

**Министерство образования Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Л.А. ТКАЧЕНКО, А.В. РЕПИНА

ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Учебное пособие

под общей редакцией

зав. кафедрой Технической физики и энергетики,
д.т.н., проф., чл.-корр. АН РТ Н.Ф. Кашапова



Казань
2017

УДК 536.24: 234.21

Рекомендовано к изданию
Учебно-методической комиссией инженерного института
(протокол № 6 от 28 июня 2017 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор **Зарипов Р.Г.**
(ИММ КазНЦ РАН)

доктор технических наук, профессор **Ларионов В.М.**

Ткаченко Л.А., Репина А.В.

Теория нестационарного теплопереноса: Учебное пособие /
Л.А. Ткаченко, А.В. Репина. Под общей ред. проф. Н.Ф. Кашапова. – Ка-
зань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 139 с.

Учебное пособие рассчитано на бакалавров старших курсов, ма-
гистров и аспирантов, специализирующихся по механике жидкости и
газа, теплофизике и энергетике, а также научных работников и специ-
алистов, занимающихся вопросами теплообмена. Излагаются основ-
ные уравнения, описывающие нестационарный тепломассоперенос в
сплошных средах, методы решения этих уравнений, теория вторичных
течений возле цилиндра, теплоотдача цилиндра и тел другой формы
при наличии вторичных течений. Даются сведения о теплоотдаче при
пульсирующем течении в канале.

УДК 536.24: 234.21

© Ткаченко Л.А., Репина А.В., 2017

© Издательство Казанского университета, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КОЛЕБАНИЙ | 7 |
| 1.1 Уравнения, описывающие перенос при плоском течении | 7 |
| 1.2 Уравнение сохранения вихрей | 11 |
| 1.3 Общие свойства нестационарных течений | 13 |
| 1.4 Периодический ламинарный пограничный слой | 20 |
| Задачи к главе 1 | 26 |
| ГЛАВА 2 МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НОВЬЕ-СТОКСА И ЭНЕРГИИ | 35 |
| 2.1 Метод сращиваемых асимптотических разложений | 35 |
| 2.2 Метод последовательных приближений | 41 |
| 2.3 Разложение в ряд при слабом возбуждении внешнего течения | 44 |
| 2.4 Расчёт периодического пограничного слоя при большой амплитуде колебаний скорости | 47 |
| Задачи к главе 2 | 50 |
| ГЛАВА 3 ТЕЧЕНИЕ ПРИ ВНЕШНЕМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ... | 53 |
| 3.1 Колебательное движение возле цилиндра | 53 |
| 3.2 Вторичные течения вокруг цилиндра. Решение при $N \gg 1$ | 62 |
| 3.3 Свойства вторичных течений вокруг колеблющегося цилиндра | 67 |
| 3.4 Двойные пограничные слои при $Re \gg 1$ | 73 |
| 3.5 Влияние состава колебаний и формы тел на вторичные течения | 77 |
| Задачи к главе 3 | 81 |

| | |
|---|-----|
| ГЛАВА 4 ПЕРЕНОС ТЕПЛА ВТОРИЧНЫМИ ПОТОКАМИ | 82 |
| 4.1 Уравнение, описывающее стационарное поле температур во внешней области течения | 82 |
| 4.2 Перенос тепла внешними течениями | 83 |
| 4.3 Перенос тепла внутренними течениями | 86 |
| 4.4 Влияние колебаний на течение и теплообмен возле цилиндра при естественной конвекции | 89 |
| Задачи к главе 4 | 93 |
| ГЛАВА 5 ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ В КАНАЛАХ | 95 |
| 5.1 Пульсирующее течение в каналах | 95 |
| 5.2 Теплоотдача при пульсирующем течении в канале | 100 |
| Задачи к главе 5 | 105 |
| ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ | 106 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 139 |

ВВЕДЕНИЕ

Можно считать установленным, что нестационарные движения вязкой жидкости служат причиной интенсификации обширного круга процессов тепло - и массопереноса [1-6]. Так, наложение колебаний приводит к ускорению теплообмена тел, процессов сушки, диффузии, электроосаждения и растворения. Ультразвуковые колебания вызывают подъем жидкости в капиллярах [1].

Вопрос о влиянии пульсаций скорости на тепломассообмен при вынужденном движении среды особенно актуален в связи с анализом работы систем охлаждения реактивных камер, работающих в режиме высокочастотной неустойчивости, или, наоборот, в связи с подавлением колебаний, обусловленных периодическими пульсациями теплоподвода. Несмотря на то, что наши знания о количественной стороне процессов все еще остаются ограниченными, делаются попытки промышленного применения вибрационного горения, при котором все процессы обмена протекают под воздействием интенсивного акустического поля. Казанским университетом совместно с ТатНИИНЕФТЕМАШем в течение ряда лет проводились работы по созданию энергетических установок на вибрационном горении. Опыт показал, что возбуждение вибрационного режима позволяет увеличить теплонапряженность топочного объема в 4-5 раз при повышении КПД установки в сравнении со стационарным на 15-20 процентов [1].

Проблема воздействия колебаний на течение вязкой жидкости имеет почти полуторавековую историю. Фарадей (1831) был первым, кто доложил о возникновении стационарного циркулирующего движения над вибрирующими пластинами. Стоке (1851) теоретически решил задачу о колебаниях плоской пластины в собственной плоскости. Наблюдения стационарных вихрей в трубе при наличии колебаний были сделаны Дворжаком (1874), а Рэлей (1884) дал их теоретическое рассмотрение.

Широкие возможности для теоретического расчета течения и теплообмена при воздействии колебаний представили идеи пограничного

слоя. В тридцатые годы появились работы Карьера (1929), Андраде (1931) и Шлихтинга (1932), посвященные изучению стационарных течений вокруг тел, помещенных в колеблющуюся жидкость. Шлихтинг (1932) при расчёте колеблющегося пограничного слоя применил метод последовательных приближений и установил наличие так называемых «шлихтинговских» вихрей в области, непосредственно примыкающей к поверхности тела [1].

Систематическое рассмотрение воздействия колебаний на гидромеханику и теплообмен вязких течений составляет цель этого пособия.

Дано обсуждение общих закономерностей и методов решения уравнений движения, неразрывности и энергии при колебаниях. Рассматриваются теория внешнего обтекания тел и обзор экспериментальных исследований вторичных течений, возникающих в поле колебаний. Приводится теория теплообмена тел, находящихся в колеблющемся потоке. Даются сведения о теплообмене при пульсирующем течении в канале. К сожалению, ряд вопросов, связанных с нелинейным импедансом отверстий, течениями Эккарта, сушкой в акустическом поле и т.д. остался без внимания.

ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КОЛЕБАНИЙ

1.1 Уравнения, описывающие перенос при плоском течении

Уравнение состояния. Движение вязкой жидкости считается заданным, если известно распределение скорости $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t)$ и двух каких-либо термодинамических величин, например, давления $p = p(x, y, t)$ и плотности $\rho = \rho(x, y, t)$. Тогда температура $T = T(x, y, t)$ определяется из уравнения состояния идеального газа

$$p = \rho RT. \quad (1.1)$$

Для нахождения $\vec{v}(x, y, t)$, $p(x, y, t)$, $T(x, y, t)$ приходится решать систему дифференциальных уравнений в частных производных: неразрывности, движения и энергии, при соответствующих граничных условиях.

Уравнение неразрывности. Выражение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.2)$$

носит название уравнения неразрывности и выражает закон сохранения массы. Если плотность постоянна, то есть жидкость несжимаема, то

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.3)$$

Последнее соотношение выполняется в случае капельных жидкостей, а также для газов, движущихся с умеренными постоянными скоростями при постоянной температуре.

Уравнения Навье-Стокса. Движение идеальной невязкой жидкости описывается уравнениями Эйлера, установленными еще в 1755 г.,

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_k}, \quad (1.4)$$

где v_i – компоненты скорости, p – давление, ρ – плотность жидкости.

В реальной жидкости, однако, происходят процессы диссипации энергии, обусловленные внутренним трением и теплопроводностью. Для описания напряжений в вязкой жидкости вводят тензор

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}, \quad (1.5)$$

где σ'_{ik} – тензор вязких напряжений, δ_{ik} – символ Кронекера, а σ_{ik} называют тензором напряжений. Тензор вязких напряжений имеет вид

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (1.6)$$

Величины $\mu > 0$ и $\zeta > 0$ есть коэффициенты вязкости, причем первый называется коэффициентом сдвиговой, а второй – коэффициентом объемной вязкости. Таким образом, в случае вязкой жидкости в (1.4) вместо $\partial p / \partial x_i$ следует подставлять $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k$. Получим

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) является общей формой движения вязкой жидкости и носит название уравнений Навье-Стокса. В общем случае μ и ζ являются функциями давления и температуры, и, следовательно, координат и времени. Следует также отметить, что вязкость, в особенности объемная, обладает релаксационными свойствами, которые наиболее сильно проявляются при высоких частотах. Тем не менее, в большинстве случаев изменениями коэффициентов вязкости можно пренебречь. Тогда μ и ζ можно вынести из-под знака дифференцирования и (1.7) в векторной форме переписать следующим образом

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \vec{v}. \quad (1.8)$$

Для несжимаемой жидкости, когда выполняется условие (1.3), вместо (1.8) имеем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (1.9)$$

Здесь $\nu = \mu/\rho$ есть кинематический коэффициент вязкости. В общем случае как динамическая μ , так и кинематическая ν вязкость являются функциями температуры и давления.

В случае плоского несжимаемого течения с продольной u и поперечной v компонентами скорости уравнения Навье-Стокса и неразрывности принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.10 \text{ а})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (1.10 \text{ б})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.10 \text{ в})$$

Совокупность уравнений (1.10) представляет замкнутую нелинейную систему трех уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями u , v , p . Нелинейность системы обусловлена наличием конвективной составляющей ускорения в левой части уравнения движения.

Уравнение энергии. Выражение

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T \right) = \nabla (K \nabla T) + \frac{dp}{dt} + \mu \Phi \quad (1.11)$$

носит название уравнения энергии. Член, стоящий в его левой части, выражает изменение энергии жидкости во времени, первый член справа – поток тепла, обусловленный теплопроводностью, член dp/dt – работу сил сжатия, и, наконец, $\mu \Phi$ – работу сил трения. Функция

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v})^2 \quad (1.12)$$

называется диссипативной. Уравнение (1.11) содержит три физических параметра: C_p удельную теплоемкость при постоянном давлении, μ динамическую вязкость и K коэффициент теплопроводности. В общем случае все три параметра являются функцией давления и температуры.

При умеренной разности температур коэффициент теплопроводности в (1.11) можно считать постоянным, тогда имеем

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \nabla^2 T + \frac{dp}{dt} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Phi. \quad (1.13)$$

Уравнения неразрывности (1.2), Навье-Стокса (1.8) для сжимаемого течения, энергии (1.11) совместно с уравнением состояния (1.1) составляют систему из пяти уравнений с пятью неизвестными u , v , p , ρ , T .

Краевые условия. Для решения конкретной задачи помимо дифференциальных уравнений переноса необходимо наложить условия на поверхностях, ограничивающих объем движущейся жидкости (граничные условия), а также значение физических величин в начальный момент времени (начальные условия). Между поверхностью твердого тела и движущейся жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, в результате действия которых слой жидкости, прилегающий к телу, ведет себя так, как если бы он был приклеен к поверхности. Это свойство жидкости дает так называемые условия прилипания, т.е. на неподвижной твердой поверхности скорость жидкости обращается в нуль

$$\bar{v} = 0. \quad (1.14)$$

В идеальной жидкости, описываемой уравнениями Эйлера (1.4), обращается в нуль лишь нормальная компонента скорости.

В общем случае движущейся твердой поверхности скорость жидкости на стенке должна совпадать со скоростью самой поверхности.

При рассмотрении течения и теплообмена в режиме установившихся колебаний необходимость в начальных условиях отпадает.

Наконец, при решении задачи о теплообмене должны использо-

ваться граничные условия к уравнению энергии (1.11). Эти условия будут вводиться по мере необходимости.

1.2 Уравнение сохранения вихрей в вязкой несжимаемой жидкости

Плоское нестационарное течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями (1.10). Исключим из них давление. Для этого продифференцируем (1.10 а) по y , а (1.10 б) – по x и вычтем второе полученное уравнение из первого

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \nu \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 v \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.15 \text{ а})$$

Путём комбинирования слагаемых в (1.15 а) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

В уравнении (1.16) второе и третье слагаемые пропадают из-за уравнения неразрывности (1.10 в). Тогда можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Известно, что вектор вихря в плоском потоке есть вектор, определяемый в операторной форме

$$\nabla \times a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$

Согласно (1.18), при $a_z = 0$ следует, что отлична от нуля только \vec{k} – компонента вихря

$$\nabla \times a = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Тогда множители, стоящие в скобках (1.17), есть не что иное, как \vec{k} – компонента вихря, взятая с обратным знаком.

Введём функцию тока, такую, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Видно, что она удовлетворяет уравнению неразрывности (1.10 в) автоматически. Тогда с учетом

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \nabla^2 \psi,$$

вместо (1.17) имеем

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} = \nu \nabla^4 \psi. \quad (1.19)$$

Выражение (1.19) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} = \nu \nabla^4 \psi, \quad (1.20 \text{ а})$$

которое в сокращённой форме имеет вид

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{\partial (\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial (x, y)} = \nu \nabla^4 \psi, \quad (1.20 \text{ б})$$

где величина

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

есть определитель Якоби.

Уравнение переноса вихрей в виде (1.20) содержит лишь одну неизвестную ψ . Его левая часть, так же как и уравнения Навье-Стокса, содержит инерционные члены, а правая часть – члены, зависящие от вязкости. Так как это уравнение четвертого порядка, то нахождение его общего решения связано с очень большими трудностями.

1.3 Общие свойства нестационарных течений

Течение при колебаниях плоскости. Рассмотрим поток, генерированный в полубесконечной массе жидкости при колебаниях плоской пластины в собственной плоскости. Решение этой задачи было дано Стоксом.

Пусть x, z – координаты плоскости, а y – расстояние, нормальное к ней. Течение, генерированное колебаниями, всюду параллельно плоскости и происходит в направлении x .

Скорость колеблющейся поверхности является функцией времени вида $A \cos(\omega t + \alpha)$. Такую функцию удобно писать в виде реальной части некоторой комплексной функции $u = \text{Real}\{U_0 \exp(i\omega t)\}$ (при этом U_0 в общем случае комплексная величина $U_0 = A \exp(i\alpha)$; соответствующим выбором начала отсчета времени ее всегда можно превратить в действительную). Так как анализ линейный, символ Real впредь будем отбрасывать, и оперировать комплексной величиной u , беря реальную часть лишь от конечного результата.

В уравнениях (1.10) $\nu = 0$, $\partial u / \partial x = 0$; кроме того, $\partial p / \partial x = 0$, следовательно, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.21)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} y = 0, u = U_0 \exp(i\omega t), \\ y \rightarrow \infty, u \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) является аналогом широко распространенного уравнения одномерного распространения тепла. Пусть решение (1.22) периодическое относительно y и t , то есть положим

$$u = U_0 \exp[i(k y + \omega t)].$$

Подставляя последнее выражение в (1.21), имеем

$$i\omega = \nu k^2,$$

откуда

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm \frac{i+1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Используя граничные условия (1.22) и удерживая только реальную часть, окончательно получим

$$u = U_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right). \quad (1.23)$$

Полученное решение описывает поперечную волну: скорость частиц в ней направлена перпендикулярно направлению распространения. Амплитуда волны быстро убывает по мере удаления от поверхности пластины: так, на расстоянии одной длины волны $2\pi\sqrt{2\nu/\omega}$ амплитуда уменьшается в $\exp(2\pi) \approx 540$ раз. Расстояние, на котором амплитуда колебаний скорости уменьшается в e раз, будем называть толщиной акустического пограничного слоя δ . Из (1.23) следует, что

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (1.24)$$

Скорость распространения этой «вязкой» волны (в зарубежной литературе ее часто называют волной Стокса) определяется как $\sqrt{2\nu\omega}$. Колебания слоя жидкости, находящегося от стенки на расстоянии y , имеют по сравнению с колебаниями стенки смещение по фазе $y\sqrt{\omega/2\nu}$ в направлении, противоположном движению стенки.

Теперь введем, согласно [2], понятие вихревой напряженности

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1.25)$$

Наличие вязкости и твердой поверхности приводят, как нетрудно видеть, к тому, что на стенке периодически генерируется завихренность с напряженностью

$$\omega_z = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} U_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right), \quad (1.26)$$

диффундирующая вглубь жидкости со скоростью $\sqrt{2\nu\omega}$.

Таким образом, при нестационарном обтекании твердое тело обладает свойством генерировать нестационарную же завихренность. Следует также отметить, что по мере распространения в жидкость завихренность меняет знак.

Вследствие того, что завихренность быстро убывает вглубь жидкости, течение, вихревое в некотором слое, окружающем тело, становится потенциальным за пределами этого слоя. При этом глубина проникновения δ вихревого движения составляет $\sqrt{2\nu/\omega}$.

Характеристика нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости. Запишем уравнение (1.20 б) в безразмерном виде. Пусть произвольное тело имеет характерный размер d (в случае кругового цилиндра, например, d – диаметр) и совершает колебательное движение с амплитудным значением скорости U_∞ с частотой ω . Произведем замену

$$\bar{t} = t\omega, \quad \bar{\psi} = \psi (dU_\infty)^{-1}, \quad \bar{x}_i = x_i d^{-1}, \quad (1.27)$$

где черта означает, что берется безразмерная величина. Подставляя (1.27) в (1.20 б) и выполняя несложные вычисления, имеем

$$\frac{\partial(\nabla^2 \bar{\psi})}{\partial \bar{t}} - \varepsilon \frac{\partial(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\psi})}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{1}{H^2} \nabla^4 \bar{\psi}. \quad (1.28)$$

В последнем уравнении процесс характеризуют два параметра $\varepsilon = U_\infty / \omega d$ и $H = d \sqrt{\omega / 2\nu}$, которые будем считать независимыми. Из

них можно сконструировать два других, а именно, ввести акустическое число Рейнольдса

$$\text{Re}_k = \varepsilon H^2 = \frac{U_\infty d}{\nu} \quad (1.29)$$

и число Рейнольдса стационарного течения

$$\text{Re}_s = \varepsilon^2 H^2 = \frac{U_\infty^2}{\omega \nu}. \quad (1.30)$$

Четыре параметра ε , H , Re_k , Re_s , полностью исчерпывают возможные формы течения несжимаемой жидкости при наличии колебаний.

Пусть амплитуда смещения частиц среды U_∞/ω мала по сравнению с характерным размером тела d , то есть $\varepsilon = U_\infty/\omega d \ll 1$. Это соответствует случаю, когда нестационарная сила, выраженная первым членом в уравнении (1.20 б), велика по сравнению с конвективными членами (второй член слева). Параметр H^2 выражает отношение нестационарной силы, выраженной первым членом в левой части выражения (1.20 б) к вязким силам, или, что то же, отношение «глубины проникновения» вязких волн к размерам тела: когда H мал, вязкие силы проникают далеко вглубь жидкости и когда, наоборот, H велик, завихренность сосредоточена в тонком слое возле тела.

Пусть $H \ll 1$. Тогда и $\text{Re}_k \ll 1$. В этом предельном случае мала частота колебаний ω . А это, в свою очередь, означает, что скорость меняется во времени очень медленно и членом $\partial \nabla^2 \psi / \partial t$ в (1.20 б) можно пренебречь. Отсутствие члена, зависящего от времени в уравнении движения, означает, что движение стационарно. Тогда движение жидкости в любой момент времени происходит со скоростью, какой обладает тело в данный момент времени. Если, например, речь идет о колебаниях в жидкости сферы, то можно утверждать, что сила сопротивления сферы в любой момент времени вычисляется по формуле Стокса для малых чисел Рейнольдса, только вместо стационарной скорости в формулу надо подставить колебательную. Таким образом, при $H \ll 1$ имеет место квазистационарное обтекание.

Теперь пусть $H \gg 1$. В этом случае трудно судить, каков порядок

колебательного числа Рейнольдса. Оно может быть и больше и меньше единицы. Примем, что по-прежнему $Re_k \ll 1$.

Из (1.28) легко видеть, что инерционными членами можно пренебречь, а остальные члены будут одного порядка.

В тонком слое жидкости в окрестности тела движение вихревое, а в массе жидкости – потенциальное, так что за исключением области стенок движение жидкости описывается уравнением

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (1.31)$$

откуда следует также, что $\nabla^2 \nu = 0$. Таким образом, уравнения Навье-Стокса сводятся к уравнениям Эйлера и движение жидкости совпадает с движением идеальной жидкости вдали от стенок. Этот случай известен в литературе под названием высокочастотных колебаний и представляет большой интерес с точки зрения интенсификации процессов переноса.

Нетрудно видеть, что пренебрежение в (1.28) конвективными членами дает возможность линеаризовать уравнение движения. Решив его, можно получить колебательную скорость $\vec{v} \sim \cos \bar{t}$. Подстановка этого выражения в конвективные члены (1.28) показывает, что в последних возникают силовые члены типа $\cos^2 \bar{t} = 0,5(1 + \cos 2\bar{t})$. Таким образом, уравнения Навье-Стокса, описывающие чисто колебательное движение в первом приближении, во втором приближении со скоростями порядка εU_∞ дают колебательные члены с удвоенной частотой и чисто стационарные члены, отброшенные в первом приближении. Стационарную часть течения будем называть стационарным течением, хотя встречаются названия: «вторичное», «акустическое» и т. д. Поведение стационарного течения при больших N полностью определяется числом Рейнольдса стационарного течения Re_s (1.30). Не приводя здесь подробного доказательства, укажем, что число Re_s имеет такой же смысл, что и общепринятое число Рейнольдса для стационарных течений. Так если $Re_s \ll 1$ течение будет описываться уравнениями

Стокса для медленных ползущих движений. Если же $Re_s \gg 1$, стационарное течение будет сосредоточено вблизи тела и движение аналогично движению при больших числах Рейнольдса обычных стационарных течений (движение типа пограничного слоя), со скоростями порядка εU_∞ . Толщина области, где сосредоточено такое движение, имеет порядок $\delta_{cm} \sim Re_s d = \varepsilon^{-1} (\nu/\omega)^{1/2}$. При $\varepsilon \ll 1$ слой волны Стокса толщиной $\delta \sim \sqrt{\nu/\omega}$ будет располагаться внутри этой области.

Характеристика переноса тепла при нестационарном течении. Предположим, что вязкой диссипацией и работой сил давления можно пренебречь. Тогда уравнение энергии (1.13) принимает вид

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T \right) = K \nabla^2 T. \quad (1.32)$$

Прежде чем перейти к рассмотрению общих свойств уравнения (1.32), найдем решение задачи о теплообмене плоской пластины, на поверхности которой температура меняется по закону

$$T_w = T_w^0 \cos \omega t. \quad (1.33)$$

Пусть пластина расположена в плоскости xz , а скорость потока тождественно равна нулю. Легко видеть, что перенос будет описываться уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.34)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} T &= T_w^0 \exp(i\omega t), \quad y = 0, \\ T &\rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Очевидно, что распределение температуры в пространстве всюду будет зависеть от времени пропорционально $\exp(i\omega t)$. Здесь, как и прежде, $\cos \omega t = \text{Real}\{\exp(i\omega t)\}$. Если учесть, что это одномерное уравнение теплопроводности совпадает формально с уравнением (1.21), описывающим движение вязкой жидкости на колеблющейся пластине, можно записать

$$T = T_w^0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a_0}} y\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a_0}} y\right). \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) выражает тот факт, что колебания температуры распространяются вглубь жидкости в виде температурных волн. Амплитуда колебаний $T_w^0 \exp\left(-\sqrt{\omega/2a_0} y\right)$ быстро убывает по мере удаления от поверхности вглубь жидкости. Расстояние

$$\delta_T = \sqrt{\frac{2a_0}{\omega}}, \quad (1.36)$$

на котором амплитуда волн уменьшается в e раз, можно назвать «глубиной проникновения температурных волн», или, по аналогии с δ , толщиной теплового пограничного слоя.

Перейдем в (1.32) к безразмерным переменным, полагая

$$\mathcal{G} = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty), \quad \bar{t} = \omega t, \quad \bar{\psi} = \psi(U_\infty d)^{-1}, \quad \bar{x}_i = x_i d^{-1}, \quad a_0 = K/C_p \rho,$$

где T_∞ – температура набегающего потока, T_w – температура стенки.

Получим

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{t}} - \varepsilon \frac{\partial(\bar{\psi}, \mathcal{G})}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{1}{H_T^2} \nabla^2 \mathcal{G}, \quad (1.37)$$

где $\partial(\bar{\psi}, \mathcal{G})/\partial(\bar{x}, \bar{y})$ – определитель Якоби. В правой части (1.37) появился новый частотный параметр $H_T^2 = \omega d^2/a_0$, который по форме очень близок к параметру H^2 в уравнении (1.28). Параметр H_T в уравнении (1.37) есть тогда не что иное, как отношение размера тела d к глубине проникновения температурных волн $\sqrt{2a_0/\omega}$, генерируемых колебаниями температуры стенки. Следовательно, H_T , как и параметр H , является фундаментальным параметром. В частности, если $H_T \ll 1$, теплообмен протекает в квазистационарном режиме, то есть производной $\partial \mathcal{G}/\partial \bar{t}$ в (1.37) можно пренебречь, тогда как при $H_T \gg 1$ можно утверждать, что температурная волна распространяется лишь внутрь тонкого слоя, прилегающего к поверхности тела. За пределами этого

слоя температурных волн не существует (случай высокочастотных колебаний).

Между параметрами H и H_T существует простая зависимость

$$H_T^2 = \frac{\omega d^2}{\nu} \frac{\nu}{a_0} = H^2 \text{Pr}. \quad (1.38)$$

С учетом (1.30) и (1.38) уравнение (1.37) можно привести к более удобному для теоретического анализа виду

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{t}} - \varepsilon \frac{\partial (\bar{\psi}, \vartheta)}{\partial (\bar{x}, \bar{y})} = \frac{\varepsilon}{\text{Re}_s \text{Pr}} \nabla^2 \vartheta. \quad (1.39)$$

Система уравнений (1.28) и (1.39) полностью описывает течение и теплообмен несжимаемой жидкости. Следует отметить, что к двум независимым параметрам в уравнении сохранения вихрей $\varepsilon = U_\infty / \omega d$ и $H = \sqrt{\omega / \nu d}$ добавился еще один: число Прандтля $\text{Pr} = \nu / a_0$. Сравнение (1.39) с уравнением сохранения вихрей (1.28) показывает, что при $\text{Pr} = 1$ оба уравнения имеют сходную структуру. Нетрудно убедиться, и в сходстве граничных условий к ним: для избыточной температуры $(T - T_\infty)$ и завихренности $\omega_z = -\nabla^2 \psi / 2$ они совпадают. Следовательно, можно ожидать, что распределение вихревой напряженности ω_z и распределение температуры в окрестности тела будут иметь сходную структуру.

1.4 Периодический ламинарный пограничный слой

Динамический пограничный слой. Вернемся к уравнению (1.10), описывающему движения вязкой несжимаемой жидкости и посмотрим его поведение в асимптотическом случае, когда вязкие силы сравнимы с силами инерции лишь в тонком слое около тела.

Пусть на некоторое тело набегаёт поток со скоростью U_∞ . Скорость течения почти до самой поверхности тела имеет порядок скорости U_∞ , тогда как на самой поверхности она равна нулю. Переход от нулевой скорости на стенке к полной скорости совершается в очень

тонком слое, называемом пограничным слоем или слоем трения. Следовательно, в рассматриваемом течении следует различать две области.

1. Первая область – очень тонкий слой в непосредственной близости от тела. В этой области градиент скорости $\frac{\partial u}{\partial y}$ в направлении, нормальном к стенке, очень велик, а вязкость μ , как бы она мала ни была, оказывает существенное влияние на течение, поскольку здесь касательное напряжение

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.40)$$

может принимать большие значения.

2. Вторая область – все остальное течение вне пограничного слоя. В этой области градиент скорости не достигает больших значений, а само течение потенциально и описывается уравнениями Эйлера (1.4).

Пусть толщина пограничного слоя δ очень мала по сравнению с характерным линейным размером тела d , то есть $\delta/d \ll 1$, а ось x направлена вдоль стенки, y – по нормали к ней. Тогда течение жидкости в пограничном слое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

На поверхности тела должно выполняться условие отсутствия скольжения

$$u = v = 0, \quad y = 0. \quad (1.42)$$

На внешней границе пограничного слоя продольная скорость u переходит в скорость $U(x, t)$ внешнего течения, то есть

$$u = U(x, t) \quad \text{при} \quad y \rightarrow 0. \quad (1.43)$$

За пределами пограничного слоя выполняется соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.44)$$

Скорость $U(x, t)$ потенциального течения следует рассматривать как известную функцию, определяющую посредством выражения (1.44) распределение давления.

Помимо условий (1.42-1.43) в случае неустановившихся процессов должно быть задано распределение скорости, в момент времени $t = 0$, соответствующее условиям задачи течения в пограничном слое во всей области значений x и y .

С учетом (1.44) уравнения (1.41) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

При интегрировании уравнений пограничного слоя, так же, как и в случае полных уравнений Навье-Стокса, часто вначале удовлетворяют уравнению неразрывности, для чего вводят функцию тока $\psi(x, y, t)$, то есть полагают

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Подставляя эти выражения в (1.49), имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (1.46)$$

Граничные условия (1.42-1.43) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &\rightarrow U(x, t), \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Наконец, учет сжимаемости приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Если сжимаемость обусловлена, например, неоднородностью поля температур, необходимо задать закон изменения динамической вязкости μ от температуры и уравнение состояния

$$\mu = \mu(T), \quad p = pRT. \quad (1.49)$$

Температурные пограничные слои. Структура температурного поля в окрестности тела более или менее ясна из чисто наглядных соображений. В предельном случае, когда скорость течения равна нулю (случай покоя), тепло от нагретого тела распространяется в окружающую среду равномерно во всех направлениях. То же самое наблюдается и при малых скоростях движения. При больших скоростях течения картина распространения тепла становится иной: по мере увеличения скорости область течения, подвергающаяся нагреванию, все более и более стягивается, образуя узкую зону в непосредственной окрестности тела (рисунок 1.1). Аналогично обстоит дело и с завихренностью, то есть можно утверждать, что лишь в тонком слое около тела вязкие силы играют существенную роль, а именно: величина этих сил имеет одинаковый порядок с инерционными силами. Этот слой около тела называется пограничным слоем. Тогда все поле течения вокруг тела разделяется на внешнее течение, свободное от вращения частиц и на пограничный слой, в котором только и проявляется вязкое трение.

Следует отметить, что предельный переход $H \rightarrow \infty$ в (1.28) или $H_T \rightarrow \infty$ в (1.39) нельзя производить в самих уравнениях, ибо этим мы вычеркнули бы производные наиболее высокого порядка, понизив порядок уравнений. Следовательно, решения упрощенных уравнений, полученных путем вычеркивания вязких членов, не описывают течения вязкой жидкости.

Рассмотрим поведение уравнения энергии в том предельном случае, когда скорость течения U_∞ принимает большие значения, то есть $Re \rightarrow \infty$. Тогда повышение температуры жидкости, вызываемое нагретым телом, распространяется в основном только на узкую зону в непосредственной близости от тела; за пределами же этой зоны повышение

температуры незначительно. Такое распределение температуры особенно резко выражено в тех случаях, когда коэффициент теплопроводности K мал, как это имеет место для жидкостей и газов. В этих случаях вблизи тела возникает резкий температурный градиент в направлении, перпендикулярном к стенке, и только в тонком слое вблизи тела теплопередача посредством теплопроводности по своей величине имеет одинаковый порядок с теплопередачей посредством конвекции [2]. По аналогии со случаем течения вязкой жидкости назовем этот слой температурным пограничным слоем толщиной δ_T .

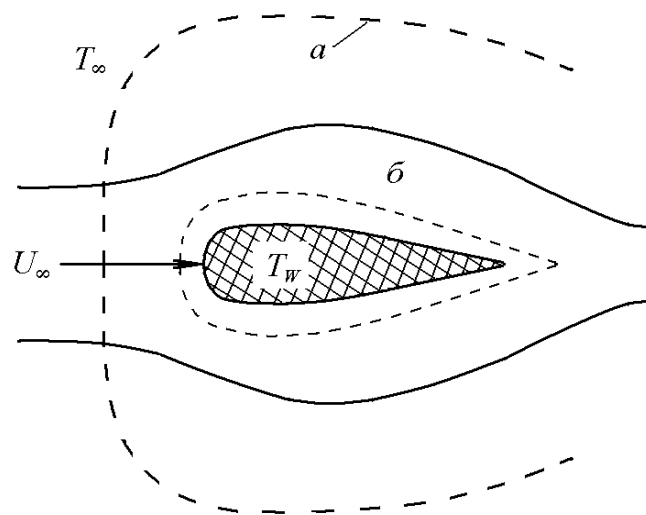


Рисунок 1.1 Аналогия между распределениями температуры и вихревой напряженности в окрестности обтекаемого тела в некоторый момент времени: а – граница нагретой области при малой скорости течения; б – та же граница при большой скорости течения

Пусть толщина температурного пограничного слоя δ_T мала по сравнению с размерами тела, то есть $\delta_T/d \ll 1$, ось x направлена вдоль стенки, y – по нормали к поверхности стенки. Тогда для плоского движения сжимаемой жидкости получим систему уравнений, называемых уравнениями пограничного слоя [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1.50a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.50б)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.50в)$$

$$p = \rho R T, \quad (1.50г)$$

$$\mu = \mu(t). \quad (1.50д)$$

Если в уравнениях (1.50 а-в) ввести функцию тока $\psi(x, y, t)$, такую, что

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right), \quad \bar{y} = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy,$$

то задачу о сжимаемых пограничных слоях можно свести к обычной задаче о течении вязкой жидкости (несжимаемой). Новые переменные x, \bar{y}, t были введены Иллингвортом–Стюартсоном, и, независимо от них, – Дородницыным. В рамках теории пограничного слоя давление следует рассматривать как заданную активную величину (1.44), следовательно, в записанных пяти уравнениях имеем пять неизвестных. Эти уравнения должны решаться при граничных условиях

$$\begin{aligned} u &= U_w(t), \quad v = 0, \quad t = T_w(x, t), \quad y = 0, \\ u &= U(x, t), \quad t = T_\infty(x, t), \quad y \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где $U_w(t)$ – скорость стенки, а $U(x, t)$ – скорость невязкого внешнего течения.

В практических задачах в большей части случаев не требуется знать все особенности температурного и скоростного полей. В отношении температурного поля обычно необходимо знать в первую очередь количество тепла, передаваемого от обтекаемого тела к жидкости (или наоборот). Это количество тепла можно выразить через коэффициент теплоотдачи α , определяемый либо для каждой точки обтекае-

мой поверхности, либо для всей поверхности в виде некоторого среднего значения. Произведение коэффициента теплоотдачи на разность температур стенки и жидкости, находящейся на большом расстоянии от стенки, и дает то количество тепла $q(x)$, которое переходит в рассматриваемой точке x тела к жидкости через единицу площади в единицу времени (поток тепла). Таким образом,

$$q(x) = \alpha(x)(T_w - T_\infty). \quad (1.52)$$

На границе между твердым телом и жидкостью теплопередача осуществляется только посредством теплопроводности. Поток тепла, согласно Фурье, пропорционален градиенту температуры в направлении, перпендикулярном к стенке, и равен

$$q(x) = -K \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}. \quad (1.53)$$

Из сопоставления равенств (1.52) и (1.53) мы видим, что вместо локального размерного коэффициента теплоотдачи $\alpha(x)$ можно ввести безразмерный коэффициент теплоотдачи $Nu(x)$, определяемый следующим образом

$$Nu(x) = \frac{\alpha(x)d}{K} = - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{n}} \right)_{\bar{n}=0} = - \frac{d}{T_w - T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (1.54)$$

где $\vartheta = T - T_\infty / T_w - T_\infty$, а $\bar{n} = n/d$ – расстояние от стенки по нормали, отнесенное к характерному размеру тела. Число $Nu(x)$ называется числом Нуссельта.

Задачи к главе 1

1.1. Вычислить толщину акустического пограничного слоя, образующегося при колебании пластины в воздухе. Частота колебаний пластины $f = 5$ Гц, динамический коэффициент вязкости $\mu = 18,1 \cdot 10^{-6}$ Па·с, плотность воздуха $\rho = 1,205$ кг/м³.

1.2. Известно, что при колебаниях плоскости скорость в окружающей среде определяется формулой

$$u = U_{\infty} \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right),$$

где U_{∞} – амплитуда колебаний скорости, y – расстояние от плоскости пластины, ω – циклическая частота колебаний, ν – кинематический коэффициент вязкости, t – время. Рассчитать глубину проникновения h вязкой волны, считая, что на этой глубине амплитуда колебаний скорости уменьшилась в 100 раз. Плоскость колеблется с частотой $f = 10$ Гц, $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

1.3. Определить длину вязкой волны, пользуясь формулой

$$u = U_{\infty} \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right),$$

где U_{∞} – амплитуда колебаний скорости, y – расстояние от плоскости пластины, ω – циклическая частота колебаний, ν – кинематический коэффициент вязкости, t – время. Частота колебаний составляет $f = 10$ Гц, а $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

1.4. Пусть в жидкости с частотой f вдоль своей оси колеблется полый неограниченный цилиндр (труба). Определить поле скоростей внутри цилиндра.

1.5. Поле скоростей внутри полого колеблющегося вдоль своей оси цилиндра описывается выражением

$$u = U_{\infty} \frac{J_0(z)}{J_0(z_0)} \exp(i\omega t).$$

Здесь U_{∞} – амплитуда колебаний скорости, $J_0(z)$, $J_0(z_0)$ – функции Бесселя первого рода нулевого порядка, $z = i\sqrt{r}\sqrt{\omega/\nu}$, $z_0 = i\sqrt{R}\sqrt{\omega/\nu}$, r – радиальная координата (отсчитывается от оси цилиндра), ω – циклическая частота колебаний, ν – кинематический коэффициент вязкости, t – время, R – радиус цилиндра. Показать, что при $r\sqrt{\omega/\nu} \gg 1$ и $R\sqrt{\omega/\nu} \gg 1$ вышеприведенная формула преобразуется к виду

$$u = U_{\infty} \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right),$$

где y – расстояние от стенки цилиндра.

1.6. Известно, что поле скоростей вблизи плоской пластины, совершающей колебания параллельно самой себе, выражается в виде

$$u = U_{\infty} \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right),$$

где U_{∞} – амплитуда колебаний скорости пластины, y – расстояние от плоскости пластины, ω – циклическая частота колебаний, ν – кинематический коэффициент вязкости, t – время. Пользуясь уравнением неразрывности определить компоненты вихревой напряженности на стенке.

1.7. Пусть в уравнении сохранения вихрей нелинейные члены малы и в итоге оно примет следующий вид

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \nu \nabla^4 \psi,$$

где ψ – функция тока, x, y – координаты, t – время, ν – кинематический коэффициент вязкости. Показать, что при больших значениях $H = \omega L^2 / \nu$ оно переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3},$$

описывающее колеблющийся пограничный слой.

1.8. Вычислить толщину колеблющегося температурного слоя, образующегося при колебаниях температуры плоскости пластины в воде с частотой $f = 5$ Гц. Плотность воды $\rho = 998,2$ кг/м³, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,599$ Вт/м·К, коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении $c_p = 4183$ Дж/кг·К.

1.9. Толщина колеблющегося с частотой $f = 5$ Гц температурного пограничного слоя в окрестности плоской пластины в воде равна

$\delta_T = 3,02 \cdot 10^{-3}$ м. Какова толщина динамического акустического пограничного слоя δ в окрестности, колеблющегося с частотой $f = 1$ Гц пластины? Число Прандтля воды равно $Pr = 7,02$.

1.10. Известно, что температурное поле вокруг пластины выражается в виде

$$T = T_w^0 \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right),$$

где T_w^0 – амплитуда колебаний температуры на самой пластине, y – расстояние от пластины, ω – циклическая частота колебаний, t – время, a – коэффициент температуропроводности. Определить длину температурных волн λ^* в воздухе, если коэффициент теплопроводности $\lambda = 2,59 \cdot 10^{-2}$ Вт/м·К, плотность воздуха $\rho = 1,205$ кг/м³, коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении $c_p = 1005$ Дж/кг·К, а частота колебаний $f = 1$ Гц.

1.11. Пусть температура стенок полого цилиндра изменяется по гармоническому закону

$$T = T_w^0 \cos \omega t,$$

где T_w^0 – амплитуда колебаний температуры на самой пластине, ω – циклическая частота колебаний, t – время. Определить температурное поле внутри цилиндра.

1.12. Известно, что если температура плоской пластины изменяется по гармоническому закону

$$T = T_w^0 \cos \omega t,$$

то вокруг нее устанавливается колеблющееся температурное поле, определяемое по формуле

$$T = T_w^0 \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right),$$

где T_w^0 – амплитуда колебаний температуры на самой пластине, ω – циклическая частота колебаний, y – расстояние от пластины, t –

время, a – коэффициент температуропроводности. Рассчитать глубину проникновения h температурной волны в воду, если на этой глубине амплитуда колебаний уменьшается в 100 раз. Принять коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,599$ Вт/м·К, плотность воды $\rho = 998,2$ кг/м³, коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении $c_p = 4183$ Дж/кг·К, суточные колебания температуры $f = 1,157 \cdot 10^{-5}$ с.

1.13. Температурное поле внутри полого цилиндра при колебаниях температуры стенки определяется по закону

$$T = T_w^0 \frac{J_0(z)}{J_0(z_0)} \exp(i\omega t),$$

где T_w^0 – амплитуда колебаний температуры на самой пластине, ω – циклическая частота колебаний, t – время, $J_0(z)$, $J_0(z_0)$ – функции Бесселя первого рода нулевого порядка, $z = i\sqrt{r}\sqrt{\omega/a}$, $z_0 = i\sqrt{R}\sqrt{\omega/a}$, r – радиальная координата, R – радиус цилиндра, a – коэффициент температуропроводности. Полагая, что $r\sqrt{\omega/a} \gg 1$, $R\sqrt{\omega/a} \gg 1$, показать, что в пристеночной области выражение описывающее температурное поле преобразуется к формуле

$$T = T_w^0 \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right), \quad y = R - r,$$

описывающей температурное поле вблизи пластины, температура которой изменяется по гармоническому закону

$$T = T_w^0 \cos \omega t.$$

1.14. Известно, что в тонком слое жидкости в окрестности тела движение вихревое, а в массе жидкости – потенциальное. Показать, что в массе жидкости движение описывается уравнением

$$\nabla^2 \psi = 0,$$

где ψ – функция тока.

1.15. Пусть в тонком слое жидкости движение вихревое, а в массе жидкости – потенциальное, так что в ней справедливо соотношение

$$\nabla^2 \psi = 0,$$

где ψ – функция тока. Показать, что в этом случае выполняется также соотношение

$$\nabla^2 \vec{v} = 0.$$

Здесь \vec{v} – вектор скорости.

1.16. Пусть тело совершает колебания с установившейся амплитудой. Пользуясь методом разложения по малому параметру при слабом возмущении внешнего течения показать, что

$$\nabla \langle \vec{v}_2 \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \langle \rho_1 v_1 \rangle,$$

где ρ_1, v_1 – возмущения плотности и скорости, соответственно, ρ_0 – невозмущенная плотность, v_2 – скорость вторичных течений, угловые скобки означают осреднение по времени.

1.17. Пусть тело совершает колебания с установившейся амплитудой. Пользуясь методом разложения по малому параметру при слабом возмущении внешнего течения, получить уравнение, описывающее поле скоростей стационарных вторичных течений.

1.18. Плоская пластина совершает колебания в собственной плоскости в воздухе. Одновременно с той же частотой колеблется и температура пластины. Какой из пограничных слоев будет толще? Как изменится результат, если пластина находится в воде? Для воздуха принять $Pr < 1$, для воды $Pr > 1$.

1.19. Пластина помещена в стоячее звуковое поле, давление в котором изменяется по закону

$$p_1 = p_A(x) \exp(i\omega t),$$

где $p_A(x)$ – амплитуда колебаний давления, ω – циклическая частота колебаний, x – координата вдоль пластины, t – время. Найти поле скоростей вблизи пластины.

1.20. В стоячем звуковом поле установлен канал, составленный из двух плоскопараллельных пластин. Найти распределение скорости, если давление в канале изменяется по закону

$$p_1 = p_A \sin kx \cos \omega t,$$

где p_A – максимальная амплитуда колебаний давления, $k = \omega/c_0$ – волновое число, ω – циклическая частота колебаний, c_0 – скорость звука в невозмущенном газе, x – координата вдоль оси канала, t – время.

1.21. Колебания скорости в канале, составленном из двух плоскопараллельных пластин, имеет вид

$$u_1 = \frac{ip_A \cos kx}{\rho_0 c_0} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}[(1+i)\eta]}{\operatorname{ch}[(1+i)\eta_w]} \right\} \exp(i\omega t),$$

где p_A – максимальная амплитуда колебаний давления, $k = \omega/c_0$ – волновое число, ω – циклическая частота колебаний, c_0 – скорость звука в невозмущенном газе, ρ_0 – невозмущенная плотность, $\eta = y\sqrt{\omega/2\nu}$, $\eta_w = h\sqrt{\omega/2\nu}$, x , y – продольная и поперечная координаты, соответственно, h – полуширина канала, t – время, ν – кинематический коэффициент вязкости. Найти высокочастотное разложение колебаний скорости, полагая $\eta \gg 1$, $\eta_w \gg 1$.

Указание. При $\eta \gg 1$, $\eta_w \gg 1$ имеем $\exp(\eta) \gg \exp(-\eta)$.

1.22. Плоская пластина установлена в стоячее звуковое поле. Пользуясь первым приближением температурного пограничного слоя в методе разложения в ряд при слабом возмущении внешнего течения с $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ (u_0 , v_0 – компоненты скорости в нулевом приближении), определить колеблющееся температурное поле. Осредненную температуру среды принять не зависящей от x и y , где x , y – продольная и поперечная координаты, соответственно. Стоячая волна характеризуется выражением

$$p_1 = p_A(x) \exp(i\omega t),$$

где p_1 – колебания давления, $p_A(x)$ – амплитуда колебаний давления, ω – циклическая частота колебаний, t – время.

1.23. В стоячем звуковом поле установлен канал, составленный из двух плоскопараллельных пластин. Найти температурное поле

внутри канала, если давление в канале изменяется по закону

$$p_1 = p_A \cos kx \cos \omega t .$$

Здесь p_A – максимальная амплитуда колебаний давления, $k = \omega/c_0$, ω – циклическая частота колебаний, c_0 – скорость звука в невозмущенном газе, x – продольная координата, t – время. Ширина канала $2h$.

1.24. Канал, составленный из двух плоскопараллельных пластин, установлен в стоячем звуковом поле с колебаниями давления

$$p_1 = p_A \cos kx \cos \omega t ,$$

где p_A – максимальная амплитуда колебаний давления, $k = \omega/c_0$ – волновое число, ω – циклическая частота колебаний, c_0 – скорость звука в невозмущенном газе, x – продольная координата, t – время. Колебания температуры в канале имеют вид

$$T_1 = \frac{p_A \cos kx}{\rho_0 c_p} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}[(1+i)\eta]}{\operatorname{ch}[(1+i)\eta_w]} \right\} \exp(i\omega t),$$

где $\eta = y\sqrt{\omega/2a}$, $\eta_w = h\sqrt{\omega/2a}$, y – поперечная координата, h – полуширина канала, ρ_0 – невозмущенная плотность, a – коэффициент температуропроводности, c_p – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении. Полагая $\eta \gg 1$, $\eta_w \gg 1$, найти высокочастотное разложение колебаний температуры в пристеночной области.

1.25. Плоская пластина, нагретая неравномерно $T_0 = T_0(x)$, помещена в стоячее звуковое поле с колебаниями давления

$$p_1 = p_A(x) \cos \omega t ,$$

где $p_A(x)$ – амплитуда колебаний давления, ω – циклическая частота колебаний, x – координата вдоль пластины, t – время. Определить температурное поле вблизи пластины.

1.26. Плоский канал, составленный из двух плоскопараллельных пластин, нагретых неравномерно $T_0 = T_0(x)$, помещен в стоячее звуковое поле, характеризующееся колебаниями давления

$$p_1 = p_A \sin kx \cos \omega t ,$$

где p_A – максимальная амплитуда колебаний давления, $k = \omega/c_0$ – волновое число, ω – циклическая частота колебаний, c_0 – скорость звука в невозмущенном газе, x – продольная координата, t – время. Найти распределение колебаний температуры. Полуширина канала равна h .

1.27. Плоская пластина установлена в стоячем звуковом поле с амплитудой давления

$$p_A = r \rho_0 c_0^2 \cos kx,$$

где r – безразмерная амплитуда колебаний давления, ρ_0 – невозмущенная плотность, c_0 – скорость звука в невозмущенном газе, $k = \omega/c_0$ – волновое число, ω – циклическая частота колебаний, x – координата вдоль пластины. Пластина нагрета таким образом, что осредненная температура равна T_1 при $x=0$ и T_0 – при $x=L$, где L – длина пластины. Известно также, что колебания температуры выражаются соотношением

$$T_1 = \left\{ \frac{p_A}{\rho_0 c_p} [1 - \exp(-\eta_T)] - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{dp_A}{dx} \frac{dT_0}{dx} \left[1 - \frac{1}{1-\sigma} \exp(-\eta_T) + \frac{\sigma}{1-\sigma} \exp(-\eta) \right] \right\} \exp(i\omega t),$$

где σ – число Прандтля, c_p – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении, $\eta = (i\omega/\nu)^{1/2} y$, $\eta_T = (i\omega/a)^{1/2} y$, y – расстояние по нормали к пластине, ν – кинематический коэффициент вязкости, a – коэффициент температуропроводности. Найти вдали от пластины точку, где колебания температуры отсутствуют, если осредненная температура изменяется линейно от $T_1 = 350^\circ\text{K}$ до $T_0 = 250^\circ\text{K}$, $L = 0,2$ м, $\omega = 3000$ рад/с, $\rho_0 = 1,21$ кг/м³, $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\sigma = 0,7$, $c_p = 1005$ Дж/кг·К.

Указание. Точка считается «вдали» от пластины, если $y_0 \sqrt{\omega/2a} \geq 5$.

ГЛАВА 2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА И ЭНЕРГИИ

2.1 Метод сращиваемых асимптотических разложений

Историческая справка. Хотя идеи, лежащие в основе метода, развивались в течение многих лет, наиболее выдающиеся результаты были получены лишь в последние 25 лет.

Применительно к течению вязкой жидкости метод развивался в работах Каплуна, Лагерстрема, Праудмена и Пирсона, которые использовали его для изучения стационарного обтекания сферы и кругового цилиндра при малых числах Рейнольдса.

Сравнительно недавно Рэлей приложил метод к решению задачи об обтекании колеблющимся потоком круглого цилиндра и сферы. Подобные вопросы были рассмотрены также и Вангом.

Решение задачи о теплообмене колеблющегося цилиндра с несжимаемой жидкостью при различных значениях параметров в уравнении (1.37), полученном совсем недавно Давидсоном, свидетельствует о широких возможностях, которые представляет метод сращиваемых асимптотических разложений для решения нестационарных задач тепло- и массопереноса.

Следует отметить, что многие положения, на которых базируется метод, нуждаются в строгом математическом доказательстве, на что указывает, в частности, Ван-Дайк. В этом смысле интересен вклад советских авторов, которые рассмотрели асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной и дали ряд алгоритмов построения асимптотического разложения решения.

Сущность метода. Чтобы понять идеи метода сращиваемых асимптотических разложений, вернемся к уравнению (1.28), опуская черту сверху,

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{H^2} \nabla^4\psi \quad (2.1)$$

и рассмотрим случаи, когда реализуется условие $\varepsilon \ll 1$.

Пусть $H \sim 1$. Тогда можно говорить о возмущении параметра ε . Допустим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно получить решение уравнения (2.1), которое будем называть асимптотическим решением. Результат можно улучшить, рассматривая его как первый шаг в разложениях по малому параметру ε . Получающиеся ряды представляют собой асимптотические разложения. В асимптотических разложениях первый член называется основным решением или нулевым приближением, а первое его возмущение называется первым приближением или решением первого порядка. Следовательно, решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(x, y, t) + \varepsilon\psi_1(x, y, t) + \varepsilon^2\psi_2(x, y, t) + \dots, \quad (2.2)$$

так что уравнение распадается на систему $(n+1)$ уравнений

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_0)}{\partial t} = \frac{1}{H^2} \nabla^4\psi_0, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_1)}{\partial t} - \frac{1}{H^2} \nabla^4\psi_1 = \frac{\partial(\psi_0, \nabla^2\psi_0)}{\partial(x, y)}. \quad (2.3b)$$

Решение (2.2) может давать вполне достаточную точность всюду в поле течения при достаточно малых ε . В силу асимптотического характера результат будет тем точнее, чем меньше ε . Задача (2.1), таким образом, является задачей регулярных возмущений, когда малый параметр остается небольшим во всей области течения. Очевидно, что в уравнении (2.3a) члены с малым параметром отсутствуют.

Пусть теперь $\varepsilon \ll 1$, а $H \gg 1$. В этом случае можно говорить также и о возмущении параметра $1/H$ при старшей производной в уравнениях (2.3). Если положить $1/H = 0$ и решить, например, уравнение (2.3a) методом регулярных возмущений, как и ранее, то в уравнении (2.3a) нулевого порядка произойдет потеря старшей производной

и полученное решение в случае вязкой жидкости будет лишено физического смысла: оно не будет удовлетворять граничному условию на стенке. Следовательно, как бы мал ни был $1/H$, вблизи стенки им пренебречь нельзя: в пограничном слое инерционные члены сравнимы по величине с вязкими. С другой стороны, вдали от стенки вязкие силы малы по сравнению с инерционными и член $1/H^2 \nabla^4 \psi_0$, будет действительно мал по сравнению с остальными. Этот пример показывает, что параметр $1/H$ мал неравномерно: за пределами пограничного слоя его можно не учитывать, а в пределах пограничного слоя его следует сохранить. Таким образом, задача при возмущении параметра $1/H$ отличается от предыдущей и может быть названа задачей особых или сингулярных возмущений.

Часто оказывается полезным исследовать обыкновенные линейные дифференциальные уравнения как математическую модель, отражающую существенные черты более сложных задач.

Пусть дана задача

$$\varepsilon \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = a, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad (2.4)$$

имеющая точное решение (сплошная линия на рис. 2.1)

$$f(x, \varepsilon) = (1-a) \frac{1 - \exp(-x/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)} + ax. \quad (2.5)$$

Попытаемся построить ее приближенное решение. Если положить $\varepsilon = 0$, порядок уравнений понижается на единицу, так что оба граничных условия не могут быть удовлетворены, если $a \neq 1$. Оставим условие $f(1) = 1$. Тогда приближенное решение для малых ε будет

$$f(x, \varepsilon) \sim (1-a) + ax. \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть (штриховая линия на рисунке 2.1), что оно является хорошим приближением, за исключением «пограничного слоя», где $x \sim \varepsilon$. Если ввести увеличенную внутреннюю координату X , соответствующую этой области, и положить

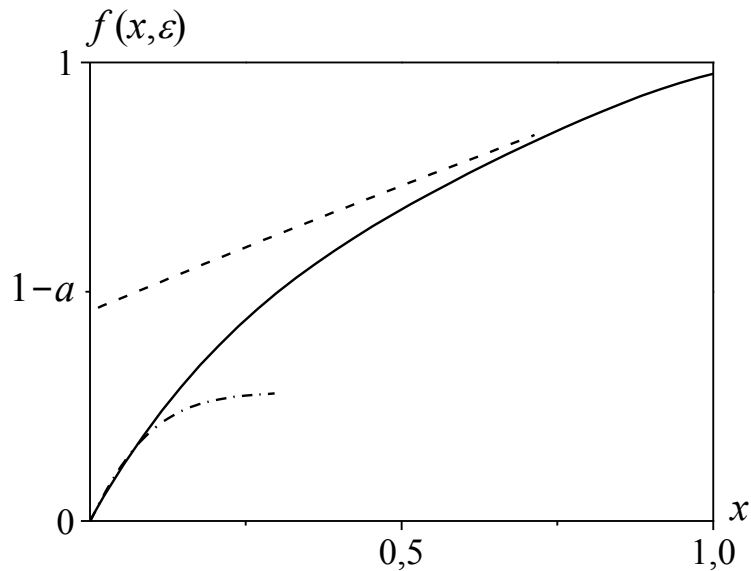


Рисунок 2.1 Решение модельной задачи

$$f(x, \varepsilon) = F\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \quad X = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

то исходная задача (2.4) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 F}{dX^2} + \frac{dF}{dX} = a\varepsilon, \quad F(0) = 0, \quad F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 1. \quad (2.8)$$

Если теперь положить $\varepsilon = 0$, то решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим внутреннему граничному условию, будет функция $C[1 - \exp(-X)]$ с произвольным множителем. Наложение внешнего условия привело бы к обращению этого множителя в единицу. Однако точное решение показывает, что это неверно. Внешнее граничное условие должно быть отброшено при отыскании внутреннего решения так же, как было отброшено внутреннее граничное условие для внешнего решения, а постоянную C следует искать по условиям сращивания. В данном случае $C = 1 - a$. Тогда равномерно пригодное при $\varepsilon \rightarrow 0$ первое приближение будет иметь вид (штрих-пунктирная линия на рисунке 2.1)

$$f(x, \varepsilon) = (1 - a)[1 - \exp(-x/\varepsilon)] + ax. \quad (2.9)$$

Таким образом, для построения равномерно пригодного во всей области течения асимптотического разложения (2.3а) необходимо:

а) полагая $1/H$ малым, произвести разложение решения во внешней области, т.е. получить внешнее разложение, удовлетворяющее внешнему граничному условию;

б) сохраняя параметр $1/H$ в уравнении (2.3а) и производя растяжение нормальной к поверхности координаты, получить внутреннее разложение, удовлетворяющее внутренним граничным условиям;

в) обеспечить гладкий переход от внутреннего разложения к внешнему, т.е. осуществить асимптотическое сращивание.

Асимптотическое сращивание. Выше было показано, что методу сращиваемых асимптотических разложений свойственна потеря граничных условий. Нельзя ожидать, что внешнее разложение будет удовлетворять условиям, которые наложены во внутренней области, и, наоборот, внутреннее разложение в общем случае не будет удовлетворять условиям в удаленной от стенки области. Таким образом, неудовлетворенные граничные условия вообще присущи как внутреннему, так и внешнему разложениям. Потеря условий восполняется сращиванием двух разложений.

Возможность сращивания основана на существовании области перекрытия, в которой пригодны как внутреннее, так и внешнее разложения. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами. Нетрудно видеть, что сращиванию может быть противопоставлено численное склеивание, которое состоит в связывании двух рядов условием равенства их численных значений, и, возможно, численных значений некоторых производных на какой-то произвольной границе. Установлено, что сращивание дает лучшее, чем склеивание, решение для приближения высокого порядка.

Существование области перекрытия означает, что внутреннее разложение внешнего разложения должно с точностью до соответствующего порядка согласовываться с внешним разложением внутреннего разложения в соответствии с принципом асимптотического сращива-

ния: m - членное внутреннее разложение n - членного внешнего разложения равно n - членному внешнему разложению m - членного внутреннего разложения. По определению, m - членное внутреннее n - членного внешнего разложения находится переписыванием последнего во внутренних переменных, асимптотическим разложением для малых $1/H$ и обрыванием результата на m - члене. Обратный процесс дает n - членное внешнее разложение m - членного внутреннего разложения.

Обычно первый член внешнего разложения (например, при обтекании цилиндра колеблющимся потоком) независим от первого члена внутреннего разложения. Физически это означает, что внешнее разложение с точностью до первого порядка определяет внутреннее разложение. Первый член внутреннего разложения определяет второй член внешнего разложения; тот, в свою очередь, – второй член внутреннего разложения и т.п. Вследствие этого, число членов во внешнем и внутреннем разложениях может быть различным.

Наконец, возникает практически важный вопрос о том, как из двух разложений, одно из которых справедливо во внешней области, а другое – во внутренней, построить одно разложение, равномерно пригодное во всей области течения.

На практике применяются два существенно различных метода. Первый может быть назван аддитивным составлением. Сумма внутреннего и внешнего разложений поправляется вычитанием их общей части, так что последняя не считается дважды.

Второй метод носит название мультипликативного составления. В этом случае внешнее разложение умножается на поправочный множитель, состоящий отношения внутреннего разложения к внешнему разложению внутреннего разложения. При решении уравнения энергии общие черты метода сохраняются.

В заключение следует отметить, что до сих пор из четырех параметров ε , H , Re_k , Re_s , характеризующих течение при колебаниях, за независимые принимали ε и H . По-видимому, нет принципиальных

возражений против того, чтобы за независимые параметры принять любые два из них, например, ε и Re_k .

2.2 Метод последовательных приближений

Применительно к задаче об обтекании вязкой жидкостью колеблющегося круглого цилиндра метод впервые был применен Хольтсмарком и авторами, а затем в ряде других работ.

Рассмотрим уравнение (1.28), когда $\varepsilon \ll 1$. Предположим, что вектор скорости \vec{v} можно представить в виде суммы стационарной \vec{v}_2 и нестационарной \vec{v}_1 частей

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \varepsilon \vec{v}_2, \quad (2.10)$$

так что

$$\overline{\vec{v}} = \varepsilon \overline{\vec{v}_2}, \quad \overline{\vec{v}_1} = 0, \quad (2.11)$$

где черта означает осреднение во времени. Аналогично, функцию тока можно представить, как

$$\psi = \psi_1 + \varepsilon \psi_2. \quad (2.12)$$

Подстановка (2.12) в (2.1) позволяет разделить последнее на стационарную

$$-\frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_2 = \frac{\overline{\partial(\psi_1, \nabla^2 \psi_1)}}{\partial(x, y)} + \varepsilon^2 \frac{\overline{\partial(\psi_2, \nabla^2 \psi_2)}}{\partial(x, y)} \quad (2.13)$$

и нестационарную

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_1 - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi_1) = \varepsilon \left[\frac{\partial(\psi_1, \nabla^2 \psi_1)}{\partial(x, y)} \right]_n + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial(\psi_1, \nabla^2 \psi_2)}{\partial(x, y)} + \varepsilon^2 \frac{\partial(\psi_2, \nabla^2 \psi_1)}{\partial(x, y)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

части. Индекс n при первом члене в правой части уравнения (2.14) означает, что следует брать лишь зависящую от времени часть величины, заключенной в скобки. При $\varepsilon \sim 1$ уравнения (2.13-2.14) практически неразрешимы. В условиях, когда $\varepsilon \ll 1$, членами, содержащими

ε , ε^2 , ε^3 , можно пренебречь. Тогда

$$\frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_1 - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi_1) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_2 = \frac{\partial (\psi_1, \nabla^2 \psi_1)}{\partial (x, y)}. \quad (2.16)$$

В случае кругового цилиндра эту систему необходимо записать в цилиндрических координатах, полагая, что

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.17)$$

и что жидкость колеблется со скоростью $U = U_\infty \cos \omega t$ перпендикулярно оси цилиндра в направлении $\theta = 0$.

Граничные условия для нестационарной части скорости записываются в виде

$$v_1 \rightarrow (U_\infty \cos \theta \cos \omega t, -U_\infty \sin \theta \cos \omega t), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

$$v_1 = 0, \quad r = a,$$

где U_∞ – амплитуда колебаний скорости; граничные условия для стационарной части скорости можно записать как

$$\vec{v}_2 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

$$\vec{v}_2 = 0, \quad r = a.$$

Решение уравнения (2.15) при граничных условиях (2.18) нетрудно получить, если положить

$$\psi_1 = F(r) \sin \theta \exp(i\omega t) + \text{компл. сопр.} \quad (2.20)$$

Здесь $F(r)$ – функция, быстро изменяющаяся внутри акустического пограничного слоя толщиной $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$. Хольтсмарк и другие установили, что ψ_1 можно представить в виде линейной комбинации функций Ханкеля с аргументом $\sqrt{i\omega/\nu r}$. Подставляя полученное значение ψ_1 в (2.16) и решая его при граничных условиях (2.19), можно определить функцию ψ_2 в виде

$$\psi_2 = G(r) \sin 2\theta.$$

Следует, однако, отметить, что полученные решения трудно анализировать.

Приложение метода последовательных приближений к решению уравнений пограничного слоя существенно упрощает анализ явления. Действительно, пусть вне пограничного слоя жидкость колеблется по закону $U_1 = U_1(x) \cos \omega t$, причем безразмерная амплитуда смещения частиц среды $s/d = U_\infty / \omega d = \varepsilon$, где s – амплитуда смещения, d – характерный размер тела, мала, т.е. $\varepsilon \ll 1$. Тогда в первом приближении конвективными членами в уравнении (1.49) можно пренебречь. Представим скорость течения в виде суммы

$$u(x, y, t) = u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t), \quad (2.21)$$

где u_2 , в соответствии с вышесказанным, представляет собой малую добавку порядка ε к u_1 . Тогда для первого приближения u_1 получим уравнение

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial U_1}{\partial t} \quad (2.22)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad y = 0, \\ u_1 &= U_1(x, t), \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для определения второго приближения u_2 подставим полученное для первого приближения решение в ранее отброшенные конвективные члены. Получим

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (2.23)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_2 &= 0, \quad y = 0, \\ u_2 &= 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

К уравнениям (2.22-2.23) следует присоединить соответствующие уравнения неразрывности.

2.3 Разложение в ряд при слабом возмущении внешнего течения

Рассмотренные выше методы решения относятся к случаям, когда колебания твердого тела происходят в покоящейся жидкости. Однако для практических приложений значительно важнее течения, в которых колебания накладываются на стационарное течение. При этом, как правило, рассматривают случай, когда нестационарное течение в пограничном слое является результатом наложения на стационарное течение слабых периодических возмущений, т.е. внешнее течение имеет вид

$$U(x, t) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x, t), \quad (2.24)$$

где ε – малая величина.

Этот случай слабых возмущений внешнего течения впервые был рассмотрен Лайтхиллом.

Рассмотрим для простоты несжимаемый нестационарный поток с постоянными свойствами. Тогда с учетом (1.44) уравнения (1.50) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пусть скорость внешнего течения определяется выражением (2.24), а температура стенки изменяется по закону

$$T_w(x, t) = T_{w0}(x) + \varepsilon T_{w1}(x, t), \quad (2.26)$$

где $T_{w1}(x, t)$ – периодическая функция времени.

Лайтхилл предположил, что скорость и температуру потока в пограничном слое можно выразить в виде ряда по малому параметру ε

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t) + \dots, \\
v(x, y, t) &= v_0(x, y) + \varepsilon v_1(x, y, t) + \varepsilon^2 v_2(x, y, t) + \dots, \\
T(x, y, t) &= T_0(x, y) + \varepsilon T_1(x, y, t) + \varepsilon^2 T_2(x, y, t) + \dots
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь u_0, v_0, T_0 – скорость и температура стационарного основного течения (нулевое приближение), u_1, v_1, T_1 – скорость и температура чисто нестационарного течения (первое приближение) и т.п. Если ввести эти выражения в уравнения (2.25) и расположить отдельные члены уравнений по возрастающим степеням возмущающего параметра ε , то можно поставить условие, чтобы для каждой степени уравнения удовлетворялись по отдельности. Тогда каждое уравнение (2.25) распадется на ряд уравнений.

Для стационарного основного течения имеем так называемые уравнения нулевого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0, \\
u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \\
u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} &= a_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned}
u_0 = v_0 = 0, \quad T_0 &= T_{w0}(x), \quad y = 0, \\
u_0 = U_0(x), \quad T_0 &= T_\infty, \quad y \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

где T_∞ – температура набегающего потока. Уравнения (2.28) ничем не отличаются от обычных уравнений стационарного пограничного слоя, и их решения для конкретной задачи считаются известными заранее. Отметим, что часто уравнения (2.28) записывают, вводя функцию тока.

Уравнения первого порядка, соответствующие чисто нестационарному течению, имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= \\
&= \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \\
\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} &= a_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
u_1 = v_1 = 0, \quad T_1 = T_{w1}(x), \quad y = 0, \\
u_1 = U_1(x), \quad T_1 = 0, \quad y \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

В отличие от системы (2.28), все уравнения полученной системы линейны. К сожалению, они все еще достаточно сложны для того, чтобы удалось получить точное решение. Следующие физические соображения позволяют упростить задачу. Во втором из уравнений системы все члены слева, кроме первого, учитывают взаимодействие стационарного пограничного слоя толщиной $\delta_0 \sim \sqrt{\nu x/U_0}$ и акустического толщиной $\delta \sim \sqrt{\nu/\omega}$. Взаимодействие этих слоев будет определяться параметром $(\delta_0/\delta)^2 \sim \omega x/U_0$, где U_0 – масштаб изменения стационарной части продольной скорости, x – продольная координата. В двух предельных случаях, когда $\omega x/U_0 \rightarrow 0$ (низкочастотные колебания) или $\omega x/U_0 \rightarrow \infty$ (высокочастотные колебания), уравнения (2.29) существенно упрощаются и их решения могут быть найдены путем разложения по степеням $\omega x/U_0$ при низкочастотных колебаниях, и по отрицательным степеням этого параметра при высокочастотных колебаниях. Заметим, что при $\omega x/U_0 = 0$ получается квазистационарное решение, т.е. такое решение, которое в каждый момент времени ведет себя также, как стационарное решение, соответствующее мгновенному внешнему течению.

Уравнения второго порядка (нестационарные и стационарные течения) имеют вид

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \quad (2.30)$$

$$= U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial T_0}{\partial y} = a_0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}$$

при граничных условиях

$$u_2 = v_2 = T_2 = 0, \quad y = 0,$$

$$u_2 = T_2 = 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

При решении уравнений (2.30), определяющих u_2 , v_2 , T_2 , в общем случае получается периодическая составляющая с удвоенной частотой и, кроме того, не зависящая от времени стационарная составляющая, которая изменяет основное течение и может быть истолкована как вторичное течение. Тогда вместо одной системы уравнений (2.30) рассматривают две, одна из которых соответствует периодическим составляющим u_2 , v_2 , T_2 , а другая – чисто стационарным.

2.4 Расчет периодического пограничного слоя при большой амплитуде колебаний скорости

Способ расчета периодических пограничных слоев, в которых внешнее течение совершает интенсивные колебания с амплитудой, сравнимой со скоростью стационарного течения $U_0(x)$, предложен Лием. Применение этого способа для решения задачи о течении жидкости в канале под воздействием интенсивных акустических колебаний, когда колебательная скорость больше скорости основного стационарного течения рассмотрено в ряде работ.

Пусть скорость внешнего потока определяется выражением

$$U(x, t) = U_0(x) + U_1(x, t). \quad (2.31)$$

Составляющие u и v скорости потока в пограничном слое разложим на периодические и осредненные по времени значения, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) + v_1(x, y, t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

причем $\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = 0$.

Подставив выражения (2.31) и (2.32) во второе уравнение (2.25) и проведя осреднение по времени, получим

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + F(x, y), \quad (2.33)$$

где

$$F(x, y) = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \quad (2.34)$$

Уравнение (2.33), определяющее осредненное движение, при наложении колебательного движения отличается от уравнений стационарного пограничного слоя только наличием добавочного члена – функции $F(x, y)$. Эта функция физически может быть истолкована как дополнительная активная сила, возникающая благодаря колебаниям. Для ее вычисления необходимо знать нестационарное течение в пограничном слое (скорости u_1 и v_1).

Если из уравнения (2.25), записанного с учетом (2.31), вычесть выражение (2.33), можно получить уравнение для колебательной составляющей скорости u_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \left(u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \\ - \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \\ + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Оценим порядок отдельных величин в уравнении, полагая

$$\bar{t} = \omega t, \quad \bar{u}_0 = u_0 U_0^{-1}, \quad \bar{u}_1 = u_1 U_\infty^{-1}, \quad \bar{y} = y \delta^{-1}, \dots$$

где \bar{t} – безразмерное время, $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – толщина акустического пограничного слоя, U_0, U_∞ – масштабы изменения средней скорости течения и ее колебательной части, соответственно, а « \rightarrow » соответствует безразмерной величине. Тогда легко показать, что первый член в левой части, первый и последний члены в правой части уравнения (2.35) будут иметь порядок $\omega d/U_0$, остальные – порядок единицы. В случае высокочастотных колебаний $\omega d/U_0 \rightarrow \infty$, имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (2.36)$$

Именно в этом состоит основное упрощение Линя.

Уравнение (2.36) сходно с уравнением (1.21), описывающим течение при колебаниях плоскости, и, при заданной скорости U_1 колебаний внешнего течения может быть решено, так как вследствие линеаризации колебательное движение стало независимым от осредненного движения. Поперечная составляющая скорости определяется из уравнения неразрывности.

Таким образом, для решения задачи при высокочастотных колебаниях сначала из уравнения (2.36) и уравнения неразрывности отыскивают $u_1(x, y, t)$, $v_1(x, y, t)$ затем по формуле (2.34) вычисляют функцию $F(x, y)$, и, наконец, решают дифференциальное уравнение (2.33) для осредненного движения $u_0(x, y)$. Заметим, что при расчете можно пользоваться методами, применяемыми для решения стационарных уравнений пограничного слоя.

Так, Накоряков и авторы воспользовались приближением Озеена в модифицированном виде.

Так как на границе внешнего пограничного слоя тангенциальная составляющая скорости u_0 стремится к скорости основного стационарного течения $U_0(x)$, а нормальная – к нулю, то в уравнении (2.33) выполняется следующее приближенное соотношение

$$U_0(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}.$$

В силу этого, уравнение (2.33) становится линейным и записывается как

$$U_0(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} = U_0(x) \frac{\partial U_0}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + F(x, y).$$

К сожалению, о правомерности такого подхода трудно судить, так как авторы не проводят каких-либо оценок.

Задачи к главе 2

2.1. Влияние течения в окрестности круглого цилиндра определяется формулой

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x) \sin \omega t,$$

где $\bar{U}(x)$ – скорость невозмущенного течения, ω – циклическая частота, t – время, $U_1(x)$ – амплитуда колебаний скорости. Пользуясь методом Линя, определить колеблющееся поле скоростей $u_1(x, y, t)$, $\nu_1(x, y, t)$, где x, y – координаты.

2.2. Внешнее течение в окрестности круглого цилиндра имеет вид

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x) \sin \omega t,$$

колеблющееся поле скоростей при этом описывается выражениями

$$u_1 = -iU_1(x) \left\{ 1 - \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] \right\} \exp(i\omega t),$$

$$\nu_1 = i \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ y + \frac{(1-i)\delta}{2} \left\{ \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] - 1 \right\} \right\} \exp(i\omega t),$$

где $\bar{U}(x)$ – осредненная скорость внешнего течения, ω – циклическая частота, $U_1(x)$ – амплитуда колебаний скорости, x, y – координаты, t – время, $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – толщина акустического пограничного слоя, ν – кинематический коэффициент вязкости, u_1, ν_1 – касательная и нормальная компоненты колебаний скорости в пограничном слое. Осредненное движение описывается уравнением

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + F(x, y),$$

где

$$F(x, y) = \left\langle U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \right\rangle - \left(\left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle \right)$$

называется дополнительной функцией, угловые скобки означают осреднение по времени. Вычислить дополнительную функцию $F(x, y)$ в окрестности цилиндра.

2.3. При разложении в ряд при слабом возмущении внешнего течения стационарное основное течение описывается уравнением

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \quad (*)$$

где u, v – продольная и поперечная компоненты скорости, соответственно, нижний индекс «0» – означает порядок приближения, \bar{U} – стационарная часть скорости внешнего течения, x, y – координаты вдоль тела и по нормали к его поверхности, соответственно, ν – кинематический коэффициент вязкости. Скорость внешнего течения при обтекании клина имеет вид

$$U(x, t) = \bar{U} [1 + \varepsilon \exp(i\omega t)],$$

где $\bar{U} = cx^m$, c и m – характеристики клина, ε – малый параметр, ω – циклическая частота колебаний, t – время. Выбором переменной подобия

$$\eta = y \sqrt{\bar{U}/\nu x}$$

из уравнения (*) получить обыкновенное дифференциальное уравнение, характеризующее подобные решения.

2.4. Внешнее течение со слабым периодическим возмущением при обтекании пластины имеет вид

$$U(x, t) = U_\infty [1 + \varepsilon \exp(i\omega t)],$$

где $U_\infty = \text{const}$ – скорость внешнего течения, ε – малый возмущающий параметр, ω – циклическая частота колебаний, t – время. Динамический периодический пограничный слой в этом случае описывается

уравнением

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (***)$$

где нижние индексы означают порядок приближения, u, ν – продольная (вдоль оси x) и поперечная компоненты скорости, x, y – координаты вдоль пластины и по нормали к ней, соответственно, $U_1 = \varepsilon U_\infty \exp(i\omega t)$, ν – кинематический коэффициент вязкости. Преобразовать уравнение (***) так, чтобы оно зависело от переменных подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad \xi = \frac{i\omega x}{U_\infty}.$$

Указание. Считать величины нулевого порядка и производные по ним известными, и равными соответственно

$$u_0 = U_\infty f', \quad \nu_0 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} [f - \eta f'],$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} f'', \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{\nu x} f''', \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{2x} \eta f''.$$

Здесь $f = f(\eta)$, штрихи означают дифференцирование по η . Принять также, что

$$u_1 = \varepsilon U_\infty \Phi_\eta \exp(i\omega t),$$

где нижний индекс у функции $\Phi = \Phi(\eta, \xi)$ показывает переменную, по которой производится дифференцирование.

2.5. Внешнее течение в окрестности круглого цилиндра имеет вид

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x) \cos \omega t,$$

где $\bar{U}(x)$ – скорость невозмущенного течения, ω – циклическая частота, $U_1(x)$ – амплитуда колебаний скорости, x – координата вдоль оси цилиндра, t – время. Пользуясь методом Линя определить колеблющееся поле скоростей.

ГЛАВА 3 ТЕЧЕНИЕ ПРИ ВНЕШНЕМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ

3.1 Колебательное движение возле цилиндра

При колебаниях тел в вязкой жидкости наиболее удивительным результатом является то, что чисто колебательное движение, благодаря нестационарному взаимодействию между эффектами инерции и вязкости, порождает стационарное течение. Такие течения экспериментально наблюдались в случае колеблющихся сфер и цилиндров, в окрестности отверстия, через которое проходит звуковой луч, вблизи пульсирующих пузырьков и колеблющихся мембран и т.п.

Наиболее полные исследования как теоретические, так и экспериментальные, были проведены для случая колеблющегося цилиндра. Это, на наш взгляд, обусловлено двумя причинами; во-первых, простотой геометрической формы и, во-вторых, тем, что техника эксперимента значительно проще, нежели в случае колеблющейся сферы. Поэтому основное внимание в данном разделе будет уделено случаю колеблющегося цилиндра.

Рассмотрим бесконечный цилиндр радиуса a , который совершает колебательное движение в вязкой несжимаемой жидкости по закону

$$U = U_1(x) \cos \omega t, \quad (3.1)$$

где ω – круговая частота колебаний.

Считаем, что жидкость на бесконечном удалении от поверхности цилиндра покоится.

Запишем уравнение (1.20) в цилиндрических координатах (r, θ) и перейдем в нем к безразмерным переменным, полагая

$$\bar{\psi} = \psi (U_\infty a)^{-1}, \quad \bar{y} = (r - a) a^{-1}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{t} = t \omega. \quad (3.2)$$

Запишем вначале уравнение (1.20) в полярных координатах. Компоненты скорости в полярных координатах имеет вид

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3.3)$$

где $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Из рисунка 3.1 видно, что

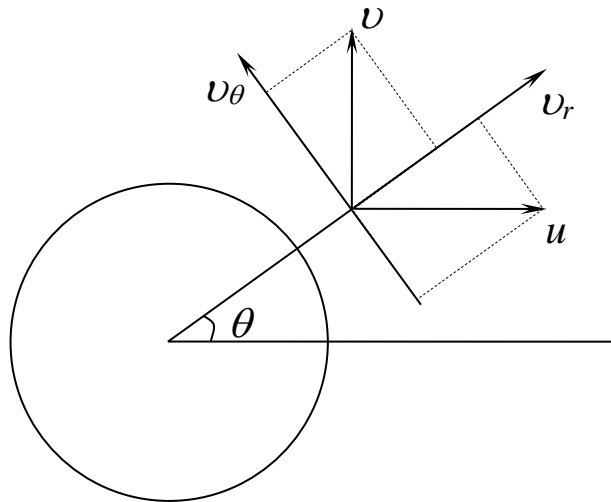


Рисунок 3.1 Координатные системы

$$\begin{aligned} v_{\theta} &= v \cos \theta - u \sin \theta, \\ v_r &= u \cos \theta + v \sin \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \theta, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решая (3.5) относительно $\partial \psi / \partial x$ и $\partial \psi / \partial y$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Определим $\partial \nabla^2 \psi / \partial x$, $\partial \nabla^2 \psi / \partial y$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \cos \theta, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Подставляя выражения (3.6), (3.7) в якобиан

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \end{bmatrix},$$

легко получить, что

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} \right)\tag{3.8}$$

или

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(\theta, r)}.$$

Тогда вместо (1.20) будем иметь

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(\theta, r)} = \nu \nabla^4 \psi,\tag{3.9}$$

где

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}.$$

Вестервельтом было показано, что в случае несжимаемой жидкости уравнение сохранения вихрей инвариантно относительно преобразований системы координат (можно не учитывать кривизну поверхности, тогда начало отсчёта можно перенести на поверхность цилиндра, полагая переменную r перед Якобианом равной a). Следовательно, вместо (3.9) будем иметь

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{1}{a} \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(\theta, y+a)} = \nu \nabla^4 \psi,$$

где y – расстояние, отсчитываемое от поверхности цилиндра, a – радиус цилиндра.

Перейдём, наконец, к переменным (3.2). Лапласиан в безразмерном виде запишется, как

$$\nabla^2 \bar{\psi} = \frac{U_\infty}{a} \left[\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{1 + \bar{y}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{(1 + \bar{y})^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \theta^2} \right]. \quad (3.10)$$

Легко видеть также, что

$$\nu \nabla^4 \psi = \frac{\nu U_\infty}{a^2} \nabla^4 \bar{\psi}, \quad \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \frac{\omega U_\infty}{a} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(\theta, y)} = \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\psi})}{\partial(\theta, \bar{y})},$$

тогда, опуская черту над буквами, можно получить

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(\theta, y)} = \frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi, \quad (3.11)$$

где

$$\varepsilon = \frac{U_\infty}{\omega a}, \quad H^2 = \frac{\omega a^2}{\nu}. \quad (3.12)$$

Запишем граничные условия. Функция тока отсчитывается от поверхности цилиндра, поэтому имеем

$$\psi = 0, \quad y = 0. \quad (3.13)$$

Кроме того, на поверхности должны выполняться условия прилипания, тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y = 0. \quad (3.14)$$

На бесконечном удалении цилиндра, касательная составляющая скорости v_θ обращается в нуль при $\theta = 0$ и равна $U_\infty \cos \omega t$, поэтому

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = U_\infty r \sin \theta \cos \omega t, \quad (3.15)$$

здесь взята размерная функция тока. Интегрирование (3.15) даёт

$$\psi = U_\infty r \sin \theta \cos \omega t.$$

С учётом (3.2) легко получить (опуская черту над буквами)

$$\psi = (1 + y) \sin \theta \exp(it), \quad y \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.11) является нелинейным, вследствие чего до настоящего времени не найдено его точных решений (исключение составляют те случаи, когда оно сводится к линейному). Однако в тех случаях, когда параметр ε является малым, можно используя метод возмущений (см. 2.1), отыскать решение уравнения (3.11) с наперед заданной точностью.

Решение в этом случае отыскивается в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots, \quad (3.17)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Подставив ряд (3.17) в уравнение (3.3) и собрав члены при одинаковых степенях ε , получим следующую систему

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_0)}{\partial t} = \frac{1}{H} \nabla^4\psi_0, \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_1)}{\partial t} - \frac{\partial(\psi_0, \nabla^2\psi_0)}{\partial(\theta, y)} = \frac{1}{H^2} \nabla^4\psi_1, \quad (3.18б)$$

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_k)}{\partial t} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial(\psi_i, \nabla^2\psi_{k-i-1})}{\partial(\theta, y)} = \frac{1}{H^2} \nabla^4\psi_k. \quad (3.18в)$$

Уравнения (3.18) являются линейными, поэтому не представляет особого труда получить их решения, однако получающиеся решения являются столь громоздкими, что для извлечения сколь-нибудь полезной информации необходимо прибегать к помощи ЭВМ. Как будет видно из дальнейшего изложения, вышеупомянутые решения имеет смысл применять лишь в случае, когда $H \approx 0$ [1].

Колебательное движение во внешней области. Можно указать некоторые предельные случаи, при которых решения (3.18) имеют довольно простое аналитическое представление, обладая при этом наперед заданной точностью описания процесса. Возможность такого представления даёт, как известно, метод сращиваемых асимптотических разложений.

Легко видеть, что колебательное движение вокруг цилиндра описывается уравнением (3.18a)

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_0)}{\partial t} = \frac{1}{H}\nabla^4\psi_0, \quad (3.19)$$

которое должно решаться при граничных условиях

$$\psi_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad (3.20)$$

$$\psi_0 = (1+y)\sin\theta\exp(it), \quad y \rightarrow \infty.$$

Условия записаны с учётом того факта, что в выражениях (3.14) и (3.15) ничто не указывает на наличие членов ψ_1 и ψ_2 , т.е. должно быть

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0 \dots y \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Пусть в (3.19)

$$H \gg 1, \quad \text{Re} \ll 1.$$

Решение (3.19) целесообразно искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра ($1/H$)

$$\psi_0 = \psi_{00} + \frac{1}{H}\psi_{01} + \frac{1}{H^2}\psi_{02} + \dots \quad (3.23)$$

Выполняя разложение, получаем

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_{00})}{\partial t} = 0, \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_{01})}{\partial t} = 0, \quad (3.24б)$$

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi_{02})}{\partial t} = 0. \quad (3.24в)$$

Выполнив аналитическое разложение второго выражения (3.20), можно получить

$$\psi_{00} = (1+y)\sin\theta\exp(it), \quad \psi_{01} = 0, \quad \psi_{02} = 0, \quad y = 0. \quad (3.25)$$

Решение (3.24a) легко найти, если пользоваться методом Фурье, т.е. представить решение в виде

$$\psi_\infty = \Phi(y)\sin\theta\exp(it). \quad (3.26)$$

Подставляя (3.26) в (3.24a) с учётом (3.10) имеем

$$\frac{d^2\Phi(y)}{dy^2} + \frac{1}{1+y} \frac{d\Phi(y)}{dy} - \frac{1}{(1+y)^2} \Phi(y) = 0. \quad (3.27)$$

Частными решениями (3.27) будут

$$1+y, \frac{1}{1+y}.$$

Тогда общее решение (3.24а) можно записать в виде

$$\psi_{00} = \left[C_1(1+y) + \frac{C_2}{1+y} \right] \sin \theta \exp(it). \quad (3.28)$$

Постоянную интегрирования C_1 можно определить из условия (3.25), устремив $y \rightarrow \infty$. Получим

$$C_1 = 1. \quad (3.29)$$

Как и следовало ожидать, решение (3.28) не удовлетворяет условиям прилипания. Этому и следовало ожидать, поскольку в уравнении (3.24а) отсутствует вязкий член. Следовательно, вблизи поверхности цилиндра должна существовать область, в которой вязкость играет активную роль, так что C_2 остаётся пока неизвестной.

Колебательное движение во внутренней области. Введём в (3.11) внутренние переменные

$$m = \psi \frac{a}{\delta}, \quad \eta = y \frac{a}{\delta}, \quad \theta = \theta, \quad (3.30)$$

тогда уравнение переписется в виде

$$\frac{\partial \nabla^2 m}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial(m, \nabla^2 m)}{\partial(\theta, \eta)} = \frac{1}{2} \nabla^4 m, \quad (3.31)$$

где

$$\nabla^2 m = \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} + \frac{\delta/a}{1+\eta} \frac{\partial m}{\partial \eta} + \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2}. \quad (3.32)$$

Используя метод возмущений, решение уравнения (3.32) можно представить, как

$$m = m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots, \quad (3.33)$$

где индексы «0», «1» указывают, соответственно, на колебательное

движение, вторичное движение, а функции m_k , где $k = 0, 1, \dots$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 m_0) = \frac{1}{2} \nabla^4 m_0, \quad (3.34a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 m_1) - \frac{\partial(m_0, \nabla^2 m_0)}{\partial(\eta, \theta)} = \frac{1}{2} \nabla^4 m_1, \quad (3.34б)$$

$$\dots\dots\dots (3.34в)$$

Для решения (3.34a) снова применяем разложение вида

$$m_0 = m_{00} + \frac{\delta}{a} m_{01} + \left(\frac{\delta}{a}\right)^2 m_{02} + \dots \quad (3.35)$$

Подставляя (3.35) в (3.34a) и собирая члены порядка $(\delta/a)^0$, получим

$$\frac{\partial^2 m_{00}}{\partial t \partial \eta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^4 m_{00}}{\partial \eta^4} = 0. \quad (3.36)$$

Решение (3.36) имеет вид

$$m_{00} = \left\{ C_3 \exp[(1+i)\eta] + C_4 \exp[-(1+i)\eta] + C_5 \eta + C_6 \right\} \times \\ \times f(\theta) \exp(it). \quad (3.37)$$

Применив граничные условия на поверхности цилиндра

$$m_{00} \simeq 0, \quad \frac{\partial m_{00}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad (3.38)$$

можно найти (полагая, что $C_3 = 0$, так как в противном случае функция m_{00} растёт экспоненциально при $\eta \rightarrow \infty$, что не имеет физического смысла)

$$C_4 + C_6 = 0, \\ -(1+i)C_4 + C_5 = 0,$$

откуда

$$C_6 = -C_4, \quad C_5 = (1+i)C_4.$$

Тогда вместо (3.37) имеем

$$m_{00} = C_4 \left\{ \exp[-(1+i)\eta] + (1+i)\eta - 1 \right\} f(\theta) \exp(it). \quad (3.39)$$

Таким образом, вся область, занятая жидкостью, разбилась на две

– внутреннюю, в которой силы вязкости играют активную роль, и внешнюю, где силы вязкости пренебрежимо малы. Решения (3.28) и (3.39) верны для внешней и внутренней областей, соответственно.

Можно утверждать, что существует такая промежуточная область (см. также 2.1), в которой как внутреннее, так и внешнее решение с одинаковой степенью точности описывают характер поля скорости. В связи с этим в промежуточной области функции ψ_{00} и m_{00} должны подчиняться следующему приближённому соотношению

$$\frac{\delta}{a} m_{00}(\infty) \approx \psi_{00}(0). \quad (3.40)$$

В дальнейшем соотношение (3.40) будет называться условием асимптотического сращивания внешнего и внутреннего решений. Используя асимптотическое представление для функции m_{00} при $\eta \rightarrow \infty$, записанной во внешних переменных, а также разлагая функцию ψ_{00} в ряд вблизи $y = 0$, выражение (3.40) можно записать в виде

$$\begin{aligned} C_4 \frac{\delta}{a} \left(\frac{1+i}{y\delta/a} - 1 \right) f(\theta) \exp(it) = \\ = [1 + y + C_2(1 - y \pm \dots)] \sin \theta \exp(it), \end{aligned} \quad (3.41)$$

откуда, собирая члены с одинаковыми степенями y , легко получить

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + C_2, \\ (1+i)C_4 &= 1 - C_2, \quad f(\theta) = \sin \theta \end{aligned}$$

или

$$C_2 = -1, \quad C_4 = 1 - i.$$

Таким образом, выражения (3.28) и (3.39) примут вид

$$\psi_{00} = \left[(1+y) - \frac{1}{1+y} \right] \sin \theta \exp(it), \quad (3.42)$$

$$m_{00} = \left(\eta + \frac{1-i}{2} \left\{ \exp[-(1+i)\eta] - 1 \right\} \right) 2 \sin \theta \exp(it). \quad (3.43)$$

Отметим, что в (3.41) остался неиспользованным членом $(-C_4 - \delta/a)$, следовательно, во внешнем решении искать поправки порядка $O(n^{-1})$

(или, что то же, $O(\delta/a)$), что и доказывает справедливость разложения (3.23).

Все функции ψ_{0i} представляют собой невязкие поправки к основному безвихревому течению возле цилиндра, которые обусловлены наличием вблизи твёрдой поверхности пограничного слоя.

Следует, однако, отметить, что в выражении (3.35) члены более высокого порядка появляются не только благодаря необходимости сращивания с внешним решением, но также из-за того, что теория пограничного слоя пренебрегает членами первого порядка в уравнениях (3.34). Поэтому члены m_{0i} , $i = 1, 2, \dots$ представляют поправки к теории пограничного слоя первого порядка и, следовательно, могут быть отнесены к разряду эффектов пограничного слоя более высоких порядков.

3.2 Вторичные течения вокруг цилиндра. Решение при $H \gg 1$

Рассмотрим теперь члены $O(\varepsilon)$, которые удовлетворяют уравнению (3.18б). Не теряя общности, можно предположить, что решение содержит как стационарную, так и нестационарную части, т.е.

$$\psi_1 = \psi_1^{cm} + \psi_1^h.$$

Тогда уравнение (3.18б) распадется на уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi_1^h) - \left[\frac{\partial(\psi_0, \nabla^2 \psi_0)}{\partial(\theta, y)} \right]^h = \frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_1^h, \quad (3.44a)$$

$$\nabla^4 \psi_1^{cm} = - \left[\frac{\partial(\psi_0, \nabla^2 \psi_0)}{\partial(\theta, y)} \right]^{cm}. \quad (3.44б)$$

Разлагая ψ_1^{cm} и ψ_1^h в ряд по H^{-1} с учетом $\nabla^2 \psi_{0i} = 0$, получим

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_{10}^h}{\partial t} = 0, \quad (3.45a)$$

$$\nabla^4 \psi_{10}^{cm} = 0. \quad (3.45б)$$

Таким образом, как это следует из уравнения (3.45б), стационарное течение во внешней области при $Re_k \ll 1$ является течением Стокса. Забегая вперед, отметим, что такая ситуация реализуется в том случае, когда $Re_s \ll 1$.

Повторяя аналогичные рассуждения и используя (3.18б), получим следующие уравнения для внутренней области

$$\frac{\partial^4 m_{10}^h}{\partial \eta^4} - 2 \frac{\partial^3 m_{10}^h}{\partial t \partial \eta^3} = 2 \left(\frac{\partial m_{00}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 m_{00}}{\partial \eta^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 m_{00}}{\partial \eta^3} \cdot \frac{\partial m_{00}}{\partial \theta} \right)^h, \quad (3.46a)$$

$$\frac{\partial^4 m_{10}^{cm}}{\partial \eta^4} = 2 \left(\frac{\partial m_{00}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 m_{00}}{\partial \eta^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 m_{00}}{\partial \eta^3} \cdot \frac{\partial m_{00}}{\partial \theta} \right)^{cm}. \quad (3.46б)$$

Граничные условия на бесконечности к уравнениям (3.45) выбираем из требования равенства нулю касательной скорости v_{10} . Что касается функции тока, то должно быть

$$\begin{aligned} v_{10}^h &= 0, \quad y = \infty, \\ \psi_{10}^{cm} &= \text{const}, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Решения (3.45) должны асимптотически сращиваться с соответствующими решениями (3.46), которые, в свою очередь должны удовлетворять условию прилипания на стенке.

Рассмотрим стационарные составляющие ψ_{10}^{cm} , m_{10}^{cm} , описывающие вторичные течения. Решение (3.45б) выписывается сразу

$$\psi_{10}^{cm} = \left[k^3 + \frac{k_4}{(1+y)^2} \right] \sin 2\theta. \quad (3.47)$$

Для решения уравнения (3.46б) необходимо вычислить его правую часть. Делается это следующим образом.

Находим сначала входящие в неё величины.

Для вычисления стационарной части произведения, например, $(\partial m_{00} / \partial \eta)$ и $(\partial^3 m_{00} / \partial \eta^2 \partial \theta)$ следовало бы выделить действительные части этих величин и осреднить произведение по времени. Есть, од-

нако, менее громоздкий метод расчёта. Действительно, пусть требуется найти среднее по времени от произведения двух величин

$$\varphi \exp(it), \psi \exp(it),$$

тогда искомое среднее можно найти по формуле

$$\langle \varphi \exp(it), \psi \exp(it) \rangle = \frac{1}{4} \{ \varphi \psi^* + \varphi^* \psi \}, \quad (3.48)$$

где угловые скобки указывают на осреднение по времени, символ «*» означает, что берется комплексно-сопряженная величина. Тогда правая часть (3.46б) равна

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\partial m_{00}}{\partial \eta} \frac{\partial^3 m_{00}}{\partial \eta^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 m_{00}}{\partial \eta^3} \frac{\partial m_{00}}{\partial \theta} \right)^{cm} = \\ & = \frac{\sin 2\theta}{4} \left\{ 2 \{ 1 - \exp[-(1-i)\eta] \} 2(1+i) \exp[-(1+i)\eta] + \right. \\ & \quad + 2 \{ 1 - \exp[-(1+i)\eta] \} 2(1-i) \exp[-(1-i)\eta] - \\ & \quad - 4i \exp[-(1-i)\eta] \left(\eta + \frac{1-i}{2} \{ \exp[-(1+i)\eta] - 1 \} \right) + \\ & \quad \left. + 4i \exp[-(1+i)\eta] \left(\eta + \frac{1+i}{2} \{ \exp[-(1-i)\eta] - 1 \} \right) \right\}. \end{aligned}$$

После несложных процедур приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 m_{10}^{cm}}{\partial \eta^4} &= \sin 2\theta \{ -4 \exp(-2\eta) - 2i\eta \exp[-(1-i)\eta] + \\ & + 2i\eta \exp[-(1+i)\eta] + 2 \exp[-(1+i)\eta] + 2 \exp[-(1-i)\eta] \}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Решение ищем в виде суммы решений однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Легко видеть, что решение однородного уравнения представляет собой полином третьей степени

$$(k_3 + k_4 \eta + k_5 \eta^2 + k_6 \eta^3) \sin 2\theta.$$

Для вычисления частного решения неоднородного уравнения необходимо четырежды проинтегрировать выражение в правой части (3.49).

Имеем

$$4 \int^4 \exp(-2\eta) \partial \eta^4 = -\frac{1}{4} \exp(-2\eta),$$

$$2 \int^4 \exp[-(1+i)\eta] \partial \eta^4 = -\frac{1}{2} \exp[-(1+i)\eta],$$

$$2 \int^4 \exp[-(1-i)\eta] \partial \eta^4 = -\frac{1}{2} \exp[-(1-i)\eta],$$

$$2 \int^4 i\eta \exp[-(1+i)\eta] \partial \eta^4 = -\frac{1}{2} i\eta \exp[-(1-i)\eta] - (1+i) \exp[-(1-i)\eta].$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} m_{10}^{cm} = & (k_3 + k_4\eta + k_5\eta^2 + k_6\eta^3) \sin 2\theta + \left\{ -\frac{1}{4} \exp(-2\eta) - \right. \\ & -\frac{i\eta}{2} \exp[-(1+i)\eta] + \frac{i\eta}{2} \exp[-(1-i)\eta] - \\ & \left. -\frac{3+2i}{2} \exp[-(1+i)\eta] + \frac{3-2i}{2} \exp[-(1-i)\eta] \right\} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Решение (3.50) должно удовлетворять условиям на стенке

$$m_{10}^{cm} = 0, \quad \frac{\partial m_{10}^{cm}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0. \quad (3.51)$$

Подстановка (3.50) в (3.51) даёт

$$k_3 = \frac{13}{4}, \quad k_4 = -\frac{3}{2}.$$

Решение (3.50) переписывается в виде

$$\begin{aligned} m_{10}^{cm} = & \left\{ \frac{13}{4} - \frac{3}{2}\eta + k_5\eta^2 + k_6\eta^3 - \frac{3-2i}{2} \exp[-(1-i)\eta] - \right. \\ & -\frac{3+2i}{2} \exp[-(1+i)\eta] - \frac{1}{4} \exp(-2\eta) + \\ & \left. + \frac{i\eta}{2} \exp[-(1-i)\eta] - \frac{i\eta}{2} \exp[-(1+i)\eta] \right\} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Для определения неизвестных постоянных воспользуемся условием асимптотического срачивания, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\delta}{a} m_{10}^{cm}(\infty) \approx \psi_{10}^{cm}(0). \quad (3.53)$$

Имеем

$$\frac{13}{4} \frac{\delta}{a} - \frac{3}{2} y + k_5 y^2 \frac{a}{\delta} + k_6 y^3 \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 = k_3 + k_4 - 2k_4 y + \dots,$$

откуда

$$0 = k_3 + k_4, \quad -\frac{3}{2} = -2k_4,$$

$$k_5 \frac{a}{\delta} = 3k_4, \quad k_6 \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 = -4k_4$$

или

$$k_5 = k_6 \approx 0, \quad k_4 = -k_3 = \frac{3}{4}.$$

Теперь можно записать окончательные выражения для ψ_{10}^{cm} и m_{10}^{cm} . Они принимают вид

$$\psi_{10}^{cm} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{(1+y)^2} - 1 \right] \sin 2\theta, \quad (3.54a)$$

$$m_{10}^{cm} = \left\{ \frac{13}{4} - \frac{3}{2} \eta - \frac{3-2i}{2} \exp[-(1-i)\eta] - \frac{3+2i}{2} \exp[-(1+i)\eta] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \exp(-2\eta) + \frac{i\eta}{2} \exp[-(1-i)\eta] - \frac{i\eta}{2} \exp[-(1+i)\eta] \right\} \sin 2\theta. \quad (3.54b)$$

Таким образом, мы пришли к примечательному результату, что чисто периодическое движение вязкой жидкости генерирует стационарное течение.

Выражения (3.54) впервые были получены Шлихтингом из уравнений пограничного слоя, используя менее строгий подход.

Характер течения (3.54) представлен на рисунке 3.2. В каждом квадрате находится два вихря: внутренний (такой тип течения называется «течение Шлихтинга»), скорость которого зависит от вязкости, и внешний («течение Рэлея»), скорость которого от вязкости не зависит. Центр вращения внешнего течения в случае неограниченной жидкости

находится на бесконечности, причем жидкость оттекает от поверхности цилиндра по линии направления колебаний. Экспериментально такой характер течения подтверждается.

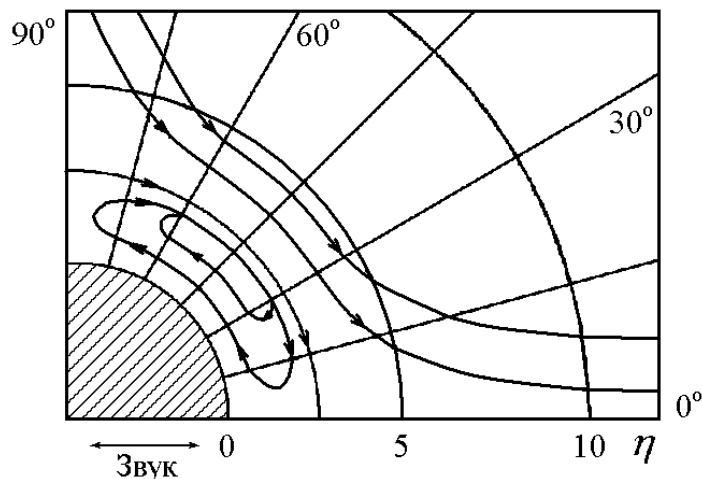


Рисунок 3.2 Вторичные течения возле цилиндра при $H \gg 1$

3.3 Свойства вторичных течений вокруг колеблющегося цилиндра

Решение аналогичной задачи о течении возле сферы характеризуется тем, что в экваториальной плоскости центр вращения внутреннего вихря находится не при $\theta = 45^\circ$, как для круглого цилиндра, а при $\theta = 54^\circ 43'$.

В случае эллиптического цилиндра положение центра вращения внутреннего вихря зависит от соотношения между главными полуосями.

Из решения Шлихтинга следует также, что поперечный размер внутреннего вязкого течения δ_g и его форма, не зависят ни от амплитуды колебаний, ни от радиуса цилиндра. Поперечный размер внутреннего вязкого течения δ_g является величиной постоянной и равной

$$\delta_g \approx 1,9\delta.$$

Как указывалось выше, Хольстмарк и др. получили решение для

случая колеблющегося цилиндра без ограничения на частоту колебаний (т.е. на величину $H = a/\delta$ не накладывалось никаких ограничений). Ими были получены результаты, как для неограниченной жидкости, так и для жидкости, заключенной в объем и было показано, что приближение пограничного слоя, полученное Шлихтингом, верно и в случае, когда параметр $H \gg 1$. Ими были проведены измерения толщины внутреннего вязкого течения δ_g при изменении радиуса цилиндра, которые показали, что δ_g не является величиной постоянной, а увеличивается при уменьшении радиуса цилиндра. Результат Шлихтинга применим только в том случае, когда $H \geq 30$.

Решение, данное Хольтсмарком и др., послужило основой последующей статьи Ранея и др. Разлагая для больших значений параметра H стационарную часть решения Хольтсмарка, они показали, что размер вязкой области также возрастает при уменьшении H . На рисунке 3.3 показана экспериментальная зависимость поперечного размера внутреннего вязкого течения δ_g от параметра H при сильно отличающихся условиях. Тем не менее они удовлетворительно ложатся на одну кривую.

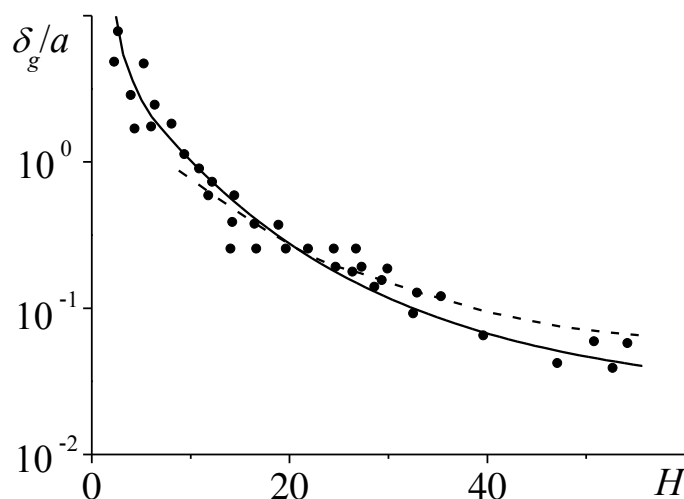


Рисунок 3.3 Зависимость поперечного размера внутреннего течения от параметра H

Здесь следует отметить тот факт, что экспериментальное исследование вторичных течений, как правило, проводят с использованием меченых частиц (метод треков). Поведение такой частицы описывается в переменных Лагранжа, в то время как аналитические исследования проводятся в переменных Эйлера. Если для стационарного течения эйлерово и лагранжево описание дают идеальные результаты, то при нестационарном движении они разливаются, т.е. линии тока (переменные Эйлера) не совпадают с траекториями частиц (переменные Лагранжа).

В случае несжимаемой жидкости связь функции тока вторичного течения с траекторией частицы имеет следующий вид

$$\psi_l^{cm} \cdot \vec{k} = \psi_s^{cm} \cdot \vec{k} + \vec{C},$$

где

$$\vec{C} = -\frac{1}{2} \left(\int \vec{v}_1 dt \right) \times \vec{v}_1,$$

\vec{v}_1 – пульсации скорости в переменных Эйлера, \vec{k} – единичный вектор.

Как отмечалось выше, по мере уменьшения диаметра цилиндра (правильнее – при уменьшении H) размер вязкой области увеличивается и это может привести к тому, что вязкая область займет все пространство. В этом случае жидкость будет подтекать к поверхности цилиндра по линии направления колебаний, т.е. произойдет инверсия потока. Характер такого типа течения показан на рисунке 3.4. Аналогичный характер вторичных течений наблюдался также в случае колебаний цилиндра в вязкоупругой жидкости (неньютоновская жидкость) Ясно, что в этом случае решения, полученные на основе уравнений пограничного слоя, не применимы, поскольку размеры вязкой области сравнимы с размером цилиндра или даже превышают его. Используя полные уравнения Навье-Стокса для несжимаемого случая, можно получить решение для малых чисел Рейнольдса, которое качественно совпадает с течением, показанным на рисунке 3.4. В этом случае можно использовать линеаризацию Озеена. Однако такого рода линеаризация справедлива только в том случае, когда $H \ll 1$. Полученное

таким образом решение не будет равномерно пригодным ко всему полю течения и может быть рассмотрено как первый член во внешнем разложении. Вблизи поверхности колеблющегося цилиндра линии тока несколько отличаются от результатов, полученных Андресом и Ингардом аналитическим путем.

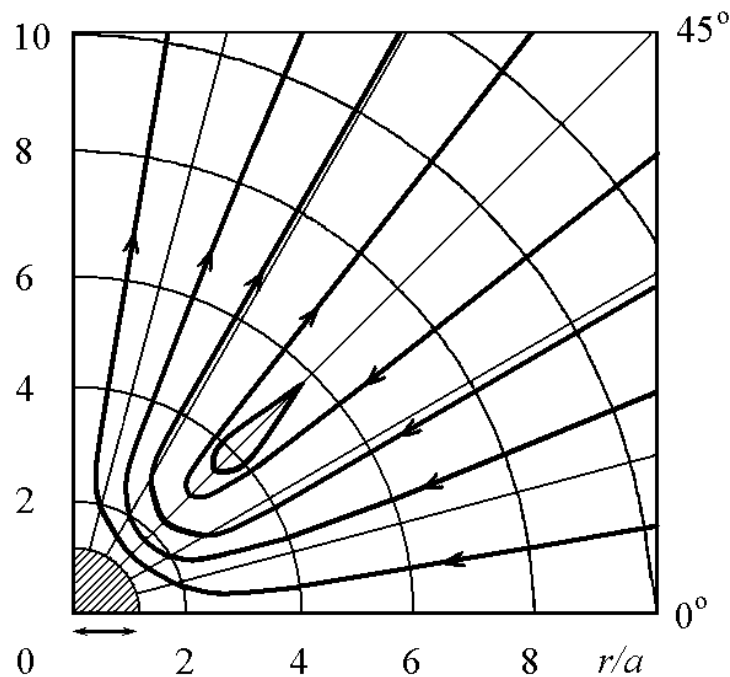


Рисунок 3.4 Вторичные течения возле цилиндра при $H \ll 1$

Переход от вязкого течения, занимающего все пространство, к явно выраженным вихрям в пограничном слое и невязкому вихревому течению вне пограничного слоя осуществляется при определенных условиях. Некоторые авторы объясняют это явление изменением числа Рейнольдса, подсчитанного по скорости пульсаций $Re_k = U_\infty a / \nu$, причем отмечается, что для малых чисел Рейнольдса $Re_k < 10$ наблюдается вязкое течение, занимающее все пространство, в то время как для больших чисел Рейнольдса $Re_k > 10$ осуществляется течение, подробно описанное Шлихтингом. При этом совершенно не принимается во внимание влияние частотного параметру H . Например, как отмечается в работе Хольтсмарка и др., для больших значений параметра H и для малых Re_k существует как внешнее, так и внутреннее течения, но

внешнее менее выраженное и по мере увеличения амплитуды колебаний оно становится более заметным. Необходимым условием существования течения, изображенного на рисунке 3.4, является малость параметра H .

Связь между H и Re_k имеет вид $Re_k = \varepsilon H^2$, поэтому, если оставить число Рейнольдса неизменным, то изменения в H , которые ответственны за переход от одного типа течения к другому, могут быть отражены в изменениях ε . На рисунке 3.5 представлена экспериментальная зависимость параметра ε , при котором происходит инверсия течения, от параметра H . Видно, что по мере уменьшения значения H необходимым более высокие значения амплитуды колебаний «генерирования» внешнего течения.

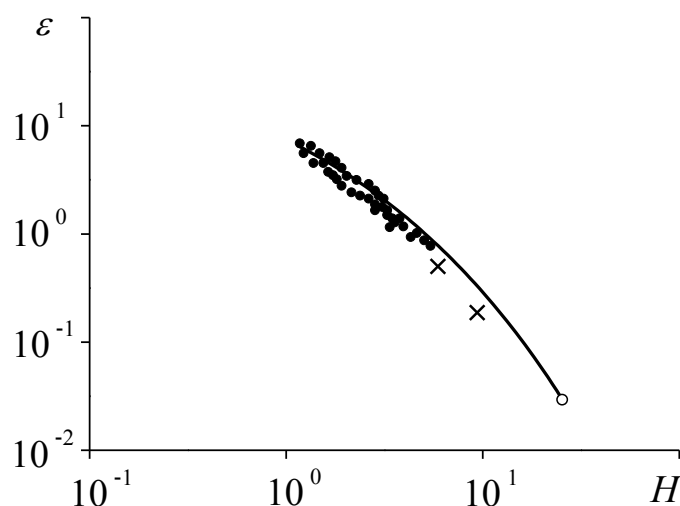


Рисунок 3.5 Зависимость амплитуды колебаний, при которой происходит инверсия вторичного течения от параметра H

Подавляющее большинство экспериментальных исследований, о которых говорилось выше, проводилось для жидкостей, занимающих ограниченное пространство. Возникает вопрос, каким образом сказывается влияние внешней границы на характер внутренних вторичных течений. Результаты экспериментального исследования влияния внешней границы показаны на рисунке 3.6, где представлена зависимость поперечного размера внутренней области (δ_g/a) от размера внешней

границы. Видно, что по мере увеличения размера внешней границы влияние последней уменьшается и при значении параметра $A/a > 5$ (A – радиус внешней границы, a – радиус цилиндра) наличие внешней границы практически не сказывается на размере внутренней области.

Теория акустических течений второго приложения, о результатах которой говорилось выше, удовлетворительно описывает явление только в случае малых величин акустического смещения среды ($\varepsilon \ll 1$). По мере увеличения ε характер вторичных течений перестает быть таким, как это показано на рисунке 3.2.

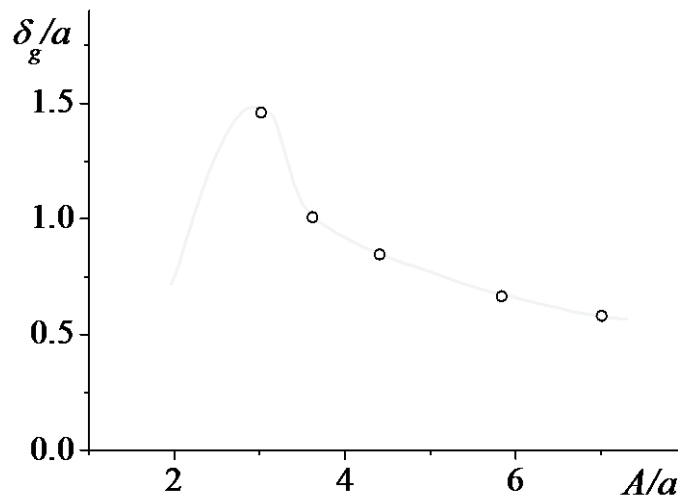


Рисунок 3.6 Влияние внешней границы на размер внутреннего течения

Обнаружено, что по мере увеличения интенсивности колебаний вихрь в пограничном слое деформируется и его поперечный размер зависит от параметра ε . Характер течения, соответствующий этому случаю, показан на рисунке 3.7 для $H = 10,0$ и $\varepsilon = 0,1$. Такой характер течения наблюдается экспериментально. По мере увеличения амплитуды колебаний симметрия внутреннего течения относительно линии, проходящей через центр вихря и составляющей угол в 45° с направлением колебаний, нарушается, и центр вихря приближается к оси колебаний (рисунок 3.8). Из рисунка 3.8 также видно, что для малых амплитуд колебаний положение центра вихря согласуется с результатом, который предсказывается теорией Шлихтинга.

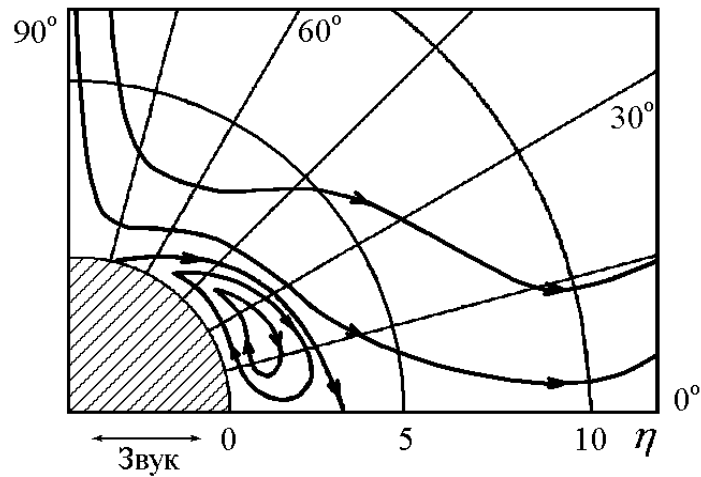


Рисунок 3.7 Изменение характера вторичных течений при увеличении амплитуды колебаний

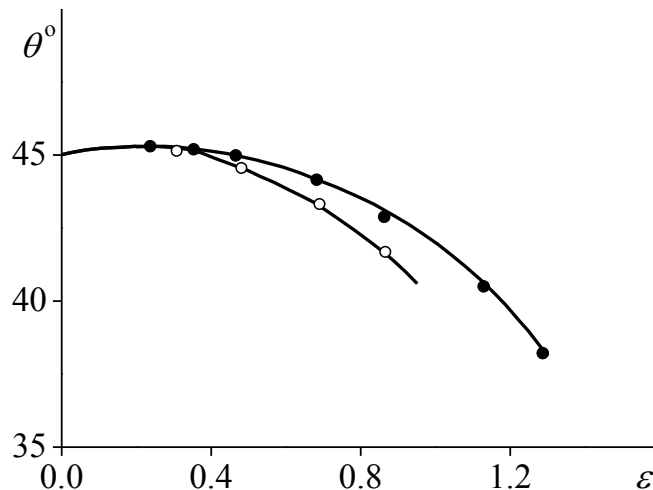


Рисунок 3.8 Изменение положения центра вихря при увеличении амплитуды колебаний

3.4 Двойные пограничные слои при $Re \gg 1$

До сих пор наше внимание было сосредоточено главным образом на природе внутренних течений. Рассмотрим теперь основные закономерности, присущие внешнему течению.

Следует отметить, что число Рейнольдса $Re_s = \frac{U_\infty^2}{\omega \nu}$, подсчитанное по скорости стационарного вторичного течения, играет такую же

роль, что и число Рейнольдса в случае обтекания тел стационарным потоком. Исходя из качественных соотношений, можно показать, что при $Re_s \gg 1$ существует второй пограничный слой («внешний» слой), на внешней границе которого скорость стационарного течения стремится к нулю. Ниже мы приведем строгое доказательство этого утверждения.

Рассмотрим случай $H \gg 1$ и малых $\varepsilon \ll 1$. Используя соотношение $Re_s = \varepsilon^2 H^2$, уравнение (3.11) перепишется в виде

$$\frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(\theta, y)} = \frac{\varepsilon^2}{Re_s} \nabla^4 \psi. \quad (3.55)$$

Решение уравнения (3.55), будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений. Полагая $Re_s = 0(1)$, введем внешнее и внутреннее разложение в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \psi_{00}(\theta, y, t) + \frac{\varepsilon}{Re_s^{1/2}} \psi_{01}(\theta, y, t) + \\ & + \varepsilon \{ \psi_{10}^{cm}(\theta, y) + \psi_{10}^h(\theta, y, t) \} + \\ & + \varepsilon^2 \psi_2(\theta, y, t) + \varepsilon^3 \psi_3(\theta, y, t) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} m = & m_{00}(\theta, \eta, t) + \frac{\varepsilon}{Re_s^{1/2}} m_{01}(\theta, \eta, t) + \\ & + \varepsilon \{ m_{10}^{cm}(\theta, \eta) + \psi_{10}^h(\theta, \eta, t) \} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.57)$$

соответственно. Внутренние переменные или переменные пограничного слоя связаны с внешними следующими соотношениями

$$m = \frac{Re_s^{1/2}}{\varepsilon} \cdot \frac{\psi}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{Re_s^{1/2}}{\varepsilon} \cdot \frac{y}{\sqrt{2}}. \quad (3.58)$$

Решение должно удовлетворять граничным условиям и условию асимптотического сращивания внешнего решения с внутренним, т.е.

$$\sqrt{2} \frac{\varepsilon}{Re_s^{1/2}} m(\infty) \approx \psi(0). \quad (3.59)$$

В первую очередь нас будет интересовать решение, во внешней

области. Подставив ряд (3.56) в уравнение (3.55) и собирая члены одного порядка, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi_{00}) = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{\text{Re}_s^{1/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi_{01}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi_{10}^H) = 0. \quad (3.61)$$

Во внешней области $\psi_{10}^H \equiv 0$. Функция ψ_{01} является чисто периодической и представляет собой поправку к невязкому безвихревому колебательному течению жидкости, которая обусловлена наличием вблизи твердой поверхности тонкого пограничного слоя (слоя волнового сопротивления). Тогда уравнение (3.61) принимает вид

$$\nabla^2 \psi_{01} = 0. \quad (3.62)$$

Из уравнения (3.62) видно, что члены порядка ε не содержат никакой информации относительно ψ_{10}^{cm} . Поэтому обратимся к членам порядка $O(\varepsilon^2)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi_2) - \frac{1}{\text{Re}_s^{1/2}} \frac{\partial(\psi_{00}, \nabla^2 \psi_{01})}{\partial(\theta, y)} - \frac{\partial(\psi_{00}, \nabla^2 \psi_{10}^{cm})}{\partial(\theta, y)} = \frac{1}{\text{Re}_s} \nabla^4 \psi_{00}. \quad (3.63)$$

С учетом выражений $\nabla^2 \psi_{00}$ и (3.62), можно получить

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi_2) = \frac{\partial(\psi_{00}, \nabla^2 \psi_{10}^{cm})}{\partial(\theta, y)}. \quad (3.64)$$

Так как $\psi_{00} \sim \text{const}$ и $\nabla^2 \psi_{10}^{cm}$ от времени не зависит, то проинтегрировав (3.64) по времени, получим

$$\nabla^2 \psi_2 = \Phi(\theta, y) + \chi_2(\theta, y) \sin t. \quad (3.65)$$

Теперь обратимся к членам порядка $O(\varepsilon^3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi_3) - \frac{\partial(\psi_{00}, \nabla^2 \psi_2)}{\partial(\theta, y)} - \frac{1}{\text{Re}_s^{1/2}} \frac{\partial(\psi_{01}, \nabla^2 \psi_{10}^{cm})}{\partial(\theta, y)} - \\ - \frac{\partial(\psi_{10}^{cm}, \nabla^2 \psi_{10}^{cm})}{\partial(\theta, y)} = \frac{1}{\text{Re}_s} \nabla^4 \psi_{10}^{cm}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Рассмотрим различные члены в уравнении (3.66). Нетрудно видеть, что первое слагаемое в левой части уравнения (3.66) не содержит стационарной части. Так как $\psi_\infty \sim \cos t$, а $\nabla^2 \psi_2$ определяется соотношением (3.65), то второе слагаемое также не содержит независимой от времени части. То же самое касается и третьего слагаемого. Таким образом, если мы из уравнения (3.66) выделим независимую от времени часть, то получим следующее уравнение

$$\frac{1}{\text{Re}_s} \nabla^4 \psi_{10}^{cm} + \frac{\partial(\psi_{10}^{cm}, \nabla^2 \psi_{10}^{cm})}{\partial(\theta, y)} = 0. \quad (3.67)$$

Таким образом, из уравнения (3.67) следует, что стационарное течение вне слоя волнового сопротивления описывается полными уравнениями для стационарного потока вязкой жидкости при числе Рейнольдса Re_s . Нетрудно видеть, что условие малости стационарного числа Рейнольдса ($\text{Re}_s \ll 1$) является необходимым и достаточным для того, чтобы внешнее течение было типа Стокса. Тогда уравнение (3.67) сведется к однородному бигармоническому уравнению (3.45б). Если же $\text{Re}_s \gg 1$, то внешнее течение будет иметь характер пограничного слоя, причем слой волнового сопротивления или внутренний пограничный слой будет располагаться внутри этого внешнего пограничного слоя, толщина которого пропорциональна $a \cdot \text{Re}_s^{-1/2}$. Из уравнения (3.67) также следует, что напряжения Рейнольдса не дают непосредственного вклада в стационарное течение во внешней области, но тем не менее, как это следует из условия асимптотического сращивания (3.59), они ответственны за характер внешнего течения. Условие (3.59) показывает, что направление стационарного течения во внешней области определяется условиями на внешней границе внутреннего течения. Примечательным является тот факт, что при $\text{Re}_s \gg 1$ внешнее течение отходит от цилиндра в виде струи, а сам цилиндр в этом случае выступает в роли источника.

Давидсон и Рэлей экспериментально подтвердили существование такого струйного течения и привели численный расчет этой задачи.

Измеряя импульс струи и сравнивая его со значением, рассчитанным исходя из уравнений пограничного слоя, они получили удовлетворительное согласие между теорией и экспериментом.

Измерения во внешней области для $Re_s = 90$ и 400 показали, что вблизи поверхности цилиндра эксперимент и теория находятся в удовлетворительном согласии, однако во внешней части пограничного слоя наблюдается значительное расхождение между теоретическими и экспериментальными результатами. Это разногласие можно объяснить конечностью числа Рейнольдса.

3.5 Влияние состава колебаний и формы тел на вторичные течения

Рассмотрим характер вторичных течений, образующихся возле круглого цилиндра, помещенного в радиально колеблющееся звуковое поле, которое можно создать, например, расположив источник звука на конечном расстоянии от цилиндра. На рисунке 3.9 показаны внутренние вторичные течения, соответствующие этому случаю. Видно, что по мере приближения источника звука к цилиндру (на рисунке 3.9, а источник расположен дальше от цилиндра, чем на рисунке 3.9, б), вихрь деформируется, т.е. линии тока становятся асимметричными. Благодаря асимметрии линий тока, на цилиндр действует стационарная сила в направлении к источнику. В том же случае, когда источник звука удален на достаточно большое расстояние, линии тока становятся симметричными, что соответствует звуковому полю, задаваемому в виде плоской волны и благодаря симметрии цилиндр подвергается только периодической силе, а стационарная составляющая сила равна нулю.

Рассмотрим вторичные течения возле цилиндра, движущегося таким образом, что его центр описывает окружность малого радиуса (ориентация цилиндра при этом остаётся неизменной). Эта ситуация аналогична той, при которой на покоящийся цилиндр набегает две плоские волны одинаковой частоты ($\omega_1 = \omega_2$) и амплитуды ($B_1 = B_2$),

распространяющиеся под прямым углом друг к другу ($\beta = 90^\circ$), с фазовым сдвигом $\varphi = 90^\circ$ (т.е. вращающееся звуковое поле). В результате этого возле цилиндра появляется стационарное течение, напоминающее по характеру течение, образующееся при вращении цилиндра с постоянной скоростью в покоящейся жидкости. Тогда легко объяснить происхождение аномальных течений вблизи изолированного острова.

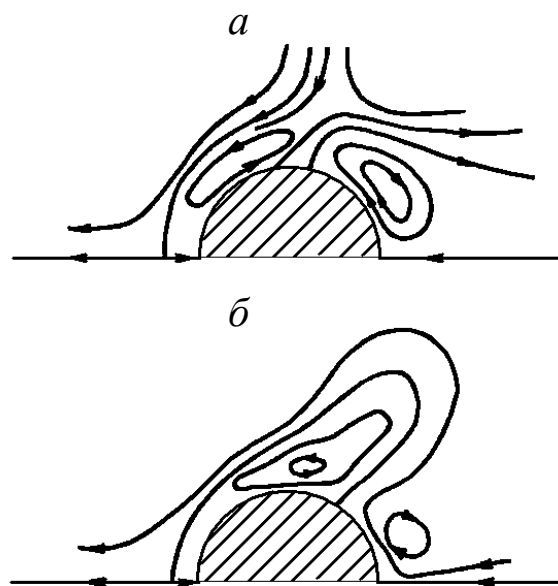


Рисунок 3.9 Изменение характера вторичных течений возле цилиндра, помещенного в радиально колеблющееся поле при уменьшении расстояния между источником и цилиндром (источник расположен в правой части рисунка)

До сих пор речь шла о вторичных течениях цилиндров круглого сечения. Экспериментальные исследования вторичных течений, образующихся вблизи квадратного и треугольного цилиндров, показали, что структура течений зависит не только от параметров ε и H , как в случае круглого цилиндра, но также и от направления колебаний. Например, если цилиндр колеблется параллельно одной из сторон, то наблюдаются течения трех типов – один, вихрь в каждом квадранте (рисунок 3.10, а) один вихрь в каждом квадранте и по два вихря на каж-

дой стороне, параллельной оси колебаний (рисунок 3.10, б); два равноценных вихря в каждом квадранте (рисунок 3.10, в). Первый тип течений наблюдается при низких частотах, т.е. $N < 1$ и по характеру совпадает с течением возле круглого цилиндра (см. рисунок 3.4). Это совпадение, на наш взгляд, объясняется тем фактом, что при низких частотах толщина акустического пограничного слоя сравнима с размером тела, в силу чего эффективная форма квадратного цилиндра мало отличается от круглого цилиндра. По мере увеличения частоты колебаний толщина акустического пограничного слоя уменьшается, и наличие областей с малым радиусом кривизны начинает играть все большую роль в структуре течений. При $N > 5$ наблюдается третий тип течения, а второй – является переходным. В том же случае, когда квадратный цилиндр колеблется параллельно одной из своих диагоналей, наблюдается только два типа течений (рисунок 3.10, г-д) – первый тип (низкочастотный) по характеру также совпадает с течением возле круглого цилиндра, а при втором типе течения (высокочастотный) в структуре потока появляется по два вихря, расположенных на углах, максимально удаленных от оси колебаний.

Таким образом, течение возле квадратного цилиндра является сложным, но симметричным как в плоскости колебаний, так и в плоскости, перпендикулярной к ней. В случае треугольного цилиндра характер течения остается таким же, что и для квадратного цилиндра, но течение является асимметричным.

Мы рассмотрели вторичные течения, возникающие возле твердой поверхности. Аналогичные течения возникают и вблизи препятствий с мягкими границами, например, около воздушных пузырьков, капель, мембран и т.д. Особенность течений такого типа заключается в том, что при определенных условиях скорость вторичного течения существенно превосходит скорость, с которой бы двигалась жидкость в случае твердой поверхности.

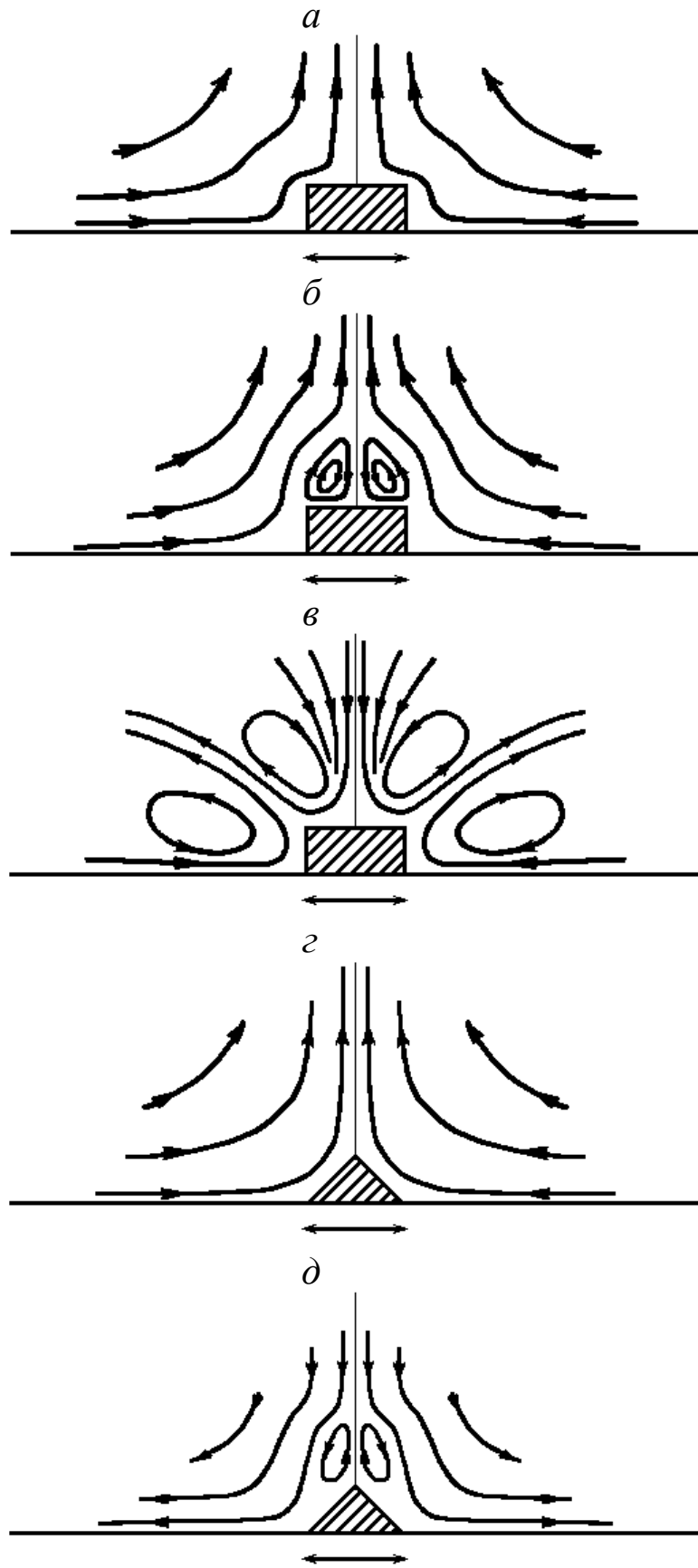


Рисунок 3.10 Вторичные течения вблизи квадратного цилиндра

Задачи к главе 3

3.1. Колебательное движение вблизи цилиндра при внешнем течении определяется выражением

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + U_1(x) \cos \omega t,$$

где $\bar{U}(x)$ – скорость невозмущенного течения, ω – циклическая частота, $U_1(x)$ – амплитуда колебаний скорости, x – координата вдоль оси цилиндра, t – время. При решении методом Линя колеблющееся поле скоростей записывается так

$$u_1 = U_1(x) \left[\cos \omega t - \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \right],$$

где $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – толщина акустического пограничного слоя, ν – кинематический коэффициент вязкости, y – расстояние от цилиндра. С другой стороны, при обтекании цилиндра колеблющимся потоком решение, полученное методом сращиваемых асимптотических разложений во внутренней области, имеет вид

$$m_i = \left\{ \eta + \frac{1-i}{2} \left[\exp[-(1+i)\eta] - 1 \right] \right\} 2 \sin \theta \exp(i\omega t), \quad (*****)$$

где $m_1 = \psi_1/U_\infty \delta$, ψ_1 – функция тока, $\eta = (r-a)/\delta$, a – радиус цилиндра, r, θ – полярные координаты. Показать, что тангенциальная скорость u_1 в обоих случаях одинакова.

3.2. Уравнение сохранения вихрей в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial (r, \theta)} = \nu \nabla^4 \psi,$$

где r, θ – полярные координаты, t – время, ψ – функция тока, $\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$. Перенести начало координаты r на поверхность колеблющегося цилиндра радиуса a и записать уравнение (*****) в безразмерном виде.

ГЛАВА 4 ПЕРЕНОС ТЕПЛА ВТОРИЧНЫМИ ПОТОКАМИ

4.1 Уравнение, описывающее стационарное поле температур во внешней области течения

Рассмотрим теплообмен круглого цилиндра в поле звуковых колебаний. Пусть цилиндр радиуса a находится в вязкой несжимаемой жидкости, которая на бесконечном удалении от цилиндра движется по закону $U_\infty \cos \omega t$. Вводя безразмерные переменные по соотношениям (3.2) и пренебрегая естественной конвекцией и вязкой диссипацией, уравнение энергии для случая $Re_s = O(1)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{1+y} \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(\theta, y)} = \frac{\varepsilon^2}{Pr Re_s} \nabla^2 T, \quad (4.1)$$

где ψ — функция тока, определяемая выражениями (3.17), а $T = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} T &= 1, \quad y = 0, \\ T &= 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Будем рассматривать случай малых амплитуд, т.е. $\varepsilon \ll 1$. Тогда по аналогии с (3.17) представим решение уравнения (4.1) в виде

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.3)$$

Подставляя (3.17), (3.24) в (4.1) и собирая члены одного порядка, получим

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{1+y} \frac{\partial(\psi_{00}, T_0)}{\partial(y, \theta)} = 0, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{1}{1+y} \frac{\partial(\psi_{00}, T_1)}{\partial(y, \theta)} + \frac{1}{Re_s^{1/2}} \cdot \frac{1}{1+y} \frac{\partial(\psi_{01}, T_0)}{\partial(y, \theta)} + \\ + \frac{1}{1+y} \frac{\partial(\psi_{10}^{cm}, T_0)}{\partial(y, \theta)} = \frac{1}{Pr Re_s} \nabla^2 T_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из уравнения (4.4) следует, что T_0 не зависит от времени. Из (3.24а) и

(3.24б) видно, что ψ_{00} и ψ_{01} являются чисто периодическими функциями от времени, а так как T_0 от времени не зависит, мы можем представить решение уравнения (4.5) в виде

$$T_1 = \Phi_1(y, \theta) + \Phi_2(y, \theta) \sin t. \quad (4.7)$$

Используя (4.7), выделим из уравнения (4.6)) стационарные члены

$$\frac{1}{1+y} \frac{\partial(\psi_{10}^{cm}, T_0)}{\partial(y, \phi)} = \frac{1}{\text{Pr Re}_s} \nabla^2 T_0. \quad (4.8)$$

Здесь $\phi = \theta \pm \pi/2$, так как внешние течения набегают на цилиндр в точках $\theta = \pm \pi/2$.

Уравнение (4.8) описывает стационарное поле температур во внешней области течения.

4.2 Перенос тепла внешними течениями

Рассмотрим случай малых чисел Рейнольдса, т.е. $\text{Re}_s \ll 1$ как уже упоминалось (см. 3.21), это является необходимым и достаточным условием для того, чтобы внешнее течение было типа Стокса.

Когда $\text{Re}_s \ll 1$, $\text{Pr} = O(1)$, передача тепла от цилиндра как во внутренней, так и во внешней области осуществляется только путём теплопроводности, т.е. эффекты конвективного переноса пренебрежимо мало. Это следует из уравнения (4.8).

В том же случае, когда $\text{Re}_s \ll 1$, а $\text{Pr} \gg 2$, при этом $\text{Pr Re}_s \gg 1$, вблизи цилиндра образуется тепловой пограничный слой. Как следует из теории пограничного слоя для плоской пластины длиной L , толщина теплового пограничного слоя будет определяться формулой

$$\delta_T = C_1 \sqrt{\frac{a^* L}{U_\infty}}, \quad (4.9)$$

где a^* – коэффициент температуропроводности, U_∞ – скорость внешнего течения, выражение (4.9) будет являться приемлемой оценкой и в нашем случае. Можно записать

$$\delta_T = C_2 \sqrt{\frac{aa^*}{U_0}}, \quad (4.10)$$

где a – радиус цилиндра, U_0 – скорость вторичных течений на внешней границе динамического пограничного слоя. По определению

$$\text{Re}_s = \frac{U_0 a}{\nu}. \quad (4.11)$$

Выражая U_0 из (4.11) и подставляя её в (4.10) легко получить

$$\delta_T = C_2 \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}}. \quad (4.12)$$

Таким образом, толщина теплового пограничного слоя будет иметь порядок

$$\delta_T = O\left[a(\text{Pr Re}_s)^{1/2}\right]. \quad (4.13)$$

Для того чтобы утверждать, что теплообмен обусловлен внешними течениями, необходимо убедиться, что они располагаются внутри теплового пограничного слоя. Это можно сделать, если взять отношение поперечного размера внутреннего течения к толщине теплового пограничного слоя. Имеем

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \varepsilon \text{Pr}^{1/2}. \quad (4.14a)$$

Если

$$\varepsilon^2 \text{Pr}^{1/2} \ll 1, \quad (4.14b)$$

то размер теплового слоя существенно больше, чем размер внутреннего течения (здесь принято, что размер внутреннего вихря и толщина акустического пограничного слоя совпадают), в силу чего область, занятая внутренними течениями, остается существенно теплопроводной. В этом случае решение уравнения (4.11) будем искать методом возмущений. По соотношениям

$$Y = \frac{ya}{\delta_T} = (\text{Pr Re}_s)^{1/2} y, \quad \psi_{10}^{cm} = \frac{\tilde{\psi}_{10}^{cm}}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} \quad (4.15)$$

введём переменные. Здесь ψ_{10}^{cm} определяется соотношением (3.54a), которое следует разложить для $y \ll 1$. С учётом $\varphi = \theta \pm \pi/2$ будем иметь

$$\psi_{10}^{cm} = \frac{3}{4}(2y + 3y^2)\sin 2\varphi. \quad (4.16)$$

Сделаем замену переменных

$$\psi_{10}^{cm} = \frac{3}{2} \frac{Y \sin 2\varphi}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} + \frac{9}{4} \frac{Y^2 \sin 2\varphi}{\text{Pr Re}_s}, \quad (4.17)$$

тогда можно записать

$$\tilde{\psi}_{10}^{cm} = \tilde{\chi}_1 + \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} \tilde{\chi}_2 + O\left[(\text{Pr Re}_s)^{-1}\right], \quad (4.18)$$

где

$$\tilde{\chi}_1 = \frac{3Y}{2} \sin 2\varphi, \quad \tilde{\chi}_2 = \frac{9Y^2}{4} \sin 2\varphi.$$

Разложим по малому параметру T_0 . Имеем

$$T_0 = T_{00} + \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} T_{01} + O\left[(\text{Pr Re}_s)^{-1}\right]. \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) и (4.17) в (4.11)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \frac{Y}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}}} \times \\ & \times \frac{\partial \left\{ \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} \left[\tilde{\chi}_1 + \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} \tilde{\chi}_2 \right] \left[T_{00} + \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} T_{01} \right] \right\}}{\frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} \partial(Y, \varphi)} = (4.20) \\ & = \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} \nabla^2 \left[T_{00} + \frac{1}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} T_{01} \right], \end{aligned}$$

с учётом

$$\frac{1}{1 + \frac{Y}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}}} \approx 1 - \frac{Y}{(\text{Pr Re}_s)^{1/2}} + \dots$$

и собирая члены при одинаковых степенях (Pr Re_s) , легко получить

$$\frac{\partial(\tilde{\chi}_1, T_{00})}{\partial(Y, \varphi)} - \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial Y^2} = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\chi}_1, T_{01})}{\partial(Y, \varphi)} - \frac{\partial^2 T_{01}}{\partial Y^2} = \frac{\partial(\tilde{\chi}_2, T_{00})}{\partial(Y, \varphi)} + Y \frac{\partial(\tilde{\chi}_1, T_{00})}{\partial(Y, \varphi)} + \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial Y^2}. \quad (4.22)$$

Если ввести переменную Швеца [3], уравнение (4.21) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого имеет вид

$$T_{00} = 1 - \text{erf} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} Y \cos \varphi \right]. \quad (4.23)$$

Используя (4.23), нетрудно получить выражение для числа Nu_d , подсчитанного по диаметру цилиндра

$$\text{Nu}_d = \left(\frac{96}{\pi^2} \right)^{1/2} (\text{Pr Re}_s)^{1/2}. \quad (4.24)$$

Эксперименты подтверждают такую зависимость.

В случае сферы выражение (4.24) имеет вид

$$\text{Nu}_d = 1,9 (\text{Pr Re}_s)^{1/2}. \quad (4.25)$$

4.3 Перенос тепла внутренними течениями

В том случае, когда $\varepsilon^2 \text{Pr} = O(1)$ толщина теплового пограничного слоя становится сравнимой с поперечным размером внутренних течений (см. соотношение (4.14a)), которые начинают играть активную роль в процессе конвективного теплообмена и теплообмен определяется полной структурой вторичных течений. Поставим задачу рассчитать теплоотдачу цилиндра в предельном случае, когда тепловой пограничный слой располагается в области внутренних течений, т.е.

при $\varepsilon^2 \text{Pr} \gg 1$. Очевидно, что в этом случае в уравнении (4.1) целесообразно перейти к внутренним переменным, полагая

$$m = \frac{\text{Re}_s^{1/2}}{\varepsilon} \frac{\psi}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\text{Re}_s^{1/2}}{\varepsilon} \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad (4.26)$$

где

$$m = m_{00} + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\text{Re}_s^{1/2}} m_{01} + \varepsilon (m_{01}'' + m_{01}^{cm}) + \dots \quad (4.27)$$

Здесь m_{00} была получена выше (3.44). Функция m_{01} также известна, хотя его получение нами не рассматривалось. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\left(1 + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\text{Re}_s^{1/2}} \eta\right)} \frac{\partial(m, T)}{\partial(\theta, y)} = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon^2 \text{Pr}} \nabla^2 T. \quad (4.28)$$

Решения уравнения (4.28) ищем в виде ряда

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.29)$$

Подставим (4.25) и (4.27) в (4.28) и приравняем члены при одинаковых степенях ε . Можно показать, по аналогии с (4.11), что T_0 не зависит от времени и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial(m_{10}^{cm}, N_0)}{\partial(\eta, \theta)} = \frac{1}{2\varepsilon^2 \text{Pr}} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \eta^2}. \quad (4.30)$$

Заметим, кстати, что уравнение (4.30) можно получить из (4.11) непосредственно, если в последнем сделать замену ψ_{10}^{cm} на m_{10}^{cm} , а также учесть, что $y = O(\varepsilon)$, а в лапласиане взять только старший член. К настоящему времени решение при произвольных $\varepsilon^2 \text{Pr}$ не получено. Однако в случае больших чисел Прандтля можно построить приближенное решение (4.30).

Рассмотрим такой режим теплообмена, когда $\varepsilon^2 \text{Pr} \gg 1$, т.е. когда толщина теплового пограничного слоя во много раз меньше поперечного размера внутренних течений. Введём переменную

$$\rho = \eta (\varepsilon^2 \text{Pr})^{1/3}. \quad (4.31)$$

Решение (4.31) целесообразно искать в виде ряда по обратным степеням $(\varepsilon^2 \text{Pr})^{1/3}$, т.е.

$$T_0 = T_{00} + \frac{1}{(\varepsilon^2 \text{Pr})^{1/2}} T_{01} + O\left[(\varepsilon^2 \text{Pr})^{-1}\right]. \quad (4.32)$$

Разложим m_{10}^{cm} также по степеням $(\varepsilon^2 \text{Pr})^{-1/3}$ для чего запишем выражение (3.54б) в виде разложения в ряд по степеням η

$$\begin{aligned} m_{10}^{cm} = & \frac{13}{4} - \frac{3}{2}\eta - \frac{3-2i}{2} \left[1 - (1-i)\eta + \frac{(1-i)^2}{2!}\eta^2 - \frac{(1-i)^3}{3!}\eta^3 + \dots \right] - \\ & - \frac{3+2i}{2} \left[1 - (1+i)\eta + \frac{(1+i)^2}{2!}\eta^2 - \frac{(1+i)^3}{3!}\eta^3 + \dots \right] - \\ & - \frac{1}{4} \left(1 - 2\eta + \frac{4\eta^2}{2!} - \frac{8\eta^3}{3!} \right) + \frac{i\eta}{2} \left[1 - (1-i)\eta + \frac{(1-i)^2}{2!}\eta^2 + \dots \right] - \\ & - \frac{i\eta}{2} \left[1 - (1+i)\eta + \frac{(1+i)^2}{2!}\eta^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Собирая члены при одинаковых степенях η , легко убедиться, что

$$m_{10}^{cm} = \frac{1}{2}\eta^2 \sin 2\theta - \frac{1}{3}\eta^3 \sin 2\theta + \dots \quad (4.33)$$

Произведём в (4.33) замену η на ρ_0 . Имеем

$$m_{10}^{cm} = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{(\varepsilon^2 \text{Pr})^{2/3}} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \frac{\rho^3}{\varepsilon^2 \text{Pr}} \sin 2\theta. \quad (4.33a)$$

Теперь нетрудно представить (4.33a) в виде разложения по степеням $(\varepsilon^2 \text{Pr})^{-1/3}$. Действительно, будем иметь

$$m_{10}^{cm} = \frac{1}{(\varepsilon^2 \text{Pr})^{2/3}} \chi_1 + \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Pr}} \chi_2 + O\left[(\varepsilon^2 \text{Pr})^{-4/3}\right], \quad (4.34)$$

где

$$\chi_1 = \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\theta, \quad \chi_2 = -\frac{1}{3} \rho^3 \sin 2\theta.$$

Подставим (4.32) и (4.34) в (4.30). Собирая члены одного порядка по $(\varepsilon^2 Pr)$ легко получить

$$\frac{\partial(\chi_1, T_{00})}{\partial(\rho, \theta)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial \rho^2} = 0 \quad (4.35)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} T_{00} &= 1, \quad \rho = 0, \\ T_{00} &= 0, \quad \rho \rightarrow \infty \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial(\chi_1, T_{01})}{\partial(\rho, \theta)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_{02}}{\partial \rho^2} = - \frac{\partial(\chi_2, T_{00})}{\partial(\rho, \theta)} \quad (4.36)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} T_{01} &= 1, \quad \rho = 0, \\ T_{01} &= 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения и вычислив число Nu_d можно получить [3]

$$Nu_d = \varepsilon^{-1} Re_s^{1/2} (\varepsilon^2 Pr)^{1/3} \left\{ 1,3 - 0,3(\varepsilon^2 Pr)^{-1/3} + O\left[(\varepsilon^2 Pr)^{-2/3}\right] \right\}. \quad (4.37)$$

В случае сферы член, аналогичный первому члену в (4.37) имеет вид

$$Nu_d = 0,83\varepsilon^{-1/3} Re_s^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (4.38)$$

В заключении отметим, что в предельном случае, когда $Re_s \gg 1$, $Pr \gg 1$, первый член в выражении для числа Нуссельта совпадает с аналогичным членом в соотношении (4.24), полученном при $Re_s \ll 1$.

4.4 Влияние колебаний на течение и теплообмен возле цилиндра при естественной конвекции

В предыдущих параграфах мы рассмотрели характер вторичных течений и обусловленные ими изменения в теплообмене, когда массовые силы отсутствуют. В большинстве же практических случаев пренебрежение этими силами в уравнениях движения не является корректным. Ниже мы рассмотрим основные закономерности поля скоро-

сти и теплообмена возле цилиндра при наличии естественной конвекции.

Уравнения пограничного слоя, описывающие этот процесс, имеют следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \sin \frac{x}{a}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (4.41)$$

Из уравнений (4.39-4.41) видно, что поле скорости и поле температур взаимосвязаны, что затрудняет теоретический анализ таких задач. По этой причине до сих пор не удалось получить строгих аналитических решений задачи о влиянии звуковых колебаний на течение и теплообмен возле тел при умеренных числах Грасгоффа.

Решение уравнение (4.39-4.41) будем искать в виде суммы стационарной и пульсирующей компонент

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0(x, y) + \vec{v}_1(x, y, t), \\ T &= T_0(x, y) + T_1(x, y, t). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Пульсирующая компонента скорости при $\varepsilon \ll 1$ и $\delta \ll \delta_0 \sim Gr^{-1/4}$ описывается уравнением (2.22), решение которого приведено в формулы (3.42), (3.44).

Пренебрегая пульсационным переносом тепла, получим следующие уравнения для стационарных компонент поля скорости и температуры

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + f(x, y) + g\beta(T - T_\infty) \sin \frac{x}{a}, \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad (4.44)$$

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = a_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}, \quad (4.45)$$

$$f(x, y) = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Уравнения (4.43-4.45) решаются с помощью интегрального метода. В случае, когда теплообмен осуществляется внешними вторичными течениями, получено решение, верное вблизи передней критической точки. В случае, когда колебания горизонтального цилиндра происходят в горизонтальной же плоскости, авторы, предлагается формула

$$\text{Nu}_a^2 = 0,4(\text{Pr} \cdot \text{Re}_s) + \sqrt{0,16(\text{Pr} \cdot \text{Re}_s)^2 + 0,04(\text{Pr} \cdot \text{Gr})}. \quad (4.46)$$

В частности, из выражения (4.46) следует, что если $\text{Re}_s / \text{Gr}^{1/2} \rightarrow \infty$, то наличие естественной конвекции не оказывает практически никакого влияния на теплообмен, который в этом случае описывается соотношениями, полученными на основе изотермической модели вторичных течений (см. выражение (4.24). В противном же случае ($\text{Re}_s / \text{Gr}^{1/2} \rightarrow 0$) теплообмен определяется только наличием естественной конвекции.

Ясно, что наличие массовых сил должно приводить к существенному изменению как гидродинамической обстановки, так и поля температур возле тела, помещенного в звуковое поле. Эти изменения будут зависеть от ориентации направления колебаний по отношению к ускорению свободного падения.

Исследования течения и теплообмена возле нагретого горизонтального цилиндра, помещенного в звуковое поле, показали, что в том случае, когда колебания горизонтальны, в верхней части цилиндра при достижении некоторой интенсивности звукового поля (~140 дБ), образуются два вихря (такой тип вторичных течений получил название «термоакустического»), размер которых при дальнейшем увеличении интенсивности звуковых колебаний не меняется. Интегральный тепловой поток от цилиндра до появления термоакустических течений не отличается от значения, получаемых в отсутствие звука.

Дальнейшие исследования показали, что при наложении звукового поля на естественное течение возле цилиндра наблюдаются изменения локального значения числа Nu эти изменения зависят не только от параметров звукового поля, но и от его направления.

Так, для горизонтального звукового поля теплообмен в передней критической точке увеличивается, в то время как наложение вертикальных колебаний приводит к его уменьшению. Следовательно, изменения в теплообмене обусловлены внешними вторичными течениями, поскольку при горизонтальных колебаниях движение жидкости во внешних вторичных течениях совпадает с направлением естественно конвективного течения в нижней части цилиндра, т.е. эффективная скорость движения жидкости увеличивается. При вертикальных же колебаниях эффективная скорость является разностью между скоростью вторичных течений и естественно конвективного течения. Естественно, что это утверждение верно лишь для исследованного диапазона величин Pr и Gr ($0,7 \leq Pr \leq 20$; $0 \leq Gr \leq 6 \cdot 10^4$). Можно ожидать, что для $Pr \gg 1$ и $Gr^{1/4}/H \geq 1$, т.е. когда изменения в теплообмене будут обуславливаться внутренними течениями, характер влияния направления колебаний на теплообмен в передней части цилиндра будет диаметрально противоположным вышеописанному.

Было замечено, что эффект (уменьшение или увеличение) становится больше по мере увеличения амплитуды колебаний. Для любого фиксированного значения амплитуды колебаний эффект уменьшается, если частота увеличивается.

Следует отметить, что при прочих равных условиях вертикальные колебания оказывают более интенсифицирующее воздействие на интегральный теплообмен, чем горизонтальные, что может быть объяснено турбулизацией пограничного слоя при взаимодействии встречных течений в нижней части цилиндра.

Задачи к главе 4

4.1. В разложении в ряд при слабом возмущении внешнего течения стационарный температурный пограничный слой описывается уравнением

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}, \quad (**)$$

где u, v – продольная и поперечная компоненты скорости, соответственно, T – температура, нижний индекс «0» – означает порядок приближения, x, y – координаты вдоль образующей клина и нормальной к ней, соответственно, $a = \lambda / \rho_0 c_p$ – коэффициент температуропроводности, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении. Выбором переменной подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{\bar{U}}{\nu x}},$$

превратить уравнение (**) в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной η для безразмерной температуры $\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$, где T_w – температура стенки, T_∞ – температура внешнего течения, ν – кинематический коэффициент вязкости, \bar{U} – стационарная часть скорости внешнего течения.

Указание. При обтекании клина скорость внешнего стационарного течения выражается

$$\bar{U} = cx^m,$$

где c и m – параметры, характеризующие клин, и справедливы выражения

$$\psi_0 = \sqrt{\nu x \bar{U}} f, \quad u_0 = \bar{U} f', \quad v_0 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu \bar{U}}{x}} [(m+1)f + (m-1)\eta f'],$$

где ψ_0 – функция тока основного течения, $f = f(\eta)$, штрихи означают дифференцирование по η .

4.2. Внешнее течение со слабым периодическим возмущением

при обтекании плоской пластины имеет вид

$$U(x, t) = U_\infty [1 + \varepsilon \exp(i\omega t)],$$

где $U_\infty = \text{const}$ – скорость внешнего течения, ε – малый возмущающий параметр, ω – циклическая частота колебаний, t – время. Температурный периодический пограничный слой описывается уравнением

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}, \quad (****)$$

где нижние индексы означают порядок приближения, u, v – продольная (вдоль оси x) и поперечная компоненты скорости, T – температура, x, y – координаты вдоль пластины и по нормали к ней, соответственно, a – коэффициент температуропроводности. Преобразовать уравнение (****) так, чтобы оно зависело от переменных подобия

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad \xi = \frac{i\omega x}{U_\infty}.$$

Указание. Считать величины $u_0, u_1, v_0, v_1, \partial T_0/\partial x, \partial T_0/\partial y$ известными, и равными соответственно

$$u_0 = U_\infty f', \quad v_0 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} [f - \eta f'],$$

$$u_1 = \varepsilon U_\infty \Phi_\eta \exp(i\omega t),$$

$$v_1 = -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} [\Phi - \eta \Phi_\eta + 2\xi \Phi_\xi],$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} (T_w - T_\infty) \mathcal{G}', \quad \frac{\partial T_0}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \mathcal{G}',$$

где нижний индекс у функции $\Phi = \Phi(\eta, \xi)$ показывает переменную, по которой производится дифференцирование, $f = f(\eta)$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\eta)$, штрихи означают дифференцирование по η , ν – кинематический коэффициент вязкости.

ГЛАВА 5 ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ В КАНАЛАХ

5.1 Пульсирующее течение в канале

С примером простейшего периодического пограничного слоя мы сталкиваемся при колебаниях жидкости в канале, вызванных периодическим изменением перепада давления. Подобное движение может осуществляться в поршневых насосах, двигателях и т.д., т.е. там, где допускается геометрическая одномерность потока, и постоянство свойств жидкости по сечению канала.

Рассмотрим нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами в длинной круглой трубе радиуса R . Для удобства будем пользоваться цилиндрической системой координат, ось x которой совпадает с осью трубы, а r – радиальное расстояние от оси трубы. Можно принять, что рассматриваемое явление не зависит от координаты x , следовательно, не зависит от x и составляющая и скорости в направлении оси трубы, т.е. $\partial u / \partial x = 0$ или $u = u(r, t)$. Тогда из уравнения неразрывности следует, что $v = 0$, а, следовательно, и $\partial p / \partial r = 0$. Из (1.11), с учетом $u \equiv v$, следует

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (5.1)$$

Пусть градиент давления задается как

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \chi_0 + \chi_c \cos \omega t, \quad (5.2)$$

где χ_0 и χ_c – константы, соответствующие стационарному и пульсирующему перепаду давления, соответственно.

Если процесс установившийся, скорость потока так же можно представить, как периодическую функцию времени

$$u = u_0(r) + u_1(r) \exp(i\omega t), \quad (5.3)$$

где $u_0(r)$ – скорость стационарного течения в трубе и $u_1(r)$ – амплитуда колебаний скорости.

Подставляя (5.2) и (5.3) в уравнение движения (5.1) и разделяя стационарные и пульсирующие члены, получим

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} = -\frac{\chi_0}{\nu}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} - \frac{i\omega}{\nu} u_1 + \frac{\chi_0}{\nu} = 0 \quad (5.5)$$

с граничными условиями

$$u_0 = u_1 = 0, \quad r = R. \quad (5.6)$$

Кроме того, заметим, что на оси трубы скорость должна быть ограниченной.

Решение уравнений (5.4) и (5.5) имеют вид

$$u_0 = \frac{\chi_0}{4\nu} (R^2 - r^2), \quad (5.7)$$

$$u_1 = -\frac{i\chi_c}{\omega} \left[1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} i \sqrt{i} \right)}{J_0 (Hi \sqrt{i})} \right]. \quad (5.8)$$

Здесь $H = R \sqrt{\omega/\nu}$, J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка от комплексного аргумента, которая выражается в виде

$$J_0 (zi \sqrt{i}) = ber_0 z + ibei_0 z,$$

где $ber_0 z$ и $bei_0 z$ – функции Кельвина, $z = r \sqrt{\omega/\nu}$.

Выделим действительную часть выражения (5.3). Имеем

$$u = \frac{\kappa_0 R^2}{4\nu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{\kappa_c}{\omega} (A \sin \omega t + B \cos \omega t), \quad (5.9)$$

где

$$A = 1 - \frac{ber_0 z ber_0 H + bei_0 z bei_0 H}{ber_0^2 H + ber_0^2 H}, \quad (5.10)$$

$$B = \frac{ber_0 z ber_0 H - bei_0 z bei_0 H}{ber_0^2 H + ber_0^2 H}.$$

Принимая осредненную по сечению и времени скорость

$U_0 = \kappa_0 R^2 / 8\nu$ за масштаб, выражение (5.9) можно записать в виде

$$\frac{u}{U_0} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{8\kappa_c}{\kappa_0 H^2} (A \sin \omega t + B \cos \omega t). \quad (5.11)$$

Рассмотрим поведение решения в случае низкочастотных колебаний, когда $H \ll 1$. При $H \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} ber_0 H &\simeq 1, \quad bei_0 H \simeq \frac{H^2}{4}, \\ ber_0 z &\simeq 1, \quad bei_0 z \simeq \frac{z^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Подставляя выражения в (5.10), получим

$$A = 0, \quad B = 4 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (5.13)$$

Тогда (5.11) легко преобразуется к виду

$$\frac{u}{U_0} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{\kappa_c}{\kappa_0} \cos \omega t \right). \quad (5.14)$$

Последнее выражение показывает, что скорость колеблется в фазе с колебаниями градиента давления (5.2), а её профиль имеет параболический характер. Такое асимптотическое приближение называется квазистационарным и означает, что амплитуда периодической части скорости в случае квазистационарного течения равна скорости, которая возникала бы в трубе при стационарном течении с перепадом давления $-(1/\rho)\partial p/\partial x$.

Если представить H в виде

$$H = \frac{R\sqrt{2}}{\delta},$$

где $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ - толщина акустического пограничного слоя. Условие $H \ll 1$ равносильно тому, что расстояние, на которое распространяются вязкие возмущения при пульсирующем течении, много больше радиуса канала, т.е. $\delta \gg R$.

Это означает, в свою очередь, что вязкие возмущения распростра-

няются на расстояние, большее радиуса канала. При $\delta \approx R$ вязкие эффекты распространяются на все сечение канала, что соответствует предельному случаю квазистационарного течения.

В случае высокочастотных колебаний, когда $H \gg 1$, (обычно для реализации этого режима достаточно положить $H > 10$) имеем

$$\begin{aligned} ber_0 H &\approx \frac{\exp(H/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi H}} \cos\left(\frac{H}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \\ bei_0 H &\approx \frac{\exp(H/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi H}} \sin\left(\frac{H}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

На оси трубы ($z \rightarrow 0$)

$$ber_0 z \approx 1, \quad bei_0 z \approx 0,$$

поэтому выражения (5.10) примут вид

$$A \approx 1, \quad B \approx 0.$$

Тогда из (5.11) легко получить

$$\frac{u}{U_0} = 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{8\kappa_c}{\kappa_0 H^2} \sin \omega t. \quad (5.17)$$

Из (5.17) следует, что в быстрых колебаниях течение на оси отстает от колебаний градиента давления на $\pi/2$, т.е. поток ведет себя как идеальная жидкость.

Для описания движения в области стенок ($r \sim R$) подставим (5.16) в выражения (5.10). Получим

$$\begin{aligned} A &= 1 - \sqrt{\frac{r}{R}} \exp\left(-\frac{R-r}{\delta}\right) \cos\left(\frac{R-r}{\delta}\right), \\ B &= \sqrt{\frac{r}{R}} \exp\left(-\frac{R-r}{\delta}\right) \sin\left(\frac{R-r}{\delta}\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_0} &= 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \\ &+ \frac{8\kappa_c}{\kappa_0 H^2} \left[\sin \omega t - \sqrt{\frac{R}{r}} \exp\left(-\frac{R-r}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{R-r}{\delta}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – толщина акустического пограничного слоя.

Случай высокочастотных колебаний аналогичен условию $\delta \ll R$ и означает, что вязкие возмущения распространяются на малое по сравнению с радиусом трубы расстояние. Тогда в осевой области трубы амплитуда колебаний скорости и фазовый сдвиг остаются постоянными, поскольку вязкие эффекты на эту область течения не влияют. Изменение амплитуды происходит, в основном, в тонком слое около стенки.

Уравнения, описывающие пульсирующее течение в канале, составленных из двух параллельных плоскостей будут иметь вид

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} = -\frac{\kappa_0}{\nu} \quad (5.20)$$

для стационарной части скорости и

$$\frac{d^2 u_1}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_1 = -\frac{\kappa_c}{\nu} \quad (5.21)$$

для нестационарной части. Здесь предполагается, что ось x совпадает с плоскостью симметрии канала, ось y – нормальная к стенкам координата, а стенки расположены в плоскостях $y = \pm h$.

Решения уравнений (5.20) и (5.21) должны удовлетворять условиям прилипания на стенках и условию симметрии на оси:

$$\begin{aligned} u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad y = \pm h, \\ \frac{du_0}{dy} = 0, \quad \frac{du_1}{dy} = 0, \quad y = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Легко видеть, что

$$u_0 = \frac{\kappa_0}{2\nu} (h^2 - y^2), \quad (5.23)$$

$$u_1 = -\frac{i\kappa_c}{\omega} \left[1 - \frac{\text{ch}[(1+i)z]}{\text{ch}[(1+i)H]} \right]. \quad (5.24)$$

Введём среднюю по сечению скорость

$$U_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_0 dy = \frac{\kappa_0 h^2}{3\nu},$$

тогда можно написать

$$\frac{u}{U_0} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{3\kappa_c i}{H^2 \kappa_0} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}[(1+i)z]}{\operatorname{ch}[(1+i)H]} \right] \exp(i\omega t), \quad (5.25)$$

где $H = h\sqrt{\omega/\nu}$, $z = y\sqrt{\omega/\nu}$. В действительной форме (5.25) запишется в виде

$$\frac{u}{U_0} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{3\kappa_c}{H^2 \kappa_0} (A \sin \omega t + B \cos \omega t), \quad (5.26)$$

где

$$A = 1 - \frac{\operatorname{ch} z \cos z \operatorname{ch} H \cos H + \operatorname{sh} z \sin z \operatorname{sh} H \sin H}{\operatorname{ch}^2 H \cos^2 H + \operatorname{sh}^2 H \sin^2 H}, \quad (5.27)$$

$$B = \frac{\operatorname{sh} H \sin H \operatorname{ch} z \cos z + \operatorname{ch} H \cos H \operatorname{sh} z \sin z}{\operatorname{ch}^2 H \cos^2 H + \operatorname{sh}^2 H \sin^2 H}. \quad (5.28)$$

5.2 Теплоотдача при пульсирующем течении в канале

Рассмотрим процесс теплообмена в канале, образованном двумя параллельными поверхностями (рисунок 5.1) при ламинарном несжимаемом и полностью развитом течении, определяемом соотношениями (5.26). Пусть стенки канала расположены в плоскостях $y = \pm h$, а характеристики потока не зависят от координаты z . Температура потока при $x \leq 0$ постоянна и равна T_∞ . Границы канала поддерживаются при постоянной температуре T_w .

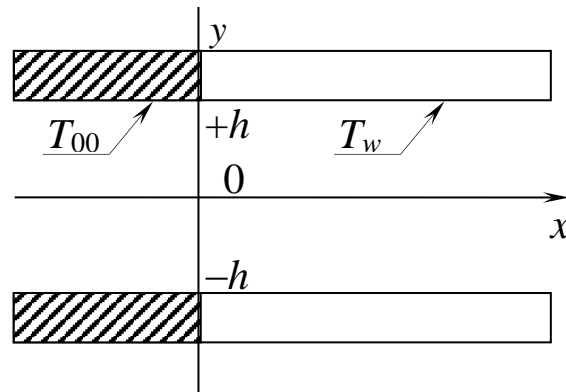


Рисунок 5.1 Канал, образованный двумя параллельными пластинами

Представим скорость и температуру потока в виде суммы стационарной и пульсирующей компонент

$$\begin{aligned} u(y,t) &= u_0(y) + u_1(y,t), \\ T(x,y,t) &= T_0(x,y) + T_1(x,y,t). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Если рассматривать процесс теплообмена для достаточно больших чисел Пекле $Re > 10$, то в уравнениях энергии можно пренебречь членом $\partial^2 T / \partial x^2$. Учитывая, что в рассматриваемом случае присутствует только x – компонента скорости $u(y,t)$, уравнение энергии (1.32) можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = a_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (5.30)$$

где $a_0 = K / \rho C_p$ – коэффициент температуропроводности, K – коэффициент теплопроводности, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, ρ – плотность среды.

Подставляя выражения (5.29) в уравнение (5.30) и проведя осреднение по времени, для стационарной температуры T_0 получим

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = a_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}, \quad (5.31)$$

где черта означает осреднение по времени. Заметим, что первый член в левой части уравнения (5.31) соответствует ламинарному стационарному течению, а член $u_1 \partial T_1 / \partial x$, отличный в общем случае от нуля, описывает изменение процесса теплообмена в канале, вызванное пульсациями скорости и температуры.

Вычитая из (5.30) выражение (5.31), получим уравнение для пульсирующей компоненты температуры

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = a_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}. \quad (5.32)$$

Граничные условия в этом случае записываются в виде

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= T_{00}, \quad x \leq 0, \\
T_0(x, y) &= T_w, \quad y = h, \\
\frac{\partial T_0}{\partial y} &= \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0, \quad y = 0,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$T_1(x, y, t) = 0, \quad x = 0; \quad T_1(x, y, t) = 0, \quad y = \pm h.$$

Уравнения (5.31) и (5.32) образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. В общем случае разделение переменных в этих уравнениях произвести не удастся. Принимая во внимание изменения u_0 и u_1 по сечению канала, их решают числительными методами.

Численный анализ, выполненный при отсутствии возвратных течений, показывает, что величина $\beta = \bar{q}_1/q_0$, представляющая собой отношение среднего по времени теплового потока \bar{q}_1 при наличии пульсаций к тепловому потоку при стационарном течении q_0 определяется величиной

$$x^* = \frac{8}{3} \frac{x}{h} \frac{1}{\text{Pe}},$$

где $\text{Pe} = 2U_0 h/a_0$ – число Пекле, подсчитанное по осреднённой по сечению скорости, и числом $H_T = h\sqrt{\omega/a_0}$.

При низкочастотных колебаниях, когда $H_T \leq 1$ величина β остаётся меньше единицы и монотонно убывает по мере роста x^* . По достижении $x_{кр}^* \approx 0,3$ достигается минимум β , а при дальнейшем увеличении x^* происходит рост β вплоть до значений $\beta \approx 2$, уменьшение числа H_T от значений 1,6 до 0,17 приводит к некоторому росту $x_{кр}^*$, но характер зависимости $\beta = \beta(x^*)$ сохраняется неизменным.

В случае высокочастотных колебаний ($H_T \gg 1$) локальные значения теплового потока для пульсирующего течения могут быть и ниже и выше своего стационарного значения. Однако если длина канала достаточно велика для того, чтобы при больших x^* температура

потока стала близкой к температуре стенки T_w , то интегральный по длине канала тепловой поток становится равным тепловому потоку для стационарного течения.

Следует отметить, что при снижении относительной амплитуды колебаний скорости потока β стремится к единице, при этом характер зависимости $\beta = \beta(x^*)$ сохраняется.

Наиболее распространенным методом оценки процесса теплообмена для пульсирующих течений является квазистационарная теория. Расчет квазистационарного теплообмена в пульсирующем потоке предполагает, что в каждый момент времени в системе выполняются законы теплопереноса, применимые к стационарному течению.

Рамки применимости квазистационарного подхода для ламинарного пульсирующего течения определяются параметрами N и N_T . Если $N \leq 1$, то относительное отклонение профиля скоростей от распределения скоростей, рассчитанного в квазистационарном приближении, не превышает 1%. Границы применимости квазистационарного подхода при турбулентном течении можно оценить только экспериментально.

Экспериментальные исследования теплообмена при турбулентном пульсирующем течении в круглой трубе показали, что теплообмен сохраняет свой квазистационарный характер, если

$$z = \frac{\omega u_1}{2\pi u_0^2} \text{Re}^{1/4} \leq 0,02, \quad (5.34)$$

где $\text{Re} = u_0 d / \nu$, d – диаметр трубы; u_1 и u_0 – осредненная по сечению амплитуда пульсирующей скорости и стационарная скорость, соответственно.

Осредненный по длине трубы коэффициент теплоотдачи для развитых стационарных ламинарного и турбулентного течений можно представить в виде

$$\alpha_0 = C u_0^m. \quad (5.35)$$

В квазистационарном приближении осредненный по периоду колебаний коэффициент теплоотдачи α_{01} представляется в виде

$$\alpha_{01} = \frac{C\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n^m dt. \quad (5.36)$$

Отношение коэффициентов теплоотдачи α_1/α_0 будет характеризовать изменение в теплообмене и, как видно из (5.36), зависит от m и u_1/U_0 .

На рисунке 5.2 показаны зависимости α_1/α_0 от относительной амплитуды колебаний скорости u_1/U_0 для ламинарного (кривая 1) и турбулентного потоков (кривые 2, 3).

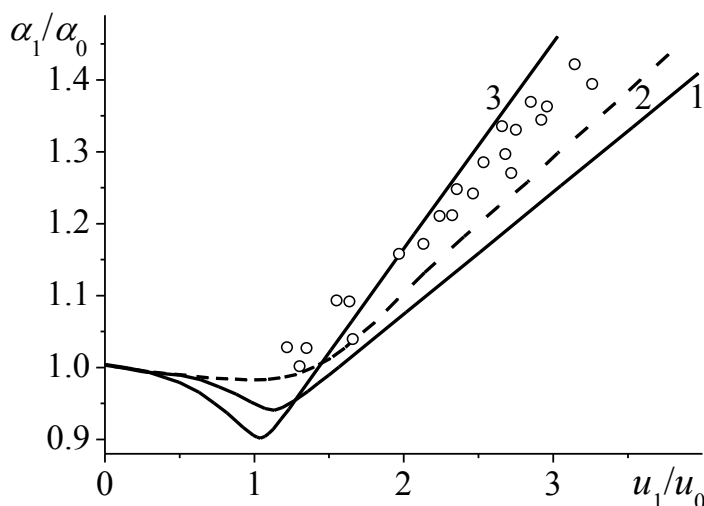


Рисунок 5.2. Зависимость α_1/α_0 от относительной амплитуды колебаний скорости потока u_1/U_0 . 1 – ламинарный режим; 2 – турбулентный режим; 3 – квазистационарная теория и экспериментальные результаты для $U_0 = 0,45$ м/с, $f = 0,6$ Гц.

Данные рисунка позволяют сделать ряд выводов:

а) колебания всегда способствуют ухудшению теплообмена, если их относительная амплитуда меньше единицы, т.е. тогда, когда невозможно возникновение возвратных течений.

б) Если $u_1/u_0 > 1$, возникают возвратные течения. Рост относительной амплитуды колебаний вызывает рост относительного коэффициента теплоотдачи, так что α_1/α_0 становится выше единицы.

в) В турбулентном потоке при $u_1/u_0 > 1$ относительный коэффициент теплоотдачи выше, чем в ламинарном.

Задачи к главе 5

5.1. Стационарное движение в плоском канале описывается уравнением

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} = -\frac{\kappa_0}{\nu}.$$

Найти распределение u_0/U_0 , где U_0 – осредненное по сечению значение скорости.

5.2. Уравнение колебаний скорости в плоском канале имеет вид

$$\frac{d^2 u_1}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_1 = -\frac{\kappa_c}{\nu},$$

где u_1 – амплитуда колебаний скорости. Найти распределение u_0/U_0 , $U_0 = \kappa_c h^2 / 3\nu$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.1 $6,9 \cdot 10^{-4}$ м.

1.2. $h = 2 \sqrt{\frac{v}{\pi f}} \ln 100 = 6,36$ м.

1.3. $4,34 \cdot 10^{-3}$ м.

1.4. *Решение.* Колебания цилиндра радиуса R описываются уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} u &= U_{\infty} \cos \omega t, & r &= R, \\ \partial u / \partial r &= 0, & r &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая

$$u = u_A \exp(i\omega t),$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2 u_A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_A}{dr} - \frac{i\omega}{v} u_A = 0. \quad (3)$$

Сделаем замену переменной r на $z = i\sqrt{ir} \sqrt{\omega/v}$. Тогда получим

$$\frac{d^2 u_A}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du_A}{dz} + u_A = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) – это уравнение Бесселя нулевого порядка. Оно имеет два частных решения $J_0(z)$ и $Y_0(z)$, одно из которых четная функция, другая нечетная. Общее решение (4) записывается в виде

$$u_A = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z). \quad (5)$$

Граничному условию на оси цилиндра удовлетворяют только четные функции, поэтому следует положить $C_2 = 0$. Подставляя (5) в граничное условие на стенке, определяем C_1 , тогда имеем

$$u_A = U_{\infty} \frac{J_0(z)}{J_0(z_0)}, \quad (6)$$

где $z_0 = i\sqrt{iR\sqrt{\omega/\nu}}$. Решением задачи является реальная часть выражения

$$u = U_\infty \frac{J_0(z)}{J_0(z_0)} \exp(i\omega t). \quad (7)$$

1.5. *Решение.* Пусть $z = i\sqrt{i}x$, $z_0 = i\sqrt{i}x_0$, где $x = r\sqrt{\omega/\nu}$, $x_0 = R\sqrt{\omega/\nu}$, тогда

$$J_0(z) = \text{ber}_0 x + i\text{bei}_0 x, \quad J_0(z_0) = \text{ber}_0 x_0 + i\text{bei}_0 x_0, \quad (1)$$

где функции ber , bei есть так называемые функции Кельвина. При большом значении аргумента имеют место асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \text{ber}_0 x &= \frac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x}} \left[L_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right], \\ \text{bei}_0 x &= \frac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x}} \left[M_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + L_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$L_0(x) \approx 1 + \frac{1}{1!8x} \cos \frac{\pi}{4} + \dots, \quad M_0(x) = -\frac{1}{1!8x} \cos \frac{\pi}{4} + \dots \quad (3)$$

Отбрасывая в (3) малые члены, получим

$$L_0 \approx 1, \quad M_0 \approx 0. \quad (4)$$

Тогда, подставляя (2) и (4) в выражения (1) имеем

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \frac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x}} \left[\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right], \\ J_0(z_0) &= \frac{\exp(x_0/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x_0}} \left[\cos\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу равенства $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ запишем выражение для скорости среды

$$u = U_\infty \sqrt{\frac{x}{x_0}} \exp\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}} + i \frac{x-x_0}{\sqrt{2}}\right) \exp(i\omega t). \quad (6)$$

Подставляя в (6) значения x и x_0 , имеем

$$u = U_\infty \sqrt{\frac{R}{r}} \exp \left[-(1+i)(R-r) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} + i\omega t \right]. \quad (7)$$

Делая замену $R-r=y$, где y отсчитывается от стенки трубы, выражение (7) переписываем в виде

$$u = \frac{U_\infty}{\sqrt{1-y/R}} \exp \left[-(1+i)y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} + i\omega t \right]. \quad (8)$$

В пристеночной области, где $y/R \ll 1$, после выделения в (8) действительной части получим

$$u = U_\infty \exp \left(-y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) \cos \left(\omega t - y \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right). \quad (9)$$

1.6. *Решение.* Согласно формуле из условия задачи, величина u не зависит от x . Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

вытекает соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

что приводит к равенству $v = C$. На стенке выполняется условие $v = 0$ при $y = 0$ (условие прилипания), поэтому $C = 0$. Тогда z компонента вихря находится простым дифференцированием

$$\omega_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (\cos \omega t - \sin \omega t)$$

или

$$\omega_z = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right).$$

1.7. *Решение.* Оценим порядок отдельных членов в лапласиане

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Полагая $\bar{x} = x/L$, $\bar{y} = y/\delta$ легко убедиться, что второй член L^2/δ^2 больше первого, если $L/\delta \gg 1$. Удерживая в (1) только старшие члены, будем иметь

$$\nabla^2 \psi \approx \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 \psi \approx \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \quad (2)$$

и

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial t} = \nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}. \quad (3)$$

Проинтегрировав уравнение (3) один раз по y получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (4)$$

Условие $L/\delta \gg 1$ соответствует случаю $H \gg 1$, если учесть, что $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – толщина акустического пограничного слоя.

1.8. $3,02 \cdot 10^{-3}$ м.

1.9. *Решение.* Толщины слоев определяются по формулам

$$\delta_T = \sqrt{\frac{2a}{\omega_1}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_2}},$$

где a – коэффициент температуропроводности, ν – кинематический коэффициент вязкости, ω_1 и ω_2 – циклические частоты. Беря отношение δ/δ_T получим равенство

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\frac{\text{Pr} \omega_1}{\omega_2}}.$$

Откуда имеем

$$\delta = 17,89 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$1.10. \lambda^* = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \rho c_p}} = 5,22 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$1.11. T = T_w^0 \frac{J_0(z)}{J_0(z_0)} \exp(i\omega t),$$

где $J_0(z)$, $J_0(z_0)$ – функции Бесселя первого рода нулевого порядка,

$z = i\sqrt{ir}\sqrt{\omega/a}$, $z_0 = i\sqrt{iR}\sqrt{\omega/a}$, r – радиальная координата, R – радиус цилиндра, a – коэффициент температуропроводности.

Указание. См. решение задачи 4.

1.12. $h \approx 0,29$ м.

1.13. *Указание.* См. задачу 5.

1.14. *Решение.* Величина $\nabla^2\psi$ есть k -компонента вектора завихренности, взятая с обратным знаком, то есть

$$-\nabla^2\psi \cdot \vec{k} = \text{rot } \vec{v}. \quad (1)$$

В потенциальном течении скорость выражается как

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad (2)$$

где φ – потенциал скорости. Подставляя выражение (2) в правую часть уравнения (1) получим

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0, \quad (3)$$

что доказывает равенство

$$\nabla^2\psi = 0. \quad (4)$$

1.15. *Решение.* В силу того, что

$$\nabla^2\vec{v} = i\nabla^2u + j\nabla^2v, \quad (1)$$

где u, v – компоненты скорости, можно написать

$$\nabla^2\vec{v} = i\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right) + j\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right). \quad (2)$$

Используя соотношения

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (3)$$

вместо (2) запишем

$$\nabla^2\vec{v} = i\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right) + j\left(-\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right) \quad (4)$$

или

$$\nabla^2\vec{v} = i\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi - j\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi. \quad (5)$$

С учетом $\nabla^2\psi = 0$, из (5) получаем искомое равенство

$$\nabla^2 \vec{v} = 0. \quad (6)$$

1.16. *Решение.* Рассмотрим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (1)$$

в которое подставим разложения по малому параметру

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots, \quad \vec{v} = \varepsilon \vec{v}_1 + \varepsilon^2 \vec{v}_2 + \dots \quad (2)$$

Выделяя в полученном уравнении члены с ε^2 , запишем

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_1 \vec{v}_1 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_2 = 0. \quad (3)$$

Осредним выражение (3) по времени. Тогда, с учетом $\partial \langle \rho_2 \rangle / \partial t = 0$, имеем искомое выражение

$$\nabla \cdot \langle \vec{v}_2 \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \langle \rho_1 \vec{v}_1 \rangle. \quad (4)$$

1.17. *Решение.* Рассмотрим уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (1)$$

где \vec{v} – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, μ – динамический коэффициент вязкости, t – время. Положим в уравнении (1)

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots, \quad \vec{v} = \varepsilon \vec{v}_1 + \varepsilon^2 \vec{v}_2 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (2)$$

и выделим члены порядка ε и ε^2 . В итоге имеем

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu \nabla^2 \vec{v}_1, \quad (3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \rho_0 (\vec{v}_1 \nabla) \vec{v}_1 + \rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_2 + \mu \nabla^2 \vec{v}_2. \quad (4)$$

Подставляя в выражение (4) значение $\partial \vec{v}_1 / \partial t$ из (3), получим

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \rho_0 (\vec{v}_1 \nabla) \vec{v}_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla p_1 + \nu \rho_1 \nabla^2 \vec{v}_1 = -\nabla p_2 + \mu \nabla^2 \vec{v}_2. \quad (5)$$

Осреднение \vec{v}_2 по времени дает $\langle \vec{v}_2 \rangle = 0$. Тогда вместо (5) запишем уравнение

$$0 = -\frac{\nabla p_2}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{v}_2 + F. \quad (6)$$

Здесь

$$F = \frac{1}{\rho_0^2} \left(\rho_1 \nabla \langle p_1 \rangle - \mu \langle \rho_1 \nabla^2 \vec{v}_1 \rangle \right) - \langle (\vec{v}_1 \nabla) \vec{v}_1 \rangle. \quad (7)$$

1.18. Поскольку $\delta_T = \delta / \sqrt{\text{Pr}}$, где δ_T – толщина температурного пограничного слоя, δ – толщина динамического пограничного слоя, Pr – число Прандтля, то в воздухе динамический пограничный слой будет располагаться внутри температурного пограничного слоя, а в случае воды, наоборот.

1.19. *Решение.* Примем, что осредненное движение отсутствует. Тогда из уравнения динамического пограничного слоя первого приближения, получающегося при разложении в ряд при слабом возмущении внешнего течения, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где нижние индексы «0», «1» – помер приближения, u – компонента скорости вдоль пластины, x, y – осевая и нормальная к пластине координаты, соответственно, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости. Решение ищем в виде

$$u_1 = u_A(x, y) \exp(i\omega t), \quad (2)$$

где $u_A(x, y)$ – амплитуда колебаний скорости. Подставляя выражение (2) в уравнение (1) имеем

$$\frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_A = \frac{1}{\rho_0 \nu} \frac{\partial p_A}{\partial x} \quad (3)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} u_A &= 0, & y &= 0, \\ u_A &= \text{const}, & y &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Общее решение неоднородного уравнения (3) есть сумма общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A0}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A0} = 0 \quad (5)$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A1}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A1} = \frac{1}{\rho_0 \nu} \frac{\partial p_A}{\partial x}. \quad (6)$$

В связи с тем, что давление поперек пограничного слоя остается неизменным, то есть $\partial p_A / \partial y = 0$, решение уравнения (6) запишется так

$$u_{A1} = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_A}{\partial x}. \quad (7)$$

Решение уравнения (5) определяется известным образом

$$r^2 = \frac{i\omega}{\nu}$$

и имеет два корня

$$r_{1,2} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (8)$$

Тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u_A = C_1 \exp[-(1+i)\eta] + C_2 \exp[(1+i)\eta] + \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_A}{\partial x}, \quad (9)$$

где $\eta = y\sqrt{\omega/2\nu}$. В силу ограниченности решения на бесконечности (при $\eta \rightarrow \infty$) имеем равенство $C_2 = 0$, так как в противном случае второй член в правой части (9) был бы неограничен. Условие на стенке дает

$$C_1 = -\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_A}{\partial x}.$$

Подставляя константы интегрирования в (9), запишем

$$u_1 = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_A}{\partial x} \left\{ 1 - \exp[-(1+i)\eta] \right\} \exp(i\omega t). \quad (10)$$

Реальная часть выражения (10) есть искомое решение задачи

$$u_1 = -\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_A}{\partial x} \left\{ \sin \omega t - \exp\left[-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right] \sin\left[\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right] \right\} \exp(i\omega t). \quad (11)$$

1.20. *Решение.* Примем, что стационарное движение отсутствует. Тогда из уравнения динамического пограничного слоя первого приближения, получающегося при разложении в ряд при слабом возмущении внешнего течения, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где нижние индексы «0», «1» порядок приближения, u – компонента скорости вдоль пластины, x, y – осевая и нормальная к пластине координаты, соответственно, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости. Уравнение (1) решается при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, \\ u_1 &= 0, \quad y = \pm h. \end{aligned} \quad (2)$$

Представим давление в комплексной записи

$$p_1 = p_A \sin kx \exp(i\omega t) \quad (3)$$

и решение ищем в виде

$$u_1 = u_A(x, y) \exp(i\omega t), \quad (4)$$

где $u_A(x, y)$ – амплитуда колебаний скорости. Тогда из (1) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_A = \frac{\omega p_A}{\rho_0 \nu c_0} \cos kx. \quad (5)$$

Общее решение неоднородного уравнения (5) является суммой частного решения u_{A1} неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A1}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A1} = \frac{\omega p_A}{\rho_0 \nu c_0} \cos kx \quad (6)$$

и общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A0}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A0} = 0. \quad (7)$$

Так как правая часть уравнение (6) не зависит от y , его частным решением является выражение

$$u_{A1} = \frac{ip_A}{\rho_0 c_0} \cos kx. \quad (8)$$

Решение однородного уравнения (7) запишется так

$$r^2 = \frac{i\omega}{\nu},$$

что дает значения

$$r_{1,2} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (9)$$

Тогда общее решение (5) имеет вид

$$u_A = C_1 \exp[-(1+i)\eta] + C_2 \exp[(1+i)\eta] + \frac{ip_A}{\rho_0 c_0} \cos kx, \quad (10)$$

где $\eta = y\sqrt{\omega/2\nu}$. Подставим решение (10) в граничное условие на оси канала, откуда получим равенство $C_1 = C_2 = C$. На стенке канала имеем соотношение

$$0 = C \left\{ \exp[-(1+i)\eta_w] + \exp[(1+i)\eta_w] \right\} + \frac{ip_A}{\rho_0 c_0} \cos kx$$

с $\eta_w = h\sqrt{\omega/2\nu}$, из которого выразим постоянную

$$C = \frac{ip_A}{2\rho_0 c_0} \frac{\cos kx}{\operatorname{ch} \eta_w}.$$

Подставляя константы интегрирования в выражение (10) запишем для амплитуды колебаний скорости следующее выражение

$$u_A = \frac{ip_A \cos kx}{\rho_0 c_0} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}[(1+i)\eta]}{\operatorname{ch}[(1+i)\eta_w]} \right\}. \quad (11)$$

Умножая его на $\exp(i\omega t)$, окончательно имеем

$$u_1 = \frac{ip_A \cos kx}{\rho_0 c_0} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}[(1+i)\eta]}{\operatorname{ch}[(1+i)\eta_w]} \right\} \exp(i\omega t). \quad (12)$$

Для написания скорости u_1 (12) в действительной форме необходимо знать действительное и мнимое значение $\operatorname{ch}[(1+i)\eta]/\operatorname{ch}[(1+i)\eta_w]$.

1.21.

$$u_1 = -\frac{p_A \cos kx}{\rho_0 c_0} \left\{ \sin \omega t - \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (h-y) \right] \sin \left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (h-y) \right] \right\}.$$

1.22. *Решение.* Уравнение температурного пограничного слоя в первом приближении имеет вид

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (1)$$

где ρ_0 – невозмущенная плотность, c_p – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении, T – температура, нижний индекс «1» обозначает порядок приближения, λ – коэффициент теплопроводности. Решение представим в виде

$$T_1 = T_A \exp(i\omega t),$$

где $T_A = T_A(x, y)$ – амплитуда колебаний температуры. После подстановки решения в уравнение (1) получим

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_A = -\frac{i\omega}{\lambda} p_A, \quad (2)$$

где $a = \lambda / \rho_0 c_p$ – коэффициент температуропроводности. Уравнение (2) решаем при граничных условиях

$$\begin{aligned} T_A &= 0, & y &= 0, \\ T_A &= \text{const}, & y &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Общее решение неоднородного уравнения (2) является суммой общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{A0}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_{A0} = 0 \quad (4)$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{A1}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_{A1} = -\frac{i\omega}{\lambda} p_A. \quad (5)$$

Общее решение однородного уравнения (4) определяется известным образом

$$T_{A0} = C_1 \exp[-(1+i)\eta] + C_2 \exp[(1+i)\eta].$$

Правая часть неоднородного уравнения (5) не зависит от y , поэтому его частное решение определяется так

$$T_{A1} = \frac{P_A}{\rho_0 c_p}.$$

В итоге общее решение уравнения (2) имеет вид

$$T_A = C_1 \exp[-(1+i)\eta] + C_2 \exp[(1+i)\eta] + \frac{P_A}{\rho_0 c_p}, \quad (6)$$

где $\eta = y\sqrt{\omega/2a}$. Решение на бесконечности (при $\eta \rightarrow \infty$) должно быть ограниченным и, следовательно, имеем условие $C_2 = 0$. Подстановка решения (6) в граничное условие на стенке дает равенство

$$0 = C_1 + \frac{P_A}{\rho_0 c_p},$$

из которого получаем значение постоянной

$$C_1 = -\frac{P_A}{\rho_0 c_p}.$$

После подстановки констант в (6) имеем искомое решение задачи в комплексном

$$T_1 = \frac{P_A}{\rho_0 c_p} \left\{ 1 - \exp[-(1+i)\eta] \right\} \exp(i\omega t) \quad (7)$$

или в действительном виде

$$T_1 = \frac{P_A}{\rho_0 c_p} \left\{ \cos \omega t - \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right] \cos\left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right] \right\}. \quad (8)$$

1.23. *Решение.* Уравнение температурного пограничного слоя в первом приближении имеет вид

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (1)$$

где нижние индексы обозначают номер приближения, x, y – координаты вдоль оси и нормально к стенкам канала, ρ – плотность, c_p –

коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении, T – температура, λ – коэффициент теплопроводности. Запишем давление в комплексной форме

$$p_1 = p_A \cos kx \exp(i\omega t)$$

и, соответственно, решение для температуры запишется так

$$T_1 = T_A \exp(i\omega t),$$

где $T_A = T_A(x, y)$ – амплитуда колебаний температуры. Подставляя выражения для давления и температуры в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_A = -\frac{i\omega}{\lambda} p_A \cos kx, \quad (2)$$

где $a = \lambda / \rho_0 c_p$ – коэффициент температуропроводности. Уравнение (2) решаем при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_A}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, \\ T_A &= 0, \quad y = \pm h. \end{aligned}$$

Общее решение неоднородного уравнения (2) является суммой общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{A0}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_{A0} = 0 \quad (3)$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{A1}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_{A1} = -\frac{i\omega}{\lambda} p_A \cos kx. \quad (4)$$

Правая часть уравнения (4) не зависит от y , тогда его частным решением является выражение

$$T_{A1} = \frac{p_A}{\rho_0 c_p} \cos kx. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$T_{A0} = C_1 \exp[-(1+i)\eta] + C_2 \exp[(1+i)\eta], \quad (6)$$

где $\eta = y\sqrt{\omega/2a}$. Следовательно, получим

$$T_A = C_1 \exp[-(1+i)\eta] + C_2 \exp[(1+i)\eta] + \frac{P_A}{\rho_0 c_p} \cos kx. \quad (7)$$

После подстановки функции (7) в граничные условия, вытекают равенства

$$\begin{aligned} 0 &= -C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 \exp[-(1+i)\eta_w] + C_2 \exp[(1+i)\eta_w] + \frac{P_A}{\rho_0 c_p} \cos kx \end{aligned} \quad (8)$$

с $\eta_w = h\sqrt{\omega/2a}$ и в итоге имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = C, \\ C &= -\frac{P_A}{2\rho_0 c_p} \frac{\cos kx}{\operatorname{ch} \eta_w}. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, подставляя значения постоянных (9) в выражение (7), запишем искомое решение задачи

$$T_1 = \frac{P_A}{\rho_0 c_p} \cos kx \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}[(1+i)\eta]}{\operatorname{ch}[(1+i)\eta_w]} \right\} \exp(i\omega t). \quad (10)$$

$$1.24. T_1 = \frac{P_A}{\rho_0 c_p} \cos kx \left\{ \cos \omega t - \exp[-(\eta_w - \eta)] \cos[\omega t - (\eta_w - \eta)] \right\}$$

1.25. *Решение.* В уравнении энергии первого порядка, получающегося при разложении в ряд при слабом возмущении внешнего течения, положим

$$u_0 = 0, v_0 = 0, \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0.$$

Тогда уравнение запишется так

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (1)$$

где c_p – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении, нижние индексы означают порядок приближения, ρ – плотность, T – температура, u – скорость, x, y – координаты вдоль и нормально к плоскости пластины, λ – коэффициент теплопроводности. Колебания скорости определяются из уравнения движения (см. задачу 19)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (2)$$

решение которого при граничных условиях

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & y &= 0, \\ u_1 &= \text{const}, & y &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3)$$

имеет вид

$$u_1 = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_A}{\partial x} [1 - \exp(-\eta)] \exp(i\omega t) \quad (4)$$

с $\eta = y\sqrt{i\omega/2\nu}$. Полагая в уравнении (1)

$$T_1 = T_A \exp(i\omega t),$$

где $T_A = T_A(x, y)$ – амплитуда колебаний температуры, получим

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_A = -\frac{i\omega}{\lambda} p_A + \frac{ic_p}{\lambda\omega} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} [1 - \exp(-\eta)]. \quad (5)$$

Пусть $\eta_T = y\sqrt{i\omega/2a}$, тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial \eta_T^2} - T_A = -\frac{p_A}{\rho_0 c_p} + \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} [1 - \exp(-\eta)]. \quad (6)$$

Введем обозначения

$$C = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} - \frac{p_A}{\rho_0 c_p}, \quad D = -\frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x},$$

тогда уравнение (6) запишется в простой форме

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial \eta_T^2} - T_A = C + D \exp(-\eta). \quad (7)$$

Уравнение (7) решаем при граничных условиях

$$\begin{aligned} T_A &= 0, & \eta_T &= 0, \\ T_A &= \text{const}, & \eta_T &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнения (7) ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{A0}}{\partial \eta_T^2} - T_{A0} = 0, \quad (9)$$

частных решений неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{A1}}{\partial \eta_T^2} - T_{A1} = C \quad (10)$$

и неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_{A2}}{\partial \eta_T^2} - T_{A2} = D \exp(-\eta). \quad (11)$$

Решение однородного и неоднородного уравнений (9) и (10) представляются в известном виде

$$T_{A0} = C_1 \exp(-\eta_T) + C_2 \exp(\eta_T), \quad (12)$$

$$T_{A1} = -C. \quad (13)$$

Далее предположим, что частное решение неоднородного уравнения (11) представляет функцию $D \exp(-\eta)$. Подстановка её в (11) с учетом $\eta_T = \eta \sqrt{\sigma}$, где $\sigma = \nu/a$ – число Прандтля, дает неравенство

$$\frac{1-\sigma}{\sigma} D \exp(-\eta) \neq D \exp(-\eta),$$

что отвергает данное решение. Поэтому в качестве решения используем функцию $\sigma D \exp(-\eta)/(1-\sigma)$, которая удовлетворяет уравнению (11) и приводит к равенству

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{D \exp(-\eta)}{\sigma} - \frac{\sigma}{1-\sigma} D \exp(-\eta) = D \exp(-\eta).$$

Таким образом, частное решение (10) определяется выражением

$$T_{A2} = \frac{\sigma}{1-\sigma} D \exp(-\eta). \quad (14)$$

С учетом (12)-(14), общее решение (7) записывается в виде

$$T_A = C_1 \exp(-\eta_T) + C_2 \exp(\eta_T) - C + \frac{\sigma}{1-\sigma} D \exp(-\eta). \quad (15)$$

Условие ограниченности решения на бесконечности (при $\eta_T \rightarrow \infty$) требует выполнения равенства $C_2 = 0$. Используя граничное условие на стенке, получим значение константы

$$C_1 = C - \frac{\sigma}{1-\sigma} D.$$

В итоге, подставляя константы интегрирования в (15), имеем решение

$$T_A = C \exp(-\eta_T) - \frac{\sigma}{1-\sigma} D \exp(-\eta_T) - C + \frac{\sigma}{1-\sigma} D \exp(-\eta),$$

которое с учетом выражений для C и D , переписывается так

$$\begin{aligned} T_A = & \left(\frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} - \frac{p_A}{\rho_0 c_p} \right) \exp(-\eta_T) + \\ & + \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} \exp(-\eta_T) - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \\ & + \frac{p_A}{\rho_0 c_p} - \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} \exp(-\eta). \end{aligned} \quad (16)$$

Группируя члены в (16) и умножая результат на $\exp(i\omega t)$, получим искомого решение задачи

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{p_A}{\rho_0 c_p} [1 - \exp(-\eta_T)] - \\ & - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p_A}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[1 - \frac{1}{1-\sigma} \exp(-\eta_T) + \frac{\sigma}{1-\sigma} \exp(-\eta) \right] \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (17)$$

1.26. *Решение.* В уравнении энергии первого порядка, получающегося при разложении в ряд при слабом возмущении внешнего течения, положим

$$u_0 = 0, \nu_0 = 0, \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0.$$

Тогда уравнение запишется так

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (1)$$

где c_p – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении, нижние индексы означают порядок приближения, ρ – плотность, T – температура, u – скорость, x, y – координаты вдоль и нормально к плоскости пластины, λ – коэффициент теплопроводности. Колебания скорости определяются из уравнения движения (см. задачу 1.20)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (2)$$

решение которого при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 0, \quad y = 0, \\ u_1 &= 0, \quad y = \pm h. \end{aligned} \quad (3)$$

имеет вид

$$u_1 = \frac{ip_A \cos kx}{\rho_0 c_0} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta_w} \right) \exp(i\omega t) \quad (4)$$

с $\eta = y\sqrt{i\omega/2\nu}$, $\eta_w = h\sqrt{i\omega/2\nu}$. Полагая в уравнении (1)

$$T_1 = T_A \exp(i\omega t),$$

где $T_A = T_A(x, y)$ – амплитуда колебаний температуры, получим

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{a} T_A = -\frac{i\omega}{\lambda} p_A \sin kx + \frac{ic_p}{\lambda c_0} p_A \cos kx \frac{\partial T_0}{\partial x} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta_w} \right). \quad (5)$$

Пусть $\eta_T = y\sqrt{i\omega/2a} = \eta\sqrt{\sigma}$, где $\sigma = \nu/a$ – число Прандтля, тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial \eta_T^2} - T_A = A + B \operatorname{ch} \eta, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\rho_0 c_0 \omega} p_A \cos kx \frac{\partial T_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0 c_p} p_A \sin kx, \\ B &= -\frac{1}{\rho_0 c_0 \omega} \frac{p_A \cos kx}{\operatorname{ch} \eta_w} \frac{\partial T_0}{\partial x}. \end{aligned}$$

Уравнение (6) решаем при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_A}{\partial \eta_T} &= 0, \quad \eta_T = h\sqrt{\frac{i\omega}{a}}, \\ T_A &= 0, \quad \eta_T = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение (6) есть сумма общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial \eta_T^2} - T_A = 0, \quad (8)$$

а также частных решений неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial \eta_T^2} - T_A = A \quad (9)$$

и неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 T_A}{\partial \eta_T^2} - T_A = B \operatorname{ch} \eta. \quad (10)$$

Решения однородного и неоднородного уравнений (8) и (9) представляются в известном виде

$$T_{A0} = C_1 \exp(-\eta_T) + C_2 \exp(\eta_T), \quad (11)$$

$$T_{A1} = -A. \quad (12)$$

Далее предположим, что решение неоднородного уравнения (10) представляет функцию $B \operatorname{ch} \eta$. Подстановка её в (10) дает неравенство

$$\frac{B \operatorname{ch} \eta}{\sigma} - B \operatorname{ch} \eta = \frac{1-\sigma}{\sigma} B \operatorname{ch} \eta \neq B \operatorname{ch} \eta,$$

что отвергает данное решение. Поэтому в качестве решения используем функцию $\sigma B \operatorname{ch} \eta / (1-\sigma)$, которая удовлетворяет уравнению (10) и приводит к равенству

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{B \operatorname{ch} \eta}{\sigma} - \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta = B \operatorname{ch} \eta.$$

Таким образом, частное решение (10) есть выражение

$$T_{A2} = \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta. \quad (13)$$

С учетом (11)-(13), общим решением (6) является функция

$$T_A = C_1 \exp(-\eta_T) + C_2 \exp(\eta_T) - A + \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta. \quad (14)$$

Определим константы. Из граничного условия на оси канала следует равенство

$$C_1 = C_2 = \frac{C}{2},$$

с учетом которого имеем

$$T_A = C \operatorname{ch} \eta_T - A + \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta. \quad (15)$$

Из условия на стенке вытекает выражение

$$0 = C \operatorname{ch} \eta_{Tw} - A + \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta_w$$

с $\eta_{Tw} = h\sqrt{i\omega/2a}$, $\eta_w = h\sqrt{i\omega/2v}$, из которого имеем значение постоянной

$$C = \frac{1}{\operatorname{ch} \eta_{Tw}} \left(A - \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta_w \right).$$

Подставляя последнее выражение в решение (15) находим

$$T_A = \frac{\operatorname{ch} \eta_T}{\operatorname{ch} \eta_{Tw}} \left(A - \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta_w \right) - A + \frac{\sigma}{1-\sigma} B \operatorname{ch} \eta. \quad (16)$$

Группируя члены в (16) получим

$$T_A = -A \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \eta_T}{\operatorname{ch} \eta_{Tw}} \right) + B \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(\frac{\operatorname{ch} \eta_T}{\operatorname{ch} \eta_{Tw}} \operatorname{ch} \eta_w - \operatorname{ch} \eta \right). \quad (17)$$

Теперь, подставляя в выражение (17) вместо A и B их значения и умножая на $\exp(i\omega t)$, окончательно запишем искомое решение задачи

$$T_1 = \left[\frac{p_A \sin kx}{\rho_0 c_p} - \frac{p_A \cos kx}{\rho_0 c_0 \omega} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma-1} \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta_w} \right) - \left(\frac{p_A \sin kx}{\rho_0 c_p} + \frac{1}{\sigma-1} \frac{p_A \cos kx}{\rho_0 c_0 \omega} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \frac{\operatorname{ch} \eta_T}{\operatorname{ch} \eta_{Tw}} \right] \exp(i\omega t). \quad (18)$$

$$1.27. \quad x_0 = \frac{c_0}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega c_0 L}{c_p (T_1 - T_0)} = 0,126 \text{ м}, \quad y_0 \geq 5 \sqrt{\frac{2v}{\omega \sigma}}.$$

Указание. При $\eta_T \geq 5$ экспоненты обращаются в нуль.

2.1. *Решение.* В соответствии с методом Линя колебания скорости удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Подставим в (1) скорость внешнего течения в следующем виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \omega U_1(x) \cos \omega t$$

или в комплексной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \omega U_1(x) \exp(i\omega t). \quad (2)$$

Таким образом, находим решение в виде функции

$$u_1 = u_A \exp(i\omega t),$$

где $u_A = u_A(x, y)$ – амплитуда колебаний скорости. В итоге уравнение (1) запишется так

$$\frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_A = -\frac{\omega}{\nu} U_1(x) \quad (3)$$

и его решение удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u_A &= 0, & y &= 0, \\ u_A &= U_1(x), & y &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение уравнения (3) является суммой общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A0}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A0} = 0 \quad (5)$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A1}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A1} = -\frac{\omega}{\nu} U_1(x). \quad (6)$$

Общее решение уравнения (5) есть сумма

$$u_{A0} = C_1 \exp\left[-(1+i)\frac{y}{\delta}\right] + C_2 \exp\left[(1+i)\frac{y}{\delta}\right], \quad (7)$$

а частное решение для (6) имеет вид

$$u_{A1} = -iU_1(x), \quad (8)$$

где δ – толщина акустического пограничного слоя. После сложения выражений (7) и (8) для амплитуды колебаний скорости u_A запишем

$$u_A = C_1 \exp\left[-(1+i)\frac{y}{\delta}\right] + C_2 \exp\left[(1+i)\frac{y}{\delta}\right] - iU_1(x). \quad (9)$$

Решение на бесконечности (при $y \rightarrow \infty$) должно быть конечным, поэтому следует положить $C_2 = 0$. Подстановка (9) в граничное условие на стенке дает равенство

$$C_1 = iU_1(x).$$

После подстановки в (9) значений констант интегрирования и умножения на $\exp(i\omega t)$, окончательное решение в комплексной форме записывается как

$$u_1 = -iU_1(x) \left\{ 1 - \exp\left[-(1+i)\frac{y}{\delta}\right] \right\} \exp(i\omega t) \quad (10)$$

или в действительной форме в виде

$$u_1 = U_1(x) \left[\sin \omega t - \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right) \right]. \quad (11)$$

Поперечную компоненту скорости находим из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Используя выражение (11), перепишем уравнение (12) следующим образом

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} = i \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \left\{ 1 - \exp\left[-(1+i)\frac{y}{\delta}\right] \right\} \exp(i\omega t).$$

Выполнив интегрирование (10), получим

$$v_1 = i \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \left\{ y + \frac{\delta}{1+i} \exp\left[-(1+i)\frac{y}{\delta}\right] \right\} \exp(i\omega t) + C \quad (13)$$

На стенке цилиндра $v_1 = 0$ (условие прилипания), тогда

$$C = \frac{i\delta}{1+i} \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \exp(i\omega t).$$

Подставляя константу интегрирования в выражение (13), запишем

$$v_1 = i \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \left\{ y + \frac{\delta}{1+i} \left[\exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] - 1 \right] \right\} \exp(i\omega t) \quad (14)$$

или, окончательно,

$$v_1 = i\delta \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \left\{ \frac{y}{\delta} + \frac{(1-i)}{2} \left[\exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] - 1 \right] \right\} \exp(i\omega t). \quad (15)$$

2.2. Решение. Для того чтобы произвести осреднение по времени, например, функции u_1 ($\partial u_1 / \partial x$), необходимо выделить действительные части сомножителей, перемножить полученные выражения и только затем взять интеграл по времени в пределах от 0 до T , где T – период колебаний, а затем разделить на T .

Рассмотрим метод осреднения, позволяющий избежать этого трудоемкого процесса. Пусть заданы две комплексные величины

$$A = (a + ib) \exp(i\omega t), \quad B = (c + id) \exp(i\omega t). \quad (1)$$

Требуется определить $\langle AB \rangle$. Действительные части A и B равны

$$\operatorname{Re} A = a \cos \omega t - b \sin \omega t, \quad \operatorname{Re} B = c \cos \omega t - d \sin \omega t, \quad (2)$$

тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B &= ac \cos^2 \omega t + bd \sin^2 \omega t - \\ &- bc \sin \omega t \cos \omega t - ad \sin \omega t \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу равенства

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0, \quad (4)$$

имеем условие

$$\langle \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B \rangle = \frac{1}{2}(ac + bd). \quad (5)$$

Тот же результат можно получить, если вычислить

$$\begin{aligned} \langle AB \rangle &= \frac{1}{4} [(a + ib)(c - id) + (a - ib)(c + id)] = \\ &= \frac{1}{4} (ac + ibc - iad + bd + ac - ibc + iad + bd) \end{aligned}$$

или

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{2}(ac + bd). \quad (6)$$

Таким образом, если заданы две функции $\Phi = \varphi \exp(i\omega t)$ и $\Psi = \psi \exp(i\omega t)$, то для вычисления среднего по времени от их произведения достаточно найти величину

$$\langle \Phi \Psi \rangle = \frac{1}{4}(\varphi \bar{\psi} + \bar{\varphi} \psi), \quad (7)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Вычислим функцию $\langle U_1(dU_1/dx) \rangle$, для чего воспользуемся очевидным соотношением

$$\sin \omega t = \operatorname{Re}[-i \exp(i\omega t)], \quad (8)$$

тогда имеем равенство

$$\left\langle U_1 \frac{dU_1}{dx} \right\rangle = \frac{1}{4} \left[-i U_1(x) \left(i \frac{dU_1(x)}{dx} \right) + i U_1(x) \left(-i \frac{dU_1(x)}{dx} \right) \right],$$

которое преобразуется к виду

$$\left\langle U_1 \frac{dU_1}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2} U_1(x) \frac{dU_1(x)}{dx}. \quad (9)$$

Аналогичным образом вычисляем и функцию $\langle u_1(\partial u_1/\partial x) \rangle$

$$\left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\{ u_{1A} \frac{\partial \bar{u}_{1A}}{\partial x} + \bar{u}_{1A} \frac{\partial u_{1A}}{\partial x} \right\}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} u_{1A} &= -i U_1(x) \left\{ 1 - \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] \right\}, \\ \frac{\partial u_{1A}}{\partial x} &= -i \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ 1 - \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив выражения (11) в уравнение (10), получим

$$\left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\{ -iU_1(x) \left\{ 1 - \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] \right\} i \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ 1 - \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] \right\} + \right. \\ \left. + iU_1(x) \left\{ 1 - \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] \right\} (-i) \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ 1 - \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] \right\} \right\}$$

или

$$\left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{2} U_1(x) \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ 1 - \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] + \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) \right\}.$$

С учетом формулы

$$\exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] + \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] = 2 \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \cos \frac{y}{\delta}, \quad (12)$$

окончательно запишем среднее значение

$$\left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{2} U_1(x) \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ 1 - 2 \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \cos \frac{y}{\delta} + \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) \right\}. \quad (13)$$

Точно также вычисляем среднее значение для следующей функции

$$\left\langle v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\{ v_{1A} \frac{\partial \bar{u}_{1A}}{\partial y} + \bar{v}_{1A} \frac{\partial u_{1A}}{\partial y} \right\}. \quad (14)$$

Здесь

$$v_{1A} = i \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ y + \frac{(1-i)\delta}{2} \left\{ \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] - 1 \right\} \right\}, \quad (15) \\ \frac{\partial u_{1A}}{\partial y} = \frac{1-i}{\delta} U_1(x) \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right].$$

Подставляя выражения (15) в уравнение (14) получим равенство

$$\begin{aligned} \left\langle v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle &= \frac{1}{4} \left\{ i \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ y + \frac{(1-i)\delta}{2} \left\{ \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] - 1 \right\} \right\} \times \right. \\ &\quad \times \frac{1+i}{\delta} U_1(x) \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] + (-i) \frac{dU_1(x)}{dx} \times \\ &\quad \left. \times \left\{ y + \frac{(1+i)\delta}{2} \left\{ \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] - 1 \right\} \right\} \frac{1-i}{\delta} U_1(x) \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] \right\}, \end{aligned}$$

которое преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left\langle v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle &= \frac{1}{4} U_1(x) \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ -(1-i) \frac{y}{\delta} \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] + \right. \\ &\quad + i \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) - i \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] - (1+i) \frac{y}{\delta} \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] - \\ &\quad \left. - i \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) + i \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, с учетом формул (12) и

$$i \exp \left[-(1-i) \frac{y}{\delta} \right] - i \exp \left[-(1+i) \frac{y}{\delta} \right] = -2 \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \sin \frac{y}{\delta}, \quad (16)$$

запишем

$$\begin{aligned} \left\langle v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle &= \frac{1}{2} U_1(x) \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ -\frac{y}{\delta} \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \cos \frac{y}{\delta} - \right. \\ &\quad \left. -\frac{y}{\delta} \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \sin \frac{y}{\delta} + \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \sin \frac{y}{\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Окончательно, используя равенства (9), (13) и (17), для $F(x, y)$ получим следующее выражение

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{2} U_1(x) \frac{dU_1(x)}{dx} \left\{ \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \left[\left(2 + \frac{y}{\delta} \right) \cos \frac{y}{\delta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) \sin \frac{y}{\delta} \right] - \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

2.3. Решение. Предположим, что продольная компонента скорости определяется выражением

$$u_0 = \bar{U}f', \quad (1)$$

где $f = f(\eta)$, а штрих означает дифференцирование по η . Выразим функции u_0 и v_0 посредством функции ψ_0

$$u_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad v_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что ψ_0 удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Подставляя (1) в первое выражение из (2), имеем соотношение

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = \bar{U}f', \quad (4)$$

из которого находим равенства

$$\psi_0 = \sqrt{v\bar{U}x}f, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\bar{U}}{vx}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{m-1}{2} \frac{\eta}{x}. \quad (5)$$

Вычислим величины, входящие в исходное уравнение. Опуская промежуточные выкладки, в результате имеем

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v\bar{U}}{x}} [(m+1)f + (m-1)\eta f'], \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{\bar{U}}{x} \left(mf' + \frac{m-1}{2} \eta f'' \right), \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} = \bar{U} \sqrt{\frac{\bar{U}}{vx}} f'', \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} &= \frac{\bar{U}^2}{vx} f''', \quad \bar{U} \frac{d\bar{U}}{dx} = \frac{m\bar{U}^2}{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в исходное уравнение

$$\begin{aligned} \bar{U}f' \frac{\bar{U}}{x} \left(mf' + \frac{m-1}{2} f'' \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v\bar{U}}{x}} [(m+1)f + (m-1)f'] \bar{U} \sqrt{\frac{\bar{U}}{vx}} f'' = \\ = \frac{m\bar{U}^2}{x} + \frac{\bar{U}^2}{x} f''' \end{aligned}$$

и получим

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1-f'^2) = 0. \quad (7)$$

При $m = 0$ уравнение (7) описывает динамический пограничный слой на пластине.

2.4. *Решение.* Некоторые члены исходного уравнения определяются сразу. Действительно, видно, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon i \omega U_\infty \Phi_\eta \exp(i\omega t), \quad \frac{\partial U_1}{\partial t} = \varepsilon i \omega U_\infty \exp(i\omega t). \quad (1)$$

Далее определим функцию тока колебательного движения. Это можно сделать, если проинтегрировать выражение для колебаний скорости u_1 (указание в условии задачи) по y . В результате имеем

$$\psi_1 = \sqrt{\nu x U_\infty} \Phi_\eta. \quad (2)$$

Вычисления других функций, характеризующих колебания, дают

$$u_1 = -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \left\{ \Phi - \eta \Phi_\eta + 2\xi \Phi_\xi \right\} \exp(i\omega t),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{U_\infty}{2} (2\xi \Phi_{\eta\xi} - \eta \Phi_{\eta\eta}) \varepsilon \exp(i\omega t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \varepsilon U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \Phi_{\eta\eta} \exp(i\omega t), \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \varepsilon \frac{U_\infty^2}{\nu x} \Phi_{\eta\eta\eta} \exp(i\omega t).$$

Подставляя равенства (1), (3), а также невозмущенные члены (указание в условии задачи) в исходное уравнение, получим уравнение

$$\xi \Phi_\eta + f' \frac{1}{2} (2\xi \Phi_{\eta\xi} - \eta \Phi_{\eta\eta}) - \Phi_\eta \frac{1}{2} \eta f'' - \frac{1}{2} [f - \eta f'] \Phi_{\eta\eta} -$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \Phi - \eta \Phi_\eta + 2\xi \Phi_\xi \right\} f'' = \xi + \Phi_{\eta\eta\eta},$$

из которого запишем искомый результат

$$\Phi_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2} f \Phi_{\eta\eta} - \xi \Phi_\eta + \frac{1}{2} f'' \Phi - \xi f' \Phi_{\eta\xi} + \xi f'' \Phi_\xi + \xi = 0. \quad (4)$$

2.5. *Решение.* В соответствии с методом Линя колебания скорости удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Подставим в (1) скорость внешнего течения в следующем виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\omega U_1(x) \sin \omega t \quad (2)$$

или в комплексной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} = i\omega U_1(x) \exp(i\omega t). \quad (3)$$

Таким образом, находим решение в виде функции

$$u_1 = u_A \exp(i\omega t),$$

где $u_A = u_A(x, y)$ – амплитуда колебаний скорости. В итоге уравнение (1) запишется так

$$\frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_A = -\frac{i\omega}{\nu} U_1(x), \quad (4)$$

и его решение удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u_A &= 0, & y &= 0, \\ u_A &= U_1(x), & y &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнения (4) является суммой общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A0}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A0} = 0 \quad (6)$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{A1}}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} u_{A1} = -\frac{i\omega}{\nu} U_1(x). \quad (7)$$

Общим решением уравнения (6) является функция

$$u_{A0} = C_1 \exp\left[-\frac{(1+i)y}{\delta}\right] + C_2 \exp\left[\frac{(1+i)y}{\delta}\right], \quad (8)$$

а частное решение для (7) имеет вид

$$u_{A1} = U_1(x), \quad (9)$$

где δ – толщина акустического пограничного слоя. После сложения выражений (7) и (8) для амплитуды колебаний скорости u_A запишем

$$u_A = C_1 \exp\left[-\frac{(1+i)y}{\delta}\right] + C_2 \exp\left[\frac{(1+i)y}{\delta}\right] + U_1(x). \quad (10)$$

Решение на бесконечности (при $y \rightarrow \infty$) должно быть конечным, поэтому следует положить $C_2 = 0$. Подстановка (10) в граничное условие на стенке дает равенство

$$C_1 = -U_1(x).$$

После подстановки в (10) значений констант интегрирования и умножения на $\exp(i\omega t)$, окончательное решение в комплексной форме записывается так

$$u_1 = U_1(x) \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{(1+i)y}{\delta} \right] \right\} \exp(i\omega t) \quad (11)$$

или в действительной форме в виде

$$u_1 = U_1(x) \left[\cos \omega t - \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \cos \left(\omega t - \frac{y}{\delta} \right) \right]. \quad (12)$$

3.1. *Решение.* Действительно, если переписать выражение (*****) (из условия задачи) в виде

$$\psi_1 = U_\infty \left\{ (r-a) + \frac{1-i}{2} \left\{ \exp \left[-(1+i) \frac{r-a}{\delta} \right] - 1 \right\} \right\} 2 \sin \theta \exp(i\omega t) \quad (1)$$

и вычислить величину $u_1 = \partial \psi_1 / \partial r$, получим следующее соотношение

$$u_1 = U_\infty \left\{ 1 - \exp \left[-(1+i) \frac{r-a}{\delta} \right] \right\} 2 \sin \theta \exp(i\omega t). \quad (2)$$

Делая замену $y = r - a$ и полагая, что $U_1(x) = 2U_\infty \sin \theta$, из (2) имеем выражение

$$u_1 = U_1(x) \left[\cos \omega t - \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \cos \left(\omega t - \frac{y}{\delta} \right) \right]. \quad (3)$$

3.2. *Решение.* Пусть в уравнении (*****) $r - a = y$, $\theta \equiv \theta$, тогда

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{1}{y+a} \frac{\partial (\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial (y, \theta)} = \nu \nabla^4 \psi, \quad (1)$$

где

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{y+a} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{(y+a)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (2)$$

Введем безразмерные величины $\bar{\psi} = \psi/U_\infty a$, $\bar{y} = y/a$, $\theta \equiv \theta$, $\bar{t} = t/\omega$ и перепишем Лапласиан в безразмерном виде

$$\nabla^2 \psi = \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{1+\bar{y}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{(1+\bar{y})^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \theta^2} \right), \quad (3)$$

где ω – циклическая частота. Оставшиеся два слагаемых в (1) запишутся как

$$\nu \nabla^4 \psi = \frac{\nu U_\infty}{a^3} \nabla^4 \bar{\psi}, \quad \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \frac{\omega U_\infty}{a} \frac{\partial \nabla^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{t}}. \quad (4)$$

С учетом выражения

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(y, \theta)} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y},$$

имеем равенство

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(y, \theta)} = \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\psi})}{\partial(\bar{y}, \theta)}. \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в уравнение (*****), в итоге получим

$$\frac{\partial \nabla^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{t}} + \frac{\varepsilon}{1+\bar{y}} \frac{\partial(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\psi})}{\partial(\bar{y}, \bar{\theta})} = \frac{1}{H^2} \nabla^4 \bar{\psi}, \quad (6)$$

где $\varepsilon = U_\infty/\omega a$, $H^2 = \omega a^2/\nu$ – безразмерные параметры.

4.1. *Решение.* Уравнение стационарного пограничного слоя для безразмерной температуры имеет вид

$$u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (1)$$

При дифференцировании переменной η по x и по y , получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\bar{U}}{\nu x}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{m-1}{2x} \eta. \quad (2)$$

Произведем замену переменных в величинах, входящих в (1), с учетом (2). В итоге имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{m-1}{2x} \eta \theta',$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\bar{U}}{\nu x}} \theta', \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \theta'' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \frac{\bar{U}}{\nu x} \theta'',$$
(3)

где $\theta = \theta(\eta)$, а штрихи означают дифференцирование по η . Подставим равенства (3), а также невозмущенные члены (указание в условии задачи) в уравнение (1)

$$\frac{a\bar{U}}{\nu x} = \bar{U} f' \frac{m-1}{2x} \eta \theta' - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu \bar{U}}{x}} [(m+1)f + (m-1)\eta f'] \sqrt{\frac{\bar{U}}{\nu x}} \theta',$$

в результате запишем выражение

$$\frac{1}{\sigma} \theta'' + \frac{m+1}{2} f \theta' = 0,$$
(4)

где $\sigma = \nu/a$ – число Прандтля. В частном случае $m=0$ уравнение (4) описывает температурный пограничный слой на плоской пластине

$$\theta'' + \frac{\sigma}{2} f \theta' = 0.$$
(5)

4.2. *Решение.* Примем, что пульсации температуры происходят по закону

$$T_1 = \varepsilon \theta (T_w - T_\infty) \exp(i\omega t).$$
(1)

Тогда можно найти и остальные величины, входящие в исходное уравнение, они запишутся следующим образом

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \varepsilon \frac{U_\infty \xi}{x} \theta (T_w - T_\infty) \exp(i\omega t),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \varepsilon (T_w - T_\infty) \frac{1}{2x} (2\xi \theta_\xi - \eta \theta_\eta) \exp(i\omega t),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \varepsilon (T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{U_\infty \nu}{x}} \theta_\eta \exp(i\omega t),$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = \varepsilon (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty \nu}{x} \theta_{\eta\eta} \exp(i\omega t),$$
(2)

где $\theta = T_1 / (T_w - T_\infty)$, а нижний индекс у функции θ показывает переменную, по которой производится дифференцирование. Подставляя в

исходное уравнение величины нулевого приближения, заданные в условиях задачи, и величины первого приближения (2), получим

$$\frac{1}{\sigma} \theta_{\eta\eta} + \frac{1}{2} \Phi_{\eta} \eta \mathcal{G}' - \xi \theta - \frac{f'}{2} (2\xi \theta_{\xi} - \eta \theta_{\eta}) + \\ + \frac{1}{2} (\Phi - \eta \Phi_{\eta} + 2\xi \Phi_{\xi}) \mathcal{G}' + \frac{1}{2} (f - \eta f') \theta_{\eta} = 0$$

или

$$\frac{1}{\sigma} \theta_{\eta\eta} + \frac{1}{2} f \theta_{\eta} - f' \xi \theta_{\xi} - \xi \theta = \frac{1}{2} \mathcal{G}' \Phi - \xi \mathcal{G}' \Phi_{\xi}. \quad (3)$$

$$5.1. \frac{u_0}{U_0} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right].$$

$$5.2. \frac{u_1}{U_0} = \frac{3\kappa_c i}{\kappa_0 H^2} \left\{ 1 - \frac{\text{ch}[(1+i)z]}{\text{ch}[(1+i)H]} \right\}, \text{ где } z = y\sqrt{\omega/\nu}, H = h\sqrt{\omega/\nu}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Галиуллин, Р.Г.** Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле / Р.Г. Галиуллин, В.Б. Репин, Н.Х. Халитов. –Казань: Изд-во Казанского университета, 1978. – 128 с.
2. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 711с.
3. **Накоряков, В.Е.** Тепло- и массообмен в звуковом поле / В.Е. Накоряков, А.П. Бурдуков, А.М. Болдарев, П.Н. Терлеев. – Новосибирск: Изд-во Инс-та теплофизики Сиб. отд. АН СССР. 1970. – 253 с.
4. **Деменок, С.Л.** Теплообмен и гидравлическое сопротивление в трубах и каналах / С.Л.Деменок. – Санкт-Петербург: Н-Пром Бюро. 2012. – 304 с.
5. **Bergman, T.L.** Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 7th Edition / T.L. Bergman, A.S. Lavine, F.P. Incropera, D.P. DeWitt. – Wiley. 2011. – 1072 p.
6. **Sung, H.J.** Experimental study on mass transfer from a circular cylinder in pulsating flow / H.J. Sung, K. S. Hwang, J.M. Hyun // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1994. – V. 37. – No. 15. – P. 2203 – 2210.