xi_j^1 \sim \omega/c_j$ .

В любом случае решение системы (7) легко выражается через начальные и заданные граничные значения, так, задавая все граничные значения при  $x = 0$  (т.е. все коэффициенты  $\beta_j^1, j = \overline{1, n}$ ), получим решение

$$y(x, t) = y^0(x, t) + \int_{\substack{\omega \in \mathbb{R} \\ \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{m-1}}} \sum_{j=1}^n \beta_j^1(\tilde{\xi}, \omega) e_j(\tilde{\xi}, \omega) e^{i(\xi_j^1(\tilde{\xi}, \omega)x - \omega t)} d\omega d\tilde{\xi}.$$

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика* / Издание 4-е, стереотипное. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
2. Richard G.L., Gavriluk S.L. *The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows* // J. Fluid Mech. – 2013. – V. 725. – P. 492-521.
3. Semenکو E.V. *Linear problem of the shock wave disturbance in a non-classical case* // Physics of Fluids. – 2017. – V. 29. – P. 066101.

## CONSTRUCTING SOLUTIONS TO INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

E.V. Semenکو, T.I. Semenکو

*A method of constructing solutions to initial and boundary value problems for systems of differential equations with constant coefficients, in plane of a special Fourier transform, is described. Actually, it is the well-known method of characteristics, but modified in such a way, that it allows to construct solutions of the mentioned problems with the help of complicated algebraic formulas. This strongly simplified analysis of solutions, especially, construction of discontinues solutions of similar problems.*  
 Keywords: system of differential equations, initial and boundary value problem, constant coefficients, Fourier transform, analytic functions.

УДК 531/534

## ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРА СТРУКТУРЫ ПО ДАННЫМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Е.В. Семенова<sup>1</sup>, Д.А. Мухин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *elena.semionova2011@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> *dimonchik.2342@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе рассматривается метод построения тензора структуры для анализа ортотропии материалов, в том числе биологического происхождения. Данный тензор позволяет количественно описать структуру, включая степень ее анизотропии.*

**Ключевые слова:** тензор структуры, трабекулярная (губчатая) костная ткань, эллипсоид структуры.

Как известно, существует множество неоднородных материалов, имеющих сложную внутреннюю структуру. К ним можно отнести и ряд объектов естественного биологического происхождения, например, таких как кость. Свойства этих материалов напрямую зависят от их строения, структуры. В частности, трабекулярная (губчатая) костная ткань является неоднородной пористой анизотропной структурой. Её механические свойства также анизотропны и в значительной мере определяются её внутренней архитектурой.

Для количественного описания структуры таких материалов используют тензор структуры. Главные значения этого тензора позволяют охарактеризовать распределение материала вдоль главных направлений.

В работе в качестве исходных данных были рассмотрены данные компьютерной томографии дискретизированные на кубы. Для построения тензора структуры был применен метод среднего расстояния (MCP) между порами.

Был определен порог бинаризации, разделяющий две условные среды, одна из которых представляет кость, а вторая – воздух. MCP метод позволяет произвести некоторую оценку распределения одного вещества в другом, в результате может быть получено облако точек, которое может быть аппроксимировано эллипсоидом. Коэффициенты квадратичной формы, представленные в матричном виде, есть тензор анизотропии, из которого однозначным образом может быть получен искомый тензор структуры.

Таким образом в работе рассмотрен подход к описанию двухфазной среды в терминах MCP в случае, когда среда описана массивом, полученным методами КТ. Были построены и аппроксимированы эллипсоидами распределения, характеризующие среду. Результатом работы являются полученные тензоры структуры.

### Литература

1. Shertzer R.H. *Fabric tensors and effective properties of granular materials with application to snow*. – Montana State University, 2011. – P. 24-29.
2. Souzanchi M.F., Palacio-Mancheno P.E., Borisov Yu.A., Cardoso L., Cowin S. *Microarchitecture and Bone Quality in the Human Calcaneus: Local Variations of Fabric Anisotropy* // Journal of bone and mineral research: the official journal of the American Society for Bone and Mineral Research. – 2012. – P. 2562-2572.



3. Киченко А.А., Тверье В.М., Няшин Ю.И. *Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани* // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 4. – С. 78–93.
4. Фурман Я.А., Юрьев А.Н., Яншин В.В. *Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений*. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. – 248 с.

## FABRIC TENSOR CALCULATION ACCORDING TO CT DATA

E.V. Semenova, D.A. Mukhin

*This paper considers a method for constructing a fabric tensor for the analysis of orthotropy of materials, including materials of biological origin. This tensor allows one to quantitatively describe the structure, including the degree of its anisotropy.*

Keywords: fabric tensor, trabecular bone tissue, ellipsoid of structure.

УДК 517.538.52+517.538.53

### О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ

М.В. Сидорцов<sup>1</sup>, Е.П. Кечко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> sidortsov@mail.ru; Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

<sup>2</sup> ekechko@gmail.com; Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

*В работе найдена скорость сходимости квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода системы  $\{ {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) \}_{j=1}^2$ , состоящей из двух вырожденных гипергеометрических функций, в случае, когда  $\{\lambda_j\}_{j=1}^2$  – произвольные различные комплексные числа, а  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  и, в частности,  $\gamma$  может равняться 1. Доказанные теоремы дополняют и обобщают результаты, полученные ранее другими авторами.*

**Ключевые слова:** интегралы Эрмита, многочлены Эрмита – Паде, ряды Тейлора, аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства.

Рассмотрим набор целых функций

$$F_\gamma^j(z) = {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

где  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ ,  $(\gamma)_0 = 1$ ,  $(\gamma)_p = \gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + p - 1)$  – символ Похгаммера, а  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – различные комплексные числа, не равные нулю (при  $k = 1$  считаем, что  $\lambda_1 = 1$ ).

Ряды вида (1) принято называть вырожденными гипергеометрическими рядами, а их суммы – вырожденными гипергеометрическими функциями. Определим вектор-функцию  $\vec{F}_\gamma = \{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z), \dots, F_\gamma^k(z)\}$ . Если  $\gamma = 1$ , то вектор  $\vec{F}_1$  является упорядоченным набором экспонент  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ .

Для вектор-функции  $\vec{f} = \{f_j(z)\}_{j=1}^k$  с голоморфными в нуле координатными функциями  $f_j(z)$ , существуют (см. [1, гл. 4, § 1]) многочлены  $Q_m(z) = Q_m(z; \vec{f})$ ,

$P_{n_j}^j(z) = P_{n_j}^j(z; \vec{f})$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ;  $\deg Q_m \leq m$ ,  $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$ , для которых в некоторой окрестности нуля

$$R_{n,m}^j(z) = R_{n,m}^j(z; \vec{f}) = Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots \quad (2)$$

Здесь и далее  $m = \sum_{i=1}^k m_i$ ,  $n_j = n + m - m_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , а  $n, m_1, \dots, m_k$  – целые неотрицательные числа. В частности, если  $k = 1$ , то  $\vec{f}$  является функцией  $f(z) := f_1(z)$ , соответствующие многочлены  $Q_m(z)$ ,  $P_n(z) := P_n^1(z)$  определяются с точностью до мультипликативной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию  $\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z, f) = P_n(z)/Q_m(z)$ , которую называют *аппроксимацией Паде* функции  $f$ . При  $k \geq 2$  дроби

$$\pi_{n_j,m}^j(z) = \pi_{n_j,m}^j(z; \vec{f}) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

условиями (2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае, если вектор  $\vec{\pi}_{n,m} = \vec{\pi}_{n,m}(\vec{f}) = \{\pi_{n_j,m}^j(z)\}_{j=1}^k$  определяется однозначно, то его координатные функции называются *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода (совместными аппроксимациями Паде)*, а многочлены  $Q_m(z)$ ,  $P_{n_j}^j(z)$  – *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода* для  $\vec{f} = \{f_j(z)\}_{j=1}^k$ . Диагональному случаю соответствует набор индексов при  $n = m_1 = \dots = m_k$ .

Вектор  $\vec{\pi}_{n,m}$  определяется единственным образом, например, для совершенных систем функций  $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$  (см. [1, гл. 4, § 1]). В частности, если  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – различные не равные нулю комплексные числа, то система экспоненциальных функций  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$  является совершенной.

В данной работе при  $k = 2$  получен ряд новых результатов, описывающих асимптотическое поведение аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода вектор-функции  $\vec{F}_\gamma$  при произвольном комплексном  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  и, в частности, при  $\gamma = 1$ . Следующие теоремы дают ответ о скорости сходимости аппроксимаций в рассматриваемом случае и тем самым дополняют результаты полученные О. Перроном, А. И. Аптекаревым, ван Россумом, Де Брюеном, Браессом, А. П. Старовойтовым (подробнее см. [2], [3]).

**Теорема 1.** Пусть  $m_2 = n$ ,  $m = n + m_1$ ,  $n_1 = 2n$ ,  $n_2 = n + m_1$ , где  $n, m_1$  – произвольные целые неотрицательные числа, а  $\pi_{n_j,m}^j(z; \vec{F}_1)$ ,  $j = 1, 2$  – аппроксимации Эрмита–Паде набора из двух экспонент  $\{e^z, e^{2z}\}$ . Тогда для любого комплексного  $z$  при  $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{2n, n+m_1}^1(z; \vec{F}_1) &= \\ &= (-1)^m e^z \frac{z^{2n+m_1+1}}{2 \cdot (2n+m_1)!} B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) e^{\theta(n, m_1)z} (1 + o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{n+m_1, n+m_1}^2(z; \vec{F}_1) &= (-1)^m e^{2z} \frac{z^{2n+m_1+1}}{2 \cdot (2n+m_1)!} \times \\ &\times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) \left\{ e^{\theta(n, m_1)z} + (-1)^{m_1} e^{-\theta(n, m_1)z} \right\} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где  $\theta(n, m_1) = \sqrt{m_1/(2n + m_1)}$ , если  $m_1 \rightarrow +\infty$ ;  $\theta(n, m_1) = \frac{\Gamma((m_1+2)/2)}{\Gamma((m_1+1)/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ , если  $m_1$  – ограничено;  $B(u; v)$  – бета-функция Эйлера, а оценка  $o(1)$  равномерна по всем  $|z| \leq L$ . Здесь и далее  $L, L_1, \dots$  – положительные постоянные.

**Теорема 2.** Пусть  $n, m_1, m_2$  – целые неотрицательные числа, а рациональные дроби  $\pi_{n_j, m}^j(z; \vec{F}_\gamma)$ ,  $j = 1, 2$  являются аппроксимациями Эрмита–Паде вектор-функции  $\vec{F}_\gamma = \{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z)\}$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n)/\sqrt{n} = 0$ , то для любого  $z$  равномерно по всем  $m$ ,  $0 \leq m \leq m(n)$ , при  $n \rightarrow +\infty$

$$F_\gamma^1(z) - \pi_{n_1, m}^1(z; \vec{F}_\gamma) = (-1)^m \frac{m_1! (\gamma)_n (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m_1+1}} (1 + o(1)),$$

$$F_\gamma^2(z) - \pi_{n_2, m}^2(z; \vec{F}_\gamma) = (-1)^m \frac{m_2! (\gamma)_n (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m_2+1}} (1 + o(1)),$$

где оценка  $o(1)$  равномерна по всем  $|z| \leq L$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф18М–025).

## Литература

1. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
2. Старовойтов А.П. *Аппроксимации Эрмита–Паде функций Миттаг–Леффлера* // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.
3. Сидорцов М.В., Драпеза А.А., Старовойтов А.П. *Скорость сходимости квадратичных аппроксимаций Эрмита–Паде вырожденных гипергеометрических функций* // Проблемы физики, математики, техники. – 2018. – № 1(34). – С. 71–78.

## ABOUT SPEED OF CONVERGENCE OF QUADRATIC HERMITE – PADÉ APPROXIMATIONS

M.V. Sidortsov, E.P. Kechko

*In this work, we found the speed of convergence (including non-diagonal case) of quadratic Hermite-Padé approximations the system of the second kind  $\{ {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) \}_{j=1}^2$ , that consists of two degenerate hypergeometric functions; here  $\{\lambda_j\}_{j=1}^2$  are arbitrary distinct complex numbers, and  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  and, in particular,  $\gamma$  can be equal to 1. The proved theorems supplement and generalize some results obtained earlier by other authors.*

Keywords: Hermite integrals, Hermite-Padé polynomials, Taylor series, Hermite-Padé approximations, asymptotic equality.

УДК 519.7, 512.581

## ОБ ОДНОЙ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ НА ПЛАТФОРМЕ СКРЕЩЕННЫХ МОДУЛЕЙ

О.П. Соболев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> o.sobolev94@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной статье рассмотрена модификация цифровой подписи Wang и Ни. В качестве криптографической платформы использована платформа скрещенных модулей.

**Ключевые слова:** 2-категории, алгебраическая криптография, скрещенные модули.

В работе [2] был построен 2-категорный аналог цифровой подписи, основанной на задаче извлечения корня в алгебре кватернионов [3]. Известно, что в частном случае, когда 2-категория является 2-группой, это понятие эквивалентно понятию скрещенного модуля. Ниже будет показано, как выглядит построение в [3] цифровой подписи на языке скрещенных модулей. Информацию о 2-категориях можно найти в [4], [5].

**Определение** 2-группой называется 2-категория  $\mathcal{K}$ , с одним объектом  $\mathcal{X}$ , с множеством 1-стрелок  $\mathcal{K}_0$ , которое образует группу относительно композиции. В частности, все 1-стрелки имеют обратные. Определено семейство  $\mathcal{K}_1$  2-стрелок, которые изображаются следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & X \\ & g & \end{array}$$

Для вертикальных суперпозиций:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & X \\ & \begin{array}{c} g \\ \Downarrow \beta \\ h \end{array} & \\ & h & \end{array}$$

выполняются обычные категорные свойства. Кроме того, определена горизонтальная композиция:

$$\begin{array}{ccc} X & \begin{array}{c} f \\ \Downarrow \alpha \\ h \end{array} & X \\ & & \begin{array}{c} f \\ \Downarrow \beta \\ h \end{array} & X \sim X & \begin{array}{c} f_2 f_1 \\ \Downarrow \alpha_2 \circ \alpha_1 \\ g_2 g_1 \end{array} & X \end{array}$$

и относительно этой композиции  $\mathcal{K}_1$  является группой.

Далее приведем определение скрещенного модуля:

**Определение** Скрещенный модуль  $\mathcal{X}$  — это четверка  $(G, H, \alpha, \tau)$ , где  $G, H$  — группы,  $\tau, \alpha$  — гомоморфизмы, такие что:

$$\alpha(\tau(h), h') = hh'h^{-1}$$

Введем определение полупрямого произведения групп возникающее из структуры скрещенного модуля.

**Определение** Пусть  $\mathcal{X} = (G, H, \alpha, \tau)$  скрещенный модуль, обозначим полупрямое произведение как  $H \times G = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$  операцию со следующими свой-

ствами:

$$g_1 g_2 h = g_1 (g_2 h), \quad 1 h = h, \quad g (h_1 h_2) = g h_1 g h_2, \quad g 1 = 1.$$

Умножение задается следующим образом:

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \cdot g_1 h_2, g_1 g_2)$$

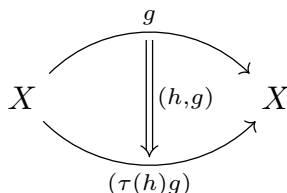
В статье [6] показана эквивалентность понятий 2-группы и скрещенного модуля.

Далее осуществим модификацию цифровой подписи Wang и Hu, используя алгебраическую платформу скрещенных модулей.

Опишем обозначения, дан скрещенный модуль  $\mathcal{X} = (G, H, \tau : H \rightarrow G, G \times H \rightarrow H)$ .  $\mathcal{X}$  является 2-группой: объект  $X$ , 1-морфизмы – элементы группы  $G$ :

$$X \xrightarrow{f} X, \quad f \in G$$

2-морфизмы – элементы  $H \times G$ :



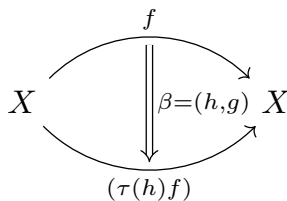
$$h \in H, g \in G.$$

Вначале опишем используемые обозначения,  $F$  – открытая хэш-функция,  $k$  – фиксированное число  $F : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^k, k \in \mathbb{Z}, e \in \mathbb{Z}$  – открытый ключ,  $m$  – сообщение для подписи, в виде битовой строки.

Генерация ключей:

Секретный ключ состоит из двух частей:

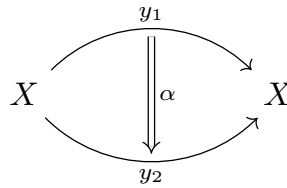
1. Выбирается случайным образом элемент  $f \in G : f \rightarrow \tau(h)f$ .
2. Выбирается случайным образом 2-морфизм  $\beta = (h, g)$ .



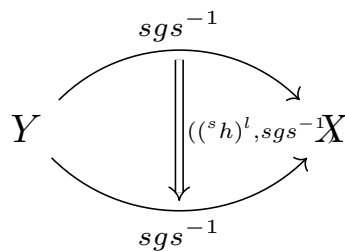
3. Выбирается элемент  $r \in G$ , часть секретного ключа.
4. Вычисляется открытый ключ  $\alpha = r \beta^e r^{-1} = ((r h)^e, r g r^{-1}) = (y_1, y_2)$   
1-морфизм  $r \beta^e r^{-1}$  общеизвестен, но  $r$  и  $\beta$  части секретного ключа.

Алгоритм подписи:

1.  $l = F(m)$



2. Случайным образом выбирается  $s \in G$
3. Вычисляется первая часть подписи  $t = sr^{-1}$ :
4. Вычисляется вторая часть подписи  $v = sb^l s^{-1} = ((^s h)^l, sgs^{-1}) = (\sigma_1, \sigma_2)$ . Это 2-морфизм:



Подписью документа  $m$  является тройка  $(t, \sigma_1, \sigma_2)$ . Элементы  $r, h, g$  – секретны.

*Алгоритм проверки подписи:*

Проверяющий знает  $m, H, e, \alpha, t$ .

1. Проверяющий вычисляет  $l = F(m)$ .
2. Вычисляет  $(\sigma_1^e, \sigma_2) = v^e$  и  $((^t y_1)^l, ^t y_2) = t\alpha^l t^{-1}$
3. Проверяет, выполняются ли равенства:  $\sigma_1^e = (^t y_1)^l, \sigma_2 = ^t y_2$

В случае выполнения, подпись принимается.  $t\alpha^l t^{-1} = \epsilon_t \circ \alpha^l \circ \epsilon_{t^{-1}} = ({}^t({}^r h)^{el}, {}^{tr}gr^{-1}t^{-1}) = ({}^{tr}h)^{el}, {}^{tr}gr^{-1}t^{-1}$ . Так как  $s = tr$ :  $(^s h)^{le} \equiv ({}^{tr}h)^{le}, sgs^{-1} \equiv {}^{tr}gr^{-1}t^{-1}$ .

## Литература

1. Соболев О.П. *Об одной схеме цифровой подписи на платформе 2-категорий* // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 55. Лобачевские чтения – 2017: материалы Шестнадцатой молодежной научной школы-конференции. – Казань: Из-во Казан. ун-та, 2017. – С. 120–126.
2. Baocang Wang, Yupu Hu *Signature Scheme Using the Root Extraction Problem on Quaternions* // Journal of Applied Mathematics. – 2014. – Т. 2014, № 819182. – Р. 7.
3. Соболев О.П. *О некоторых цифровых подписях на платформах алгеброидов и 2-категорий* // Магистерская диссертация. – Казань: КФУ, 2018. – 44 с.
4. Маклейн С. *Категории для работающего математика*. – М.: Физматлит, 2004. – 352 с.
5. Кондратьев Г. *Категории и некоторые их приложения : монография*. – Научная мысль. – ИНФРА-М, 2017. – 174 с.
6. Porst S.-S. *Strict 2-groups are crossed modules*. – 2009. – <https://arxiv.org/abs/0812.1464>

## ABOUT ONE SCHEME OF DIGITAL SIGNATURE ON THE PLATFORM OF CROSSED MODULES

O.P. Sobolev

*In this paper, the modification of the Wang and Hu digital signature is considered. The crossed modules are used as a cryptographic platform.*

Keywords: 2-categories, algebraic cryptography, crossed modules.

УДК 517.17+517.51

**О МНОЖЕСТВЕ ПЕРИОДОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ  
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**Г.К. Соколова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 98gal@mail.ru; Иркутский государственный университет, Институт математики, экономики и информатики

*В представляемой работе изучается свойство периодичности функций нескольких действительных переменных. Рассматривается множество периодов периодической функции с учётом вырожденного случая периодичности — постоянства функции. Описана структура этого множества.*

**Ключевые слова:** периодическая функция многих действительных переменных, основной период в данном направлении,  $m$ -мерная решётка.

Математическое описание самоподобных объектов и их свойств, а также различных процессов и явлений, повторяющихся во времени и пространстве, приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. В частности, оно возникает в зонной теории твёрдого тела [1], когда на волновую функцию  $\psi$ , задающую состояние кристалла, накладывают условия Борна–Кармана

$$\psi(\bar{r} + N_i \bar{a}_i) = \psi(\bar{r}), \quad i = 1, \dots, d,$$

где  $\bar{a}_i$  — элементарные трансляционные векторы решётки Бравэ,  $d$  — её размерность,  $N_i$  — целые числа. Предполагается, что  $\psi$  имеет основные периоды  $\bar{a}_i$ , а всякий её период является линейной комбинацией векторов  $\bar{a}_i$  с целыми коэффициентами. Эти допущения связаны со спецификой рассматриваемой задачи и следуют из структуры множества, на котором задана волновая функция, а не из самого нелокального свойства периодичности.

Периодические функции сохранили актуальность как объекты исследования [2–7]. С одной стороны, это обусловлено их прикладной значимостью. В то же время интерес к ним вызван самой математической наукой. Многие проблемы теории периодических функций даже одной действительной переменной решены недавно (см., например, статьи [3, 4, 7]), а некоторые из них, по всей видимости, не решены до настоящего времени. В данной работе представлены результаты исследования структуры множества периодов периодической функции нескольких действительных аргументов. Приведены аналоги теорем, которые справедливы в одномерном случае.

**Определение 1.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется периодической с периодом  $\bar{T}$ , если существует вектор  $\bar{T} \neq \bar{0}$  такой, что для всех  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  выполняется  $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$ .

Из определения 1 следует, что, если  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  — периоды функции  $f$ , то для любых  $k, m \in \mathbb{Z}$  таких, что  $k^2 + m^2 \neq 0$ , вектор  $k\bar{T}_1 + m\bar{T}_2$  также является периодом этой функции.

**Определение 2.** Пусть функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является периодической с периодом  $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathcal{T}}$ . Период  $\bar{T}_0$  наименьшего модуля, сонаправленный с вектором  $\bar{T}$ , назовём основным периодом функции  $f$  в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$ .

Рассмотрим теперь множество  $n$ -мерных прямых  $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$  с направляющим вектором  $\bar{T}$ , где  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$  — радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой  $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ . Выберем эту точку такой, что  $\langle \bar{a}, \bar{T} \rangle = 0$ , тогда соответствие  $\bar{a} \rightarrow \ell_{\bar{T}}(\bar{a})$  будет взаимно однозначным. Вдоль каждой такой прямой данная функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  принимает значения

$$f(\bar{r})|_{\bar{r} \in \ell_{\bar{T}}(\bar{a})} = f(\bar{a} + t\bar{\mathcal{T}}), \quad (1)$$

т. е. является функцией одной переменной  $t \in \mathbb{R}$ . Следующие теоремы доказаны в [8].

**Теорема 1.** Если периодическая с периодом  $\bar{T}$  функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой  $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ , то она имеет основной период в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$ .

**Теорема 2.** Если периодическая функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеет основной период  $\bar{T}_0$  в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$ , то любой её период  $\bar{T}$ , коллинеарный  $\bar{\mathcal{T}}$ , имеет вид  $\bar{T} = k\bar{T}_0$ , где  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Таким образом, множеством периодов периодической функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  может быть решётка  $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m)$  размерности  $m$  или ранга  $m$ , т. е. совокупность всех возможных нетривиальных линейных комбинаций с целыми коэффициентами  $m$  линейно независимых  $n$ -мерных векторов  $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$ , называемых базисными или порождающими векторами решётки. Как показано в работе [9], эти векторы являются основными периодами данной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в своих направлениях, но не всякие основные периоды порождают решётку, т. е. обратное неверно. В качестве примера приведем функцию  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $(x, y, z) \rightarrow \sin x \sin y + z^2$ , которая имеет двумерную решётку периодов, порождённую базисными векторными периодами  $\bar{T}_1\{\pi; \pi; 0\}$  и  $\bar{T}_2\{-\pi; \pi; 0\}$ , основными в направлениях  $\bar{\mathcal{T}}_1\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\}$  и  $\bar{\mathcal{T}}_2\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\}$ . Однако пара векторов  $\bar{T}_1\{2\pi; 0; 0\}$  и  $\bar{T}_2\{0; 2\pi; 0\}$ , основных периодов данной функции в направлениях ортов  $\bar{i}$  и  $\bar{j}$  соответственно, не образует базис этой решётки.

Приведём некоторые полезные сведения о решётках из монографии [10]. Известно, что базис решётки определяется неоднозначно, и любой из них строится на векторах, образующих фундаментальный параллелепипед, т. е. параллелепипед наименьшей меры Жордана. Её величина называется определителем решётки  $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m)$  и равна

$$\det \Lambda = \sqrt{\det G(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m)},$$

где  $G(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m) = \{\langle \bar{T}_i, \bar{T}_j \rangle\}_{i,j=1,\dots,m}$  — матрица Грама системы линейно независимых векторов  $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m$ . Также вводится в рассмотрение порождающая данную



решётку  $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_m)$  матрица  $T$ , столбцами которой являются базисные векторы решётки. В этом случае  $\det \Lambda = \sqrt{T \cdot T^t}$ . Величина  $\det \Lambda$  инвариантна относительно выбора базиса, т. е. относительно любого линейного унитарного преобразования  $U: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  решётки.

**Определение 3.** Функцию  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , постоянную вдоль каждой прямой  $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ , называют постоянной в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$ .

Справедлива следующая теорема, доказанная в работе [11].

**Теорема 3.** Если функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  постоянна в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$ , то она является периодической с периодом  $\alpha \bar{\mathcal{T}}$  при любом  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Из приведённых теорем 1, 2 и 3 следует, что, если функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является периодической с некоторым периодом  $\bar{T}$ , то она либо постоянна в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$ , либо имеет нетривиальный характер периодичности, и её основной период в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$  есть вектор  $\bar{T}_0 = \frac{\bar{T}}{k}$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Постоянство нетрудно проверить, а именно, при каждом фиксированном  $\bar{a}$  функция (1) не будет зависеть от  $t$ . Заметим также, что, если функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является постоянной вдоль каждого из линейно независимых направлений  $\bar{\mathcal{T}}_1, \bar{\mathcal{T}}_2, \dots, \bar{\mathcal{T}}_m$ , где  $m \leq n$ , то множество её периодов совпадает с линейной оболочкой системы векторов  $\bar{\mathcal{T}}_1, \bar{\mathcal{T}}_2, \dots, \bar{\mathcal{T}}_m$ . В случае  $m = n$  данная функция окажется тождественно постоянной.

Таким образом, множество  $P_f$  периодов периодической функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  состоит из векторов

$$\bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathcal{T}}_k,$$

где  $\bar{T}_k$  — базисные векторы  $m_1$ -мерной решётки,  $\bar{\mathcal{T}}_k$  — направления, вдоль которых данная функция постоянна, числа  $n_k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  одновременно не равны в нулю, и  $m_1 + m_2 \leq n$ . Каждый период  $\bar{T}$  периодической функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  однозначно представляется в указанном виде при любых фиксированных базисах  $m_1$ -мерной решётки и  $m_2$ -мерного подпространства пространства  $\mathbb{R}^n$ . Согласно концепции прямой суммы множеств, наделённых структурой аддитивной абелевой группы, справедливо представление

$$P_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \text{span}(\bar{\mathcal{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+2}, \dots, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2}).$$

Например, в трёхмерии ( $n = 3$ ) возможными множествами периодов функции  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  являются следующие: всё  $\mathbb{R}^3$  ( $m_1 = 0, m_2 = 3$ ), плоскость ( $m_1 = 0, m_2 = 2$ ), прямая ( $m_1 = 0, m_2 = 1$ ), счётные семейства параллельных плоскостей ( $m_1 = 1, m_2 = 2$ ) или прямых ( $m_1 = 2, m_2 = 1$  и  $m_1 = 1, m_2 = 1$ ), одно-, двух- или трёхмерная решётка ( $m_1 = 1, 2, 3$  соответственно, а  $m_2 = 0$ ). Далее приведём ещё один результат из [11].

**Теорема 4.** Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — периодическая функция с основным периодом  $\bar{T}_0$  в данном направлении  $\bar{\mathcal{T}}$  и  $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — невырожденное линейное преобразование, тогда суперпозиция  $f \circ \mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является периодической функцией с основным периодом  $\mathcal{A}^{-1} \bar{T}_0$  в направлении  $\bar{\tau}$ , где  $\mathcal{A}^{-1} \bar{T}_0 = |\mathcal{A}^{-1} \bar{T}_0| \cdot \bar{\tau}$ .

Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  периодическая,  $\bar{T}_0$  — её основной период в направлении  $\bar{\mathcal{T}}$ , тогда суперпозицию  $f \circ \mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно сделать периодической с основным периодом  $|\bar{T}_0| \cdot \bar{e}_i$  в направлении орта  $\bar{e}_i$ , т. е. периодической с периодом  $|\bar{T}_0|$  по

переменной  $x_i$ . Для этого достаточно, чтобы в  $i$ -ом столбце матрицы  $A$  невырожденного линейного оператора  $\mathcal{A}$  находились компоненты вектора  $\vec{T}$ . Здесь и всюду далее  $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$  — классический базис Гамеля в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является постоянной в данном направлении  $\vec{T}$ , тогда суперпозицию  $f \circ \mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  аналогично можно сделать постоянной по  $x_i$ , т. е. не зависящей от данного аргумента. Для этого достаточно, чтобы в  $i$ -ом столбце матрицы  $A$  невырожденного линейного оператора  $\mathcal{A}$  был вектор  $\vec{T}$ . Таким образом, без ограничения общности множество  $P_f$  периодов произвольной периодической функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеет следующий канонический вид:

$$P_f = \Lambda(|\bar{T}_1| \cdot \bar{e}_1, |\bar{T}_2| \cdot \bar{e}_2, \dots, |\bar{T}_{m_1}| \cdot \bar{e}_{m_1}) \oplus \text{span}(\bar{e}_{m_1+1}, \bar{e}_{m_1+2}, \dots, \bar{e}_{m_1+m_2}).$$

Иными словами, всякую периодическую функцию  $n$  штук действительных переменных можно предполагать периодической по первым  $m_1$  переменным, постоянной по следующим  $m_2$  переменным и непериодической по остальным  $n - m_1 - m_2$  переменным.

Полученные результаты о структуре множества периодов периодической функции нескольких переменных в дальнейшем могут быть применены для исследования вопроса периодичности и нахождения множеств периодов суммы и произведения периодических функций нескольких переменных [12], а также их частных производных и интегралов с переменными пределами. Подобные задачи возникают в приложениях при построении периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных.

## Литература

1. Ashcroft N.W., Mermin N.D. *Solid State Physics*. – Philadelphia: Saunders College Publishing, 1976. – 826 p.
2. Negishi T. *On periodic decomposition of entire functions of several variables* // *Aequationes Math.* – 2014. – Vol. 88, № 1-2. – P. 1–34.
3. Mirotin A.R., Mirotin E.A. *On Sums and Products of Periodic Functions* // *Real Anal. Exchange*. – 2008. – Vol. 34, № 2. – P. 347–358.
4. Эвнин А.Ю. *Период суммы двух периодических функций* // *Вестн. Южно-Ур. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. Химия*. – 2005. – № 2. – С. 56–61.
5. Скриганов М.М. *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов* // *Труды МИАН СССР*. – 1985. – Т. 171. – С. 3–122.
6. Седлецкий А.М. *Разложение аналитической функции на сумму периодических* // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* – 1984. – Т. 48, № 4. – С. 833–853.
7. Fine N.J., Wilf H.S. *Uniqueness Theorems for Periodic Functions* // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1965. – Vol. 16, № 1. – P. 109–114.
8. Соколова Г.К., Орлов С.С. *Об основном периоде периодической функции нескольких переменных* // *Материалы междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018»*. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2018. – С. 312–315.
9. Соколова Г.К., Орлов С.С. *Об основных периодах периодической функции нескольких переменных* // *Материалы 19-й междунар. Саратовской зимн. шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения»*. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2018. – С. 294–297.

10. Conway J.H., Sloane N.J.A. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 706 p.
11. Orlov S.S., Sokolova G.K. *Periodic Functions of Several Real Variables* // *Surveys Appl. Industr. Math.* – 2018. – Vol. 25, № 1. – P. 50–51.
12. Соколова Г.К. *Периодичность суммы и произведения периодических функций нескольких переменных* // Сборник материалов Междунар. конф. «XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Секции 1–3. – Симферополь: Полипринт, 2018. – С. 28–31.

## ON THE SET OF PERIODS OF PERIODIC MULTIVARIABLE FUNCTION

G.K. Sokolova

*The article is devoted to the study of periodic functions of several real variables. We consider the set of periods of a periodic multivariable function taking into account the constancy of the function as a degenerate case of periodicity. The structure of this set is described.*

Keywords: periodic function of several real variables, basic period along a given unit vector, lattice of rank  $m$ .

УДК 517

## О ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ

Л.А. Суан<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [lahuan@ctu.edu.vn](mailto:lahuan@ctu.edu.vn); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В этом докладе мы предложим простое условие на аналитическую часть однолистного гармонического отображения из которого следует, что  $f \in H_p$  при  $0 < p < 1/3$ .*

**Ключевые слова:** гармонические отображения, однолистные функции, гармоническое пространство Харди, интегральные средние.

Пусть  $\mathcal{S}$  – класс функций  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ , голоморфных и однолистных в  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ ,  $\mathcal{A}$  – линейное пространство аналитических функций, определенных на  $\mathbb{D}$ , наделенное топологией локально равномерной сходимости. Пусть  $\mathcal{B}$  – класс функций  $\omega \in \mathcal{A}$  таких, что  $|\omega(z)| < 1$  при  $z \in \mathbb{D}$ , и  $\mathcal{B}_0 = \{\omega \in \mathcal{B} : \omega(0) = 0\}$ . Через  $\mathcal{S}_H$  обозначим класс гармонических отображений  $f = h + \bar{g}$  в  $\mathbb{D}$ , у которых  $g(0) = h(0) = h'(0) - 1 = 0$ . Нам также понадобятся класс  $\mathcal{S}_H^0 = \{f \in \mathcal{S}_H : f_{\bar{z}}(0) = 0\}$ . Пусть  $H_p$  (соответственно  $h_p$ ) обозначает пространство Харди порядка  $p$  ( $0 < p < \infty$ ) для аналитических (соответственно гармонических) функций.

**Лемма.** Пусть  $\Phi \in \mathcal{S}$  и  $\varphi \in \mathcal{B}_0$ . Тогда для любого  $p \in (2/7, 2)$  существует постоянная  $C$  такая, что

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\Phi'(re^{it})}{1 - \varphi(re^{it})} \right|^p dt \leq \frac{C |\log(1-r)|^{p/2}}{(1-r)^{4p-1}}.$$

**Теорема.** Предположим, что  $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^0$  и  $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\Phi'(z)}{h'(z)} - 1 \right| < 1, \text{ т.е., } \frac{h'(z)}{\Phi'(z)} < \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

для некоторого  $\Phi \in \mathcal{S}$ . Тогда имеют место следующие утверждения:

i)  $f \in h_p$  для всех  $p < 1/3$ .

ii)  $\int_{\mathbb{D}} (|h'(z)| + |g'(z)|)^p dx dy < +\infty$  для всех  $p < 1/2$ .

Работа выполнена в соавторстве с И. Р. Каюмовым и С. Поннусами.

## Литература

1. Abu-Muhanna Y., Lyzzaik A. *The boundary behaviour of harmonic univalent maps* // Pacific J. Math. – 1990. – Vol. 141, № 1. – P. 1–20.
2. Duren P.L. *Theory of  $H^p$  Spaces* // Pure and Applied Mathematics. – 1970. – Vol. 38. – 277 pp.
3. Feng J., MacGregor T.H. *Estimates of integral means of the derivatives of univalent functions* // J. Analyse Math. – 1976. – Vol. 29. – P. 203–231.
4. Kayumov I.R. *On Brennan's conjecture for a special class of functions* // Math. Notes. – 2005. – Vol. 78. – P. 498–502.

## ON HARMONIC MAPPINGS FROM THE HARDY SPACE

L.A. Xuan

*In this report, we propose a simple condition on the analytic part of univalent harmonic mappings from which it follows that  $f \in H_p$  for  $0 < p < 1/3$ .*

Keywords: harmonic, univalent functions, harmonic (analytic) Hardy spaces, integral means.

УДК 517.98

## О СВОЙСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕР НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОДПРОСТРАНСТВ УНИТАРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В.И. Сухарев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> v.sukharev8@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Изучаются свойства топологических мер на классах расщепляющих (ко)полных подпространств унитарного пространства.*

**Ключевые слова:** неполные унитарные пространства, расщепляющие подпространства, полные подпространства.

На классах подпространств унитарного пространства  $S$  представляет интерес рассмотрение ортомодулярных мер [1]. Пусть здесь и далее  $K(S)$ ,  $K \in \{C, E, F\}$  — класс (ко)полных, расщепляющих или ортозамкнутых подпространств. Ортомодулярной мерой на классе  $K(S)$  назовем функцию

$$m : K(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

такую, что для любого семейства попарно ортогональных подпространств  $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq K(S)$  выполняется импликация

$$\bigvee_{i \in I} M_i \in K(S) \Rightarrow m(\bigvee_{i \in I} M_i) = \sum_{i \in I} m(M_i).$$

Если не сказано иное, индексация будет вестись по множеству индексов произвольной мощности; линейную оболочку одного элемента  $x$  будем обозначать через  $[x]$ .

Через  $R_K(S)$  будем обозначать множество всех ненулевых ортомодулярных мер на классе  $K(S)$ .

Известно, что существование ненулевых мер на классах  $E(S)$  и  $F(S)$  влечет полноту пространства  $S$  [3, 4], а значит, в неполных унитарных пространствах нет нетривиальных ортомодулярных мер. Расширим, однако,  $R_K(S)$ : будем называть топологическими мерами на классе  $K(S)$  функции

$$\mu: K(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

такие, что для любого семейства попарно ортогональных подпространств  $\{M_i\} \subseteq K(S)$  выполняется импликация

$$\bigoplus_i M_i \in K(S) \Rightarrow \mu(\bigoplus_i M_i) = \sum_i \mu(M_i)$$

(здесь  $\bigoplus_i M_i = \text{cl}(\text{span}(\bigcup_i M_i))$ ). Множество всех ненулевых топологических мер на классе  $K(S)$  обозначим через  $T_K(S)$ .

**Утверждение.**  $R_K(S) \subsetneq T_K(S)$ ,  $K \in \{C, E, F\}$ .

Существование нетривиальных топологических мер допускается в рамках неполного унитарного пространства [2].

**Предложение 1.** Если для сепарабельного унитарного пространства  $S$  множество  $T_E(S) \neq \emptyset$ , то  $\forall x \in S$  существует мера  $\mu \in T_E(S)$  такая, что  $\mu([x]) > 0$ .

**Следствие.** В случае сепарабельного пространства  $S$  любая топологическая мера всякого расщепляющего подпространства  $M$  представима в виде суммы мер одномерных подпространств, являющихся линейными оболочками элементов какой-либо замкнутой ОНС подпространства  $M$ .

Показанные выше свойства переносятся на класс мер  $T_C(S)$ , однако, они приведены для сепарабельных унитарных пространств. Следующие свойства получены для топологических мер на классе  $C(S)$  в произвольных унитарных пространствах.

Разобьем (дизъюнктно) класс топологических мер  $T_C(S)$  на подклассы

$$T_C^0(S) = \{\mu \in T_C(S) \mid M \text{ полно} \Rightarrow \mu(M) = 0\},$$

$$T_C^1(S) = \{\mu \in T_C(S) \mid \exists \text{ полное } M \in C(S), M \neq \{0\} \text{ такое, что } \mu(M) \neq 0\}$$

и рассмотрим их отдельно.

**Предложение 2.** Если  $T_C^1(S) \neq \emptyset$ , то  $\forall x \in S$  существует мера  $\mu \in T_C^1(S)$  такая, что  $\mu([x]) > 0$ .

**Следствие.** Любая топологическая мера полного подпространства  $M$  предста-

вима в виде суммы мер одномерных подпространств, являющихся линейными оболочками произвольной максимальной ОНС подпространства  $M$ . Мера полного подпространства  $N$  представима в виде разности меры всего пространства и меры некоторого полного подпространства.

**Теорема 1.** Если  $T_C^0(S) \neq \emptyset$ , то  $S$  — неполное унитарное пространство. Топологическая мера из класса  $T_C^0(S)$  всего пространства равна мере его произвольного неполного подпространства.

**Замечание.** Если вместо вполне аддитивных топологических мер на  $C(S)$  рассматривать конечно-аддитивные меры ( $\bigoplus_{i=1}^n M_i \in C(S) \Rightarrow \mu(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \sum_{i=1}^n \mu(M_i)$ ), то, заменяя класс вполне аддитивных мер на соответствующий класс  $FT_C^0$  конечно-аддитивных мер с тем же свойством, теорему можем сформулировать в виде критерия:

**Теорема 2.**  $FT_C^0(S) \neq \emptyset \Leftrightarrow S$  — неполное унитарное пространство. Конечно-аддитивная мера из класса  $FT_C^0(S)$  всего пространства  $S$  равна мере его произвольного неполного подпространства.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-31-00218 мол\_а.

## Литература

1. Dvurecenskij A. *Gleason's theorem and its applications*. – Kluwer Academic Publishers, 1993.
2. Turilova E. *Measures on classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra* // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – V. 48, Is. 11. – P. 3083-3091.
3. Hamhalter J., Ptak P. *A completeness criterion for inner product spaces* // Bull. London Math. Soc. – 1987. – V. 19. – P. 259-263.
4. Dvurecenskij A., Pulmannova S. *A signed measure completeness criterion* // Letters Math. Phys. – 1989. – V. 17. – P. 253-261.

## PROPERTIES OF TOPOLOGICAL SIGNED MEASURES ON CERTAIN SUBSPACE CLASSES OF INNER PRODUCT SPACE

V.I. Sukharev

*The properties of topological signed measures on the classes of splitting (co)complete subspaces of the inner product space are studied.*

Keywords: inner product space, splitting subspaces, (co)complete subspaces.

УДК 512.55

## ГРУППА ВНЕШНИХ АВТОМОРФИЗМОВ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Д.Т. Тапкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [danil.tapkin@yandex.ru](mailto:danil.tapkin@yandex.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*Описана группа внешних автоморфизмов колец Крылова со значением в кольце целых чисел.*

**Ключевые слова:** кольца формальных матриц, кольца Крылова, автоморфизмы, группа внешних автоморфизмов.

Пусть  $R$  и  $S$  – кольца,  $M$  –  $R$ - $S$ -бимодуль, а  $N$  –  $S$ - $R$ -бимодуль. Пусть также даны бимодульные гомоморфизмы  $\varphi : M \otimes N \rightarrow R$  и  $\psi : N \otimes M \rightarrow S$ . Положим  $m \cdot n = \varphi(m \otimes n)$ ,  $n \cdot m = \psi(n \otimes m)$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ . Тогда если для всех  $m, m' \in M$  и  $n, n' \in N$  выполняются тождества  $(m \cdot n) \cdot m' = m \cdot (n \cdot m')$  и  $n \cdot (m \cdot n') = (n \cdot m) \cdot n'$ , то множество матриц  $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$  образует кольцо относительно естественных операций матричного сложения и умножения. Данное кольцо называют кольцом формальных матриц.

В статье [1] был рассмотрен частный случай колец формальных матриц, когда  $S = R$  и  $M = N = {}_R R_R$ . Было показано, что в этом случае существует элемент  $s \in C(R)$ , такой что  $m \cdot n = s(mn)$  и  $n \cdot m = s(nm)$ , где  $m \in {}_R R_R$ ,  $n \in {}_R R_R$ , а под умножением понимается обычное умножение в кольце. Полученные кольца формальных матриц обозначают  $K_s(R)$  и называют кольцами Крылова.

Как хорошо известно, все автоморфизмы матричного кольца  $M_2(\mathbb{Z})$  являются внутренними, хотя для произвольного коммутативного кольца это уже не выполняется (см. [2]). Нетрудно видеть, что при  $s \in \mathbb{Z}$  отличном от 0 и  $\pm 1$  у кольца Крылова  $K_s(\mathbb{Z})$  имеется невнутренний  $\mathbb{Z}$ -автоморфизм: к примеру, автоморфизм сдвига  $E_{ij} \mapsto E_{\pi(i)\pi(j)}$ , где  $\pi = (1, 2) \in S_2$ .

Для изучения того, насколько группа автоморфизмов кольца  $K_s(\mathbb{Z})$  больше группы внутренних автоморфизмов этого кольца, была рассмотрена группа внешних автоморфизмов  $\text{Out}_{\mathbb{Z}}(K_s(\mathbb{Z})) = \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(K_s(\mathbb{Z})) / \text{Inn}(K_s(\mathbb{Z}))$  и была получена следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\mathbb{Z} \ni s \neq 0, \pm 1$ ,  $A = K_s(\mathbb{Z})$ . Тогда если  $s = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ , для различных простых  $p_i$ , то  $\text{Out}_{\mathbb{Z}}(A) \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2}_n$ .

## Литература

1. Крылов П.А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, № 4. – С. 456–463.
2. Isaacs I.M. Automorphisms of Matrix Algebras Over Commutative Rings // Linear Algebra and its Appl. – 1980. – V. 31. – P. 215-231.

## OUTER AUTOMORPHISM GROUP OF FORMAL MATRIX RINGS

D.T. Tapkin

*The outer automorphism group of Krylov's ring over integers has been described.*

Keywords: formal matrix ring, Krylov's ring, automorphism, outer automorphism group.

УДК 514.822

## О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

С.В. Тихов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> tik.stanislav2015@yandex.ru; Пензенский государственный университет, Политехнический институт

*Рассмотрена нелинейная задача на собственные значения на отрезке с краевыми условиями первого рода и дополнительным локальным условием на одной из границ. Доказано существование бесконечного числа (изолированных) положительных собственных значений, указана их асимптотика, найдено условие, когда собственные функции являются периодическими, вычислен период и указана явная формула для нулей собственной функции.*

**Ключевые слова:** уравнения Максвелла, нелинейная задача на собственные значения, квазилинейное дифференциальное уравнение, асимптотика собственных значений.

### 1. Электродинамическая постановка задачи

Рассмотрим плоский диэлектрический волновод  $\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ , имеющий абсолютно проводящие стенки, в котором распространяется монохроматическая ТМ-поляризованная волна  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$ , где

$$\mathbf{E} = (E_x(x), 0, E_z(x))^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (0, H_y(x), 0)^T e^{i\gamma z} \quad (1)$$

суть комплексные амплитуды [1],  $\gamma$  – подлежащий определению вещественный параметр, а  $\omega$  – круговая частота. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  среды в слое имеет вид  $\epsilon_l + a|\mathbf{E}|^2$ , где  $\epsilon_l, a > 0$  – вещественные постоянные [1, 2].

Поле (1) удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}, \quad (2)$$

где  $\mu > 0$  – (постоянная) магнитная проницаемость вакуума. Касательные компоненты электрического поля обращаются в нуль на идеально проводящих стенках [3]. Естественно считать, что  $x$ -я компонента электрического поля имеет фиксированное (заданное) значение на одной из границ, например, при  $x = 0$ .

### 2. Нелинейная задача на собственные значения

Подставляя поле (1) в уравнения (2), после некоторых преобразований получаем

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = (\epsilon_l + \alpha(X^2 + Z^2))Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}(\epsilon_l + \alpha(X^2 + Z^2))X, \end{cases} \quad (3)$$

где использованы обозначения  $X := iE_x$ ,  $Z := E_z$ , а  $\epsilon_l = \omega^2\mu\epsilon_l$ ,  $\alpha = \omega^2\mu a$ ; при этом:  $X$  и  $Z$  – вещественные функции и  $X \in C^1[0, h]$  и  $Z \in C^2[0, h]$ .



Краевые условия имеют вид

$$Z(0) = Z(h) = 0. \quad (4)$$

Для определения дискретных собственных значений требуется дополнительное условие. В качестве такого условия используем следующее

$$X(0) = X_0 \neq 0, \quad (5)$$

где  $X_0$  – некоторая постоянная, которая будет выбрана специальным образом, см. п. 4.

Итак, задача о распространении волн сведена к нелинейной задаче на собственные значения (3)–(5) [4].

**Определение 1.** Число  $\gamma = \hat{\gamma}$  такое, что существуют функции  $X \equiv X(x; \hat{\gamma})$ ,  $Z \equiv Z(x; \hat{\gamma})$ , которые удовлетворяют системе уравнений (3), а также условиям (4) и (5), будем называть собственным значением задачи (3)–(5), а функции  $X(x; \hat{\gamma})$ ,  $Z(x; \hat{\gamma})$ , соответствующие этому собственному значению, – собственными функциями задачи (3)–(5).

Основная задача, которую мы назовем задачей  $Q$ , – доказать существование собственных значений, удовлетворяющих определению 1.

**Замечание 1.** Если тройка  $(X, Z, \gamma)$  – решение системы уравнений (3), то и  $(-X, Z, -\gamma)$  также является решением этой системы; по этой причине в дальнейшем будем рассматривать  $\gamma, X_0 > 0$ .

Линейную задачу (при  $\alpha = 0$ ) назовем задачей  $Q_0$ , а ее собственные значения обозначим через  $\tilde{\gamma}$ . Задача  $Q_0$  имеет конечное число положительных собственных значений

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\varepsilon_l - \pi^2 k^2 / h^2},$$

где  $k = 1, 2, \dots$ , при условии, что подкоренное выражение положительно.

### 3. Первый интеграл

Систему (3) можно привести к виду

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{2\alpha(\varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha(X^2 + Z^2))X^2 + \gamma^2(\varepsilon_l + \alpha(X^2 + Z^2))}{\gamma(\varepsilon_l + 3\alpha X^2 + \alpha Z^2)} Z, \\ \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{\gamma}(\varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha(X^2 + Z^2))X. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) имеет первый интеграл, который можно записать в виде

$$(\varepsilon_l + \alpha(X^2 + Z^2))^2 X^2 - 2\gamma^2(\varepsilon_l + \alpha(X^2 + Z^2))X^2 + \varepsilon_l \gamma^2(X^2 + Z^2) + \frac{\alpha}{2}\gamma^2(X^2 + Z^2)^2 \equiv C, \quad (7)$$

где  $C$  – постоянная.

#### 4. Дополнительное условие

Вычислим (7) в точке  $x = 0$ , получим

$$(\varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha X_0^2)^2 X_0^2 + \gamma^2 (\varepsilon_l - \gamma^2) X_0^2 + \frac{1}{2} \alpha \gamma^2 X_0^4 = C, \quad (8)$$

где  $X_0 = X(0)$ .

Пусть  $A > 0$  – некоторое фиксированное число. Указанная в (5) величина  $X_0$  находится из уравнения

$$C(X_0^2) = A, \quad (9)$$

где  $C(X_0^2)$  определена левой частью выражения (8).

Можно доказать, что уравнение (9) имеет единственное решение  $X_0^2 > 0$  при любом  $A > 0$ . В силу замечания 1 достаточно рассмотреть случай  $X(0) = X_0 > 0$ .

#### 5. Дисперсионное уравнение

Введем новые переменные

$$\tau = X^2 + Z^2, \quad \eta = (\varepsilon_l + \alpha \tau) X / Z. \quad (10)$$

Используя переменные (10), перепишем систему (6) в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = 2 \frac{(\varepsilon_l + \alpha \tau)^2 (\gamma^2 - (\varepsilon_l - \gamma^2) - \alpha \tau) \tau \eta}{\gamma (\varepsilon_l + \alpha \tau) ((\varepsilon_l + \alpha \tau)^2 + \eta^2) + 2 \alpha \tau \eta^2}, \\ \frac{d\eta}{dx} = \frac{\gamma (\varepsilon_l + \alpha \tau)^2 + \gamma^{-1} (\varepsilon_l - \gamma^2 + \alpha \tau) \eta^2}{\varepsilon_l + \alpha \tau}. \end{cases} \quad (11)$$

Интеграл (7) в переменных (10) примет вид

$$\eta^2 = \frac{(\varepsilon_l + \alpha \tau)^2 (\frac{1}{2} \alpha \gamma^2 \tau^2 + \varepsilon_l \gamma^2 \tau - C)}{(\varepsilon_l + \alpha \tau) (2\gamma^2 - (\varepsilon_l + \alpha \tau)) \tau - (\frac{1}{2} \alpha \gamma^2 \tau^2 + \varepsilon_l \gamma^2 \tau - C)}. \quad (12)$$

Далее мы будем использовать обозначение

$$T(\gamma) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w(\tau, s; \gamma)},$$

где  $w(\tau, s; \gamma)$  – правая часть второго уравнения в (11), а  $\tau \equiv \tau(s; \gamma)$  определяется из (12) при  $\eta = s$ .

Дисперсионное уравнение задачи Q имеет вид

$$(n-1)T(\gamma) = h, \quad (13)$$

где  $n \geq 2$  – целое число.

Формула (13) справедлива для любого конечного  $h > 0$ . Отметим, что фактически формула (13) – семейство (но не система) уравнений для различных  $n$ .

**Теорема 1.** Число  $\hat{\gamma}$  является собственным значением задачи Q если и только если существует целое число  $\hat{n} \geq 2$  такое, что  $\gamma = \hat{\gamma}$  удовлетворяет уравнению (13) при  $n = \hat{n}$ ; при этом собственная функция  $Z(x; \hat{\gamma})$  имеет  $\hat{n}$  (простых) нулей  $x_i = (i-1)T(\hat{\gamma}) = \frac{i-1}{\hat{n}-1} h$ ,  $i = \overline{1, \hat{n}}$ .

**Теорема 2.** Если собственная функция  $Z(x; \hat{\gamma})$  имеет более одного нуля при  $x \in (0, h)$ , то  $X(x; \hat{\gamma})$  и  $Z(x; \hat{\gamma})$  являются периодическими с периодом  $\Theta = 2T(\hat{\gamma})$

## 6. Основной результат

Далее кроме обозначения  $\hat{\gamma}$  будем использовать обозначения  $\hat{\gamma}_i$  и  $\hat{\gamma}(m)$ ; первому из этих обозначений отвечают собственные значения задачи  $Q$  упорядоченные по возрастанию, во втором случае  $\gamma = \hat{\gamma}(m)$  является решением уравнения (13) при  $n = m$ .

Разрешимость задачи  $Q$  устанавливает следующая

**Теорема 3.** *Задача  $Q$  имеет бесконечное число положительных собственных значений  $\hat{\gamma}_i$  ( $i = n_0, n_0 + 1, \dots$ ;  $n_0 \geq 2$ ) с точкой накопления на бесконечности. Кроме того,*

- (i) *если задача  $Q_0$  имеет  $p$  решений  $\tilde{\gamma}_i$  ( $i = \overline{n_0, n_0 + p - 1}$ ), то существует постоянная  $\alpha'' > 0$  такая, что для любого положительного значения  $\alpha = \alpha' < \alpha''$  верно, что*

$$\hat{\gamma}_i \in (0, \sqrt{\varepsilon_l}) \text{ и } \lim_{\alpha' \rightarrow +0} \hat{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_i \text{ (} i = \overline{n_0, n_0 + p - 1}\text{),}$$

где  $\hat{\gamma}_{n_0} < \hat{\gamma}_{n_0+1} < \dots < \hat{\gamma}_{n_0+p-1}$  – первые  $p$  решений задачи  $Q$  при  $\alpha = \alpha'$ ;

- (ii) *если  $i > n_0 + p - 1$ , то  $\hat{\gamma}_i$  не стремятся к какому-либо решению задачи  $Q_0$  при  $\alpha \rightarrow +0$ ;*

- (iii) *для больших  $\gamma$  и произвольного  $\delta > 0$  справедливо неравенство*

$$(1 - \delta)\gamma_*(m) \leq \hat{\gamma}(m) \leq (1 + \delta)\gamma_*(m),$$

где  $\gamma_*(m) = g^{-1}\left(\frac{h}{2\sqrt{3}m}\right)$  и  $g^{-1}$  – функция, обратная к  $g(t) = \frac{\ln t}{t}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант №18-71-10015).

## Литература

1. Eleonskii P.N., Oganess'yants L.G., Silin V.P. *Cylindric Nonlinear Waveguides* // Soviet Physics JETP. – 1972. – Vol. 35, № 1. – P. 44–47.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. – М: Наука, 1982. – 620 с.
3. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны*. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
4. Валовик Д.В., Тихов С.В. *О существовании бесконечного числа собственных значений в одной нелинейной задаче теории волноводов* // Журн. выч. мат. и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 10 (в печати).

## ON THE SOLVABILITY OF A NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM ARISING IN THE THEORY OF WAVEGUIDES

S.V. Tikhov

*A nonlinear eigenvalue problem on a segment with first type boundary conditions and a local additional condition is considered. It is proved that there exists an infinite number of isolated positive eigenvalues, their asymptotic is found, periodicity property for the eigenfunctions is proved, the period is found, and distribution of eigenfunctions' zeros is presented.*

Keywords: Maxwell's equations, nonlinear eigenvalue problem, quasilinear differential equation, eigenvalue asymptotic.

УДК 519.178

## СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА АЛГОРИТМОВ ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

Р.А. Тутыгин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [romantutygin@yandex.ru](mailto:romantutygin@yandex.ru); Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

*В статье обсуждаются вопросы алгоритмической сложности подходов к решению задач поиска максимального потока, а также снижение сложности для получения практических результатов с минимальной затратой ресурсов. Предлагается подход к разработке метода для снижения сложности описываемых алгоритмов.*

**Ключевые слова:** сеть, поток, алгоритм поиска, алгоритмическая сложность.

Классической задачей теории потоков является поиск максимального потока в сети. Начало изучения данной проблемы было положено в 1950-х годах американскими математиками Л. Фордом и Д. Фалкерсоном. Интерес к решению описываемой задачи обоснован практической значимостью и широким кругом приложений в различных сферах деятельности – транспортном планировании, электро-, информационных и коммуникационных сетях, моделировании различных процессов, а также управлении и т.д. Одним из основных понятий теории графов является понятие сети.

**Определение.** Сетью назовем ориентированный граф  $G(V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , каждой дуге  $(u, v) \in V \times V$  которого поставлена в соответствие ее пропускная способность  $c(u, v) \geq 0$ . Функция  $f : V \times V \rightarrow R$  – поток, если для всех дуг выполняется условие:  $f(u, v) \leq c(u, v)$ ; а также условие сбалансированности. [1]

В своих трудах в 1950-х годах Л. Форд и Д. Фалкерсон опубликовали теорему о максимальном потоке в сети: величина максимального потока равна величине минимального разреза. Это означает, что величина любого потока, в том числе максимального не превосходит величину минимального сечения графа. Доказательством необходимости приведенной теоремы стал предложенный в 1956 году Л. Фордом и Д. Фалкерсоном алгоритм, который представляет собой частный случай задачи линейного программирования, а его решение основывается на использовании симплекс-метода. Для решения поставленной задачи о поиске максимального потока в сети авторы предложили изучать ориентированную сеть с помощью итерационных алгоритмов – обхода в ширину и глубину, которые являются наиболее простыми и эффективными для большинства случаев.

Говоря о методах обхода графа в ширину и глубину, относящихся к неинформированным, стоит отметить, что они являются стандартными и наиболее распространенными при решении различных задач обработки графов, в том числе для проверки связности, вычисления расстояний и так далее. Поиск в ширину заключается в выборе начальной вершины и последовательного посещения всех смежных ей вершин на первом шаге. Второй и последующий шаги заключаются в переходе к вершинам, расстояние от которых до начальной на единицу больше предыдущего. При реализации данного метода используется список посещенных вершин для предотвращения повторений. Алгоритмическая сложность данного метода есть

Автор	Год	Оценка сложности
Данциг [4]	1951	$O(n^2 mc)$
Форд, Фалкерсон [3]	1956	$O(nm^2 c)$
Эдмондс, Карп [5]	1970	$O(nm^2)$
Диниц	1970	$O(n^2 m)$
Эдмондс, Карп	1972	$O(m^2 \log c)$
Диниц, Габоу	1973	$O(nm \log c)$
Карзанов	1974	$O(n^3)$
Малхотри, Кумар, Махешвари	1978	$O(n^3)$
Галил, Намад	1978	$O(nm \log^2 n)$
Слейтор, Тарьян	1980	$O(nm \log n)$
Голдберг, Тарьян	1986	$O(nm \log \frac{n^2}{m})$
Чериян, Хагеруп, Мелхорн	1989	$O(nm + n^2 \log^2 n)$
Кинг, Рао, Тарьян	1992	$O(nm + n^{2+e})$
Голдберг, Рао	1997	$O(\min_{m^{2/3}, n^{1/2}} m \log(\frac{n^2}{m}) \log c)$

**Таблица 1.** Алгоритмы поиска максимального потока

$O(n + m)$  при нематричном представлении графа и  $O(n^3)$  в случае представления с использованием матрицы смежности. Аналогичные алгоритмические оценки имеет метод поиска в глубину. Этот метод заключается в прохождении пути от начального узла вдоль ребер графа до попадания в так называемый «тупик» – вершину, смежные с которой были посещены ранее. Следующие после первого шага итерации заключаются в необходимости прохождения полученного на предыдущем шаге пути вплоть до нахождения вершины, имеющей не посещенные ранее инцидентные ребра.

В течение последних 50 лет предлагались различные подходы к решению задачи о максимальном потоке, большинство из которых основывалось на предложенном Л. Фордом и Д. Фалкерсоном подходе. Описываемый метод получил развитие в работах Диница (1970), Эдмондса и Карпа (1972), Карзанова (1974), Гольдберга и Тарьяна (1986), Голдберга и Рао (1997) и многих других. Хронология разработки и оценки алгоритмической сложности основных методов представлены в табл. 1.

Так, применение алгоритма Форда-Фалкерсона становится удобным при низких пропускных способностях дуг. Алгоритм пометок Эдмондса-Карпа, заключающийся в нахождении кратчайшего дополняющего пути, напрямую зависит от количества использованных дуг. В отличие от предыдущего алгоритма, алгоритм Эдмондса-Карпа не требует изначального знания величины максимального потока, а требует характеристики самого графа. Стоит отметить, что рассматриваемый метод имеет высокую сложность алгоритма для сетей, богатых дугами. Алгоритм же Диница удобен для использования при рассмотрении сетей с относительно небольшим количеством вершин [8]. Алгоритм, предложенный в 1997 году Голдбергом и Рао, на сегодняшний день является наиболее эффективным, а работа многих ученых в области теории потоков направлена на улучшение указываемого метода.

Отметим, что указанные в табл. 1 оценки являются верхней асимптотикой сложности описываемых алгоритмов, определяющие наименьшую скорость его выполнения. Функции, используемые для вычисления сложности, в порядке возрастания:

$C$ ;  $\log \log(N)$ ;  $\log N$ ;  $N^C$ ,  $C \in (0; 1)$ ;  $N$ ;  $N \log N$ ;  $N^C$ ,  $C > 1$ ;  $C^N$ ,  $C > 1$ ;  $N!$

Выбор тех или иных алгоритмов при решении задачи происходит на основании информации об объёмах исследуемых данных. Нормальной скоростью работы алгоритмов считается  $N \log N$ . Но при использовании различных алгоритмов для различных входных данных, мы можем получать абсолютно разные оценки сложности. Для улучшения алгоритмических оценок того или иного алгоритма поиска на графе необходимо учитывать размер входных данных, а также их структуру для хранения в памяти. Это имеет принципиальное значение при разработке эффективных алгоритмов.

Говоря о представлении графов, стоит выделить несколько основных методов:

1. Представление в виде списка ребер, образованного парами смежных вершин;
2. Представление в виде матрицы смежности – двумерного массива размерности  $n \times n$ , элементы которого характеризуются смежностью вершин описываемого графа;
3. Представление в виде матрицы инцидентности – двумерного массива размерности  $n \times t$ , указывающего на связи между соответствующими ребрами и вершинами.

Различные виды графов определяются общими принципами их построения, а также зависят от различных свойств вершин и ребер. Учитывая сказанное, стоит отметить, что для снижения сложности решения задач поиска максимального потока и получения практических результатов возникает необходимость разработки алгоритма, учитывающего характеристики входных данных и структуры изучаемого графа, который позволит чередовать известные алгоритмы, тем самым предоставляя возможность снижения затраты ресурсов на вычисление результата.

В представленной работе проведено сравнение действия различных алгоритмов поиска с учетом входных данных исходных графов. Для поиска максимального потока на каждом из графов реализованы различные алгоритмы, представленные ранее. Опираясь на полученные результаты, можем сделать вывод о необходимости подбора алгоритмов поиска в зависимости от структуры самого графа, а также возможности «разрезания» исследуемого графа на части для решения локальных задач и последующего снижения алгоритмической сложности.

## Литература

1. Басакер Р., Саати Т. *Конечные сети и графы*. – М.: Наука, 1974. – 368 с.
2. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В. *Потоковые алгоритмы*. – М.: Наука, 1975. – 119 с.
3. Dantzig G. B. *The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints* // Pacific Journal of Mathematics. – 1955. – Т. 5, № 2. – С. 183–195.

4. Edmonds J., Karp R. M. *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems* // Journal of the ACM (JACM). – 1972. – Т. 19, № 2. – С. 248–264.
5. Диниц Е. А. *Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой* // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 194, № 4. – С. 754–757.
6. Карзанов А. В. *Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 215, № 1. – С. 49–52.
7. Тутыгин Р. А. *Алгоритмы решения задачи о максимальном потоке в сети* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2016. – Т. 53. – С. 151–152.
8. Мальковский Н. В. *Актуальность задачи максимального потока в применении к современным вычислительным сетям* // Компьютерные инструменты в образовании, 2014. – № 4. – С. 3–9.

#### COMPARATIVE EVALUATION OF MAXIMUM FLOW SEARCH ALGORITHMS

R.A. Tutygin

*The article discusses the issues of algorithmic complexity of approaches to solving problems of finding the maximum flow, as well as its reduction to obtain practical results with a minimum expenditure of resources. The development approach of a method for reducing the complexity of the described algorithms is proposed.*

Keywords: network, flow, search algorithm, algorithmic complexity.

УДК 517.922

#### РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ВОЗМУЩЕННЫМ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРА ОПЕРАТОРОМ

В.И. Усков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [vut1@yandex.ru](mailto:vut1@yandex.ru); Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова

*В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка в банаховом пространстве. Перед производной стоит необратимый оператор с операторной добавкой. С помощью метода каскадной декомпозиции уравнение регуляризуется, то есть разрешается относительно производной. Определяются условия, при которых уравнение имеет решение.*

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение первого порядка,  $\Phi$ -оператор, параметр, регуляризация, каскадная декомпозиция.

Рассматривается уравнение

$$(A + c \cdot I) \frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \quad (1)$$

где  $A$  – линейный замкнутый  $\Phi$ -оператор, действующий в банаховом пространстве  $E$ ;  $F(\xi, \eta)$  – непрерывная по совокупности переменных вектор-функция со значениями в  $E$ ;  $\overline{\text{dom}} F = E$ ;  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;  $t \in [0, T]$ .

Для решения поставленной задачи применяется метод каскадной декомпозиции. Задача Коши для уравнения (1) с  $\Phi$ -оператором  $A$ ,  $F(t, x(t)) \equiv B(t)x(t) + f(t)$  и  $c = 0$  с применением этого метода решена во многих работах. В [1] рассмотрен

случай нетерова оператора  $A$ , зависящего от  $t$ . В [2] в случае стационарного Ф-оператора метод каскадной декомпозиции модифицируется, что позволяет понизить требования на гладкость операторных коэффициентов, построенных с помощью  $B, f(t)$ . Определены условия, при которых решение задачи существует, единственно или неединственно; построено это решение.

В настоящей работе эти требования сильно ослабляются: они исчерпываются заявленной непрерывностью  $F$  по совокупности переменных, поскольку при расщеплении исходного уравнения не применяется операция дифференцирования. При решении задачи используется утверждение леммы о решении соответствующего линейного уравнения  $(A + c \cdot I)v = w$  [3].

Строятся операторы  $A_j$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & P_0 &= P, & Q_0 &= Q, \\ A_j &= Q_{j-1}S_jP_{j-1}, & j &= 1, 2, \dots, \\ S_1 &= I, & S_j &= Q_{j-2}S_{j-1}A_{j-2}^{-1}S_{j-1}, & j &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь обозначены  $P_j$  – проекторы на  $\text{Ker } A_j$ ,  $Q_j$  – проекторы на  $\text{Coker } A_j$ , отвечающие разложениям:

$$E = \text{Coim } A \oplus \text{Ker } A, \quad E = \text{Im } A \oplus \text{Coker } A,$$

$$\text{Ker } A_j = \text{Coim } A_{j+1} \oplus \text{Ker } A_{j+1}, \quad \text{Coker } A_j = \text{Im } A_{j+1} \oplus \text{Coker } A_{j+1},$$

Здесь  $\tilde{A}_j = A_j|_{\text{Coim } A_j \cap \text{dom } A_j}$ ,  $A_j^- = \tilde{A}_j^{-1}(I - Q_j)$  – полуобратные операторы,  $j = 0, 1, 2, \dots$

Определим следующее условие.

**Условие S.** Операторы  $A_j$ , построенные по формулам (2), ненулевые. Существует такое число  $r$ , что  $A_r$  обратим. Пусть  $p = \min r$ .

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R_j &= (I + c \cdot (-1)^j \cdot A_j^- S_{j+1})^{-1}, & j &= 0, 1, \dots, \\ \varphi_0(t) &= F(t, x(t)), \\ \varphi_j(t) &= -Q_{j-1}S_jR_{j-1}A_{j-1}^- \varphi_{j-1}(t) + c^{-1}(-1)^{j+1}Q_{j-1}\varphi_{j-1}(t), & j &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_p(t)F(t, x(t)) &= R_0A^-F(t, x(t)) + R_0y_0(t), \\ y_j(t) &= R_{j+1}(A_{j+1}^- \varphi_{j+1}(t) + y_{j+1}(t)), & j &= 0, 1, \dots, p-2, \\ y_{p-1}(t) &= A_p^{-1}\varphi_p(t). \end{aligned}$$

Получен следующий результат.

**Теорема.** Пусть выполнено условие S. Пусть имеют место равенства:

$$(A_j^- S_{j+1})^{p+i-j} P_j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$



При выполнении неравенств:

$$\|A_j^- S_{j+1}\| < 1, \quad j = 0, 1, \dots, p-1,$$

уравнение (1) разрешимо относительно производной:

$$\frac{dx}{dt} = T_p(t)F(t, x(t)),$$

где  $T_p$  определяется по рекуррентным формулам (3).

В частности, при  $p = 3$  имеем следующее. Обозначим:

$$\tilde{R}_j = -Q_{j-1}S_j R_{j-1} A_{j-1}^- + c^{-1}(-1)^{j+1} Q_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Определим следующую операцию произведения:

$$\prod_{j=b}^a \alpha_j = \alpha_b \alpha_{b-1} \dots \alpha_{a+1} \alpha_a.$$

Тогда оператор  $T_3$  (формулы (3)) равен

$$T_3 = R_0 A^- + R_0 R_1 A_1^- \tilde{R}_1 + R_0 R_1 R_2 A_2^- \prod_{j=2}^1 \tilde{R}_j + R_0 R_1 R_2 A_3^- \prod_{j=3}^1 \tilde{R}_j.$$

## Литература

1. Зубова С. П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве // Вестн. Воронежск. госунивер. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 192-198.
2. Усков В. И. Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения первого порядка // Вестн. Воронежск. госунивер. Серия: Физика. Математика. – 2018. – Отпр. в печать.
3. Усков В. И. Асимптотическое решение уравнения первого порядка с малым параметром при производной с возмущенным оператором // Вестн. Тамбовск. унив. Серия Естеств. и техн. науки. – 2018. – Отпр. в печать.

## REGULARIZATION OF A FIRST ORDER DESCRIPTOR EQUATION WITH THE OPERATOR PERTURBED BY A PARAMETER

V.I. Uskov

*In this paper, we consider a first-order differential equation in a Banach space. There is an irreversible operator, with an operator additive, before the derivative. Using the cascade decomposition method, the equation is regularized, that is, it is solved with respect to the derivative. The conditions under which the equation has a solution are determined.*

Keywords: differential equation of the first order,  $\Phi$ -operator, parameter, regularization, cascade decomposition.

УДК 517.951

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

В.И. Усков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *vut1@yandex.ru*; Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова

*Рассматривается уравнение в частных производных первого порядка с операторным коэффициентом в правой части уравнения при производной. Находится общее решение уравнения и решение задачи Коши для этого уравнения в аналитическом виде.*

**Ключевые слова:** уравнение в частных производных, первый порядок, линейный оператор, задача Коши, аналитическое решение.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

с линейным оператором  $D$ , действующим в конечномерном пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Искомая функция  $u(x, t)$  непрерывно дифференцируема по совокупности переменных.

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

со скалярным коэффициентом  $a$  имеет решение [1]

$$u(x, t) = g(x + at)$$

где  $g$  – некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – различные точки спектра оператора  $D$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_n$  – собственные векторы, отвечающие соответствующим собственным значениям. С помощью невырожденного преобразования подобия  $u = Kv$  [2] уравнение (1) сводится к системе уравнений вида (2). Получено общее решение уравнения (1):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x + \lambda_k t) h_k, \quad (3)$$

где  $g_k$  – некоторые непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Рассмотрим задачу Коши:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (4)$$

для уравнения (1). Здесь  $\varphi(x)$  – непрерывная функция. Разложим ее по базису из  $h_k$ :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) h_k. \quad (5)$$

Тогда положив в (3)  $t = 0$  и приравнявая коэффициенты в равенстве (3), (5) при  $h_k$ , получим решение задачи (1), (4):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x + \lambda_k t) h_k.$$

Полученный результат может использоваться при решении задач для уравнения

$$A \frac{\partial u}{\partial t} = B \frac{\partial u}{\partial x}$$

с вырожденным оператором  $A$ , действующим в банаховых пространствах [3], [4]. Это уравнение применяется в гидродинамике, электротехнике, теплотехнике (напр., конвективный теплообменник) и т.д.

### Литература

1. Степанов В. В. *Курс дифференциальных уравнений*. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 473 с.
2. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. – М.: Наука, 1966.
3. Нгуен Хак Диеп, Чистяков В.Ф. *О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных* // Вестник ЮУрГУ. Серия: Матем. моделир. и прогр. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 98–111.
4. Усков В. И. *Задача Гурса для дескрипторного уравнения в частных производных* // Матер. научн. конф. «Межд. конф. по диффер. уравн. и динам. системам». – Суздаль, 2018. – С. 206–208.

### SOLUTION OF A FIRST-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH AN OPERATOR COEFFICIENT

V.I. Uskov

*We consider a first-order partial differential equation with the operator coefficient of derivative on the right-hand side of the equation. A general solution of the equation and a solution of the Cauchy problem for this equation are found in the analytical form.*

Keywords: partial differential equation, first order, linear operator, Cauchy problem, analytic solution.

УДК 517.928

### КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Н.М. Фирстова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *firstova.natalia@yandex.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

*В статье анализируется влияние гауссовского белого шума на цикл–утку в динамической модели электрохимической реакции. Получена критическая интенсивность шума, при которой колебания малой амплитуды преобразуются в колебания смешанного типа.*

**Ключевые слова:** случайные возмущения, белый шум, стохастическая чувствительность, стабильность системы.

## 1. Стохастическая модель

Исследуется модель электрохимической реакции типа Купера-Слайтера [1] с учетом случайных возмущений. Предполагается, что в системе присутствует белый шум малой интенсивности:

$$\frac{du}{dt} = -k_a \exp(\gamma\theta/2) u(1-\theta) + k_d \exp(-\gamma\theta/2)\theta + 1 - u + \epsilon \dot{\xi}_1, \quad (1)$$

$$\beta \frac{d\theta}{dt} = k_a \exp(\gamma\theta/2) u(1-\theta) - k_d \exp(-\gamma\theta/2)\theta - k_e \exp(\alpha_0 f E)\theta + \epsilon \dot{\xi}_2. \quad (2)$$

Детальный анализ детерминированной модели проводился в [4, 5] с использованием теории инвариантных многообразий. Был обнаружен критический режим, соответствующий циклу-утке (см., напр., [4, 5]). Было показано, что критический режим играет роль границы между двумя основными типами режимов реакции: неперриодическим медленным режимом и релаксационными колебаниями.

В этой работе мы исследуем влияние внешнего шума на цикл-утку [8, 9]. Начнем с анализа стохастической чувствительности равновесия системы.

## 2. Теоретическая чувствительность к шуму

Для анализа чувствительности к шуму стохастического равновесия динамической системы в работах [2, 3] был использован метод функции стохастической чувствительности (ФСЧ). Он основан на вычислении матрицы стохастической чувствительности  $W$ . Это положительно определенная матрица, характеризующая разброс случайных траекторий системы вокруг положения равновесия. Собственные числа матрицы  $W$  являются теоретическими характеристиками чувствительности к шуму.

Матрица  $W$  находится из решения матричного уравнения:

$$FW + WF^T + S = 0, \quad (3)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{(\bar{u}, \bar{\theta})}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $W$  могут быть получены из (3):

$$w_{11} = \frac{-1 - 2f_{\theta} w_{12}}{2f_u}, \quad w_{22} = \frac{-1 - 2g_u w_{12}}{2g_{\theta}}, \quad w_{12} = \frac{f_u f_{\theta} + g_u g_{\theta}}{2(f_{\theta}^2 g_{\theta} + g_{\theta}^2 f_u - f_u f_{\theta} g_u - f_u g_u g_{\theta})},$$

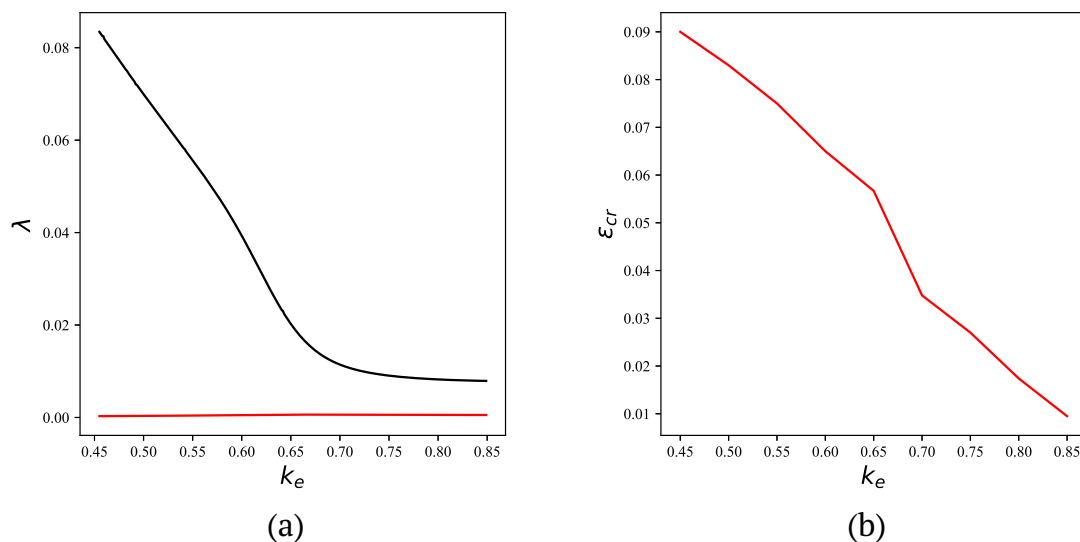
и собственные числа равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{w_{11} + w_{22} \pm \sqrt{(w_{11} + w_{22})^2 - 4(w_{11} w_{22} - w_{12}^2)}}{2}. \quad (4)$$

где

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\theta}), \quad f_{\theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\bar{u}, \bar{\theta}), \quad g_u = \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\theta}), \quad g_{\theta} = \frac{\partial g}{\partial \theta}(\bar{u}, \bar{\theta}).$$

Зафиксируем следующие значения параметров  $k_a = 10$ ,  $k_d = 100$ ,  $k_e = 0,02$ ,  $\alpha_0 = 0,5$ ,  $f = 38,7$ ,  $E = 0,207$ . Результаты, полученные теоретическим методом, представлены на рис. 1.



**Рис. 1.** (а) Теоретическая чувствительность к шуму и (б) зависимость критического значения шума от управляющего параметра  $k_e$ .

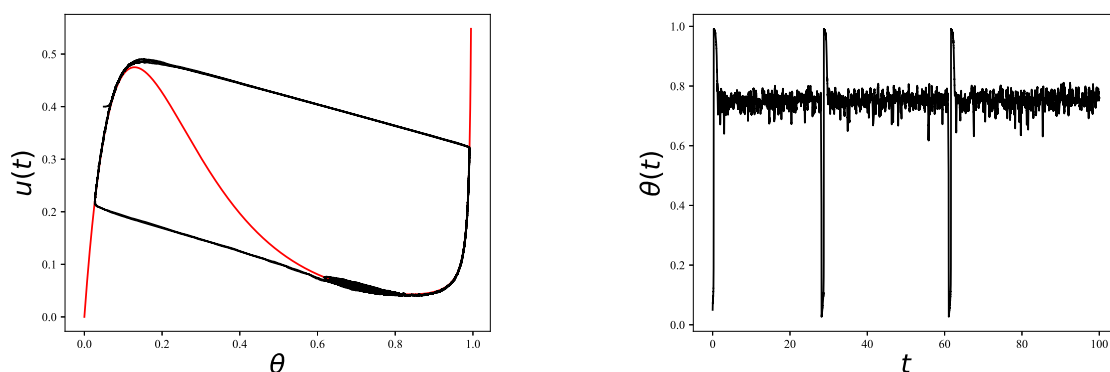
Можно увидеть, что одно из собственных значений (4) очень мало (рис. 1(a)), таким образом, стохастическая чувствительность определяется наибольшим из собственных значений. График показывает, что стохастическое равновесие становится более чувствительным к шуму по мере увеличения управляющего параметра  $k_e$ .

### 3. Индуцированные шумом переходы

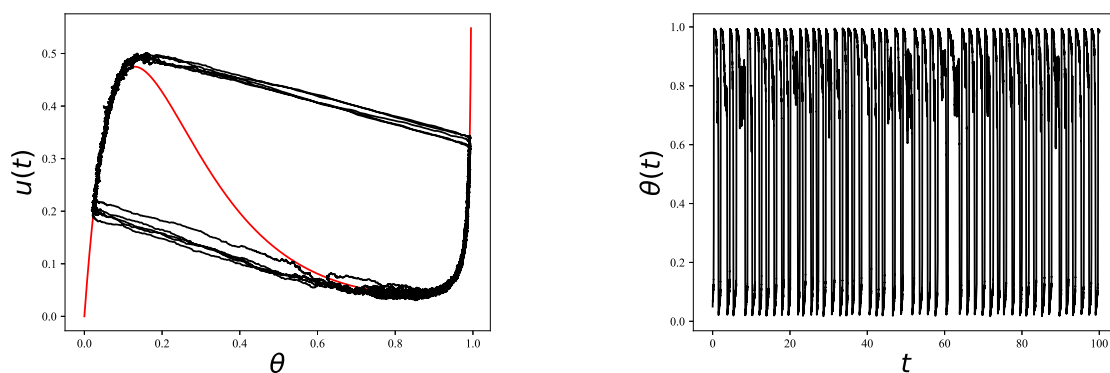
В стохастической модели при воздействии шума возможны качественные изменения — при достижении некоторого критического значения интенсивности шума  $\epsilon_{cr}$  происходит переход из одного детерминированного аттрактора (точки покоя) в другой (предельный цикл). Такие качественные изменения в системе называют индуцированные шумом переходы. Рассмотрим изменение стохастического фазового портрета, в зависимости от интенсивности шума.

При малом шуме разброс случайных состояний всегда находится в окрестности равновесия. С ростом интенсивности шума появляются редкие переходы через неустойчивый цикл на предельный цикл и обратно. То есть, наблюдаются колебания смешанного типа (рис. 2). Однако, с ростом бифуркационного параметра и приближением к зоне, где точка покоя теряет устойчивость, колебания принимают вид большеамплитудных (рис. 3). При дальнейшем увеличении интенсивности шума переходы становятся более частыми.

Таким образом, используя аппарат функции стохастической чувствительности (ФСЧ), мы можем предсказать значение интенсивности шума  $\epsilon_{cr}$  соответствующее



**Рис. 2.** Индуцированный шумом переход для значения управляющего параметра и величины шума  $k_e = 0.85, \epsilon = 0.0098$ .



**Рис. 3.** Индуцированный шумом переход для значения управляющего параметра и величины шума  $k_e = 0.85, \epsilon = 0.02$ .

началу переходов. Например, для управляющего параметра  $k_e = 0.85$ , на котором были продемонстрированы индуцированные шумом переходы, критическое значение интенсивности шума примерно равно  $\epsilon_{cr} \approx 0.009495$ .

Выполнив поиск критических значений интенсивности шума для значений параметра  $k_e$  из устойчивой зоны, мы получили зависимость  $\epsilon_{cr}$  от управляющего параметра. Из графика (1б) видно, что с ростом величины бифуркационного параметра значение интенсивности шума, при котором начинают проявляться переходы между аттракторами, уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области (проект 16-41-630529-р) и Минобрнауки РФ в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013 – 2020 гг.).

## Литература

1. Koper M.T.M., Sluyters J.H. *Instabilities and oscillations in simple models of electrocatalytic surface reactions* // Journal of Electroanalytical Chemistry. – 1994. – Vol. 371(1). – P. 149–159.

2. Firstova N.M. *Conditions for the critical phenomena in a dynamic model of an electrocatalytic reaction* // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 811. – P. 151–175. DOI: 10.1088/1742-6596/811/1/012002
3. Firstova N.M., Schepakina E.A. *Study of oscillatory processes in the one model of electrochemical reactor* // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1638. – P. 731–741. DOI: 10.18287/1613-0073-2016-1638-731-741.
4. Schepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. *Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications*. – Cham–Berlin–Heidelberg–London: Springer, 2014. – In: Lect. Notes in Math. – Vol. 2114.
5. Schepakina E., Sobolev V., Mortell M., O'Malley R., Pokrovskii A., (eds.) *Black swans and canards in laser and combustion models* –Philadelphia: SIAM, 2005. – P. 207–256.
6. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. *Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator* // Physica A. – 2000. – Vol. 278. – P. 126–139.
7. Bashkirtseva I.A. *Stochastic sensitivity analysis: theory and numerical algorithms* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 192. – 012024.
8. Berglund N., Gentz B., Kuehn C. *Hunting french ducks in a noisy environment* // Journal of Differential Equations. – 2012. – Vol. 252 (9). – P. 4786–4841.
9. Grasman J. *Asymptotic analysis of nonlinear systems with small stochastic perturbations* // Mathematics and Computers in Simulation. – 1989. – Vol. 31 (1-2). – P. 41–54.

#### CRITICAL PHENOMENA IN A DYNAMICAL SYSTEM UNDER RANDOM PERTURBATIONS

N.M. Firstova

*The effect of Gaussian white noise on a canard cycle in dynamical model of an electrochemical reaction is analyzed. A critical noise intensity, at which the small-amplitude oscillations are transformed into mixed-mode oscillations, is obtained.*

Keywords: random perturbations, Gaussian white noise, stochastic sensitivity, system stability.

УДК 519.1:519.6

#### О ПРИМЕНЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ

С.А. Фомин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [sergfomin2011@gmail.com](mailto:sergfomin2011@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Исследуется проблема формирования графика посещений клиентских торговых точек представителем оптовой компании. Точные решения для такого рода задач могут быть найдены только в очень простых частных случаях. Поэтому в более сложных ситуациях, когда имеется большое число исходных данных и накладываемых ограничений, приходится обходиться приближенными решениями. Способы поиска таковых изучаются в теории расписаний. В статье производится попытка применения одного нестандартного для этой теории метода, механизм функционирования которого заимствован из биологии. Это так называемый эволюционный метод, основанный на*

использовании генетического алгоритма. Длительное время его работы компенсируется универсальностью представления и пригодностью для решения трудноформализуемых задач. Было предложено особое представление искомого решения, что является необходимым условием реализации алгоритма. В результате экспериментальной апробации метода было установлено, что его применение дает возможность получить приближенные решения рассматриваемой задачи, при этом качество получаемых результатов прямо пропорционально времени работы алгоритма.

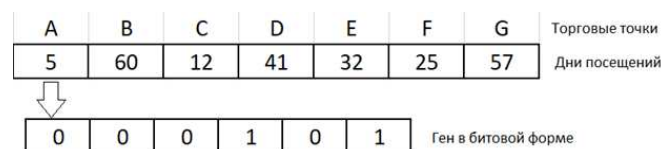
**Ключевые слова:** эволюционный метод, теория расписаний, генетический алгоритм.

В данной работе рассмотрен вариант решения прикладной задачи формирования расписания обхода клиентских точек представителем оптовой торговой компании. Для некоторого предприятия необходимо составить расписание на неделю для торгового представителя. В течении дня он должен посетить несколько таких торговых точек. При этом необходимо учитывать ряд ограничений:

1. число визитов в каждый из магазинов-партнеров не должно превышать одного раза в день;
2. количество посещений торговых точек в неделю должно задаваться пользователем;
3. рабочий день торгового представителя лимитирован фиксированным числом часов.

Подобные задачи рассматриваются в теории расписаний. Однако в классические методы решения, как правило, оперируют другим набором ограничений. В связи с этим в настоящей работе был предложен вариант алгоритма, который сможет учесть данные условия. В качестве такового был использован эволюционный метод решения поставленной задачи.

Применение такого эволюционного метода, как генетический алгоритм требует представления решений задачи в виде вектора числовых значений, называемого хромосомой или особью. Пример хромосомы приведен на рисунке 1.



**Рис. 1.** Представления возможного решения в виде хромосомы

На данном рисунке заглавными латинские буквы представляют собой названия различных торговых точек. Значения, которые им соответствуют, лежат в диапазоне от 0 до 63. Каждый элемент вектора называется геном и его можно представить в виде шести бит. Они отвечают за посещение торговым представителем указанной точки в тот или иной рабочий день. Значение  $i$ -ого бита равно 0 означает что данную торговую точку не должны посещать в  $i$ -ый день. Противоположное значение, указывает на необходимость визита.



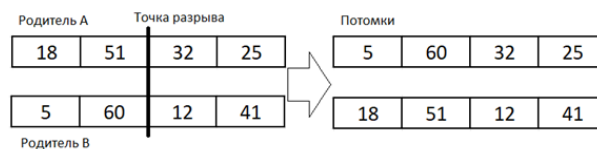
Для того чтобы узнать насколько хорошее решение представляет данный вектор, была введена так называемая функция приспособленности. Она функция представлена в виде:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\sum_j |d_{ij} - p_j|) + \exp(\sum_j (d_{ij} - k)) - 2, & \text{если } d_{ij} \geq 0; \\ \exp(\sum_j |d_{ij} - p_j|) - 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $j$  – номер торговой точки,  $i$  – один из дней недели,  $p_j$  – общее количество посещений  $j$  – ой точки в неделю,  $d_{ij}$  – необходимое количество посещений в  $i$ -ый день,  $x$  – одна из особей,  $k$  – максимальное число магазинов партнеров, которые торговый представитель может посетить в течение дня. Чем меньше значение данной функции, тем лучше решение представлено.

Некоторое множество возможных решений такого вида называется популяцией. После вычисления приспособленности каждого решения в популяции необходимо произвести селекцию: отобрать необходимое число решений. Для этого сначала необходимо отсортировать всю популяцию по возрастанию. После этого лучшие решения будут находится на первых местах.

Далее популяция делится на две половины из которых удаляется та, которая содержит худшие решения. Для восстановления количества особей в популяции необходимо сформировать новые вектора, комбинируя различные части оставшихся экземпляров. Данный процесс называется скрещиванием. Оно выполняется с помощью применения операторов кроссинговера и мутации. Действие оператора кроссинговера схематично представлено на рис. 2.



**Рис. 2.** Пример получения потомка

Для начала выбираются два некоторых решения. Их называют родителями. Находится середина этих векторов и они делятся пополам. Далее родители меняются случайными половинками. Потом в векторах происходит мутация: выбирается несколько случайных элементов и меняются их значения. Получившиеся особи называются потомками.

После того, как появились новые решения, количество векторов в популяции возвращается в начальное состояние. Поэтому весь алгоритм можно повторять до тех пор, пока не будет достигнут желаемый результат или лимит по времени.

Было проведено 2 эксперимента, в которых были выбраны 16 торговых точек для посещения торговым представителем. При этом было установлено ограничение на посещение не более 10 точек в день.

В первом эксперименте работа генетического алгоритма была остановлена через 5 минут. Полученное при этом решение удовлетворяло части поставленных условий. В частности, оно учитывало ограничение на посещение каждой точки не более 1 раза в течение суток, а также ограничение на общее количество посещений в течение дня. Тем не менее, в получившемся расписании только для 12.5% всех торговых точек было соблюдены все ограничения.

Во втором эксперименте время работы приложения было увеличено в 4 раза. При этом, найденное решение, удовлетворяло всем критериям в 62.5% случаев.

Таким образом, проведенные эксперименты показывают, что генетический алгоритм представляет собой универсальное средство для получения приближенных решений задач составления расписаний с различным набором условий. При этом, качество получаемого результата прямо пропорционально времени работы алгоритма.

## Литература

1. Танаев В.С., Шкурба А.В. *Введение в теорию расписаний*. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
2. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. *Теория расписаний. Задачи и алгоритмы*. – М. – 2011. – 222 с.
3. Панченко Т.В. *Генетические алгоритмы / учебно-методическое пособие*. – Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.
4. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. *Генетические алгоритмы. / 2-е изд., испр. и доп.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1975. – 320 с.

## ON THE APPLICATION OF EVOLUTIONARY METHOD TO THE SCHEDULING PROBLEM

S.A. Fomin

*The problem of scheduling visits to customer outlets by a wholesale company representative is investigated. Exact solutions for such problems can be found only in very simple special cases. Therefore, in more complex situations, when there is a large number of source data and constraints imposed, it is necessary to handle with approximate solutions. Ways of finding those are studied in the theory of schedules. The article attempts to apply one of the methods, non-standard for this theory, the mechanism of which is borrowed from biology. This is the so-called evolutionary method based on the use of a genetic algorithm. The long time of his work is compensated by the universality of the presentation and suitability for solving difficultly formalized problems. In this paper, a special presentation of the desired solution was proposed, which is a necessary condition for the implementation of the algorithm. As a result of experimental approbation of the method, it was found that its application makes it possible to obtain approximate solutions of the problem under consideration, and the quality of the results is directly proportional to the time of the algorithm.*

Keywords: evolutionary method, scheduling theory, genetic algorithm.

УДК 514.763

## ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЗЕНХАРТА В СЛУЧАЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ {41} НЕИЗВЕСТНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Д.Р. Хакимов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [dzhamoliddink@mail.ru](mailto:dzhamoliddink@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Данная работа посвящена нахождению пятимерных  $h$ -пространства типа {41}. С использованием метода косономального репера (Аминова) интегрируются уравнения Эйзенхарта.*

**Ключевые слова:** уравнение Эйзенхарта, пятимерное псевдориманово многообразие,  $h$ -пространство типа {41}.

Векторное поле  $X$  на римановом многообразии  $(M^5, g)$  с метрикой  $g$  и связностью Леви-Чивита называется проективным движением (п.д.), если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки  $p \in M$  локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т.е. автоморфизмов проективной структуры. Необходимое и достаточное условие этого состоит в выполнении следующего равенства:

$$(L_X G_{AB})_{;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A}, \quad (1)$$

где  $L_X g_{AB}$  – производная Ли метрики  $G_{AB}$  в направлении проективного движения  $X$ ,  $\varphi$  – некоторая функция координат  $(x^1, \dots, x^5)$ ; точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно метрики  $G_{AB}$ .

Воспользуемся методом косонормального репера [1]. Согласно этому методу уравнения (1) разбиваются на две группы: уравнения Эйзенхарта

$$h_{AB;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A} \quad (2)$$

и обобщенные уравнения Киллинга

$$(L_X G_{AB})_{;C} = h_{AB}. \quad (3)$$

Уравнение Эйзенхарта линейно по  $h$  и нелинейно по  $G$  в силу нелинейной зависимости  $\nabla$  от  $G$ . В общей постановке все величины в этом уравнении оказываются неизвестными, и для нахождения пространств, допускающих нетривиальные решения  $h \neq cG$  уравнения Эйзенхарта, и самих этих решений пространства разбиваются на типы в соответствии с алгебраической структурой тензора  $h$ , определяемой в каждой точке  $p \in V \subseteq M$  характеристикой Сегре  $\chi$  тензора  $h$ . Тип тензора  $\delta$  определяет тип метрики  $G$  в области  $V$ ; такие метрики называются  $h$ -метриками типа  $\chi$ , а соответствующие пространства –  $h$ -пространствами типа  $\chi$ .

В данной работе определяются пятимерные  $h$ -пространства типа {41} с помощью метода косонормального репера [1]. Доказано, в частности, что метрика  $G$  такого пространства и соответствующее решение  $h$  уравнения Эйзенхарта в подходящей системе координат  $(x, U)$  приводятся к виду:

$$G = e_1(f_2 - f_1)G_1 + e_2(f_1 - f_2)^4 G_2 \quad (4)$$

$$h = 2\varphi G + f_1(G_1 + \Lambda_1) + f_2 G_2, \quad (5)$$

$$\varphi = 2f_1 + (1/2)f_2,$$

где

$$\begin{aligned}
G_1|_U &= 6Adx^1 dx^4 + 2dx^2 dx^3 + 2\left(2\epsilon x^2 - 3A\left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right)\right) dx^2 dx^4 - \left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right)(dx^3)^2 + \\
&2\left(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2\left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right)\right) dx^3 dx^4 + 4((\epsilon x^2)^2\left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right) + \epsilon x^1 \epsilon x^2 - \frac{3}{2}\epsilon x^1 A\left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right))(dx^4)^2, \\
G_2|_U &= (dx^5)^2, \\
\Lambda_1|_U &= 6Adx^2 dx^4 + (dx^3)^2 + 2(2\epsilon x^2 - 3A\left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right))dx^3 dx^4 + 4((\epsilon x^2)^2 - \\
&3A\left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right)\epsilon x^2 + \frac{3}{2}A\epsilon x^1)(dx^4)^2, \quad (6)
\end{aligned}$$

$f_1 = x^4$ ,  $f_2 = x^5$ ,  $A = \epsilon x^3 + \tau(x^4)$ , Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что тензоры  $h_{AB}$ ,  $G_{AB}$  и функция  $\varphi$  определенные формулами (4) и (5), удовлетворяют уравнениям (2).

## Литература

1. Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*. – М.: Янус-К, 2003.
2. Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // УМН. – 1995. – Т. 50, № 1. – С. 69–142.
3. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. *О проективных движениях пятимерных пространств специального вида* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 5. – С. 1–6.

### ON THE INTEGRATION OF THE EISENHART EQUATION IN THE CASE OF THE CHARACTERISTIC {41} OF AN UNKNOWN BILINEAR FORM

D.R. Khakimov

*This paper is devoted to finding five-dimensional  $h$ -spaces of the type {41}. By using the method of the skewnormal frame (Aminova) Eisenhart equations are integrated.*

Keywords: Eisenhart equation, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold,  $h$ -space of the type {41}.

УДК 533:519.63

### РАСЧЕТ КОЛЛАПСА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

Т.Ф. Халитова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> taliny@mail.ru; ИММ - обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН

*Рассматриваются различные подходы к моделированию коллапса парового пузырька в жидкости с малыми отклонениями его формы от сферической. Первая модель за счет ввода упрощающих предположений о слабой сжимаемости жидкости и однородности распределения давления в паре является более экономичной и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений совместно с уравнениями теплопроводности. Вторая модель требует больших временных затрат, но лучше описывает финал сжатия. Здесь применяются полные уравнения динамики теплопроводных жидкости и пара, позволяющие рассчитывать динамику пара внутри пузырька при его сильном сжатии в жидкости в случае когда внутри пузырька возникают ударные волны.*

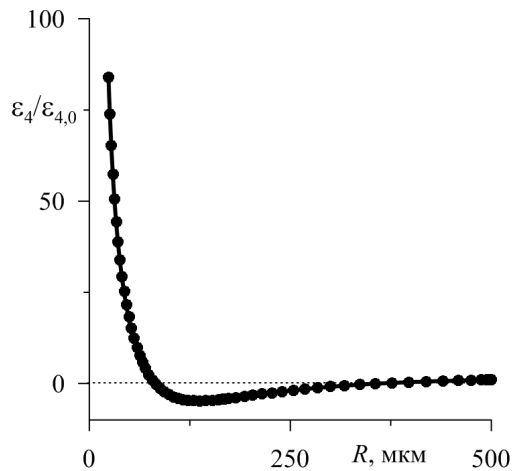
*Показано, что совместное применение двух моделей позволяет сэкономить затраты компьютерного времени в 5 раз при описании роста амплитуды малых искажений сферичности пузырька.*

**Ключевые слова:** экономичность, модель динамики пузырька, ударные волны, несферичность.

Исследование сильного сжатия пузырьков в акустическом поле обычно проводится с применением различных упрощающих предположений. Так, для описания динамики несферического парового пузырька в жидкости довольно часто вводят предположение о малости отклонений его формы от сферической, а жидкость при этом предполагается несжимаемой [1]. В этом случае движение жидкости расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. В работе [2] сферическая составляющая определяется из одномерных уравнений газовой динамики, а малое несферическое возмущение определяется из обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Такой подход позволяет значительно повысить экономичность вычислений по сравнению с применением прямого численного моделирования на основе двумерных уравнений газовой динамики. В литературе довольно часто с целью повышения экономичности расчетов при описании сферической составляющей применяется уравнение Рэлей-Плессета, полученное в предположении слабой сжимаемости жидкости и однородности распределения параметров пара внутри пузырька. Однако, такой подход не позволяет изучать динамику парового пузырька в жидкости в финале сжатия, когда в его полости могут возникать ударные волны. Рассчитываемое при этом решение (изменение радиуса и эволюция несферических возмущений) в финале сжатия может иметь значительные погрешности. Одним из способов снижения погрешности решения является совместное применение двух моделей коллапса парового пузырька в жидкости. При изучении динамики сферического пузырька такой подход показал свою эффективность как при сжатии в умеренном [3], так в интенсивном [4] акустических полях.

В настоящей работе изучается эффективность такого сочетания в случае коллапса несферического кавитационного пузырька в интенсивном акустическом поле. На начальной низкоскоростной стадии сжатия пузырька сферическая составляющая динамики жидкости и газа описывается упрощенно системой ОДУ, включающей уравнение Рэлей-Плессета для радиуса пузырька, уравнение для изменения давления пара внутри пузырька с учетом тепловых потоков через межфазную границу, совместно с уравнениями теплопроводности в частных производных. Система обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом Рунге-Кутты, при этом поле температуры рассчитывается на каждом временном шаге из уравнения теплопроводности по неявной разностной схеме второго порядка точности. В финальной высокоскоростной стадии сжатия сферическая составляющая описывается одномерными уравнениями газовой динамики с учетом теплопроводности, испарения-конденсации, используются широкодиапазонные уравнения состояния жидкого и парообразного ацетона в форме Ми-Грюнайзена. Интенсивность фазовых преобразований описывается формулой Герца-Кнудсена-Ленгмюра [4]. Уравнения газовой динамики решаются численно с помощью модификации метода С.К. Годунова второго порядка точности. Более детальную информацию о ме-

тоде расчета и расчетных сетках можно найти в работе [5].



**Рис. 1.** Зависимость амплитуды искажения сферичности пузырька от радиуса пузырька в процессе сжатия, полученная с применением упрощенной модели до  $M = 0.4$  (сплошная линия) и с применением только полной модели (символы)

Рассматривается коллапс слабонесферического парового пузырька в ацетоне в интенсивном акустическом поле. Пузырек радиуса  $R = 500$  мкм сжимается под действием перепада давления между паром, где давление равно давлению насыщения при температуре 273 К, и жидкостью, где давление равно 15 бар. В финале сжатия неоднородность распределения параметров в паре возрастает так, что внутри пузырька образуется радиально-сходящаяся ударная волна, которая в дальнейшем фокусируется в центре. Форма начальной несферичности пузырька варьировалась, путем задания отклонения формы пузырька от сферической в виде  $P_n(\cos\theta)$  с разными номерами гармоник  $n$  от 2 до 100. Отклонение формы пузырька от сферической, обезразмеренное на радиус пузырька, будем называть искажением сферичности пузырька  $\varepsilon_n$  ( $\varepsilon_{n,0}$  – начальное искажение).

Переход от одной модели к другой осуществляется по некоторому заданному значению числа Маха в паре  $M$ . Число Маха  $M = 0.2$  достигается при  $R = 307$  мкм,  $M = 0.3$  — при  $R = 250$  мкм,  $M = 0.4$  — при  $R = 213$  мкм. Для оценки погрешностей расчетов дополнительно проводятся вычисления без упрощенного моделирования, в которых радиальная составляющая движения описывается полными уравнениями газовой динамики. На рис. 1 видно, что погрешность описания амплитуды искажения сферичности пузырька  $\varepsilon_4/\varepsilon_{4,0}$  даже при довольно долгом применении упрощенной модели, до  $M = 0.4$ , остается малой. При этом затраты компьютерного времени по сравнению с расчетами без упрощенного моделирования сокращаются в 5 раз. Аналогичное поведение сохраняется для всех рассмотренных номеров гармоник  $n$  от 2 до 100.

Таким образом, совместное применение упрощенной и полной модели позволяет экономично рассчитывать коллапс несферического парового пузырька в жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00214 мол\_а).

## Литература

1. Маргулис М.А. Сонолюминесценция // УФН. – 2000. – Т. 170, № 3. – С. 263–287.
2. Нигматулин Р.И. и др. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // МЖГ. – 2010. – № 1. – С. 57–69.
3. Аганин А.А. и др. Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 1. – С. 26–40.
4. Nigmatulin R. I. et. al. *The theory of supercompression of vapor bubbles and nano- scale thermonuclear fusion* // *Phys. Fluids*. – 2005. – V. 17, № 10. – P. 1–31.
5. Аганин А.А., Халитова Т.Ф. Зависимость образования ударной волны в кавитационном пузырьке от температуры жидкости // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. – 2017. – Т. 12, № 1. – С. 89–94.

### CALCULATION OF THE COLLAPSE OF THE VAPOR BUBBLE IN THE LIQUID

T.F. Khalitova

*The possibility of combined use of two models of the collapse of a vapor bubble in a liquid with small deviations of its shape from spherical one is considered. The first model, due to the use of simplifying assumptions about weak compressibility of the liquid and the homogeneity of the pressure distribution in the vapor, is more economical and is described by a system of ODEs and heat conduction equations. The second model is time cost, but better describes the final of compression. Here, the complete equations of the dynamics of heat-conducting liquid and vapor are used, which allow one to calculate the dynamics of vapor inside a bubble when its collapse in a liquid in the case when shock waves arise inside the bubble. It is shown that the combined use of the two models can save computer time by 5 times when describing the amplitude of small distortions of bubble sphericity.*

Keywords: efficiency, bubble dynamics model, shock waves, non-sphericity.

УДК 517.518

### ОПЕРАТОРЫ ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ю.Х. Хасанов<sup>1</sup>, Ё.Ф. Касымова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> yukhas60@mail.ru; Российско-Таджикский (Славянский) университет

<sup>2</sup> yosu95@inbox.ru; Российско-Таджикский (Славянский) университет

*В работе рассматриваются проблемы приближения периодических функций многих переменных с помощью линейных операторов типа Марцинкевича, которые оптимальными методами осуществляют суммирование кратных рядов Фурье заданных функций. При этом, устанавливаются оценки приближения таких функций в рассматриваемом пространстве посредством тригонометрических полиномов.*

**Ключевые слова:** кратные ряды Фурье, периодические функции, операторы Марцинкевича, тригонометрические полиномы, наилучшие приближения.

Пусть  $f(x_1, \dots, x_m)$  –  $2\pi$ -периодическая по каждой из переменных функция, и интегрируемая по Лебегу на кубе периодов  $[0, 2\pi]^m$ , с рядом Фурье вида

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} A_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_m), \quad (1)$$

где

$$A_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_m) = \mu_{n_1, \dots, n_m} \sum_{v_1=1}^2 \dots \sum_{v_m=1}^2 a_{n_1, \dots, n_m}^{(v_1, \dots, v_m)} \prod_{i=1}^m \gamma_{v_i}(n_i x_i),$$

$\mu_{n_1, \dots, n_m} = 2^{-k}$  ( $k$  – число индексов  $n_v$ , которые равны нулю),

$$a_{n_1, \dots, n_m}^{(v_1, \dots, v_m)} = \frac{1}{\pi^{(m-l)}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{i=1}^m \gamma_{v_i}(n_i x_i) dx_i,$$

$v_i(n_i x_i) = \{\cos n_i x, i = 1; \sin n_i x, i = 2\}$ .

Рассмотрим величину

$$\rho_{n_1, \dots, n_m} = \sqrt{\mu_{n_1, \dots, n_m} \sum_{v_1=1}^2 \dots \sum_{v_m=1}^2 \left( a_{n_1, \dots, n_m}^{(v_1, \dots, v_m)} \right)^2}$$

Пространство  $S_m^p$  – это совокупность функций  $f(x_1, \dots, x_m)$ , для которых при заданных  $p$  ( $1 \leq p < \infty$ )

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} \rho_{n_1, \dots, n_m}^p < \infty.$$

В качестве нормы функций  $f(x_1, \dots, x_m)$  в пространстве  $S_m^p$  принимается величина

$$\|f\|_{S_m^p} = \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} \rho_{n_1, \dots, n_m}^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Некоторые задачи теории приближения для пространства  $S_m^p$  исследованы в работах А.И. Степанца [1], [2].

Для функций многих переменных рассматриваются линейные операторы типа Марцинкевича, которые получаются следующим образом. С помощью треугольной матрицы чисел  $\{\lambda_v(r)\}$ , ( $v = 1, 2, \dots, r$ ;  $\lambda_0(r) = 1$ ;  $\lambda_v(r) = 0$ , при  $v > r$ ) будем рассматривать линейный оператор вида

$$U(f; x_1, \dots, x_m; \lambda_v(r)) = \sum_{v=0}^r (\lambda_v(r) - \lambda_{v+1}(r)) S_{v, \dots, v}(f; x_1, \dots, x_m),$$

где

$$S_{v, \dots, v}(f; x_1, \dots, x_m) = \sum_{n_1=0}^v \dots \sum_{n_m=0}^v A_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_m)$$

частичные суммы ряда (1) порядка  $v$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) по каждой из переменных  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Для таких операторов Марцинкевича в пространствах  $S_m^p$  имеет место следующее утверждение



**Теорема.** Если  $f(x_1, \dots, x_m) \in S_m^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), то имеет место оценка

$$\|f(x_1, \dots, x_m) - U(f; x_1, \dots, x_m; \lambda_v(r))\|_{S_m^p}^p \leq \sum_{v=0}^r ((1 - \lambda_{v+1}(r))^p) E_{v, \dots, v}^p(f)_{S_m^p} + E_{r, \dots, r}^p(f)_{S_m^p},$$

где

$$E_{v, \dots, v}^p(f)_{S_m^p} = \|f(x_1, \dots, x_m) - S_{v, \dots, v}(f; x_1, \dots, x_m)\|_{S_m^p}^p.$$

Аналогичные задачи для некоторых классов почти-периодических функций исследованы в работе [3].

## Литература

1. Степанец А.И. *Аппроксимационные характеристики пространств  $S_m^p$* . – Киев: Препр. / НАН Украины. Ин-т математики, 2000. – 52 с.
2. Степанец А.И. *Аппроксимационные характеристики пространств  $S^p$* . – Киев: Препр. / НАН Украины. Ин-т математики, 2001. – 85 с.
3. Хасанов Ю.Х. *О приближении почти-периодических функций двух переменных* // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 12. – С. 82–86.

## MARCINKIEWICZ OPERATORS FOR PERIODIC FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

Yu.Kh. Khasanov, Yo.F. Kasimova

*The paper deals with the problems of approximation of periodic functions of many variables with the help of linear operators of Marcinkiewicz type, which are optimal methods to sum multiple Fourier series of given functions. Estimates of approximation of such functions in the considered space by means of trigonometric polynomials are established.*

Keywords: multiple Fourier series, periodic functions, Marcinkiewicz's operators, trigonometric polynomials, best approximations.

УДК 517.518.66

## О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ю.Х. Хасанов<sup>1</sup>, Ф.М. Талбаков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> yukhas60@mail.ru; Российско-Таджикский (Славянский) университет

<sup>2</sup> talbakov90@mail.ru; Институт математики АН Республики Таджикистан

*В работе установлены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций с малыми пропусками, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности. В качестве структурной характеристики заданной функции рассматривается модуль непрерывности.*

**Ключевые слова:** ряды Фурье, почти-периодические функции, показатели Фурье, малые пропуски, модуль непрерывности.

Пусть  $f(x)$  – интегрируемая на отрезке  $[-\pi, \pi]$  периодическая функция и имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

и последовательность  $n = n_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) удовлетворяет условию малых пропусков

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta}. \quad (2)$$

М. Нобль [1] показал, что если функция  $f(x)$  имеет ограниченное изменение и при  $k \rightarrow \infty$  выполняется соотношение

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{\log n_k} \rightarrow \infty,$$

то ряд (1) сходится абсолютно. П. Кеннеди [2] доказал, что для абсолютной сходимости рядов вида (1) достаточно, чтобы выполнялись условия  $n_{k+1} - n_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Обобщая результаты Нобля и Кеннеди для рядов Фурье с малыми пропусками вида (2), Р. Боянич и М. Томич [3] доказали, что если этот ряд на отрезке  $[-\eta, \eta] \subset [-\pi, \pi]$  ( $0 < \eta < \pi$ ) имеет модуль непрерывности вида

$$\omega(h, f) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq h} |f(x_1) - f(x_2)| \quad (x_1, x_2 \in [-\eta, \eta]),$$

то условия

$$\int_{-\eta}^{\eta} |df(t)| < \infty, \quad \int_0^1 \omega\left(\frac{1}{t}, f\right) \left(\sum_{n_k \leq t} 1\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} < \infty,$$

влекут сходимость ряда (1).

В настоящей работе найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками вида (2) в равномерной метрике.

Пусть  $f(x)$  – равномерная почти-периодическая функция, т. е.  $f(x) \in B$  и ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i\lambda_n x), \quad (3)$$

где  $A_n$  – коэффициенты Фурье функций  $f(x) \in B$ , а  $\{\lambda_n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в бесконечности [4], т. е.

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{-n} = -\lambda_n, \quad \lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty. \quad (4)$$

**Теорема.** Пусть  $f(x) \in B$  имеет ряд Фурье (3) с показателями, удовлетворяющими условию (4). Если этот ряд допускает малые пропуски вида  $n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{T}$  ( $T \rightarrow \infty$ ) и

$$\int_1^{\infty} \omega_k(f; x)_B \left(\sum_{n_k \leq x} 1\right)^{1/2} \frac{dx}{x} < \infty,$$

где  $\omega_k(f; h)_B$  – модуль гладкости функции, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k}| < \infty.$$

Эта теорема обобщает результаты Нобля и Кеннеди, потому что из неравенства

$$l = \inf_{k \geq 0} (n_{k+1} - n_k) \geq \frac{4\pi}{T}$$

вытекает, что  $n_k \geq lk$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), поэтому

$$\sum_{n_k \leq x} 1 \leq \sum_{lk \leq x} 1 \leq \frac{x}{l}.$$

## Литература

1. Noble M.E. *Coefficient properties of Fourier series with a gap condition* // Math. Ann. – 1954. – № 128. – P. 55–62.
2. Kennedy P.B. *Fourier series with gaps* // Quart. J. Math. – 1956. – № 7. – P. 224–230.
3. Боянич Р., Томич М. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье с малыми пропусками* // Матем. сб. – 1966. – Т. 70 (112), № 3. – С. 297–309.
4. Хасанов Ю.Х. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 5. – С. 745–756.

## ON SOME SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONVERGENCE OF FOURIER SERIES

Yu.Kh. Khasanov, F.M. Talbakov

*Sufficient conditions for absolute convergence of the Fourier series for uniform almost-periodic functions with small gaps are established, when the Fourier exponents have a single limit point at infinity. As the structural characteristics of the given function, we deal with the modulus of continuity.*

Keywords: Fourier series, almost-periodic functions, Fourier exponents, small gaps, continuity module.

УДК 517.95

## НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С ДВУСТОРОННИМ ЗАВИХРЕНИЕМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РАЗНОГО СТЕПЕННОГО ПОРЯДКА

Э.Н. Хасанова<sup>1</sup>, П.Л. Шабалин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> enkarabasheva@bk.ru; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

<sup>2</sup> pavel.shabalin@mail.ru; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

*Мы рассмотрели краевую задачу Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва первого рода и единственной точкой разрыва второго рода на бесконечности, приводящей к двустороннему разному степенного порядка завихрению.*

Мы нашли формулу общего решения однородной задачи, выявили полную картину разрешимости этой задачи в специальном классе функций и записали общее решение неоднородной задачи.

**Ключевые слова:** краевая задача Гильберта, индекс краевой задачи, бесконечный индекс, особенности на бесконечности, завихрение на бесконечности, целые функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-01-00282-а, № 18-31-00060.

Рассматривается, задача отыскания аналитической в верхней полуплоскости функции  $F(z)$  по краевому условию

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  являются заданными на вещественной полуоси  $L$  вещественнозначными функциями, непрерывными по Гельдеру всюду, кроме точек разрыва первого рода  $t_j$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ , причем  $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$  во всех точках непрерывности коэффициентов,  $0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ ,  $0 > t_{-1} > \dots > t_{-k} > t_{-k-1} > \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{-k} = -\infty$ . Вводится обозначение  $G(t) = a(t) - ib(t)$ ,  $G(t) = |G(t)|e^{i\mu(t)}$ , где  $\mu(t) = \arg G(t)$ . Обозначим через  $h(t)$  функцию скачков  $\mu(t)$ ,  $v(t) = \mu(t) - h(t)$ .

Теперь краевое условие (2) записывается в виде

$$\Re[e^{-iv(t)}F(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \quad (2)$$

где

$$v(t) = \begin{cases} v^- |t|^{\rho^-} + \tilde{v}(t), & t < 0, \\ v^+ t^{\rho^+} + \tilde{v}(t), & t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

а  $\rho^-, \rho^+$  – заданные числа, подчиненные ограничениям  $0 < \rho^- < 1$ ,  $0 < \rho^+ < 1$ ,  $\rho^- \neq \rho^+$ , (случай  $\rho^- = \rho^+$  подробно разобран в работах [2], [3]),  $v^- \neq 0$ ,  $v^+ \neq 0$ , а функция  $\tilde{v}(t)$  удовлетворяет условию Гельдера  $H_L(\alpha)$  на вещественной оси. Таким образом, точка разрыва второго рода на бесконечности у функции  $v(t)$  формируется как заявленным поведением в окрестности бесконечности непрерывной составляющей  $\mu(t)$ , так и функцией скачков, разрывы первого рода которой образуют знакоположительный ряд, расходящийся по заданному закону.

Для выделения особенностей краевого условия вводятся бесконечные произведения, с помощью которых устраняется счетное множество точек разрыва коэффициентов краевого условия. Для аналитического выделения особенностей на бесконечности вводится еще две специальные функции. После выделения особенностей, решение задачи ищется в особом классе, при этом, считаются выполненными все ограничения наложенные на коэффициенты краевого условия.

Похожая задача Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним степенного порядка  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , завихрением на бесконечности была поставлена и решена Р.Б. Салимовым и П.Л. Шабалиным ([1], с.111, с.148) Полная картина разрешимости однородной задачи получена в работах [2] в случае  $0 < \rho < 1/2$ , и [3] для  $1/2 \leq \rho < 1$ . В названных

выше работах с двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка этот порядок один и тот же. В работе [4] рассматривалась однородная задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним разным степенного порядка завихрением на бесконечности.

## Литература

1. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения*. – Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005.
2. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше 1/2* // Уфимский математический журнал. – 2013. – V. 5, № 2. – С. 82–93.
3. Salimov R., Shabalin P. *Solvability of the Riemann–Hilbert boundary value problem with a two-side curling at infinity point of order less than 1* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – V. 59, № 12. – P. 1739–1757.
4. Карабашева Э.Н. *О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разным порядком завихрением на бесконечности* // Известия КГАСУ. – 2014. – V. 1, № 27. – С. 242–252.

### INHOMOGENEOUS HILBERT PROBLEM WITH CIRCULATION AT INFINITY OF DIFFERENT POWER DEGREE

E.N. Khasanova, P.L. Shabalin

*We consider the Hilbert boundary value problem for the half-plane with a counting set of discontinuity points; it gives different two-side degree power curling. We found a formula for general solution, deduce solvability of homogeneous problem for a special class of functions, and write out general solution of inhomogeneous problem.*

Keywords: Hilbert boundary value problem, infinity index, vorticity at infinity, curling at infinity, entire function.

УДК 517.952

### ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

О.В. Чернова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *volga@mail.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет, институт инженерных технологий и естественных наук

*В статье для эллиптической системы первого порядка с постоянными старшими коэффициентами рассматривается задача линейного сопряжения. Установлен критерий фредгомовой разрешимости этой задачи и найдена формула ее индекса.*

**Ключевые слова:** эллиптическая система, задача линейного сопряжения, индекс.

Пусть  $\Gamma$  – простой гладкий ориентируемый контур класса  $C^{1,\nu}$ ,  $0 < \nu < 1$ , и открытое множество  $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$  есть объединение двух областей – конечной  $D_1$  и бесконечной  $D_2$ . Рассмотрим в  $D$  эллиптическую систему первого порядка

$$U_y(z) - AU_x(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

где постоянная матрица  $A \in C^{l \times l}$  не имеет вещественных собственных значений,  $(l \times l)$ -матричные коэффициенты  $a(z)$ ,  $b(z)$  комплексны и заданы вне  $\Gamma$  и  $F(z)$  – комплексная  $l$ -вектор-функция.

Под регулярным решением системы (1) понимается комплексная  $l$ -вектор-функция  $U = (U_1, \dots, U_l) \in C^1(D)$ , удовлетворяющая этой системе тождественно.

Пусть  $U^+(t)$ ,  $U^-(t)$  есть граничные значения  $l$ -вектор-функции  $U(z)$ , где положено  $U^+(t) = \lim_{z \rightarrow t} U(z)$ ,  $z \in D_1$ ;  $U^-(t) = \lim_{z \rightarrow t} U(z)$ ,  $z \in D_2$ .

Для системы (1) поставим задачу линейного сопряжения со следующим краевым условием:

$$C_{11}U^+(t) - C_{12}U^-(t) + \overline{C_{21}U^+(t) - C_{22}U^-(t)} = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2)$$

где  $(l \times l)$  – матричные коэффициенты  $C_{ij}$  принадлежат классу Гельдера  $C^\nu(\Gamma)$  и черта означает комплексное сопряжение.

Рассмотрим класс  $C_\delta^\mu(\widehat{D}, \infty)$ ,  $-1 < \delta < 0$ , функций, заданных в  $D$ , который определяется условием принадлежности этих функций пространству Гельдера  $C^\mu(\overline{D}_1)$ ,  $\mu < \nu$ , и весовому пространству Гельдера  $C_\delta^\mu(\overline{D}_2, \infty)$ ,  $-1 < \delta < 0$ , определение которого кратко напомним. Класс  $C_\delta^\mu(\overline{D}_2, \infty)$  – класс функций  $\varphi(z)$ , для которых функция  $\psi(z) = (1 + |z|)^{-\delta + \mu} \varphi(z) \in C_\mu^\mu(\overline{D}_2, \infty)$ , то есть удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\mu$  на всем множестве  $D_2$ .

Предполагая, что для матричных коэффициентов и правой части системы (1) выполнены условия

$$a(z), b(z) \in C_{\delta_0}^\mu(\widehat{D}, \infty), \quad \delta_0 < -1, \quad (3)$$

$$f(t) \in C^\mu(\Gamma), \quad F \in C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty), \quad -1 < \delta < 0, \quad (4)$$

решения  $U = (U_1, \dots, U_l)$  задачи (1) – (2) будем искать в классе  $C_{A,\delta}^\mu(\widehat{D}, \infty)$ , который явно определяется условиями

$$U \in C_\delta^\mu(\widehat{D}, \infty), \quad L_A U \in C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty). \quad (5)$$

Отметим, что относительно нормы  $|U|_{C_{A,\delta}^\mu(\widehat{D}, \infty)} = |U|_{C_\delta^\mu(\widehat{D}, \infty)} + |L_A U|_{C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty)}$  пространство  $C_{A,\delta}^\mu(\widehat{D}, \infty)$  банахово.

Фредгольмовость задачи (1)–(2) понимается в смысле фредгольмовости оператора ее краевого условия, который действует  $C_{A,\delta}^\mu(\widehat{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty) \times C^\mu(\Gamma)$ .

Обозначим через  $l_1$  и  $l_2$  числа собственных значений матрицы  $A$  системы (1) (с учетом кратности), лежащих, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, при этом  $l = l_1 + l_2$ . Множество всех собственных значений можно записать в виде  $\tilde{\sigma} = \sigma_1 \cup \overline{\sigma_2}$ ,  $\sigma_j \subseteq \{\lambda, \text{Im } \lambda > 0\}$ , где черта означает комплексное сопряжение. Тогда существуют такие обратимые  $(l \times l)$ -матрица  $B$  и жорданова матрица  $J$  блочной

структуры:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \overline{B}_{12} \\ B_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $B_{ij} \in \mathbb{C}^{l_i \times l_j}$ ,  $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$ ,  $i, j = 1, 2$ , что имеет место равенство

$$B^{-1}AB = \tilde{J}, \quad \tilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J}_2 \end{pmatrix},$$

при этом диагональные элементы жордановых матриц  $J_i$  составляют множество  $\sigma_i$ . Отметим, что матрицу  $B$  из (6) можно записать в виде  $B = (B_1, \overline{B}_2)$ , где  $B_j$  – прямоугольная матрица–столбец  $B_j = \downarrow (B_{1j}, B_{2j}) \in \mathbb{C}^{l \times l_j}$ ,  $j = 1, 2$ .

Рассмотрим блочную  $(2l \times 2l)$ -матрицу

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \overline{G}_{22} \\ G_{21} & \overline{G}_{12} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $(l \times l)$  – матрицы–функции  $G_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в обозначении (6) имеют явный вид

$$G_{11} = (C_{11}B_1, \overline{C}_{21}B_2), \quad G_{12} = (C_{12}B_1, \overline{C}_{22}B_2),$$

$$G_{21} = (C_{21}B_1, \overline{C}_{11}B_2), \quad G_{22} = (C_{22}B_1, \overline{C}_{12}B_2).$$

**Теорема.** Пусть открытое множество  $D = D_1 \cup D_2$ , простой гладкий контур  $\Gamma \in C^{1,\nu}$ ,  $(l \times l)$ -матрицы–функции  $C_{ij}(t) \in C^\nu(\Gamma)$ ,  $i, j = 1, 2$ , и для матричных коэффициентов  $a(z)$ ,  $b(z)$  и правых частей  $f(t)$ ,  $F(z)$  выполнены, соответственно, условия (3), (4). Тогда условие

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \quad (8)$$

необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1)–(2) в классе (5), и ее индекс дается формулой

$$j = -\frac{1}{\pi} [\arg \det G]_\Gamma, \quad (9)$$

где приращение  $[\ ]_\Gamma$  вдоль  $\Gamma$  берется в направлении, оставляющем область  $D_1$  слева.

**Схема доказательства.** С  $l$ -вектор–функцией  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ , где  $\phi_1$  означают первые  $l_1$  компонент, а  $\phi_2$  следующие  $l_2$  компонент, свяжем  $l$ -вектор–функцию  $\tilde{\phi} = (\phi_1, \overline{\phi}_2)$ . Как показано в работе [4], с помощью линейной подстановки  $B^{-1}U = \tilde{\phi}$  систему (1) удастся редуцировать к эквивалентной системе

$$\phi_y(z) - J\phi_x(z) + c(z)\phi(z) + b(z)\overline{\phi(z)} = F_0(z), \quad z \in D, \quad (10)$$

где  $(l \times l)$  – матричные коэффициенты  $c(z)$ ,  $d(z)$  удовлетворяют условиям (3), а  $l$ -вектор–функция  $F_0(z)$  – условию (4). При такой замене краевое условие (2) переходит в условие

$$G_{11}\phi^+(t) - G_{12}\phi^-(t) + \overline{G_{21}\phi^+(t) - G_{22}\phi^-(t)} = f_0(t), \quad t \in \Gamma, \quad (11)$$

пространство  $C_{A,\delta}^\mu(\widehat{D})$  решений системы (1) – в аналогичное пространство  $C_{J,\delta}^\mu(\widehat{D})$  решений системы (10).

Таким образом, исходная задача (1)–(2) в классе  $C_{A,\delta}^\mu(\widehat{D})$  эквивалентна задаче (10)–(11) в классе  $C_{J,\delta}^\mu(\widehat{D})$ , которую, как и выше, считаем фредгольмовой, если фредгольмов ее оператор, действующий  $C_{J,\delta}^\mu(\widehat{D}) \rightarrow C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty) \times C^\mu(\Gamma)$ .

Опираясь на теорему представления 2 из [2], примененную к двум областям  $D_1(D_2)$ , можем показать, что любую функцию  $\phi \in C_J^\mu(\widehat{D}, \infty)$  можно представить единственным образом в виде обобщенного интеграла типа Коши [2] и обобщенного оператора Векуа–Помпейю [6]

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_1(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{D_1} (\zeta-z)_J^{-1} \psi(\zeta) d_2 \zeta + i\xi; \quad \zeta, z \in D_1, \\ \phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_2(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{D_2} (\zeta-z)_J^{-1} \psi(\zeta) d_2 \zeta, \quad \zeta, z \in D_2,\end{aligned}\quad (12)$$

где комплексная  $l$ -вектор-функция  $\psi(z) \in C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^l$ -постоянный вектор, а  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ -вещественные  $l$ -вектор-функции из класса  $C^\mu(\Gamma)$ , причем  $\varphi_2(t)$  удовлетворяет условию  $\int_{\Gamma} \varphi_2(t) d_1 t = 0$ . Согласно [3], для граничных значений функции  $\phi$  имеем

$$2\phi^+ = (1 + S_J)\varphi_1 + 2I_1^{12}\psi + 2i\xi, \quad 2\phi^- = (-1 + S_J)\varphi_2 + 2I_2^{12}\psi, \quad (13)$$

где  $S_J$ -обобщенный сингулярный интеграл [3], а операторы  $(I_j^{12}\psi)(t_0)$ ,  $j = 1, 2$  действующие из  $D_1, D_2$ , соответственно, имеют явный вид

$$(I_j^{12}\psi)(t_0) = -\frac{1}{\pi i} \int_{D_j} (\zeta - t_0)_J^{-1} \psi(\zeta) d_2 \zeta, \quad t_0 \in \Gamma, \quad \zeta \in D_j, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Подставляя (13) в (11), приходим к системе  $l$  сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}G_{11}(1 + S_J)\varphi_1 + G_{12}(1 - S_J)\varphi_2 + \overline{G_{21}(1 + S_J)\varphi_1} + \overline{G_{22}(1 - S_J)\varphi_2} + \\ + 2[(G_{11}I_1^{12}\psi + \overline{G_{21}I_1^{12}\psi}) - (G_{12}I_2^{12}\psi + \overline{G_{22}I_2^{12}\psi})] + 2i(G_{11} - G_{21})\xi = 2f_0\end{aligned}\quad (15)$$

на контуре  $\Gamma$  относительно комплексной  $l$ -вектор-функции  $\psi(z)$ ,  $z \in D$ , и двух вещественных  $l$ -вектор-функции  $\varphi_j(t)$ ,  $t \in \Gamma$ ,  $j = 1, 2$ . С учетом (12) систему (10) перепишем в виде системы двумерных интегральных уравнений

$$\psi_j + c_j I_j^{21} \varphi_j + d_j \overline{I_j^{21} \varphi_j} + c_j I_j^{22} \psi_j + d_j \overline{I_j^{22} \psi_j} + i(c - d)\xi_j = F_{0j}, \quad j = 1, 2, \quad (16)$$

где  $\psi_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $F_{0j}$  суть сужения соответствующих функций на область  $D_j$ ,  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = 0$  и операторы  $I_j^{21}$ ,  $I_j^{22}$  имеют смысл, аналогичный (13).

Система (15)–(16) эквивалентна задаче (10)–(11) в классе  $C_{J,\delta}^\mu(\widehat{D}, \infty)$ . Оператор этой системы действует  $C_{\mathbb{R}}^\mu(\Gamma) \times C_{\mathbb{R}}^\mu(\Gamma) \times C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty) \times \mathbb{R}^l \rightarrow C^\mu(\Gamma) \times C_{\delta-1}^\mu(\widehat{D}, \infty)$ , где под  $C^\mu(\Gamma)$  в правой части понимается пространство комплексных  $l$ -вектор-функций.

Далее, проводя рассуждения по той же схеме, что и в теореме 2 из [5], приходим к справедливости условия (8) и формулы индекса (9), что и завершает доказательство теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №1.7311.2017/8.9.).



## Литература

1. Ващенко О.В. (Чернова О.В.) *Интегральное представление решений эллиптических систем первого порядка в классах Гельдера* // Матер. III Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». – Нальчик–Эльбрус, 2005. – С. 11–14.
2. Солдатов А.П. *Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай* // Изв. РАН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 55, № 5. – С. 1070–1100.
3. Солдатов А.П. *Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи* // Совр. пробл. матем. Фунд. направления. – 2017. – Т. 63. – С. 1–189.
4. Солдатов А.П., Чернова О.В. *К теории систем первого порядка* // Доклады Адыгской (Черкесской) Межд. академии наук. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 79–83.
5. Солдатов А.П., Чернова О.В. *Задача Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера* // Научные ведомости БелГУ. – 2009. – № 13(68), Вып. 17/2. – С. 115–120.
6. Чернова О.В. *Обобщенный оператор Векуа–Помпейю* // Научные ведомости БелГУ. – Т. 50, № 1. – С. 40–46.

### LINEAR CONJUGATION PROBLEM FOR A FIRST-ORDER ELLIPTIC SYSTEM IN THE PLANE

O.V. Chernova

*A linear conjugation problem for a first order elliptic system with constant leading coefficients is considered. The criterion of Fredholm solvability of this problem is received, and the formula of its index is found.*

Keywords: elliptic system, linear conjugation problem, index.

УДК 514.75

### ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

М.А. Чешкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ста41@yandex.ru*; Алтайский государственный университет

*Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны – это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). Различаются также три вида поверхностей постоянной положительной гауссовой кривизны. Изучаемые поверхности описываются с помощью эллиптических интегралов. Используя математический пакет, мы строим поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны.*

**Ключевые слова:** поверхности вращения, гауссова кривизна, эллиптические интегралы.

В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим поверхность вращения  $M$ , полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через  $k = (0, 0, 1)$  – орт оси, а через  $e = (\cos(v), \sin(v), 0)$  – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность вращения  $M$  можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \quad (1)$$

где  $f = f(u)$  – дифференцируемая функция,  $u, v$  – параметры.

Главные кривизны  $k_1, k_2$  поверхности  $M$  имеют вид

$$k_1 = -\frac{f(u)''}{\sqrt{(f(u)')^2 + 1}^3}, k_2 = -\frac{f(u)'}{u\sqrt{(f(u)')^2 + 1}}. \quad (2)$$

Имеем дифференциальное уравнение поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны (ПГК)  $K$ :

$$\frac{f(u)' f(u)''}{u(f(u)')^2 + 1)^2} = K. \quad (3)$$

Требуя  $K = const$ , получим решения

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1)}{c - Kt^2}} dt. \quad (4)$$

Решая (4), получим

$$f(u) = \mp \frac{I\sqrt{c-1}\text{EllipticE}\left(\frac{u\sqrt{Kc}}{c}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}\right)}{\sqrt{K}} + c_1, c, c_1 - const. \quad (5)$$

Полагаем  $K = -1$ . Используя математический пакет, находим решение (4).

Имеем

$$f(u) = \pm \left( \frac{-\text{EllipticF}\left(\frac{u\sqrt{-c+1}}{c-1}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c}\right)}{\sqrt{c}} + \frac{c\text{EllipticE}\left(\frac{u\sqrt{-c+1}}{c-1}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c}\right)}{\sqrt{c}} \right) + c_1.$$

Имеется три типа поверхностей вращения отрицательной гауссовой кривизны: волчок и катушка Миндинга и псевдосфера.

#### 1. Волчок Миндинга

При  $0 < c < 1$  имеем волчок Миндинга [1, с. 100], [2, с. 175].

Требуя, чтобы  $1 - c - u^2 > 0$ , получим  $u \in [-\sqrt{1-c}, \sqrt{1-c}]$ .

Полагая  $c = \frac{1}{4}$ ,  $c_1 = 0$ , выбирая  $+f(u)$ , получим

$$f(u) = 2\text{EllipticF}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right) - 1/2\text{EllipticE}\left(\frac{2u\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}I\right).$$

Введем обозначение  $b = f(-\sqrt{1-c}) = -2\text{EllipticK}(\sqrt{3}I) + 1/2\text{EllipticE}(\sqrt{3}I)$  и построим поверхности

$$V1: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), f(u)), V2: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), -f(u) + 2b),$$

$$V3: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), -f(u)), V4: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), f(u) - 2b).$$

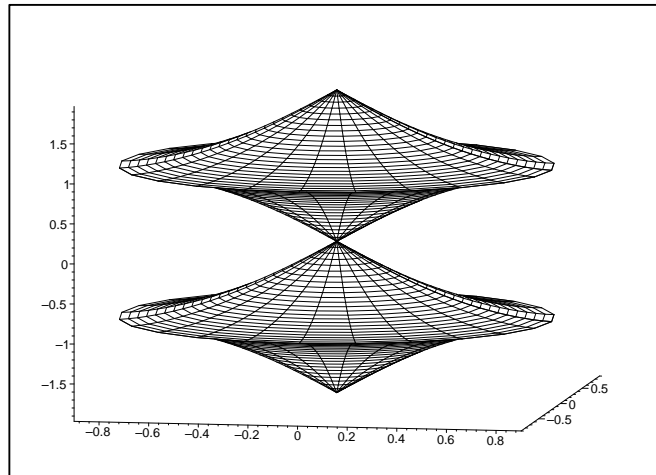
Эта поверхность называется волчком Миндинга (рис. 1).

#### 2. Псевдосфера (или поверхность Бельтрами).

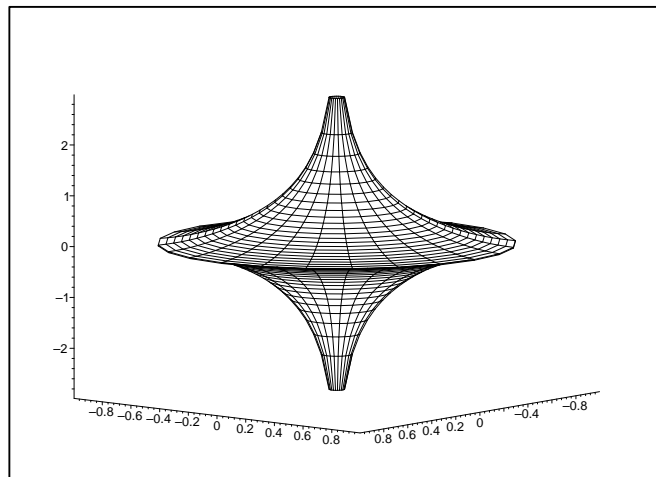
При  $c = 0$  имеем псевдосферу [1, с. 100], [2, с. 175].

Полагаем  $c = 0$ . Из (4) получим

$$f(u) = \pm \left( \sqrt{1-u^2} - \text{arcth}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right) \right) + c_1.$$



**Рис. 1.** Волчок Миндинга, 4 секции,  $c = \frac{1}{4}$



**Рис. 2.** Псевдосфера,  $c = 0$

Построим псевдосферу при  $c_1 = 0$  (рис.2).

**3. Катушка Миндинга**

При  $c < 0$ ,  $\sqrt{|c|} < u < \sqrt{|c| + 1}$  имеем катушку Миндинга [1, с. 100], [2, с. 175]. Следуя Миндингу, полагаем  $c = -a^2$ ,  $u = a \operatorname{ch}(t)$ , ( $\operatorname{ch}(t)$  – гиперболический косинус). Имеем

$$f(t) = \pm \int \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sh}(t)^2} du,$$

( $\operatorname{sh}(t)$  – гиперболический синус).

Полагая  $a = 1$ , получим

$$f(t) = \pm \int \sqrt{1 - \operatorname{sh}(t)^2} dt, f(t) = \pm 2(\operatorname{EllipticF}(\operatorname{sh}(t), I) - \operatorname{EllipticE}(\operatorname{sh}(t), I)) + C,$$

$C = \text{const}$ . При  $1 - \operatorname{sh}(t)^2 > 0$  имеем  $t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})]$ .

Введем обозначение  $b = f(\ln(1 + \sqrt{2}))$  и построим поверхности ( $C = 0$ ) (рис. 3) .

$$K1 : r(t, v) = (\operatorname{ch}(t) \cos(v), \operatorname{ch}(t) \sin(v), f(t)),$$

$$K2: r(t, v) = (\operatorname{ch}(t) \cos(v), \operatorname{ch}(t) \sin(v), -f(u) + 2b),$$

$$t \in [-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(1 + \sqrt{2})].$$

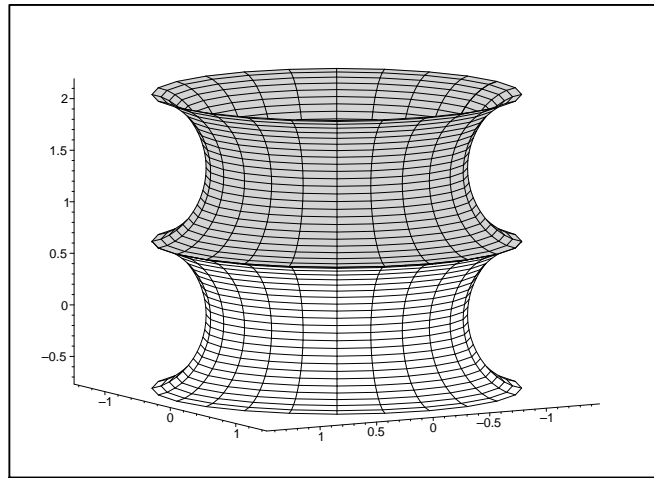


Рис. 3. Поверхности K1, K2

Полагаем  $K = 1$ . Используя математический пакет, находим решение (4). Имеем

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{t^2 - (c-1)}{c-t^2}} dt, f(u) = \mp I\sqrt{c-1} \operatorname{EllipticE}\left(\frac{u}{\sqrt{c}}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}\right) + c_1,$$

$c, c_1 = \text{const}$ . Замечаем, что  $0 < c < 1$ .

*Первый тип поверхности вращения ПГК.*

Полагаем,  $c = \frac{1}{4}, c_1 = 0$ . Имеем  $f(u) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{EllipticE}(2u, \frac{I\sqrt{3}}{3})$ .

Введем обозначение  $a = f(\sqrt{c})$  и построим поверхности (рис. 4).

$$P1: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), f(u)), P2: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), -f(u)),$$

$P3: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), -f(u) + 2a), P4: r(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), f(u) + 2a),$   
 $u \in [0, \sqrt{c}], v \in [-\pi, \pi]$ .

*Второй тип поверхности вращения ПГК.*

Исследуем случай при  $c > 1, u \in [\sqrt{c-1}, \sqrt{c}]$  [1, с.99].

Сделаем замену переменной  $u = \sqrt{c} \sin(t)$ .

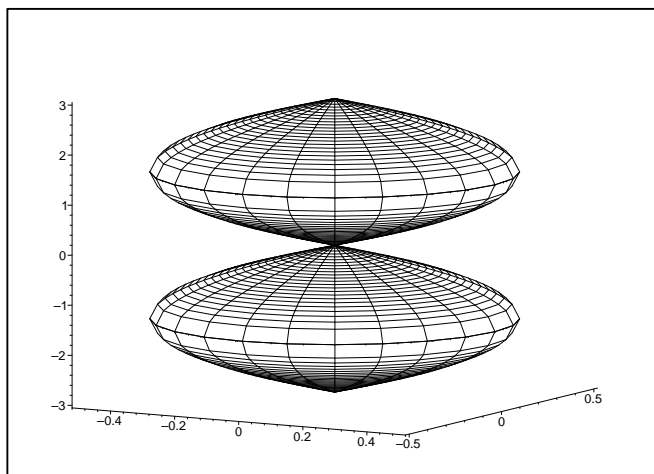
Имеем  $du = \sqrt{c} \cos(t) dt$ ,

$$df = \pm \sqrt{c} \sqrt{\frac{1}{c} - \cos(t)^2} dt.$$

При  $c = \frac{5}{4}, c_1 = 0$  получаем

$$f(t) = \pm \operatorname{EllipticE}(\cos(t), \frac{\sqrt{5}}{2}).$$

Построим поверхность вращения постоянной гауссовой кривизны  $P$  для  $c > 1$  (рис. 5)

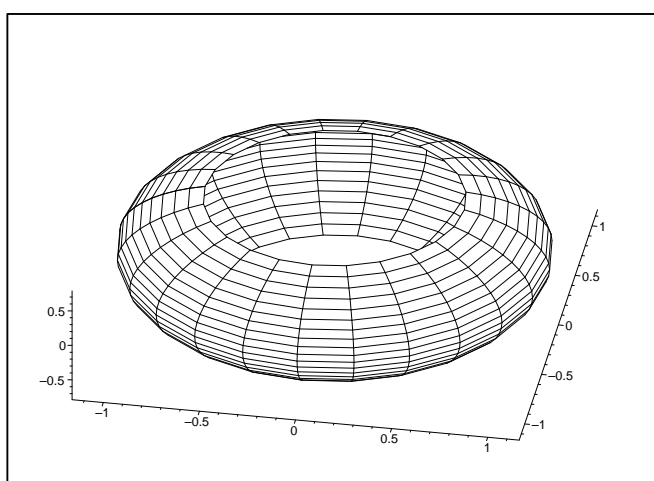


**Рис. 4.** Поверхности  $P_1, P_2, P_3, P_4, c = 1/4$

$$r(t, v) = \sqrt{\frac{5}{4}} \sin(t) e(v) - \text{EllipticE}(\cos(t), \frac{\sqrt{5}}{2}) k, t \in [\arccos(\frac{2}{\sqrt{5}}, \pi - \arccos(\frac{2}{\sqrt{5}})],$$

$$v \in [-\pi, \pi].$$

Третий тип поверхности вращения ПГК. При  $c = 1, f = \pm\sqrt{1-u^2}$  имеем сферу.



**Рис. 5.** Поверхности  $P, c = 5/4$

## Литература

1. Каган В.Ф. *Основы теории поверхностей в тензорном изложении*, Т. 1. – М.Л., 1947. – 407 с.
2. Миндинг Ф. *О внутренней геометрии поверхностей* / В сборнике классических работ по геометрии Лобачевского и развитие её идей. Под ред. Нордена А.П. – М., 1956. – 531 с.

THE SURFACES OF ROTATION OF CONSTANT GAUSSIAN CURVATURE

М.А. Cheshkova

*The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Minging top, the Minding coil,*

and the pseudosphere (Beltrami surface). There are also three types of surfaces of constant positive Gaussian curvature. The studied surfaces are described by means of elliptic integrals. Using a mathematical package, the surfaces of rotation of constant Gaussian curvature are constructed.

Keywords: surfaces of revolution, Gaussian curvature, elliptic integrals.

УДК 514.86

## УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ЗВУКОВЫМ ПУЧКОМ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА-ЗАБОЛОТСКОЙ-КУЗНЕЦОВА

О.И. Чигур<sup>1</sup>

<sup>1</sup> riman1703@gmail.com; МГУ им. М. В. Ломоносова

В работе рассматриваются вопросы управления фокусировкой звукового пучка, распространяющегося в нелинейной среде. Суть метода состоит в том, что при изменении параметров генератора звука по определенному закону звуковой пучок фокусируется на некотором расстоянии от генератора. Теоретически это обеспечивает распространение звука в нелинейной среде в заданном направлении с относительно малым рассеиванием. Эффект фокусировки был известен для звуковых пучков без учета рассеяния энергии (такие пучки описываются нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка – уравнением Хохлова-Заболотской). В нашем проекте рассматривается возможность фокусировки в средах с диссипацией (такие пучки описываются уже уравнением третьего порядка – уравнением Кузнецова). Оказалось, что и в этом случае наблюдается эффект фокусировки. Нами были использованы методы теории сингулярных решений и теории симметрий дифференциальных уравнений. Построены классы точных сингулярных решений уравнений, которые ранее не были известны, а также разработана компьютерная программа для их расчета и визуализации.

**Ключевые слова:** симметрии дифференциальных уравнений, фокусировка акустической волны, сингулярные решения дифференциальных уравнений, нелинейная акустика.

Недостатком уравнения Хохлова-Заболотской при рассмотрении распространения акустических пучков в различных средах является тот факт, что данное уравнение не учитывает явление диссипации энергии в среде. Поэтому при рассмотрении задач распространения ограниченных акустических пучков в диссипативных средах используется уравнение Кузнецова, содержащий член, отвечающий за диссипацию:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau \partial x} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\epsilon}{\rho_0 c_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} \right) + \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \rho' + b' \frac{\partial^3 \rho'}{\partial \tau^3},$$

где  $b' = \frac{1}{2c_0^3 \rho_0} \left[ \frac{4}{3} \eta + \xi + \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]$ .

Алгебра симметрий уравнения Кузнецова порождена векторными полями:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$V_2 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z},$$

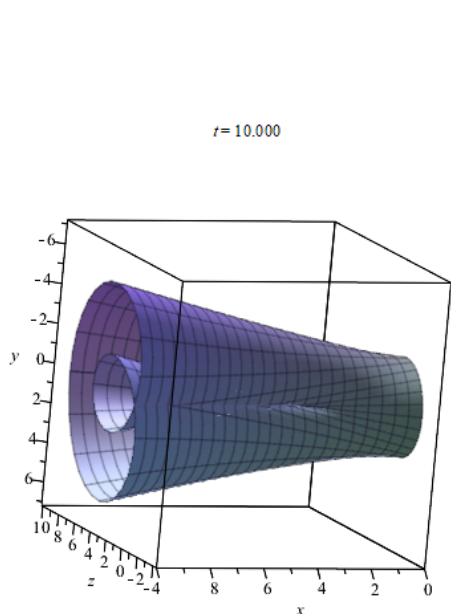
$$V_3 = \frac{2t}{3} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4x}{3} \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2u}{3} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_1 = \frac{f_1' y}{2} \frac{\partial}{\partial t} + f_1 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{f_1'' y}{2} \frac{\partial}{\partial u},$$

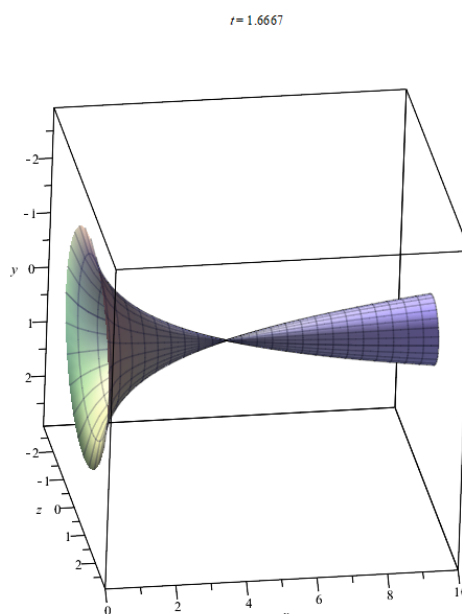
$$X_2 = \frac{f_2' z}{2} \frac{\partial}{\partial t} + f_2 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{f_2'' z}{2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3 = f_3 \frac{\partial}{\partial t} - f_3' \frac{\partial}{\partial u},$$

где  $f_1, f_2, f_3$  – произвольные дифференцируемые функции  $x$ . В данной работе описывается метод построения точных сингулярных решений уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова. Также приводится визуализация полученных решений.



**Рис. 1.** Сингулярное решение уравнения Кузнецова



**Рис. 2.** Явление фокусировки акустического пучка

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(проект 18-29-10013)

## Литература

1. Lychagin V.V. *Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena* // Acta Appl. Math. – 1985. – V. 3. – P. 135-173.
2. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. *Contact geometry and nonlinear differential equations.* – Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 101. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – xxii+496 pp.

3. Руденко О.В., Солуян С.И. *Теоретические основы нелинейной акустики*. – М.: Наука, 1975. – 287 с.
4. Кузнецов В.П. *Уравнения нелинейной акустики // Акустический журнал*. – 1970. – Т. 16, Вып. 4. – С. 548-553.

CONTROL OF NONLINEAR SOUND BEAM AND EXACT SOLUTIONS  
OF THE KOKHLOV-ZABOLOTSKAYA-KUZNETSOV EQUATION

O.I. Chigur

*The paper deals with the control of focusing a sound beam propagating in a nonlinear medium. The essence of the method is that when the parameters of a sound generator change according to a certain law, the sound beam is focused at a certain distance from the generator. Theoretically, this ensures the propagation of sound in a nonlinear medium in a given direction with a relatively small dispersion. The focusing effect was known for sound beams without taking into account energy dissipation (such beams are described by a nonlinear second-order differential equation — the Khokhlov-Zabolotskaya equation). In our project, the possibility of focusing in media with dissipation is considered (such beams are already described by a third-order equation — the Kuznetsov equation). It turned out that in this case there is a focusing effect. We used the methods of the theory of singular solutions and the theory of symmetries of differential equations. Classes of exact singular solutions of equations that were not previously known were constructed, and a computer program for their calculation and visualization has been developed.*

Keywords: symmetries of differential equations, acoustic wave focusing, singular solutions of differential equations, nonlinear acoustics.

УДК 517.977

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ  
ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ  
КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ  
ТОЛЬКО ОТ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

А.А. Шабуров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> alexandershaburov@mail.ru; Уральский федеральный университет, Институт естественных наук и математики

*Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2u, \\ J(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \end{array} \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ;  $A_{ij}$ ,  $B_i$ ,  $i, j = 1, 2$  — постоянные матрицы соответствующей размерности, а  $\varphi(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемая на  $\mathbb{R}^n$  строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием



оптимальности, и существует единственный вектор  $l_\varepsilon$ , определяющий оптимальное управление по формуле

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|)},$$

где

$$C_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon(t)} \cdot \mathcal{B}_\varepsilon = e^{A_{11}(t)} B_1 + \varepsilon^{-1} \mathcal{W}_\varepsilon(t) B_2, \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leq \xi \leq 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$

Основное отличие статьи от предыдущих работ автора заключается в том, что терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных, а управляемая система имеет более общий вид. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида управления можно построить асимптотику начального вектора сопряженного состояния  $l_\varepsilon$ , который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

**Ключевые слова:** двоякопериодические, квазидвоякопериодические, циклические постоянные.

Статья посвящена исследованию асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, глава 3] и гладкими геометрическими ограничениями на управление.

В [5, 6] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [7–9]. Отметим, что данный вид управляемой системы, но с терминальным критерием качества, был рассмотрен в [8].

В данной работе получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Главной отличительной особенностью задачи от рассмотренной в [10] является более общий вид управляемой системы.

**Предположение 1.** При всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  пара  $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$  вполне управляема, т. е.  $\text{rank}(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \dots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1} \mathcal{B}_\varepsilon) = n + m$ .

**Предположение 2.** Все собственные значения матрицы  $A_{22}$  имеют отрицательные вещественные части.

**Предположение 3.** Пары  $(A_0, B_0)$  и  $(A_{22}, B_2)$  вполне управляемы.

Пусть для предельной задачи и начального состояния системы  $x^0$  существует единственный момент времени  $t = t_0 \in (0, T)$  такой, что:

$$\forall t < t_0 : \|C_0^*(t)l_0\| > 2; \|C_0^*(t_0)l_0\| = 2; \forall t > t_0 : \|C_0^*(t)l_0\| < 2; \left. \frac{d}{dt} \|C_0^*(t)l_0\|^2 \right|_{t=t_0} \neq 0. \quad (2)$$

Потребуем выполнения условия

$$\forall l_\varepsilon \rightarrow l_0 \exists \varepsilon_0 > 0 \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \forall t \in [0, \mu] : \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2. \quad (3)$$

**Утверждение 1** Если выполнено условие

$$\forall \tau \geq 0 : \psi(\tau) := \left\| \left( B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} (A_{22}^*)^{-1} A_{12}^* \right) l_0 \right\| \neq 2 \text{ и } \psi(0) = \|B_1^* l_0\| > 2, \quad (4)$$

то выполнено и условие (3).

**Теорема 1** При выполнении условий (2) и (3) существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существует единственная точка  $t_\varepsilon$  смены вида оптимального управления в задаче (1), т. е.

$$\forall t < t_\varepsilon : \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2; \|C_\varepsilon^*(t_\varepsilon)l_\varepsilon\| = 2; \forall t > t_\varepsilon : \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| < 2.$$

При этом,  $t_\varepsilon \rightarrow t_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Утверждение 2** Если  $r_\varepsilon = o(1)$  и  $r_\varepsilon = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon\|r_\varepsilon\|) + O(\|r_\varepsilon\|^2)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то  $r_\varepsilon = O(\varepsilon^{N+1})$ .

**Теорема 2** Пусть выполнены предположения 2 и 3, а также условия (2) и (4). Тогда вектор  $l_\varepsilon$  и момент времени  $t_\varepsilon$  раскладываются в степенные асимптотические ряды

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_\varepsilon \stackrel{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5)$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

В общем случае, в предположении, что существует конечное число точек  $\{t_1, t_2, \dots, t_p\} \subset (0, T)$  таких, что

$$\forall t \in [0, T] \setminus \{t_i\}_{i=1}^p : \|C_0^*(t)l_0\| \neq 2; \|C_0^*(t_i)l_0\|^2 = 4; \left. \frac{d}{dt} \|C_0^*(t)l_0\|^2 \right|_{t=t_i} \neq 0, \quad (6)$$

дополнительное условие (4) заменяется на

$$\forall \tau \geq 0 : \psi(\tau) \neq 2 \text{ и } (\|C_0^*l_0\| - 2) \cdot (\psi(0) - 2) > 0. \quad (7)$$

**Теорема 3** При выполнении условий (6) и (7) существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существуют точки  $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\} \subset (0, T)$  смены вида оптимального управления в задаче (1). Других точек смены вида управления нет, и  $t_{i,\varepsilon} \rightarrow t_i$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  для любого  $i = 1, \dots, p$ .

**Теорема 4** Пусть выполнены предположения 2 и 3, а также условия (6) и (7). Тогда вектор  $l_\varepsilon$  и моменты времени  $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\}$  раскладываются в степенные асимптотические ряды

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{i,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_{i,k}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

## Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.
4. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Математический анализ. Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ, 1982. – Т. 20. – С. 3–77.

5. Kokotovic P.V., Haddad A.H. *Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1975. – Vol. 20, no. 1. – P. 111–113.
6. Дончев А. *Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности*. – М.: Мир, 1987. – 156 с.
7. Калинин А.И., Семенов К.В. *Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 3. – С. 432–443.
8. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. *Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 55–65.
9. Данилин А.Р., Коврижных О.О. *О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления* // Докл. РАН. – 2013. – Т. 451, № 6. – С. 612–614.
10. Шабуров А.А. *Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с интегральным выпуклым критерием качества* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2017. – Т.23, № 2. – С. 303–310.
11. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
12. Ильин А.М., Данилин А.Р. *Асимптотические методы в анализе*. – М.: Физматлит, 2009. – 248 с.
13. Данилин А.Р. *Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2006. – Т. 46, № 12. – С. 2166–2177.

ASYMPTOTIC EXPANSION OF A SOLUTION TO A SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A CONVEX INTEGRAL PERFORMANCE INDEX WHOSE TERMINAL PART ONLY DEPENDS ON SLOW VARIABLES

A.A. Shaburov

*The paper deals with the problem of optimal control with a convex integral quality index for a linear steady-state control system with a fast and slow variables in the class of piecewise continuous controls with a smooth control constraints*

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1 u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2 u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^l$ ;  $A_{ij}$ ,  $B_i$ ,  $i, j = 1, 2$  are constant matrices of the corresponding dimension, and  $\varphi(\cdot)$  is the strictly convex and cofinite function that is continuously differentiable in  $\mathbb{R}^n$  in the sense of convex analysis. In the general case, Pontryagin's maximum principle is a necessary and sufficient optimum condition for the optimization of such a problem. The vector  $l_\varepsilon$  is a unique vector, determining the optimal control by the formula

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|)},$$

where

$$C_\varepsilon(t) := e^{A_\varepsilon(t)} \cdot \mathcal{B}_\varepsilon = e^{A_{11}(t)} B_1 + \varepsilon^{-1} \mathcal{W}_\varepsilon(t) B_2, \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leq \xi \leq 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases}$$

*The main contrast with the author's preceding paper is that the terminal part of the convex integral quality index depends on slow variables, and control system has the general form. It is proven that,*

*in the case of a finite number of control switching points, it is possible to construct the asymptotics of the initial vector of the conjugate state that defines the type of optimal control. It is shown that the asymptotic expansion has the power character.*

Keywords: optimal control, singular perturbation problems, asymptotic expansion, small parameter.

УДК 514.822

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА СУБМЕРСИЙ Х.Ф. Шарипов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> sh\_xurshid@yahoo.com; Национальный университет Узбекистана

*В данной работе изучаются дифференциальные инварианты второго порядка субмерсий относительно группы движений риманова многообразия.*

**Ключевые слова:** риманово многообразие, дифференциальные инварианты, субмерсия, векторное поле.

Пусть  $\varphi : M \rightarrow B$  – субмерсия, где  $M, B$  – гладкие римановы многообразия размерности  $n$  и  $m$  соответственно,  $n > m$ .

В данной работе изучаются дифференциальные инварианты второго порядка субмерсий относительно группы движений. Этот вопрос для евклидовых пространств изучен в работах [4], [5].

Пусть  $G$  – группа преобразований многообразия  $M$ .

**Определение 1.** Функция  $I(x)$  называется инвариантом группы преобразований  $G$ , если  $I(x) = I(gx)$  для каждого элемента  $g \in G$ .

Известна следующая теорема [3].

**Теорема 1.** Функция  $I(x)$  является инвариантом группы преобразований  $G$  только и только тогда, когда имеет место  $X(I) = 0$  для каждой инфинитезимальной образующей  $X$  группы  $G$ .

Пусть  $G$  группа Ли, преобразований риманова многообразия  $M$ . Если группа  $G$  является  $k$ -мерной группой Ли, тогда она имеет равно  $k$  инфинитезимальных образующих (векторный полей).

**Определение 2.** Пусть  $M, B$  – гладкие многообразия и  $p \in M$ . Пусть  $f, g : M \rightarrow B$  гладкие отображения, удовлетворяющие условию  $f(p) = g(p) = q$ .

1)  $f$  имеет касание первого порядка с  $g$  в точке  $p$ , если  $(df)_p = (dg)_p$  как отображения  $T_p M \rightarrow T_p B$ .

2)  $f$  имеет касание  $k$ -го порядка с  $g$  в точке  $p$ , если отображение  $(df) : TM \rightarrow TB$  имеет касание порядка  $(k-1)$  с отображением  $(dg)$  в каждой точке  $T_p M$ . Этот факт записывается следующим образом:  $f \sim_k g$  в точке  $p$  ( $k$ -положительное число).

Обозначим через  $J^k(M, B)_{p,q}$  множества классов эквивалентности по отношению “ $\sim_k$  в точке  $p$ ” в пространстве отображений  $f : M \rightarrow B$ , удовлетворяющие условию  $f(p) = q$ . Положим  $J^k(M, B) = \bigcup_{(p,q) \in M \times B} J^k(M, B)_{p,q}$ .

**Определение 3.** Множество  $J^k(M, B)$  называется пространством  $k$ -джетов.

Действие группы  $G$  на  $M$  порождает некоторое действие группы на  $J^k(M, B)$ . Это действие называется  $k$ -ым продолжением действия группы  $G$  на  $J^k(M, B)$ .

Инфинитезимальными образующими  $k$ -го продолжение действия группы  $G$  на  $J^k(M, B)$  являются  $k$ -ые продолжения инфинитезимальных образующих группы  $G$ .

**Определение 4.** Функция  $I \in C^\infty(J^k(M, B))$  называется дифференциальным инвариантом порядка  $k$  группы  $G$ , если она сохраняется под действием  $k$ -го продолжения  $G$  на  $J^k(M, B)$ , то есть  $g^k(I) = I$  для любого преобразования  $g^k \in G^k$ .

Известна следующая теорема [1].

**Теорема 2.** Функция  $I$  является инвариантом порядка  $k$  группы преобразований  $G$  только и только тогда, когда она является первым интегралом инфинитезимального образующего группы  $G^k$ .

Теперь рассмотрим субмерсию  $\varphi : R_1^n \rightarrow R$ , где  $R_1^n$  –  $n$ -мерное пространство Минковского. Напомним, что в этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2$$

С движением в пространстве Минковского связаны знаменитые преобразования Лоренца. Преобразования Лоренца вместе с преобразованием вращения вокруг начала координат образует группу  $G$ . Группа  $G$  порождается векторными полями

$$X = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n; X = x_i \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_i}, n \geq i > 1; \quad (1-2)$$

$$X = -x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, n \geq j > i > 1; X = h(u) \frac{\partial}{\partial u}, h(u) \in C^\infty(R). \quad (3-4)$$

Мы изучим дифференциальные инварианты второго порядка субмерсий. Координатами в  $J^2(R_1^n, R)$  являются наборы  $(x_i, u, p_i, p_{ij})$ , где  $u$  значения функции  $\varphi$ ,  $p_i$  частные производные первого порядка,  $p_{ij}$  частные производные второго порядка от функции  $\varphi$ .

Дифференциальные инварианты второго порядка – это функции на  $J^2(R_1^n, R)$ , инвариантные относительно продолжения действия  $G$  в  $J^2(R_1^n, R)$ .

Заметим, что векторные поля (1)-(4) – контактные векторные поля с производящими функциями  $p_i, x_i p_1 + x_1 p_i, -x_j p_i + x_i p_j$  и  $h(u)$  соответственно.

Как известно [1], контактное векторное поле с производящей функцией  $f$  имеет вид

$$X_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + (f - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u}) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Продолжение векторного поля  $X_f$  в  $J^2(R_1^n, R)$  имеет вид

$$X_f^{(2)} = X_f + \sum_{i \leq j} f_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ij}}$$

где

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + p_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial u} + p_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u} + p_i p_j \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + p_{ij} \frac{\partial f}{\partial u} +$$

$$+ \sum_{r=1}^n \left( p_{rj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_r} + p_{ri} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial p_r} + p_i p_{rj} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial p_r} + p_j p_{ri} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial p_r} \right) + \sum_{r,s=1}^n p_{ir} p_{js} \frac{\partial^2 f}{\partial p_r \partial p_s}$$

Поэтому продолжения векторных полей (1)-(4) в  $J^2(R_1^n, R)$  соответственно имеют следующий вид:

$$X_{p_i}^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$X_{x_i p_1 + x_1 p_i}^2 = x_i \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_i} + (p_{11} + p_{ii}) \frac{\partial}{\partial p_{1i}} + 2p_{1i} \frac{\partial}{\partial p_{ii}} +$$

$$+ \sum_{i < j \leq n} p_{1j} \frac{\partial}{\partial p_{ij}}, \quad n \geq i > 1,$$

$$X_{-x_j p_i + x_i p_j}^2 = -x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial}{\partial p_i} - p_i \frac{\partial}{\partial p_j} + 2p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ii}} + (p_{jj} - p_{ii}) \frac{\partial}{\partial p_{ij}} +$$

$$+ \sum_{i < l \leq n, l \neq j} p_{jl} \frac{\partial}{\partial p_{il}} - 2p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{jj}} - \sum_{j < l \leq n} p_{il} \frac{\partial}{\partial p_{jl}}, \quad n \geq j > i > 1,$$

$$X_{h(u)}^2 = h(u) \frac{\partial}{\partial u} + h'(u) \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p_{ij} h'(u) + p_i p_j h''(u)) \frac{\partial}{\partial p_{ij}}, \quad h(u) \in C^\infty(R).$$

Пусть  $I = I(x_i, u, p_i, p_{ij})$  – дифференциальный инвариант второго порядка. Тогда  $I$  является первым интегралом для контактных векторных полей  $X_f^{(2)}$ . Кроме того,  $I$  – инварианты группы движений. Отсюда следует, что  $I = I(p_i, p_{ij})$ .

**Пример.** Рассмотрим субмерсию  $\varphi : R_1^2 \rightarrow R$ , где  $R_1^2$  – двумерное пространство Минковского. Напомним, что в этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2$$

Группа  $G$  порождается векторными полями

$$X = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X = u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Продолжения этих векторных полей  $J^2(R_1^2, R)$  соответственно имеют следующий вид:

$$X_{p_i}^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$X_{x_2 p_1 + x_1 p_2}^2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} + (p_{11} + p_{22}) \frac{\partial}{\partial p_{12}} + 2p_{12} \frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

$$X_{h(u)}^2 = u \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq 2} p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ij}}.$$

**Теорема 3.** Дифференциальные инвариантами второго порядка субмерсии  $\varphi : R_1^2 \rightarrow R$  являются следующие функции:

$$I_1 = \frac{p_2^2 p_{11} + 2p_1 p_2 p_{12} + p_1^2 p_{22}}{(p_2^2 - p_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$I_2 = \frac{(p_1^2 + p_2^2) p_{12} - p_1 p_2 (p_{11} + p_{22})}{(p_2^2 - p_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

## Литература

1. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии* / Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Москва: ВИНТИ, 1988. – 298 с.
2. Голубицкий М., Гийемин В. *Устойчивые отображения и их особенности*. – М.: Мир, 1977.
3. Ибрагимов Н.Х. *Азбука группового анализа*. – М.: Знание, 1989. – 48 с.
4. Кузаконь В.М. *Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 201-212.
5. Кузаконь В.М. *Дифференціальні інваріанти субмерсій багатовидів* // Вісн. держ. ун-ту "Львів. політехніка". Сер. Прикл.математика. – 1999. – № 364. – С. 295-298.

## DIFFERENTIAL INVARIANTS OF SUBMERSIONS

X.F. Sharipov

*In this paper we study differential second-order invariants of some submersions with respect to the group of motions of a Riemannian manifold.*

Keywords: Riemannian manifold, differential invariants, submersion, vector field.

УДК 514.76

## ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ТОЖДЕСТВ РИЧЧИ И БЪЯНКИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ С КРУЧЕНИЕМ

А.В. Шульц<sup>1</sup>

<sup>1</sup> tonja92@mail.ru; Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Институт физико-математических наук и информационных технологий

*В пространстве аффинной связности без кручения  $A_{n,n}^0$  методом внешних форм получены тождества Риччи и Бьянки. В пространстве аффинной связности с кручением найдены обобщенные тождества Риччи и Бьянки и показана их инвариантность.*

**Ключевые слова:** расслоение линейных реперов, пространство аффинной связности, тождества Риччи, тождества Бьянки.

1. Рассмотрим  $M_n$  –  $n$ -мерное гладкое многообразие со структурными уравнениями [1]

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I \quad (I, \dots = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Продолжая их, получим

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I \quad (\omega_{JK}^I \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0). \quad (2)$$

2. Зададим в расслоении линейных реперов  $L_{n^2}(M_n)$  со структурными уравнениями (1,2) фундаментально-групповую связность с помощью форм:

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Gamma_{JK}^I \omega^K, \quad (3)$$

где компоненты объекта связности  $\Gamma = \{\Gamma_{JK}^I\}$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma_{JK}^I + \omega_{JK}^I = \Gamma_{JKL}^I \omega^L, \quad (4)$$

дифференциальный оператор  $\Delta$  действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma_{JK}^I = d\Gamma_{JK}^I - \Gamma_{JL}^I \omega_K^L - \Gamma_{LK}^I \omega_J^L + \Gamma_{JK}^L \omega_L^I.$$

С учетом дифференциальных уравнений (4) продолженные уравнения (3) примут вид

$$d\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L, \quad (5)$$

где компоненты объекта кривизны  $R = \{R_{JKL}^I\}$  выражаются следующим образом:

$$R_{JKL}^I = \Gamma_{J[KL]}^I - \Gamma_{J[K}^M \Gamma_{|M|L]}^I.$$

Так как  $\Gamma_{JK}^I = \Gamma_{[JK]}^I + \Gamma_{(JK)}^I$ , квадратичные уравнения, полученные подстановкой форм связности (3) в структурные уравнения (1) можно записать в виде

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \tilde{\omega}_J^I + S_{JK}^I \omega^J \wedge \omega^K, \quad (6)$$

где  $\Gamma_{[JK]}^I = S_{JK}^I$ .

Уравнения (5) и (6) являются уравнениями расслоения реперов со связностью, называемого пространством аффинной связности  $A_{n,n}$ . Компоненты объектов кручения  $S_{JK}^I$  и кривизны  $R_{JKL}^I$  будут антисимметричными:

$$S_{(JK)}^I = 0, \quad R_{J(KL)}^I = 0, \quad (7)$$

где круглые скобки обозначают симметрирование.

Дифференциальные уравнения для компонент объекта кручения  $S = \{S_{JK}^I\}$  и компонент объекта кривизны  $R = \{R_{JKL}^I\}$  имеют вид:

$$\Delta S_{JK}^I = S_{JKL}^I \omega^L, \quad \Delta R_{JKL}^I = R_{JKLM}^I \omega^M. \quad (8)$$

3. В дальнейшем в уравнениях (5), (6) опустим знаки тильды. Если  $S_{JK}^I = 0$ , то получатся структурные уравнения пространства аффинной связности без кручения  $A_{n,n}^0$ :

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L. \quad (9)$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (9<sub>1</sub>), получим

$$R_{JKL}^I \omega^J \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0. \quad (10)$$

Уравнения (9<sub>2</sub>) продифференцируем и воспользуемся оператором  $\nabla$ :

$$\nabla R_{JKL}^I \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0, \quad (11)$$

где  $\nabla R_{JKL}^I = dR_{JKL}^I + R_{JKL}^M \omega_M^I - R_{MKL}^I \omega_J^M - R_{JML}^I \omega_K^M - R_{JKM}^I \omega_L^M$ .

Из кубичных уравнений (10) получаем, что

$$R_{[JKL]}^I = 0,$$



а учитывая условие антисимметрии (7<sub>2</sub>) по двум индексам тензора кривизны, альтернирование заменится циклированием:

$$R^I_{\{JKL\}} = 0.$$

Полученное равенство является тождеством Риччи. Подставляя дифференциальные уравнения (8<sub>2</sub>) в уравнения (11), получим тождество Бьянки

$$R^I_{J\{KLM\}} = 0.$$

4. Рассмотрим пространство аффинной связности с кручением  $A_{n,n}$ , структурные уравнения Картана которого имеют вид:

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J + S^I_{JK} \omega^J \wedge \omega^K, \quad d\omega^I_J = \omega^K \wedge \omega^I_{JK} + R^I_{JKL} \omega^K \wedge \omega^L.$$

Продифференцируем эти уравнения, произведения базисных форм вынесем за скобки, соберем слагаемые, входящие в оператор  $\Delta$  и используем дифференциальные уравнения (8):

$$(S^I_{JKL} - R^I_{JKL} - 2S^I_{MK} S^M_{JL}) \omega^J \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0, \quad (R^I_{JKLM} + 2R^I_{JNL} S^N_{MK}) \omega^K \wedge \omega^L \wedge \omega^M = 0.$$

Проальтернированные по трем индексам коэффициенты при произведениях базисных форм обращаются в нуль. Учитывая то, что тензоры кручения, кривизны и их пфаффовы производные по двум индексам антисимметричны, заменим альтернирование циклированием:

$$S^I_{\{JKL\}} - R^I_{\{JKL\}} - 2S^I_{M\{K} S^M_{JL\}} = 0, \quad R^I_{J\{KLM\}} + 2R^I_{JN\{L} S^N_{MK\}} = 0. \quad (12)$$

Это обобщенные тождества Риччи и Бьянки, которые в работе [3] названы тождествами Риччи и Бьянки, а в монографии Кириченко [2] – тождеством Риччи и вторым тождеством Бьянки.

Введем обозначения:

$$A^I_{JKL} \equiv S^I_{\{JKL\}} - R^I_{\{JKL\}} - 2S^I_{M\{K} S^M_{JL\}}, \quad B^I_{JKLM} \equiv R^I_{J\{KLM\}} + 2R^I_{JN\{L} S^N_{MK\}}. \quad (13)$$

Продолжим уравнения (8), результатом чего являются сравнения:

$$\Delta S^I_{JKL} \cong 0, \quad \Delta R^I_{JKLM} \cong 0 \pmod{\omega^I}. \quad (14)$$

Учитывая сравнения (14) при дифференцировании величин (13), получим

$$\Delta A^I_{JKL} \cong 0, \quad \Delta B^I_{JKLM} \cong 0 \pmod{\omega^I}. \quad (15)$$

Из сравнений (14) следует, что  $A^I_{JKL}$  и  $B^I_{JKLM}$  – тензоры, тогда можем утверждать, что обобщенные тождества Риччи и Бьянки (12) в пространстве аффинной связности  $A_{n,n}$  инвариантны [3].

**Теорема.** *Обобщенные тождества Риччи и Бьянки инвариантны вне зависимости от ковариантных, либо пфаффовых производных тензоров кручения и кривизны, которые в них используются.*

## Литература

1. Лаптев Г.Ф. Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геом. семин. – М.: ВИНТИ, 1969. – Т. 2. – С. 161–178.
2. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
3. Шевченко Ю.И. Полуголономные, голономные и тривиальные пространства аффинной связности // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. – Сер.: Физико-математические и технические науки. – 2013. – № 10. – С. 43–48.

### ON THE INVARIANTNESS OF IDENTITIES OF THE RICCI AND BIANCHI IN THE AFFINE CONNECTION WITH TORSION

A.V. Shults

*In the space of affine connection without torsion, the Ricci and Bianchi identities are obtained by the method of exterior forms. In the space of affine connection with torsion, generalized Ricci and Bianchi identities are found, and their invariance is shown.*

Keywords: the bundle of linear frames, the space of affine connection, the Ricci identity, the Bianchi identity.

УДК 531/534

### ПОСТРОЕНИЕ НЕГОМОГЕННОЙ КОНЕЧНО ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

В.В. Яикова<sup>1</sup>, Д.А. Мухин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> yaikovavictoriya@mail.ru; Институт математики и механики им Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

<sup>2</sup> dimonchik.2342@yandex.ru; Институт математики и механики им Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

*В работе обсуждается создание методики построения расчетной конечно-элементной модели по данным компьютерной томографии (КТ). Для оценки модели проводились расчеты бедренной кости. Выполнены следующие этапы работы: обработка данных КТ в пакете Avizo, определение механических свойств в локальной области, построение конечно-элементной сетки с распределёнными механическими свойствами, создание методики для оценки напряжённо-деформированного состояния в локальной области, решение задач и сравнение результатов для распределенной и осредненной моделей. Численные результаты в данных задачах выполнены с помощью метода конечных элементов в пакете Ansys и наглядно иллюстрируют значимые различия в результатах напряженно-деформированного состояния органа, позволяя судить о локальной прочности костной ткани.*

**Ключевые слова:** математическое моделирование, негомогенные среды, компьютерная томография.

Костная ткань обладает неравномерными механическими свойствами, что является следствием ее адаптационных свойств. Снижение физической активности,

физиологические или возрастные особенности могут приводить к локальной потере прочности костных органов. Ставится задача оценки механических свойств органа в распределенном смысле. Современные подходы к численному моделированию позволяют решать задачи для сложных областей наряду с развитием компьютерной томографии, позволяющей сделать вывод о внутреннем строении органа.

Данная задача является актуальной на данный момент в таких отраслях медицины, как ортопедия и травматология.

При построении модели подразумевалось, что материал изотропный и негетерогенный. Из предположения наличия связи между физической плотностью и механическими характеристиками оптическая плотность использовалась для расчета модуля Юнга и предельных напряжений. Основная идея заключается в построении взаимосвязи между конечно-элементной сеткой и данными КТ. Для этого необходимо определить коэффициенты ослабления в узлах на дискретизированном множестве, которое представляет набор данных узлов и элементов. Далее проводится осреднение механических характеристик для каждого элемента, что позволяет, находясь в рамках упругой постановки, использовать классические конечные элементы.

Для оценки значимости предлагаемого подхода были рассмотрены две модели: негетерогенная и гетерогенная, обладающая той же геометрией, теми же граничными условиями, но с осредненными механическими характеристиками. Изучались следующие задачи: одноосное сжатие, изгиб и совместный изгиб со сжатием. После получения решения анализировались поля распределений напряжений по Мизесу и коэффициента запаса. Стоит отметить, что локализация максимальных напряжений и наибольший коэффициент запаса для негетерогенного и гетерогенного случая значительно отличались в каждом из трех расчетных случаев.

Таким образом, данные примеры иллюстрируют необходимость учета распределения механических свойств костного органа при моделировании НДС. Качественным образом изменяются картины распределения коэффициентов запаса, значительно изменяются их количественные значения. Приведенная методика позволяет моделировать механическое поведение костных органов с учетом индивидуализации не только геометрии органа, но и его механических свойств.

## Литература

1. Gupta S., Dan P., *Bone geometry and mechanical properties of the human scapula using computed tomography data* // Trends Biomater. Artif. Organs. – 2004. – Vol. 17, № 2. – P. 61-70.
2. Акулич Ю.В. Акулич А.Ю., Денисов А.С., Шайманов П.С., Шулятьев А.Ф. *Уточнение индивидуальной зависимости модуля упругости трабекулярной костной ткани от объемного содержания матрикса* // Российский журнал биомеханики. – 2014. – Т. 18, № 2. – С. 158–167.
3. Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B., *Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone* // Med. Eng. Phys. – 1995. – Vol. 17(5). – P. 347-551.
4. Саченков О.А. Хасанов Р.Ф., Андреев П.С., Коноплев Ю.Г., *Численное исследование напряженно-деформированного состояния тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости* // Российский журнал биомеханики. – 2016. – Т. 20, № 3. – С. 257–251.

## CONSTRUCTION OF INHOMOGENEOUS FINITE-ELEMENT MODEL OF THE CT SCAN

V.V. Yaikova, D.A. Mukhin

*The creation of a method for constructing a computational finite element model based on computed tomography (CT) data is discussed in this paper. Calculations of the femur constructure were carried out to evaluate the model. The following stages were performed: processing of CT data in the Avizo package, determination of mechanical properties in the local area, construction of a finite element grid with distributed mechanical properties, creation of a technique for estimating the stress-strain state in the local area, solving the problem, and comparison of results for distributed and averaged models. Numerical results in these problems are performed using the finite element method in the Ansys package and clearly illustrate significant differences in the results of the stress-strain state of the organ, allowing to judge the local strength of bone tissue.*

Keywords: mathematical modeling, inhomogeneous environment, computed tomography.

УДК 517.956.3

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА  $n$**

Ю.О. Яковлева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [julia.yakovleva@mail.ru](mailto:julia.yakovleva@mail.ru); Самарский государственный технический университет

*В статье рассматривается задача Коши для системы дифференциальных гиперболических уравнений порядка  $n$ , не содержащей производных порядка меньше  $n$ , с некрратными характеристиками в случае коммутирующих матричных коэффициентов. Регулярное решение задачи Коши для системы дифференциальных гиперболических уравнений порядка  $n$  получено в явном виде.*

**Ключевые слова:** гиперболическое дифференциальное уравнение порядка  $n$ , система гиперболических уравнений порядка  $n$ , некрратные характеристики, метод общих решений, задача Коши.

Рассмотрим систему дифференциальных гиперболических уравнений порядка  $n$  с двумя независимыми переменными  $x, y \in \mathbb{R}$  на плоскости, не содержащую производных порядка меньше  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^n A_k \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k} \partial y^k} U(x, y) = 0, \quad (1)$$

где  $U(x, y) = (u^1(x, y), u^2(x, y))^T$  — двумерная вектор-функция,  $A_k, k = \overline{0, n}$  — постоянные матрицы размера  $(2 \times 2)$ .

Пусть матрицы  $A_0, A_1, \dots, A_n$  попарно коммутируют, тогда существует такое преобразование подобия  $T$ , которое одновременно приводит матрицы  $A_0, A_1, \dots, A_n$  к диагональной форме  $\Lambda_{A_0}, \Lambda_{A_1}, \dots, \Lambda_{A_n}$ . Предположим также, что матрицы  $\Lambda_{A_0}, \Lambda_{A_1}, \dots, \Lambda_{A_n}$  таковы, что имеют различные ненулевые действительные собственные значения.

**Задача Коши.** Найти регулярное решение  $U(x, y) \in C^n(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  системы дифференциальных уравнений (1) в плоскости  $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , которое удовлетворяет

условиям на линии  $y = 0$ :

$$\frac{\partial^k}{\partial l^k} U(x, y)|_{y=0} = S_{n-k}(x), \quad k = \overline{0, n-1},$$

где  $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x) \in C^n(\mathbb{R})$  — заданные вектор-функции,  $\vec{l} = (0, 1)$  — нормаль к нехарактеристической линии  $y = 0$ .

Выполнив замену

$$U = TW, \quad W(x, y) = (w^1(x, y), w^2(x, y))^T$$

при  $\det T \neq 0$ , совершим переход к системе вида:

$$\Lambda_{A_0} W_{xxxx\dots x} + \Lambda_{A_1} W_{xxx\dots xy} + \dots + \Lambda_{A_{n-1}} W_{x\dots yyy} + \Lambda_{A_n} W_{yyy\dots y} = 0. \quad (2)$$

Пусть каждое характеристическое уравнение системы (2) имеет  $n$  различных ненулевых корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  соответственно. Тогда, с помощью метода общих решений, решение системы (2) может быть получено в виде

$$\begin{cases} w^1(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k^1(y + \lambda_k x), \\ w^2(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k^2(y + \mu_k x). \end{cases}$$

Функции  $f_k^1, f_k^2$  определяются по формуле:

$$\begin{aligned} f_k(\lambda_k x) = & \lambda_k^{n-1} \frac{(-1)^{n+k+1}}{(n-2)!} \frac{a_n}{a_0} \int_0^x \tau_1(s) (x-s)^{n-2} ds + \\ & + \lambda_k^{n-1} \frac{(-1)^{n+k+1}}{(n-3)!} \frac{a_{n-1}}{a_0} \int_0^x \tau_2(s) (x-s)^{n-3} ds + \dots + \lambda_k^{n-1} (-1)^{n+k+1} \tau_n(x), \end{aligned}$$

где  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  — координаты вектор-функций  $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x) \in C^n(\mathbb{R})$ .

Регулярное решение задачи Коши для системы (1) может быть получено в явном виде как решение матричного уравнения  $W = T^{-1}U$ .

## Литература

1. Андреев А.А., Яковлева Ю.О. *Задача Коши для уравнения гиперболического типа порядка  $n$  общего вида с некротными характеристиками* // Вестник Самарского гос. техн. ун-в. Серия: физ.-мат. науки — 2016. — Т. 43, № 2. — С. 241–248.
2. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. — Казань: Казанское матем. об-во, 2001. — 226 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
4. Яковлева Ю.О. *Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некротными характеристиками* // Вестник Самарского гос. техн. ун-в. Серия: физ.-мат. науки — 2012. — Т. 26, № 1. — С. 247–250.

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE  $N$ -TH ORDER

J.O. Yakovleva

*In the paper, the Cauchy problem is considered for a system of hyperbolic differential equations of the  $n$ -th order with nonmultiple characteristics. A regular solution of the Cauchy problem is constructed in an explicit form.*

Keywords:  $n$ -th order hyperbolic differential equation, system of hyperbolic differential equations of the  $n$ -th order, nonmultiple characteristics, method of general solutions, Cauchy problem.

УДК 517.984, 517.929

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ  
ОБОБЩЕННЫЕ ЯКОБИЕВЫЕ МАТРИЦЫ**

Р.Н. Ярметова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> tagirova\_rena@mail.ru; Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

*Работа посвящена матричному представлению минимального оператора, порожденного в гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$  симметрическим дифференциальным выражением с полиномиальными коэффициентами. Возникающие при этом матрицы являются обобщенными якобиевыми матрицами. Исходя из этого, исследуется задача об индексах дефекта и характере спектра самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного дифференциальными выражениями с полиномиальными коэффициентами в случае, когда связанные с ними матрицы чисто диагональные или только элементы двух диагоналей отличны от нуля.*

**Ключевые слова:** симметрические дифференциальные и разностные операторы, обобщенные якобиевые матрицы, индекс дефекта, самосопряженные расширения, спектр.

Хорошо известно, что система функций

$$\varphi_s(x) = (2^s s! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_s(x) e^{-x^2/2}, \quad s = 0, 1, \dots,$$

где

$$H_s(x) = (-1)^s e^{x^2} (e^{-x^2})^{(s)}$$

– классические ортогональные многочлены Чебышева-Эрмита, образует ортонормированный базис пространства  $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$  ( $:= \mathcal{L}^2$ ). Известно также, что эти функции являются базисом матричного представления минимального замкнутого симметрического оператора  $L$ , порожденного дифференциальным выражением

$$l = \sum_{i+j \leq n} h_{ij} a^{*i} a^j, \quad (1)$$

в пространстве  $\mathcal{L}^2$ , где  $n \geq 0$  – целое число,  $h_{ij}$  – комплексные числа и

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right).$$

В указанном базисе матричное представление оператора  $L$  является бесконечной якобиевой матрицей с матричными элементами специального вида.

1) Рассмотрим случай, когда в выражении (1) коэффициенты  $h_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ , т. е. дифференциальное выражение  $l$  имеет вид

$$l = \sum_{i=0}^k h_{ii} a^{*i} a^i,$$

где  $h_{ii}$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) – вещественные числа и  $h_{kk} \neq 0$ . В этом случае оператор  $L$  является симметрическим дифференциальным оператором порядка  $2k$ , матричное представление которого имеет чисто диагональную форму. Следовательно, оператор  $L$  самосопряжен, полуограничен и имеет дискретный спектр, а собственные значения  $\lambda_s (= c_{ss})$  этого оператора вычисляются по формулам

$$\lambda_s = s! \sum_{i=0}^{\min\{s,k\}} \frac{h_{ii}}{(s-i)!}, \quad s = 0, 1, \dots,$$

при этом, функция  $\varphi_s$  является собственным вектором, соответствующим собственному значению  $\lambda_s$  ( $s = 0, 1, \dots$ ).

2) Пусть теперь в формуле (1)  $m \geq 1$  и  $k \geq 0$  – целые числа, и пусть  $n = 2k + m \geq 3$ , а дифференциальное выражение  $l$  имеет вид

$$l = \sum_{i=0}^k \{h_i a^{*i+m} a^i + \bar{h}_i a^{*i} a^{i+m}\},$$

где  $h_0, h_1, \dots, h_k$  – произвольные комплексные числа и  $h_k \neq 0$ . В этом случае, в соответствующей якобиевой матрице только элементы двух диагоналей отличны от нуля, а именно, диагонали с номером  $m$  выше и ниже главной (нулевой) диагонали. Исходя из этого, найдены дефектные числа операторов порожденных дифференциальным выражением  $l$  и их степеней.

В докладе также будут приведены примеры операторов, порожденных дифференциальными выражениями не более третьего порядка с полиномиальными коэффициентами и их степеней в пространстве  $\mathcal{L}^2$ , перечислены некоторые спектральные свойства этих операторов. Установлено, что дефектные числа этих операторов могут быть не только меньше или равны, но, что особенно интересно, и больше порядка соответствующих дифференциальных выражений.

Доклад основан на совместной статье: К.А. Мирзоев, Н.Н. Конечная, Т.А. Сафонова, Р.Н. Тагирова “Обобщенные якобиевы матрицы и спектральный анализ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами”.

DIFFERENTIAL OPERATORS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS AND  
GENERALIZED JACOBI MATRICES ASSOCIATED WITH THEM

R.N. Yarmetova

*This paper is devoted to the matrix representation of the minimal operator, generated by a symmetric*

*differential expression with polynomial coefficients in a Hilbert space  $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$ . The resulting matrices are generalized Jacobian matrices. Based on this, we study the problem of deficiency index and the spectral characteristics of self-adjoint extensions of the minimal operator generated by differential expressions with polynomial coefficients, when the matrices, associated with them, are purely diagonal or only elements of the two diagonals are non-zero.*

Keywords: symmetric differential and difference operators, generalized Jacobi matrix, deficiency index, self-adjoint extensions, spectrum.

УДК 004.42

## МЕТОД ОРГАНИЗАЦИИ ЦИФРОВЫХ КОЛЛЕКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТАДААННЫХ И СИСТЕМЫ СЕМАНТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

Р.Р. Батыршина<sup>1</sup>, Е.К. Липачев<sup>2</sup>, Э.М. Сабитова<sup>3</sup>, К.А. Семенова<sup>4</sup>

<sup>1</sup> [r-batyrshina@mail.ru](mailto:r-batyrshina@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup> [elipachev@gmail.ru](mailto:elipachev@gmail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>3</sup> [www.insli1234@mail.ru](mailto:www.insli1234@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

<sup>4</sup> [kseiiiia\\_andreevna95@mail.ru](mailto:kseiiiia_andreevna95@mail.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*Работа посвящена методам организации цифровых математических коллекций из набора документов, хранящихся в различных файловых форматах, имеющих разную структуру (напр., монографии, сборники статей, тезисы докладов) и отличающихся по составу представленных метаданных. Описан алгоритм создания цифровой коллекции “Трудов математического центра им. Н.И.Лобачевского” и включения этой коллекции в цифровую математическую библиотеку Lobachevskii-DML. В связи с этим приведены методы извлечения метаданных из документов, установления семантических связей и разделения документов, представляющих сборники, на отдельные статьи.*

**Ключевые слова:** цифровая коллекция, цифровая математическая библиотека, метаданные, семантическая связь, семантический метод, Lobachevskii-DML

Работа посвящена методам создания цифровых научных коллекций из массива разнородных оцифрованных документов в соответствии с основополагающими принципами Всемирной цифровой математической библиотеки [2]. Описан процесс формирования цифровой коллекции из набора файлов, содержащих тома “Трудов математического центра им. Н.И.Лобачевского” за 1998–2017 гг.

Как известно, управление информацией в сети основано на использовании метаданных [3]– [4]. Создание цифровой коллекции из набора документов предполагает не только расширение набора метаданных, но и их нормализацию в соответствии с установленными схемами данных. Цифровые библиотеки, в свою очередь, накладывают дополнительные требования на состав и формат метаданных [5]. Специфика математических документов должна учитываться при формировании метаданных цифровых математических библиотек [6]. Нашей задачей является созда-



ние методов, позволяющих программным способом извлекать необходимые метаданные из цифровых математических документов и устанавливать семантические связи между объектами.

Основным назначением “Трудов математического центра им. Н.И.Лобачевского” является публикация материалов математических конференций и, как следствие, большинство томов “Трудов” содержат несколько десятков статей с ограниченным, с современной точки зрения, составом метаданных. С 1998 года, с момента выпуска первого тома, использовалось несколько правил подготовки материалов, что отразилось на оформлении статей и форматах файлов сборников. Необходимым условием создания цифровой коллекции из файлового массива “Трудов” являлось разделение томов на отдельные статьи, выделение метаданных, описывающих каждую статью, генерация дополнительных метаданных, содержащих, в частности, библиографическое описание статьи, ссылку на файл статьи в цифровой коллекции, а также связи с профилями авторов статьи на академических порталах и наукометрических базах (kpfu.ru, MathNet.ru, Scopus и др.).

На первом этапе производилась обработка массива файлов “Трудов” с целью выделения метаданных, описывающих как том в целом, так и статей, входящих в него. В частности, определялись номера страниц всех статей каждого тома. Для этого разработан алгоритм, использующий структурную однородность каждого тома и стиливую однозначность в оформлении статей в нем, для поиска страниц с названиями статей. Это позволило выделить не только названия статей, но и списки авторов, блоки библиографии и другие метаданные (напр., email, ключевые слова), в случае их наличия в тексте. Предварительно была произведена кластеризация, в результате которой тома были разделены на классы по сходству их структуры и оформления. Для каждого класса разработан набор паттернов регулярных выражений, задающих правила поиска информационных блоков. Основой этого алгоритма является подход, предложенный в [7]. Алгоритм реализован в виде программ на C#, позволяющих обрабатывать файлы в форматах TeX, OpenXML (.docx) и PDF. TeX-файлы обрабатывались с помощью стандартных функций, реализующих операции с текстовыми строками. Для работы с PDF-файлами использовались функции библиотек PDFLib (<https://www.pdflib.com>) и iTextSharp (<https://www.nuget.org/packages/iTextSharp/>). Для документов, представленных в виде .docx-файлов, производился разбор файла “word/document.xml”, выделенного из .docx-архива в соответствии с форматом Office OpenXML (см., напр., [8]).

Предложен XML-язык описания цифровых математических коллекций, состоящий из набора тегов и XML-схем, основанных на Journal Archiving and Interchange Tag Suite (<https://jats.nlm.nih.gov/1.2d2/>). В нотации этого языка, на основании данных, полученных на этапе обработки массива файлов, проведено описание коллекции “Трудов Математического центра”.

С помощью методов текстового анализа [9] из документов цифровой коллекции выделены термины, из которых образованы наборы ключевых слов для включения в состав метаданных. Алгоритм извлечения терминов является развитием подхода, предложенного в [10].

Следующий этап создания цифровой коллекции состоял из процедур разделения каждого тома “Трудов” на отдельные статьи, присвоения полученным файлам имен в соответствии с правилами коллекции и установления семантических связей. Алгоритм назначения связей в цифровой коллекции основан на методе работы [11]. Процесс выделения статей производился с помощью программы, разработанной на языке Python с использованием функций библиотеки PyPDF2 (<http://pybrary.net/pyPdf/>) [12].

Ряд метаданных, таких как электронная почта авторов, их аффилиация и др. были импортированы и уточнены из профилей авторов на академических сайтах и базах. В этой процедуре были применены семантические связи, установленные в процессе формирования цифровой коллекции.

Система метаданных, подготовленных в процессе работы приведенного алгоритма, позволила сформировать цифровую коллекцию “Трудов математического центра им. Н.И.Лобачевского” и включить ее в состав цифровой библиотеки Lobachevskii-DML (<https://lobachevskii-dml.ru/>) [13], [14].

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект 1.2368.2017/ПЧ, и при частичной финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-47-160012.

## Литература

1. *Developing a 21st Century Global Library for Mathematics Research*. – Washington, The National Academies Press, 2014. – 131 p. DOI: <https://doi.org/10.17226/18619>.
2. Gartner R. *Metadata. Shaping Knowledge from Antiquity to the Semantic Web*. – Springer, 2016. – 114 p.
3. Sicilia M.-A. (Ed.) *Handbook of Metadata, Semantics and Ontologies*. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014. – 570 p.
4. Lubas R., Jackson A., Schneider I. *The Metadata Manual*. – Chandos Publishing, 2013. – 216 p.
5. Alemu G., Stevens B. *An Emergent Theory of Digital Library Metadata*. – Elsevier Ltd., 2015. – 122 p.
6. Elizarov A. M., Lipachev E. K., Zuev D. S. *Digital Mathematical Libraries: Overview of Implementations and Content Management Services // CEUR Workshop Proceedings*. – 2017. – Vol. 2022. – P. 317–325.
7. Elizarov A. M., Khaydarov Sh. M., Lipachev E. K. *Scientific documents ontologies for semantic representation of digital libraries // 2017 Second Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC)*. Vladivostok, 2017. – P. 1–5. – DOI: 10.1109/RPC.2017.8168064.
8. *Standard ECMA-376 Office Open XML File Formats*. URL: <http://www.ecma-international.org/publications/standards/Ecma-376.htm>.
9. Ingersoll G. S., Morton T. S., Farris A. L. *Taming Text. How to Find, Organize, and Manipulate It*. – Manning Publications Co., 2013. – 320 p.
10. Батыршина Р. Р. *Метод извлечения терминов в цифровых математических коллекциях // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского*. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. – Т. 55. – С. 24–26.
11. Сабитова Э. М. *Алгоритм извлечения связей в научных цифровых коллекциях // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского*. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. – Т. 55. – С. 123–126.

12. Семенова К. А. *Алгоритм формирования метаданных цифровых научных коллекций на основе семантического анализа документов*. – Выпускная квалификационная работа (бакалаврская работа), Казань, 2017. – 56 с.
13. Elizarov A. M., Lipachev E. K. *Lobachevskii DML: Towards a Semantic Digital Mathematical Library of Kazan University* // CEUR Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 2022. – P. 326–333.
14. Елизаров А. М., Липачев Е. К. *Семантические методы и инструменты электронной математической библиотеки Lobachevskii-DML* // Научный сервис в сети Интернет: труды XIX Всероссийской научной конференции. – М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. – С. 130–136. – doi:10.20948/abrau-2017-73.

#### METHOD OF ORGANIZING DIGITAL COLLECTIONS BASED ON METADATA AND SYSTEM OF SEMANTIC RELATIONS

R.R. Batyrshina, E.K. Lipachev, E.M. Sabitova, K.A. Semenova

*The work is devoted to the methods of organization of digital mathematical collections from a set of documents stored in various file formats that have different structures (monographs, collections of articles, or abstracts) and different sets of metadata. We describe an algorithm for creating a digital collection of “Proceedings of the N.I. Lobachevskii Mathematical Center” in order to include this collections in the Lobachevskii Digital Mathematical Library. In this regard, we present methods for extracting metadata from documents, establishing semantic relations, as well as methods for splitting documents representing collections into separate articles.*

Keywords: digital collection, Digital Mathematics Library, metadata, semantic relation, semantic method, Lobachevskii-DML.

УДК 517.54

#### ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА АЭРОГИДРОДИНАМИКИ С ЗАДАННОЙ ВЕЛИЧИНОЙ СКОРОСТИ НЕВОЗМУЩЕННОГО ПОТОКА

Р.Б. Салимов<sup>1</sup>, Э.Н. Хасанова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *salimov.rsb@gmail.com*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет  
<sup>2</sup> *enkarabasheva@bk.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

*Рассмотрена обратная краевая задача аэрогидродинамики в видоизмененной постановке, где требуется найти форму крылового профиля, обтекаемого потенциальным потоком несжимаемой невязкой жидкости, по заданному на нём распределению потенциала скорости как функции абсциссы точки профиля, при заданной величине скорости в передней кромке профиля и величине скорости невозмущенного потока, обтекающего искомый профиль.*

**Ключевые слова:** обратная краевая задача аэрогидродинамики, аналитическая функция, конформное отображение, крыловой профиль.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00060.

Пусть в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  расположен крыловой профиль  $L_z$ , обтекаемый потенциальным потоком несжимаемой невязкой жидкости с комплексным потенциалом  $w = w(z) = \varphi + i\psi$  и скоростью невозмущенного потока  $v_\infty e^{i\eta_\infty}$ ,  $v_\infty > 0$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \eta_\infty \leq \frac{3\pi}{2}$ . Примем, что для абсцисс точек  $L_z$ , выполняется

соотношение  $0 \leq x \leq d$ , где  $d$  – заданное число,  $x = 0$  и  $x = d$  есть абсциссы точек  $B$  и  $D$  соответственно задней и передней кромки  $L_z$  (для всех остальных точек  $L_z$  имеем  $0 < x < d$ ). Предположим, что на  $L_z$  функции тока  $\psi = 0$ , точка разветвления  $A$  потока расположена на нижней поверхности  $L_z$  и потенциал скорости в ней  $\varphi = \varphi_A = 0$ . Примем, что точка  $B$  является точкой схода потока.

Значение потенциала скорости  $\varphi$  в точке  $B$  при приближении к ней по точкам верхней и нижней поверхности  $L_z$ , обозначим соответственно  $\varphi = \varphi_B$  и  $\varphi = \varphi_H$ ,  $\varphi_B > \varphi_H$ ,  $\varphi_H > 0$ . Пусть  $D_z$  – внешняя область для контура  $L_z$ .

Функция  $w = w(z)$  конформно отображает область  $D_z$  с разрезом по некоторой линии, лежащей вне контура  $L_z$  и соединяющей точки  $B$  и  $z = \infty$ , на область  $D_w$  в плоскости  $w = \varphi + i\psi$ , разрезанной по положительной части вещественной оси, с началом в точке  $A$ , отвечающей  $w = 0$ , когда дуге  $AB$  нижней поверхности  $L_z$  соответствует отрезок верхнего берега, вышеуказанного разреза, для точек которого выполняется соотношение  $0 < \varphi < \varphi_H$ , а дуге  $ADB$  контура  $L_z$  – отрезок нижнего берега указанного разреза, для точек которого имеет место соотношение  $0 < \varphi < \varphi_B$ .

Пусть  $s$  – дуговая абсцисса точки  $(x, y)$  профиля  $L_z$ , отсчитываемая от точки разветвления потока  $A$  в положительном направлении, при котором область  $D_z$  остается справа.

Установлено [1] (с. 97-105): если не известна форма контура  $L_z$ , на котором задано распределение скорости  $v = v(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , где  $l$  – периметр контура  $L_z$ , то задача определения формы этого контура является разрешимой только при выполнении условий разрешимости – условий замкнутости контура  $L_z$ . Методы решения и подробный обзор работ по указанной проблеме изложены в книге [2].

В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть разрешимых задач об определении формы профиля  $L_z$  (без необходимости добиваться выполнения условий замкнутости). В качестве такой задачи рассмотрим следующую: требуется найти форму профиля  $L_z$  если на нем потенциал скорости  $\varphi$  задан как функция абсциссы  $x$  точек верхней и нижней поверхностей  $L_z$  в виде соответственно  $\varphi = \varphi^+(x)$ ,  $\varphi = \varphi^-(x)$ , где  $0 \leq x \leq d$ , причем  $\varphi^+(d) = \varphi^-(d)$ ,  $\varphi^+(0) = \varphi_B$ ,  $\varphi^-(0) = \varphi_H$ ,  $\varphi_B, \varphi_H$  – заданные числа,  $\varphi_B > \varphi_H > 0$ , и заданы значение скорости  $v = v_D$  в точке  $D$  профиля  $L_z$  и значение скорости  $v = v_\infty$  невозмущенного потока.

Для решения задачи, как в [1] (с.97-105), [3], используется комплексный потенциал  $w = \omega(\zeta) = -U_0 \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + C^*$ , потока, обтекающего окружность  $|\zeta| = 1$  в плоскости  $\zeta = \rho e^{i\gamma}$ ,  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \gamma < 2\pi$ , в котором  $\Gamma = \varphi_B - \varphi_H > 0$ ,  $\frac{\Gamma}{2\pi} = -2U_0 \sin \gamma_1$ ,  $\text{ctg} \gamma_1 = -\gamma_1 - \pi \left( \frac{\varphi_B}{\Gamma} - \frac{1}{2} \right)$ ,  $U_0 > 0$   $-\pi/2 < \gamma_1 < 0$ ,  $C^* = \frac{1}{2}(\varphi_B - \frac{\Gamma}{2})$ .

Он отображает область  $|\zeta| > 1$  на область  $D_w$ . Соотношение  $w(z) = \omega(\zeta)$  определяет функцию  $z = z(\zeta)$ , отображающую область  $|\zeta| > 1$  на область  $D_z$ . Для граничных значений имеем  $w(x) = \omega(e^{i\gamma})$ . Отсюда находим зависимость  $x(\gamma) = \text{Re} z(e^{i\gamma})$ . Искомая функция определяется формулой [4] (с. 282-287)

$$z(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + iB_0 + (A + iB)\zeta - \frac{A - iB}{\zeta}, \quad (1)$$

где  $B_0, A, B$  – действительные постоянные. Постоянная  $B_0$  влияет только на положение  $L_z$  в плоскости  $z$ .

Требую, чтобы скорость  $v$  в точке  $D$  была равна заданной величине  $v_D$ , приходим к соотношению

$$y'(\gamma_D) = I'(\gamma_D) + 2A \cos \gamma_D - 2B \sin \gamma_D, \quad (2)$$

где  $I'(\gamma_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x'(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma_0}{2} d\sigma$ ,  $y'(\gamma_D)$  – величина, определяемая по  $v_D$ ,  $\gamma = \gamma_D$  – точка, для которой  $x(\gamma_D) = d$ . Замечая, что  $w'(z)|_{z=\infty} = \frac{w'(\infty)}{z'(\infty)}$ , получаем

$$A + iB = -\frac{U_0}{v_\infty} e^{i\eta_\infty}. \quad (3)$$

Соотношения (2), (3) представляют систему уравнений с неизвестными  $A, B, \eta_\infty$ . Указанная система будет разрешимой, если  $v_\infty$  удовлетворяет условию  $v_\infty |I'(\gamma_D) - y'(\gamma_D)| < 2U_0$ . После их вычисления по формуле (1) находим искомую функцию  $z(\zeta)$ , в частности координаты точек  $L_z$ . Разрешимая система может иметь два решения, каждое со своими значениями  $A, B, \eta_\infty$ .

### Литература

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения*. – Казань: Изд. Казанского ун-та, 1965. – 333 с.
2. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики*. – М.: Изд. Фирма «Физико-математ. лит.» ВО«Наука», 1994. – 436 с.
3. Салимов Р.Б. *Применение в аэрогидродинамике решения одной обратной краевой задачи для аналитических функций* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2018. – Т. XXI, № 1 (73). – С. 80-89.
4. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

### INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF AEROHYDRODYNAMICS WITH A GIVEN VALUE OF THE UNDISTURBED FLOW VELOCITY

R.B. Salimov, E.N. Khasanova

*We consider the inverse boundary value problem in a new formulation. It is required to find the shape of an airfoil, streamlined by a potential flow of non-viscous incompressible fluid given potential of velocity as a function of the abscissa of the point of the profile; the value of the speed at leading edge of the airfoil and the value of speed of non-viscous incompressible fluid flowed along unknown profile are considered as given.*

Keywords: inverse boundary value problem of aerohydrodynamics, analytic function, conformal mapping, airfoil.

УДК 517.5

## ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ МОДУЛЯ РОМБОВИДНОЙ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Д.Н. Даутова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *dautovadn@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе изучается изменение асимптотики модуля ромбовидного окна при растяжении вдоль действительной оси методами теории потенциала: используется принцип Дирихле и вариационное свойство модуля. Планируется применение этой же методики к решению аналогичных задач в пространстве.*

**Ключевые слова:** конформный модуль, интеграл Дирихле, принцип Дирихле.

Мы занимаемся изучением поведения конформного модуля двусвязной области в комплексной плоскости под действием квазиконформных отображений, а именно – растяжения области вдоль вещественной оси. В [2] методами геометрической теории функций получена асимптотика модуля симметричной относительно вещественной оси области, когда коэффициент растяжения стремится к бесконечности. Представляет интерес разработка методики решения этой задачи, которую можно было бы распространить на многомерный случай. В качестве модельной рассмотрим задачу о растяжении ромбовидного окна в плоскости и опишем способ нахождения асимптотики модуля данной области методами теории потенциала.

Приведем сначала некоторые определения и теоремы, которыми будем пользоваться для оценки асимптотики модуля.

Пусть  $G$  – двусвязная область на плоскости с невырожденными граничными компонентами, конформно эквивалентная кольцу  $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ . Тогда ее конформный модуль есть величина  $m(G) := 1/(2\pi) \ln(r_2/r_1)$ . Четырехсторонником на плоскости назовем жорданову область  $Q$  на границе которой фиксированы четыре точки  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , причем при положительном обходе границы эти встречаются в порядке возрастания индекса  $k$ . Если  $Q$  конформно эквивалентен прямоугольнику  $[0, 1] \times [0, m]$ , причем точки  $z_k$  переходят в вершины прямоугольника, а  $z_1$  соответствует началу координат, то число  $m$  называется конформным модулем этого четырехсторонника. Точки  $z_k$  будем называть отмеченными точками четырехсторонника или его вершинами.

Пусть  $\Omega$  – жорданова область,  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_1(\Omega)$ , где  $W_1(\Omega)$  – пространство Соболева. Тогда функционал  $D_\Omega[u] = \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx dy$  называется интегралом Дирихле функции  $u$  по области  $\Omega$ . Хорошо известны следующие результаты (см., напр., [1]).

**Принцип Дирихле.** Пусть  $\Omega$  – жорданова область,  $K$  – класс функций, определяемых следующим образом:  $K = \{u \mid u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g\}$ , где  $g$  – граничное условие. Тогда решение задачи Лапласа  $\Delta v = 0$  в  $\Omega$ ,  $v = g$  на  $\partial\Omega$  единственным образом минимизирует интеграл Дирихле по области  $\Omega$  по всем  $u \in K$ :  $D_\Omega[v] = \min_{u \in K} D_\Omega[u]$ .

**Вариационное свойство модуля четырехсторонника.** Пусть дан четырехсторонник  $Q = \{\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4\}$ ,  $u_0$  – решение задачи Лапласа  $\Delta v = 0$  в  $\Omega$ ,  $v = 0$  на

$(z_1, z_2), v = 1$  на  $(z_3, z_4)$ . Тогда  $\frac{1}{m(Q)} = D_{\Omega}[u_0]$ .

Пусть  $k > 1$  — некоторое фиксированное число. Рассмотрим двусвязную область

$$\tilde{G}_1 = \{(x, y) \mid 1 < |x| + |y| < k\},$$

которая является разностью двух гомотетичных ромбов. Исследуем поведение конформного модуля этой области при неограниченном растяжении ее вдоль одной из осей координат. Пусть растянутая область имеет вид

$$\tilde{G}_M = \{(x, y) \mid 1 < |x/M| + |y| < k\}.$$

Применение метода симметрии для семейств кривых (см., напр., [4]) позволяет утверждать, что конформный модуль области  $\tilde{G}_M$  в четыре раза меньше, чем конформный модуль трапеции, которая является частью области  $\tilde{G}_M$ , расположенной в первой четверти; мы рассматриваем ее как четырехсторонник с отмеченными точками — вершинами этой трапеции. Так как конформный модуль является конформным инвариантом, заменим эту трапецию на трапецию  $G_M$ , которая получается из первоначальной линейным преобразованием плоскости. Таким преобразованием можно добиться, чтобы высота трапеции стала равной единице, меньшее основание лежало на вещественной оси и одна из вершин совпадала с началом координат. Итак, будем считать, что вершины  $G_M$  располагаются в точках  $A, B, C$  и  $D$  с аффиксами  $0, b_M := (M + 1/M)/(k - 1), c_M := b_M + M + i$  и  $d_M := -1/M + i$ .

В качестве  $\Omega$  рассмотрим четырехсторонник  $\{G_M, A, B, C, D\}$ ,  $u_0$  — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в  $G_M$ ,  $u = 0$  на нижнем основании трапеции  $AB$ ,  $u = 1$  — на верхнем основании  $CD$ . Конформный модуль области — монотонная величина, поэтому имеет место неравенство:  $m(P) \leq m(G_M)$ , где четырехсторонник  $P = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq b_M, 0 \leq y \leq 1\}$  — прямоугольник, вписанный в трапецию  $G_M$ . Очевидно, что  $m(P) = 1/D_{\Omega}[y] = 1/b_M$ .

Для нахождения оценки сверху на  $m(G_M)$  рассмотрим вместо  $G_M$  область  $F_M$ , содержащую эту трапецию и ограниченную отрезком  $AD$  и двумя параллельными лучами, исходящими из этих точек. В качестве отмеченных точек будем брать точки  $A, B, C$  и  $D$ . Тогда  $m(G_M) \leq m(F_M)$ . Чтобы оценить сверху  $m(F_M)$  рассмотрим задачу минимизации интеграла Дирихле  $D_{F_M}[u]$ , но не по всем функциям  $u \in C(\overline{F_M}) \cap W_1(F_M)$ , равным нулю на  $AB$  и единице на  $CD$ , а таким, которые равны  $y$  при  $x \leq b_M$ , и имеют вид  $y \cdot \varphi(x)$  при  $x \geq b_M$ . Здесь  $\varphi$  — гладкая функция, такая, что  $\varphi(b_M) = 1$ . В силу принципа Дирихле полученный минимум ограничивает сверху  $D_{F_M}[u]$ .

Решая задачу минимизации находим  $u_0 = e^{-\sqrt{3}(x-b_M)}, D_{\Pi}[u_0] = 1/(2M) + 1/\sqrt{3}$ .

В результате получена оценка модуля трапеции и, соответственно, модуля ромбовидного окна.

**Теорема.** Модуль ромбовидной области  $\tilde{G}_M$  удовлетворяет неравенству

$$0 \leq m(\tilde{G}_M) - \frac{M^2 + 1}{4M(k - 1)} \leq \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{8M}.$$

Отметим, что используя неравенства для конформных модулей четырехсторонников, описанные в [3], можно получить оценку  $G_M: 0 \leq m(\tilde{G}_M) - \frac{M^2 + 1}{4M(k-1)} \leq \frac{\ln 2}{2\pi}$  с несколько лучшей мажорантой, чем в теореме. Однако мы рассчитываем, что предложенный метод доказательства найдет применение в многомерном случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00060).

## Литература

1. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения, минимальные поверхности. – М.: ИЛ, 1953. — 310 с.
2. Даутова Д. Н., Насыров С. Р. *Асимптотика модулей зеркально симметричных двусвязных областей при растяжении* // Матем. заметки. – 2018. – Т. 103. – № 4. – С. 503–518.
3. Papamichael N., Stylianopoulos N. *Numerical Conformal Mapping : Domain Decomposition and the Mapping of Quadrilaterals*. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. – 242 p.
4. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир. 1969. – 136 с.

## STUDY OF ASYMPTOTICS OF THE CONFORMAL MODULUS OF DIAMOND-SHAPED DOUBLY CONNECTED DOMAIN

D.N. Dautova

*In this paper, by means of Dirichlet principle and variational property of modulus we study change of the conformal modulus of a diamond-shaped window under stretching along the real axis. The same method is expected to be used to solve similar problems in the space.*

Keywords: conformal modulus, Dirichlet integral, Dirichlet principle.



## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

<b>В</b>	Гафиятуллина Л.И. .... 88
Bakhramova Sh.R. .... 49	Гафурова П.О. .... 90
<b>А</b>	Гимаев Р.Р. .... 29
Абдулвохид О. .... 3	Гончар Т.А. .... 93
Агачев Ю.Р. .... 6, 8	Гуськова А.В. .... 6
Александрова О.Л. .... 10	<b>Д</b>
Алексеева Е.С. .... 11, 15	Даутова Д.Н. .... 344
Алхалифах С.А. .... 19	Дворянинов И.Н. .... 162
Андреев П.Д. .... 21	Долгоносова А.Ю. .... 95
Антонова Е.В. .... 26	Дьячков К.А. .... 99
Антонова П.В. .... 24	Дюпина А.Э. .... 101
Аслан О. .... 28	<b>Е</b>
Асхатов Р.М. .... 29	Егорова А.Е. .... 105
<b>Б</b>	Емельянов К.И. .... 108
Багдерина Ю.Ю. .... 33	Ерушкин В.А. .... 112
Бадриев И.Б. .... 38, 42	Еряшкин М.С. .... 60
Балафендиева И.С. .... 10, 26, 46	<b>Ж</b>
Батыршина Р.Р. .... 338	Жукова Н.И. .... 65, 95
Бахрамов Ж.А. .... 47	<b>З</b>
Белевцов Н.С. .... 52	Заикин А.А. .... 115
Берестовский В.Н. .... 56	Зайнетдинов Д.Х. .... 119
Бикмухаметов Р.И. .... 60	Зайцева Н.В. .... 123
Благовещенская Е. .... 62	Зиятдинова А.И. .... 126
Бобыльков А.Г. .... 140	Зубкова С.К. .... 128
Боголепова Е.В. .... 65	<b>И</b>
Бондарев А.С. .... 69	Ибрагимов И.З. .... 131
Борисов И.М. .... 73	Икрамов Х.Д. .... 135
Борисова Я.В. .... 75	Исраилов С.В. .... 135
Булыгин А.И. .... 21	<b>К</b>
Буянов В.Ю. .... 42	Кабанко М.В. .... 137
<b>В</b>	Кангужин Б.Е. .... 138
Валеев И.И. .... 77	Капитанов Д.В. .... 140
Валовик Д.В. .... 80	Карачик В.В. .... 142
Вильданова Н.Р. .... 26	Касымова Ё.Ф. .... 305
Водопьянов С.К. .... 84	Кац Б.А. .... 144
<b>Г</b>	Кац Д.Б. .... 144
Галстян А.Х. .... 87	
Гарафутдинова А.И. .... 260	

- Каюмов И.Р. .... 19  
Кечко Е.П. .... 267  
Кокарев В.Н. .... 246  
Кокурин М.М. .... 145  
Колесников И.А. .... 149  
Колесников Н.С. .... 152  
Корнев А.А. .... 156  
Корнеева Н.Н. .... 159  
Королева И.П. .... 162  
Косенкова Т.И. .... 166  
Кужаев А.Ф. .... 170  
Курсеева В.Ю. .... 80
- Л**  
Латыпов И.И. .... 177  
Липачев Е.К. .... 90, 338  
Лисенков Д.С. .... 173, 174  
Лобов В.Л. .... 177  
Ложников М.А. .... 156  
Лукащук С.Ю. .... 52  
Лукьяненко Д.В. .... 181
- М**  
Мадибайулы Ж. .... 138  
Макаров М.В. .... 38, 42  
Максакова П.И. .... 184  
Мальшева О.С. .... 187  
Маневич Л.И. .... 162  
Мельникова А.А. .... 181  
Мельничук Е.М. .... 188  
Мещерина Е.В. .... 193  
Михайловская Я.А. .... 196  
Михеев В.В. .... 46  
Москалева М.А. .... 198  
Мустафин И.Н. .... 202  
Мухаметгалиев И.И. .... 218  
Мухин Д.А. .... 266, 332  
Мышкина Е.К. .... 206  
Мягченкова Е.Л. .... 137
- Н**  
Нарманов А.Я. .... 209  
Нигматуллина Г.Х. .... 212  
Николаева И.А. .... 216  
Новиков Ан.Ан. .... 218  
Новиков В.В. .... 224  
Новоселов С.А. .... 152, 188
- О**  
Орлов С.С. .... 220
- П**  
Павленко В.А. .... 227  
Першагин М.Ю. .... 8  
Петров О.Ю. .... 229  
Петрова А.А. .... 231  
Полотовский Г.М. .... 73  
Поннусами С. .... 19  
Попов А.А. .... 28, 173
- Р**  
Ражабов Е.О. .... 209  
Рассадин А.Э. .... 11, 15  
Рафиков А.И. .... 235  
Рогач Д.А. .... 237  
Рооп М.Д. .... 240  
Рязанов Н.А. .... 243  
Рязанова О.А. .... 246
- С**  
Сабитова Э.М. .... 338  
Сагитов А.А. .... 135  
Садыкова Е.Р. .... 212  
Саламатин А.А. .... 247  
Салахов Р.Р. .... 251  
Салимов Р.Б. .... 341  
Сафаров Д.С. .... 3  
Сверкунова Д.А. .... 254  
Секаева Л.Р. .... 10, 26, 46, 259  
Семенко Е.В. .... 262  
Семенко Т.И. .... 262  
Семенова Е.В. .... 266  
Семенова Е.Е. .... 224  
Семенова К.А. .... 338  
Сидорцов М.В. .... 267  
Смирнова Е.В. .... 38  
Соболев О.П. .... 269  
Соколова Г.К. .... 273  
Суан Л.А. .... 277  
Сухарев В.И. .... 278

---

Сюй И. ....	46	Яковлев Е.И. ....	93
		Яковлева Ю.О. ....	334
<b>Т</b>		Ярметова Р.Н. ....	336
Талбаков Ф.М. ....	307		
Тапкин Д.Т. ....	280		
Тихов С.В. ....	282		
Трошин П.И. ....	128, 174		
Тутыгин Р.А. ....	286		
<b>У</b>			
Усков В.И. ....	289, 292		
<b>Ф</b>			
Фазлеева Э.И. ....	77		
Февральских Л.Н. ....	224		
Фирстова Н.М. ....	293		
Фомин С.А. ....	297		
Фролов А.Н. ....	60		
<b>Х</b>			
Хакимов Д.Р. ....	300		
Халитова Т.Ф. ....	202, 302		
Халиуллина А.С. ....	247		
Хасанов Ю.Х. ....	305, 307		
Хасанова Э.Н. ....	309, 341		
<b>Ч</b>			
Чебакова В.Ю. ....	29		
Черная А.С. ....	254		
Чернова О.В. ....	311		
Чешкова М.А. ....	315		
Чигур О.И. ....	320		
<b>Ш</b>			
Шабалин П.Л. ....	309		
Шабуров А.А. ....	322		
Шамим М.Р. ....	10		
Шарипов Х.Ф. ....	326		
Шеметова В.В. ....	220		
Шульц А.В. ....	329		
<b>Э</b>			
Эскандариан Э. ....	218		
<b>Я</b>			
Яикова В.В. ....	332		

