$$\leqslant \sqrt{(\sqrt{2x+7})^2 + (\sqrt{3+5x})^2 + (\sqrt{4-7x})^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+3^2} = 14.$$

В заключение отметим, что материал о замечательных неравенствах полезен при решении заданий единого государственного экзамена и задач повышенного уровня сложности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гомонов С. А. *Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения: 10 – 11 классы. Учебное пособие. 2-е изд.* – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.

2. Иванов О. А. *Элементарная математика для школьников, студентов, преподавателей.* – М.: МЦНМО, 2009. – 384 с.

3. Коровкин П. П. *Неравенства.* – М.: Наука, 1983. – 56 с.

4. Седракян Н. М., Авоян А. М. *Неравенства. Методы доказательства.* – М.: Физматлит, 2002.

Л. И. Гафиятуллина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

gafiyat@gmail.com

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ПОЛИА–СЕГЁ И МАКАИ ДЛЯ ЕВКЛИДОВОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Пусть Ω – односвязная область на комплексной плоскости, $\rho(z, \partial\Omega)$ – расстояние от точки z до границы $\partial\Omega$ области Ω, $\rho(\Omega)$ – радиус максимального вписанного в область Ω круга, $A(\Omega)$ – площадь области Ω. Физический функционал

$$\mathrm{P}(\Omega) := 2 \iint\limits_{\Omega} u(z, \Omega)\, dA \tag{1}$$

называется жесткостью кручения области Ω, где $u(z, \Omega)$ – решение краевой задачи $\Delta u = -2$ в Ω, $u = 0$ на границе $\partial\Omega$.

В 1951 г. Г. Полиа и Г. Сегё доказали, что для любой выпуклой области имеет место неравенство

$$\mathrm{P}(\Omega) \geqslant \frac{1}{2} A(\Omega)\rho(\Omega)^2, \tag{2}$$

равенство в котором достигается, когда Ω – круг.

В 1962 г. Е. Макаи было получено обратное неравенство, а именно, что для любой выпуклой области

$$\mathrm{P}(\Omega) < \frac{4}{3} A(\Omega)\rho(\Omega)^2, \tag{3}$$

причем постоянная 4/3 – наилучшая из возможных.

Рассмотрим геометрический функционал

$$I_2(\Omega) := 2 \iint\limits_{\Omega} \rho(z, \partial\Omega)^2 \, dA, \tag{4}$$

который называется евклидовым моментом инерции области Ω относительно границы.

Теорема 1. *Пусть Ω – выпуклая область на плоскости. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$I_2(\Omega) \geqslant \frac{1}{6} A(\Omega)\rho(\Omega)^2, \tag{5}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – описанный около окружности многоугольник.

Теорема 2. *Для любой выпуклой области Ω имеет место неравенство*

$$I_2(\Omega) < \frac{1}{3} A(\Omega)\rho(\Omega)^2, \tag{6}$$

при этом равенство имеет место для вырожденных областей.

В частности, равенство в теореме 2 достигается в пределе для узких прямоугольников со сторонами a и b, где $b/a \to$ $\to 0$. Неравенство (5) является аналогом неравенства Г. Полиа и Г. Сегё, а (6) – аналогом неравенства Е. Макаи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салахудинов Р. Г. *Введение в геометрическую теорию изопериметрических неравенств, I.* – Казань: КФУ, 2013. – 100 с.

2. Салахудинов Р. Г. *Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области* // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 8. – С. 66–79.

3. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.

4. Makai E. *On the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam* // Studies in Math. Analysis and Related Topics.– Stanford University Press, 1962. – P. 227–231.

А. А. Горшков

Нижегородский национальный исследовательский университет им. Н.И. Лобачевского,

tiger-nn@mail.ru

УСТОЙЧИВЫЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Особенностью задач оптимизации является их возможная некорректность [1], которая выражается в несуществовании