15. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Рассматриваем функциональный ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (u_n : D \to \mathbb{R}). \tag{1}$$

Необходимое условие равномерной сходимости. *Если ряд (1) сходится равномерно на множестве D, то последовательность его общих членов, $u_n(x)$, равномерно на D стремится к нулю. То есть $\sup\limits_{x\in D}|u_n(x)| = d_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Признак Вейерштрасса. *Пусть $|u_n(x)| \le c_n$ при любом $x \in D$ и числовой ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда функциональный ряд (1) сходится равномерно на D (и, конечно, абсолютно).*

Замечание 1. Учитывая простейший признак сравнения рядов с неотрицательными членами, легко понять, что с точки зрения применимости признака Вейерштрасса в качестве c_n оптимально брать $\sup\limits_{x\in D}|u_n(x)|$.

№2774 в). Найдём точную верхнюю грань функции $u_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ на $[0, +\infty)$. (Знак модуля отбросили, так как $\dfrac{x}{1+n^4x^2} \ge 0$ при $0 \le x < +\infty$.) Для этого вычисляем производную $u_n'(x) = \frac{1+n^4x^2-2n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}$ и делаем вывод, что в точке $x = \dfrac{1}{n^2}$ функция $u_n(x)$ принимает максимальное на $[0, +\infty)$ значение, равное $\dfrac{1}{2n^2}$. Таким образом, $|u_n(x)| \le \dfrac{1}{2n^2}$ при $0 \le x < +\infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ сходится. Следовательно, исследуемый функциональный ряд сходится равномерно на $[0, +\infty)$ согласно признаку Вейерштрасса.

Признак Дирихле. *Функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x) \quad (u_n, v_n : D \to \mathbb{R}).$$

сходится равномерно на D, если

а) Суммы $\sum\limits_{n=1}^{k} u_n(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ равномерно ограничены в совокупности, то есть найдётся такая константа $M \ge 0$, что $|\sum\limits_{n=1}^{k} u_n(x)| \le M$ для всех $x \in D$ и всех $k \in \mathbb{N}$.

б) $v_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, *и для любого* $x \in D$ *последовательность* $v_n(x)$ *монотонна.*

Напомним ещё теорему о почленном дифференцировании функциональных рядов.

Теорема. *Пусть в каждой точке интервала* $(a, b) = D$ *ряд (1) сходится,* $S(x)$ *— его сумма, все функции* $u_n(x)$ *дифференцируемы на* (a, b) *и ряд из производных,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$*, сходится равномерно на* (a, b)*. Тогда функция* $S(x)$ *дифференцируема на* (a, b) *и*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad \big(x \in (a, b)\big).$$