Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, как это делается оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

Если в ближайшее время студентам будет открыт доступ в университет, то вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию (во вторник 11h.50m.-13h.30m. и в пятницу 15h.40m.-17h.30m.) для консультаций по решению домашних задач.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 45

Числовые ряды.
Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

На прошлом занятии мы изучали методы сходимости ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с неотрицательными членами a_n. В случае, когда a_n могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, эти методы применимы разве лишь для исследования сходимости, составленного из моделей его членов.

Определение. *Ряд* (1) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (2).$$

Если же ряд (1) *сходится, а ряд* (2) *расходится. то ряд* (1) *называется условно сходящимся.*

В абсолютно сходящемся ряде можно переставлять его члены и при этом сумма ряда останется прежней. Но если ряд сходится условно, то относительно его существует замечательная

Теорема Римана. *Если ряд* (1) *сходится условно, то для любого числа* A *можно так переставить его члены, что новый ряд*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} = A.$$

Вопрос условной сходимости решается достаточно просто для так называемого *знакочередующегося* ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{3}$$

у которого $a_n > 0$. Такого вида ряд обычно называется *рядом Лейбница.*

Признак Лейбница. *Если множитель* a_n *общего члена ряда* (3), *начиная с некоторого номера* n_0, *монотонно сходится к нулю, то ряд* (3) *сходится, и для всех* $n \geq n_0$ *для остаточного члена* R_n *ряда* (3) *справедлива двусторонняя оценка* $R_n = |S - S_n| \leq a_n$.

Из этой оценки следует, что

$$S_{2n} \leq S < S_{2n+1}. \tag{4}$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\,. \tag{5}$$

Решение. Необходимо сначала убедится, что $a_n = (\ln n)/\sqrt{n}$ монотонно убывает, начиная с некоторого n_0. Очевидно, что n_0 есть наименьшее целое, большее x_0 – значения аргумента x у производной $f'(x)$ функции $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$, начиная с которого $f'(x) < 0$, то есть $f(x)$ монотонно убывает. Имеем,

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}},$$

так что $f'(x) < 0$ при всех x, превосходящих $x_0 = \mathrm{e}^2$. Итак, $n_0 = 8$, исследуемый на сходимость ряд (5) является рядом Лейбница и, следовательно, сходится. Абсолютной сходимости нет, поскольку $a_n \geq (\ln n)/n$ и ряд от миноранты расходится по интегральному признаку.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad 0 < x < 1 .$$

Решение. Очевидно, это ряд Лейбница, поскольку x^n/n при $0 < x < 1$ монотонно сходится к нулю с ростом n. Это знакомый нам ряд, представляющий разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена. Поскольку в этом ряде вместо $(-1)^n$ стоит $(-1)^{n-1}$, то частичные суммы $S_1 = x$ и $S_2 = x - x^2/2$ дают известную двустороннюю оценку для $\ln(1+x)$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Что же касается рядов любого знака, то здесь, как и у несобственных интегралов, существуют признаки сходимости Дирихле и Абеля для рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \tag{6}$$

Признак Дирихле. *Если a_n стремится к нулю с ростом n монотонно и все частные суммы $big| \sum_{k=1}^{n} b_k| < M, \ n+1, 2, \ldots,$ то ряд* (6) *сходится.*

С помощью признака Дирихле доказывается сходимость рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha, \quad \alpha \in \mathrm{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha, \quad \alpha \neq 2\pi m,$$

у которых $a_n \to 0$ монотонно. Таким образом, если вам предложено исследовать на сходимость ряд такого вида, то, в первую очередь, следует проверить монотонность a_n, что обеспечивает хотя бы условную сходимость ряда. Абсолютная сходимость доказывается отдельно.

Признак Абеля. *Если последовательность $\{a_n, \ n = 1, 2, \ldots\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и ряд* (6) *сходится.*

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\ln\ln(n+2)}\cos\frac{1}{n}\,.$$

Решение. Последовательность $\{a_n=\cos(1/n)\}$ монотонна и ограничена, а ряд

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\ln\ln(n+2)}$$

сходится как ряд Дирихле, ибо $b_n=1/\ln\ln(n+2)\to 0$ монотонно. Абсолютной сходимости у этого ряда нет, но чтобы доказать это, надо воспользоваться следующим весьма сильным утверждением.

Теорема 1. *Если ряд $\sum_1^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, то ряды $\sum_1^{\infty}(a_n+b_n)$ и $\sum_1^{\infty}b_n$ одновременно либо сходятся абсолютно, либо сходятся условно, либо расходятся.*

В качестве примера использования этой Теоремы проиллюстрируем следующее, исключительно важное

Замечание: *для знакочередующихся рядов асимптотический признак сравнения не применим.*

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\,. \tag{7}$$

Решение. Вроде бы все просто – $a_n\sim(-1)^n/\sqrt{n}$, и, все, o'key. Не тут-то было! Представим общий член этого ряда в асимптотическом виде, используя разложение $(1+x)^{-1}=x-x^2+O(x^3),\ |x|<1$. Обозначим его как c_n, а не как a_n (a_n и b_n нам понадобятся для более внятного использования Теоремы 1):

$$c_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\alpha_n,$$

где $|\alpha_n|\le Cn^{-3/2},\ C>0$. Пусть в обозначениях Теоремы 1 $a_n=\alpha_n$, а

$$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}.$$

В таких обозначениях $c_n = a_n + b_n$. Поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

общий член которого $a_n = \alpha_n$ мажорируется как $Cn^{-3/2}$, сходится абсолютно, то исходный ряд с общим членом c_n сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1})^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right].$$

Но этот ряд расходится, ибо его общий член содержит “гармоническую” компоненту $1/n$. Следовательно, ряд (7) расходится!

Задание 46

Решение следующих задач, взятых из задачника Кудрявцев, Кутасов и др., высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу.

Предлагается исследовать на условную и абсолютную сходимость сходимость ряды. Задачи повышенной сложности, решение которых оцениваются более высоким баллом, отмечены звездочкой.

$$15.3(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\,,$$

$$15.5(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}\,,$$

$$15.7(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+3}}{n}\,,$$

$$15.3(7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}\,,$$

15.3(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin\frac{1}{n}\,,$$

15.3(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[5]{n}}\,,$$

15.5(3*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n} + (-1)^{n-1}}\,,$$

Определить области абсолютной и условной сходимостей (по α).

15.13(6*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln^{\alpha}(n+1)}, \quad 0 < x < \pi\,,$$

15.12(4*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\alpha}}\right) \,.$$