КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра физики твердого тела

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Казань – 2018

УДК 539.164
ББК 22.38

Печатается по решению

Редакционно-издательского совета

ФГАУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Учебно-методической комиссии Института физики

Протокол № 9 от 21 июня 2018 г.

Заседания кафедры физики твердого тела

Протокол № 3 от 7 февраля 2018 г.

Авторы:
Дулов Е.Н., Абдуллин А.Ф., Воронина Е.В., Иванова А.Г.

Рецензент:
Назипов Р.А.**, к.т.н., с.н.с. Казанского национального научно-исследовательского технологического института.**

Дулов Е.Н., *Распределение Пуассона*. Учебное пособие к общефизическому практикуму, раздел ядерной физики / Дулов Е.Н., Абдуллин А.Ф., Воронина Е.В., Иванова А.Г. – Казань: Издательство Казанского федерального университета, 2018. – 15 с.: 1 илл.

Аннотация:

Методическое пособие общего физического практикума предназначено для студентов Института физики, Института геологии и нефтяных технологий, курс «Физика частиц и атомного ядра», «Ядерная физика» и «Физика».

© Дулов Е.Н.,
Абдуллин А.Ф.,
Воронина Е.В.,
Иванова А.Г.
© Казанский федеральный университет, 2018

Содержание

Введение	4
Экспериментальная установка	8
Проведение эксперимента	9
Самотестирование	13
Литература	14
Приложение А	15

Введение

Метод подсчёта числа частиц, зарегистрированных детектором, широко используется в экспериментальной ядерной физике. В зависимости от задач этот метод может дать различную информацию об исследуемом излучении и об источнике этого излучения. Это может быть спектральный состав, характер взаимодействия частиц с веществом, закономерности ядерных реакций и т. д. Энергии ядерных преобразований достаточно велики (> 10 кэВ), что даёт возможность регистрации отдельных частиц через продукты их взаимодействия с веществом. В то же время часто приходится работать с источниками с низкой активностью. В этом случае статистический характер радиоактивного распада становится фактором, определяющим точность эксперимента. Стохастический характер ядерных преобразований приводит к невозможности определения времени, в которое происходит процесс распада для одного из ядер источника. Мы можем говорить только о вероятности распада за определенный промежуток времени dt. При малых значениях dt вероятность распада одного ядра будет линейно зависеть от dt:

$$dP_d = \lambda dt, \tag{1}$$

где dP_d – вероятность распада, λ – постоянная распада.

В случае большого количества радиоактивных ядер N можно говорить о среднем числе dN ядер, распадающихся за время dt:

$$dN = \lambda N dt. \tag{2}$$

Интегрирование этого уравнения приводит к известному закону радиоактивного распада. В ансамбле N радиоактивных ядер вероятность события распада в течение короткого времени dt:

$$dP = \lambda N dt = p dt, \tag{3}$$

где $p = \lambda N$ - плотность вероятности по времени возникновения события распада. Найдем распределение вероятностей, которому подчиняется число частиц, зарегистрированных детектором (*число отсчетов*) за время t. Число событий регистрации частиц прямо пропорционально числу ядерных

преобразований в радиоактивном источнике; следовательно, по аналогии с (3), мы можем ввести плотность вероятности по времени p появления события регистрации. Мы рассматриваем интенсивность источника, не изменяющуюся во время измерения. Введем разбиение на малые интервалы dt на интервале времени t. Число сегментов разбиения t/dt обозначим через m. В этом случае вероятность $P(n, t)$ наблюдения n распадов за время t будет подчиняться биномиальному распределению:

$$P(n,t) = C_m^n \cdot (pdt)^n \cdot (1 - pdt)^m . \tag{4}$$

При $dt \to 0$ получим известную формулу для распределения Пуассона:

$$P(n,t) = \lim_{dt \to 0} \left[\frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot (pdt)^n \cdot (1 - pdt)^m \right] =$$

$$= \lim_{dt \to 0} \left[\frac{m^n}{n!} \cdot \left(pt \cdot \frac{1}{m} \right)^n \cdot (1 - pdt)^{\frac{1}{pdt} m \cdot pdt} \right],$$

$$P(n,t) = \frac{(pt)^n}{n!} e^{-pt} . \tag{5}$$

Таким образом, случайное значение числа частиц n, зарегистрированных детектором в течение времени t, подчиняется распределению Пуассона.

Замечательной особенностью распределения Пуассона является то, что математическое ожидание $M[n]$ и дисперсия $D[n]$ случайной величины n одинаковы (подробности вывода см. в Приложении А):

$$M[n] = D[n] = pt . \tag{6}$$

Вводя среднее значение $\langle n \rangle = M[n] = pt$ числа зарегистрированных частиц мы можем переписать (5):

$$P(n, \langle n \rangle) = \frac{(\langle n \rangle)^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} . \tag{7}$$

На рис. 1 показано распределение Пуассона для некоторых значений $\langle n \rangle$.

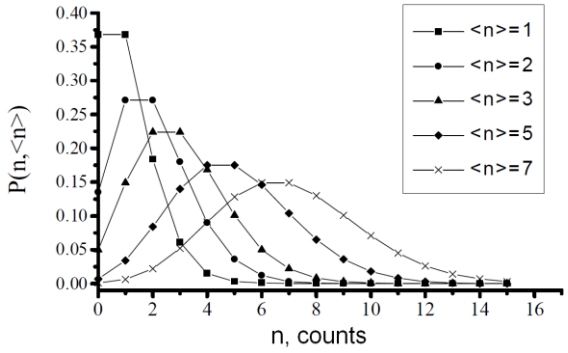

Рис. 1. Распределение Пуассона для некоторых средних значений

Равенство (6) обеспечивает простой способ оценки статистической ошибки в экспериментах с помощью стандартного отклонения σ:

$$\sigma[n] = \sqrt{D[n]} = \sqrt{pt} \approx \sqrt{n}\,. \tag{8}$$

При малых значениях $\langle n \rangle$ распределение сильно асимметрично. Для больших $\langle n \rangle$ распределение асимптотически стремится к гауссовому распределению, что можно доказать с помощью центральной предельной теоремы теории вероятностей (здесь доказательство не приводится):

$$P(n,\langle n \rangle) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle n \rangle}} \exp\left[-\frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\langle n \rangle}\right]. \tag{9}$$

Если мы попытаемся показать распределение Пуассона (7) и соответствующее гауссовское приближение (9) для $\langle n \rangle > 100$ так, как показано на рисунке 1, то мы не сможем увидеть различия между ними.

Такое асимптотическое поведение позволяет применять правила, известные для распределения Гаусса. Например, так называемое “*1-2-3 sigma rule*” для нормального распределения, или “*68-95-99.7 rule*”, применимо во многих экспериментах с регистрацией ионизирующего излучения путем подсчета частиц. Это простое мнемоническое правило определяет соотношение между доверительным интервалом, измеренным в единицах σ, и доверительной вероятностью. Таким образом, интервал 1σ соответствует доверительной вероятности ~68%, 2σ – ~95%, и 3σ – ~99.7%.

Теперь мы можем делать простую полуколичественную оценку на практике. Например, если бы мы проводили измерение в каком-то эксперименте (представим себе, что мы измеряем активность A радиоактивного источника на калиброванной установке), и это измерение основано на числе n = 10000 зарегистрированных частиц, мы можем судить об измеренной величине (в нашем случае это активность) с ошибкой, имеющей статистический характер и приближённо равной:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta n}{n} = \frac{\sqrt{\langle n \rangle}}{n} \cong \frac{\sqrt{n}}{n} = 0.01. \qquad (10)$$

Таким образом, в этом примере относительная ошибка будет оцениваться как 1% для доверительного интервала 1σ.

Экспериментальная установка

Внимание:

Окно торцевого счетчика Гейгера (12-15 μm слюды) легко может быть повреждено механически. Если окно повреждено, счётчик становится непригодным для работы.

Не прикасайтесь к слюдяному окну счётчика Гейгера. Окно счетчика защищено пластиковой крышкой. Снимайте защитную крышку только для проведения измерений. При снятии защитной крышки не сдавливайте её и не закрывайте отверстие для доступа воздуха.

Установка для эксперимента состоит из торцевого счетчика Гейгера, цифрового блока сбора данных CassyLab2 (с надписью Cassy Sensors 2), персонального компьютера (ноутбук) и блока экранированного и коллимированного радиоактивного источника ^{90}Sr с активностью 45 кБк*.

Счетчик Гейгера можно перемещать вручную относительно источника.

* - при использовании радиоактивного источника другого типа все значения при проведении эксперимента могут отличаться от приведённых в настоящем описании ориентировочных значений; преподаватель или лаборант сообщит о замене источника, если она имеет место.

Проведение эксперимента

Подготовка

Перед работой убедитесь, что все блоки лабораторной установки доступны и правильно подключены.

- Переместите счетчик Гейгера к радиоактивному источнику как можно ближе. Пластиковая крышка детектора может слегка коснуться выходного окна источника.
- Включите ноутбук, цифровой блок сбора данных CassyLab2.
- Убедитесь, что блок сбора данных CassyLab2 распознан и подключен правильно. Зеленый индикатор USB-интерфейса на блоке CassyLab2 является признаком правильного соединения.
- Запустите CassyLab2 щелчком по иконке на рабочем столе.
- В окне “CASSYs” выберите измерительный канал (“measurements channel”) выделением символического изображения узла счётчика Гейгера в верхней правой половине изображения-схемы CassyLab2. Так активируется аппаратный модуль счетчика Гейгера CassyLab2. Зеленый светодиод рядом с модулем счетчика Гейгера укажет на правильную активацию. После этого в программном обеспечении CassyLab2 для ПК должно появиться окно зарегистрированных событий. Вы должны видеть возрастающее число событий, если все части установки работают правильно.
- Закройте окно “CASSYs”.
- Загрузите файл настроек для этой работы через “Main Menu” → “Help” → “Experiment Examples” → “Physics” → “Poisson distribution” → “Load Settings”. Далее должно появиться окно, которое предложит сохранить текущие настройки. Не сохраняйте текущие настройки.
- Закройте окно “CASSYs” снова.
- Убедитесь, что вкладки “Standard” и “Frequency distribution” появились, и окно скорости счета “Rate R_{A1}” показывает значение в диапазоне 100-500 [1/s].

Эксперимент

- В дереве настроек “Settings” в правой части главного окна выберите набор параметров для входа A1. (вход счетчика Гейгера, “Settings” → “CASSYs” → “Input A_1 (Geiger-Müller counter tube S, 5240331)” → “Rate R_{A1}”). Задайте следующую комбинацию параметров: Gate Time = 1s; Meas. Time – оставьте это поле пустым, пустое поле означает измерение до прерывания пользователя; Запись – автоматическая. Поместите в поле “Range, 1/s” значение, превышающее наблюдаемую среднюю скорость счета в 1.5 − 2.5 раза.
- Запустите измерение через “Main Menu” → “Measurement” → “Start/Stop” или нажатием клавиши <F9>.
- Переключаясь между вкладками “ Standard” и “Frequency distribution”, убедитесь, что последовательные измерения выполняются, и сбор данных происходит корректно.
- Выполняйте измерения до тех пор, пока максимальное количество событий на вкладке “Frequency distribution” не достигнет 50. Это потребует приблизительно 40 минут для скорости счета 350 [1/s] и Gate Time = 1s. Соответствующее количество последовательных односекундных измерений можно увидеть на вкладке “Standard”, и оно должно быть равно приблизительно 2000. График на вкладке “Standard” демонстрирует статистические колебания односекундных измерений.
- Остановите измерение через “Main Menu” → “Measurement” → “Start/Stop” или нажатием клавиши <F9>.
- Сохраните результаты из через “Main Menu” → “File” → “Save” или нажатием клавиши <F2>.
- Увеличьте расстояние между источником и счетчиком Гейгера примерно до 10 см, так что средняя скорость счета будет примерно равна 10[1/s].
- Повторите измерение для этой новой средней скорости счета. Не забудьте установить параметр “Range, 1/s” для нового более низкого значения. Этот параметр влияет на представление результатов в графике на вкладке

“Standard”. Оценка требуемого времени для выполнения этой части эксперимента составляет 10-20 мин.

- Сохраните результат для низкой скорости счета в отдельном файле.

Оценка и результаты

Обработайте измеренные данные для обоих значений скорости счета.

Откройте файл и сначала сделайте масштабирование данных. Вы можете сделать это, щелкнув правой кнопкой мыши по каждой оси графика. В появившемся всплывающем окне установите минимальное и максимальное значение для отображения или нажмите “Find Minimum and Maximum”. Выполните эти шаги для каждой вкладки, “Standard” и “Frequency distribution”.

Откройте вкладку “Frequency distribution” и обработайте экспериментальную гистограмму, аппроксимируя её сначала распределением Пуассона, а затем распределением Гаусса. Для этого выполните следующие действия:

- щелкните правой кнопкой мыши над графиком и перейдите в меню в всплывающем окне: “Other evaluations” → “Calculate Poisson distribution” / “Calculate Gauss distribution”;
- выберите область подгонки, удерживая нажатой левую кнопку мыши и перемещая мышь;
- запишите результаты обработки, которые показаны в нижней части главного окна. Среднее значение распределения и стандартного отклонения обозначаются здесь как μ и σ, соответственно.

Результатом оценок должно быть четыре пары значений: μ и σ для двух средних скоростей счета и двух распределений.

Представление результатов

Обработайте данные любым подходящим программным обеспечением.

Постройте графики экспериментального распределения Пуассона с наложенными поверх результатами обработки распределениями Пуассона и Гаусса. Обратите внимание, если нет никакой заметной разницы между распределением Гаусса и распределением Пуассона.

Покажите значение сигмы в графиках, используя отрезок.

На графиках последовательных односекундных измерений покажите “*1-2-3 sigma rule*” с использованием отрезка (как обычно обозначаются доверительные интервалы). Убедитесь, что соответствующая доверительная вероятность согласуется с Вашим построенным экспериментальным доверительным интервалом. Например, около 68% экспериментальных точек должны располагаться внутри 1σ экспериментального доверительного интервала.

Представьте результаты в печатной форме, включая все оценки и графики.

Указания по безопасности

Самостоятельное вскрытие или другие манипуляции с источником радиоактивного излучения запрещены и являются нарушением законодательства РФ в области радиационной безопасности.

Доступ к радиоактивному источнику имеет только персонал лаборатории, относящийся к группе «А»

Самотестирование

1. Дозиметр на основе счетчика Гейгера оценивает мощность дозы путем подсчета зарегистрированных частиц. В среднем он подсчитывает 10 частиц при одном измерении за 30 секунд при естественном радиационном фоне (0.1 мкЗв/ч). Какова статистическая погрешность измерения естественного радиационного фона с помощью этого дозиметра? Какова точность дозиметра при 100 мкЗв/ч?

2. Активность радиоактивного источника была измерена за время 1 час на калиброванной установке со статистической погрешностью 10%. Какое время требуется для достижения статистической погрешности 1% на той же самой установке? Не принимайте во внимание любые другие экспериментальные ошибки.

3. Реальные детекторы частиц имеют параметр *мертвого времени*, что означает невозможность двух событий регистрации со временем между ними менее *мертвого времени*. Таким образом, реальное распределение счетных частиц является биномиальным, а распределение Пуассона является довольно удобным приближением. Предполагая, что *мертвое время* для счетчика Гейгера равно 100 мкс, найти качество этого приближения. Сделайте с пуассоновским и биномиальным распределением оценки вероятности регистрации 10 частиц при математическом ожидании, равном 10 частицам.

4. В пироге содержится в среднем 5 изюминок. Рассчитайте вероятность нахождения в нем ровно одной изюминки.

Литература

1. Povh, B. Particles and Nuclei [Text] / B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche. – Springer, 2006 – p. 391.

2. Martin, B.R. Nuclear and particle physics. [Text] / B.R. Martin. – Wiley, 2006. – 411 p.

3. Мухин, К.Н. Экспериментальная ядерная физика. В 3-х тт. Т. 1. Физика атомного ядра [Электронный ресурс]: учеб. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 384 с.

4. Мухин, К.Н. Экспериментальная ядерная физика. В 3-х тт. Т. 2. Физика ядерных реакций [Электронный ресурс]: учеб. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 326 с.

5. Капитонов, И.М. Введение в физику ядра и частиц [Электронный ресурс]: учеб. – Электрон. дан. – Москва: Физматлит, 2010. – 512 с.

Приложение А. Дисперсия и матожидание распределения Пуассона

Распределение Пуассона:

$$P(n,t)=\frac{(pt)^n}{n!}e^{-pt}. \qquad (A.1)$$

Отметим, что вероятность получить любое количество событий n, от 0 до ∞, равно 1, т.е.:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n,t)=1. \qquad (A.2)$$

Среднее значение распределения $M[n]=\langle n\rangle$:

$$M[n]=\sum_{n=0}^{\infty}nP(n,t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(pt)^n}{n!}e^{-pt}=pt\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(pt)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-pt}=pt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(pt)^k}{k!}e^{-pt}=pt. \qquad (A.3)$$

Здесь $k=n-1$.

Дисперсия $D[n]$:

$$D[n]=M\left[\left(n-\langle n\rangle\right)^2\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(n-pt)^2P(n,t)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\frac{(pt)^n}{n!}e^{-pt}-2(pt)^2+(pt)^2=$$

$$=pt\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(pt)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-pt}-(pt)^2=pt\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{(pt)^k}{k!}e^{-pt}-(pt)^2=pt(pt+1)-(pt)^2,$$

$$D[n]=pt. \qquad (A.4)$$

Таким образом, среднее и дисперсия распределения Пуассона равны друг другу.