Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” куда я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply’ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 58

Экстремумы функций многих переменных.

На этом занятии мы будем изучать методы отыскания локальных экстремумов (максимумов и минимумов) у функции $z = f(p)$ от n переменных: $p = (x_1, \dots, x_n)$. Предполагается, что функция $f(\,\cdot\,)$ задана на некотором множестве $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{R}^n$, определяя отображение $\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{R}$.

Договоримся использовать следующую терминологию.

Существование *локального максимума (минимума)* функции $f(p)$ *во внутренней точке* $p_0 \in \mathrm{E}$ означает, что для любой точки p, принадлежащей некоторой окрестности $U(p_0)$ точки p_0, справедливо неравенство $f(p_0) \geq f(p)$ (для минимума, соответственно, $f(p_0) \leq f(p)$). Если имеет место строгое неравенство, то употребляют термин *строгий экстремум.*

Точки $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}$, в которых частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

или производные функции f в этих точках не существуют, называются *стационарными* или *критическими.*

Как и в случае функции одной переменной, *необходимое условие экстремума* гласит: *Если в точке p_0 имеется экстремум, то это стационарная точка.*

Достаточное условие экстремума и классификация точек экстремума связаны с матрицей вторых частных производных функции f, точнее, с поведением второго дифференциала f в окрестности стационарной точки. Вычисляем матрицу $A(p) = \| a_{ij}(p) \|$ вторых производных

$$a_{ij}(p) = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j}$$

и составляем второй дифференциал

$$d^2 f(p_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p_0) d\,x_i\,d\,x_j,$$

в котором коэффициенты вторых производных вычисляются при $p = p_0$ (в стационарной точке).

Если квадратичная форма $d^2 f(p_0)$, как функция переменных $d\,x_1, \ldots, d\,x_n$,

1. положительно определена в некоторой окрестности точки p_0, то p_0 – точка минимума,

2. отрицательно определена в некоторой окрестности точки p_0, то p_0 – точка максимума,

3. знакопеременна в некоторой окрестности точки p_0, то p_0 – седловая точка,

4. равна нулю, то, как правило, p_0 – точка нестрогого экстремума.

Термины «положительно или отрицательно определена» в большей степени относятся к матрице $A(p_0)$ вторых производных, чем к квадратичной форме $d^2 f(p_0)$, и означают просто, что эта форма, соответствующая матрице $A(p_0)$, принимает строго положительные или строго отрицательные значения, будучи функцией n переменных $d\,x_1, \ldots, d\,x_n$. Для определения положительной или отрицательной определенности матрицы A (то есть знака соответствующей квадратичной формы) обычно используется

Критерий Сильвестра. *Матрица A положительно определена, если все главные миноры A положительны, и отрицательно определена, если $a_{11} < 0$, а значения последующих главных миноров знакочередуются (главный минор второго порядка положителен, третьего – отрицателен, и т.д.)*

Для функции двух переменных $f(x, y)$ критерий Сильвестра принимает следующий вид. Введем обозначения: $p = (x, y)$,

$$A(p) = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x^2}, \quad B(p) = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x \partial y}, \quad C(p) = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial y^2}, \quad D(p) = AC - B^2.$$

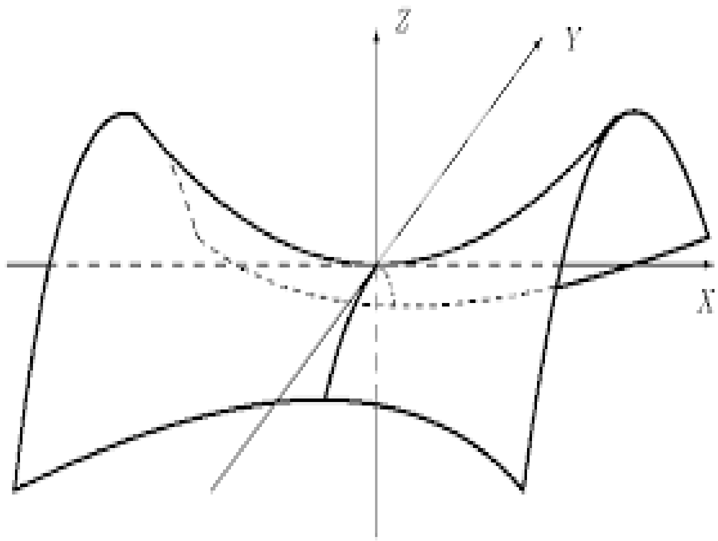

Рис. 1: Гиперболический параболоид

В точке $p = p_0$ функция $f(p)$ имеет

минимум, *если $D(p_0) > 0$ и $A(p_0) > 0$ (или $C(p_0) > 0$);*
максимум, *если $D(p_0) > 0$ и $A(p_0) < 0$ (или $C(p_0) < 0$);*
экстремум отсутствует, *если $D(p_0) < 0$.*

Если $D(p_0) < 0$, то точка p_0 является, как правило, **седловой**, *если же $D(p_0) = 0$, то в точке p_0, как правило,* **нестрогий экстремум** *("корыто" или "таз").* Более точные заключения о типе точек, в которых $D(p_0) < 0$, или $D(p_0) = 0$, можно получить только исследуя соответствующую квадратичную форму или характер поведения функции в окрестности стационарной точки.

Типичная задача по теме " Экстремумы функций многих переменных" формулируется следующим образом. Задается некоторая функция, скажем, двух переменных $z = f(x, y)$, $(x, y) \in$ E. Требуется найти все точки экстремума этой функции, определить их тип (максимум, минимум, седло, "корыто", "таз") и, по возможности, вычислить значения функции в этих точках.

Решение начинается с определения стационарных точек: находятся первые производные функции f и решается относительно x и y система урав-

нений
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0,$$
а также определяются точки $p = (x, y)$, где эти производные не существуют. Для каждой из полученных таким образом точек $p_1, \ldots, p_m$ вычисляются $A(p_k),\ B(p_k),\ C(p_k),\ D(p_k),\quad k = 1, \ldots, m$, и по знаку определителя D принимается решение о наличии или отсутствии в каждой точки экстремума для функции f. В случае, когда $D = 0$ или квадратичная форма
$$Q(p_k) = a_{11}(p_k)dx^2 + 2a_{12}(p_k)dx\,dy + a_{22}(p_k)dy^2,$$
как функция переменных $d\,x$ и $d\,y$, принимает в окрестности точки p_k значения разных знаков, проводятся дополнительные исследования по определению типа данной стационарной точки.

Итак, для стационарных точек:
$$D > 0, \quad A > 0 \ - \ \text{минимум};$$
$$D > 0, \quad A < 0 \ - \ \text{максимум};$$
$$D \leq 0 \ - \ \text{экстремума нет, но может быть седло};$$
$$D = 0 \ - \ \text{как правило, нестрогий экстремум}.$$
Рассмотрим примеры на решение такого рода задач.

Пример 1. *Найти все точки экстремума функции*
$$z = x^3 + y^3 - xy$$
и определить их тип.

Решение. Функция дифференцируема на всей плоскости R^2. Выписываем уравнения для определения стационарных точек:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y = 0 \qquad = \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - x = 0.$$
Из первого уравнения находим $y = 3x^2$. Подставляя этот y во второе уравнение, получаем уравнение $27x^4 - x = 0$, которое имеет два корня $x = 0$ и $x = 1/3$. Из первого уравнения находим, что этим корням соответствуют значения $y = 0$ и $y = 1/3$. Таким образом, имеет две стационарные точки: $p_1 = (0,\,0)$ и $p_2 = (1/3,\,1/3)$.

Находим вторые производные, чтобы определить коэффициенты квадратичной формы второго дифференциала:

$$A(p) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B(p) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C(p) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y,$$

$$D(p) = AC - B^2 = 36xy - 1.$$

Исследуем на экстремум функции в точке $p_1 = (0,\ 0)$.

Имеем: $A(p_1) = 0, \quad B(p_1) = -1, \quad C(p_1) = 0$, откуда $D(p_1) = -1\,(< 0!)$. Следовательно, в точке $p_1 = (0, 0)$у функция не имеет экстремума.

Чтобы выяснить тип этой точки, исследуем знак квадратичной формы в окрестности p_1. Квадратичная форма

$$Q(p_1) = A(p_1)dx^2 + 2C(p_1)dx\,dy + B(p_1)dy^2 = -2dx\,dy$$

знакопеременна – она отрицательна, когда dx и dy имеют одинаковые знаки, и положительна – в противном случае. Следовательно, точка $p_1 = (0, 0)$ является седловой, и в этой точке функция равна нулю.

Обратимся теперь к точке $p_2 = (1/3,\ 1/3)$.

Здесь $A(p_1) = 2, \quad B(p_1) = -1, \quad C(p_1) = 2$, откуда $D(p_1) = 3\,(> 0)$. Так как $A(p_1) = 2 > 0$, то $p_2 = (1/3,\ 1/3)$ – точка минимума, в которой функция равна $1/9$.

Ответ: точка $p_1 = (0, 0)$ седловая; в точке $p_2 = (1/3,\ 1/3)$ функция имеет локальный минимум.

Рассмотрим еще два тривиальных примера, где точки экстремума функции легко определяются из ее вида, и посмотрим, что дает представленная выше методика по выявлению этих точек.

Пример 2. *Найти все точки экстремума функции*

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

и определить их тип.

Решение. Эта функция зависит только от расстояния $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ любой точки (x, y) на плоскости до начала координат $(0, 0)$, так что уравнение (1) в эквивалентной записи имеет вид $z = 1 - r,\ r \geq 0$. Функция монотонно и неограниченно убывает с ростом r, имея максимальное значение при $r = 0$. Следовательно, точка $p_0 = (0, 0)$ есть единственная точка экстремума функции (1) и в этой точки функция достигает максимума $z(p_0) = 1$.

Посмотрим, что дает метод отыскания экстремума с помощью вычисления производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

В любой точке $(x, y) \in \mathrm{R}^2$, кроме начала координат $(x, y) = (0, 0)$, эти производные отличны от нуля, а в начале координат не существуют, ибо у них не существует двойной предел при $(x, y) \to (0, 0)$. Действительно, повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

не совпадают, так что функция (1) в точке $p_0 = (0, 0)$ не дифференцируема и эта точка является стационарной. Естественно, проверить, что $p_0 = (0, 0)$ есть точка экстремума с помощью вычисления вторых производных не представляется возможным, ибо даже первая производная там не существует. Приходится исследовать поведение функции (1) в окрестности этой точки, что мы, собственно, и делали в первом абзаце при решении поставленной задачи. Кроме того, это точка лежит на границе области определения функции, и поэтому для такого рода точках можно говорить только о, так называемых, односторонних производных.

Пример 3. *Найти все точки экстремума функции*

$$z = (x - y + 1)^2 \tag{2}$$

и определить их тип.

Решение. Это функция, по существу, одной переменной $u = x - y + 1$. Минимум функции $z = u^2$ достигается в точке $u = 0$, и это единственный экстремум функции (2). Таким образом, все точки (x, y) уравнения $x - y + 1 = 0$ являются экстремальными,– налицо случай нестрогого экстремума (минимума) типа “корыта”.

Обратимся теперь к методу отыскания экстремума с помощью анализа производных функции (1).

Это всюду дифференцируемая функция; уравнения для отыскания стационарных точек имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x - y + 1) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -, 2(x - y + 1) = 0.$$

Следовательно, все точки $p = (x, y)$, удовлетворяющие уравнению $x - y + 1 = 0$ являются стационарными.

Тип этих точек определяем с помощью вычисления вторых производных:

$$A(p) = \frac{\partial^2 z(p)}{\partial x^2} = 2, \quad B(p) = \frac{\partial^2 z(p)}{\partial x \partial y} = -2, \quad C(p) = \frac{\partial^2 z(p)}{\partial y^2} = 2,$$

откуда $D(p) = 0$, так что для выяснения типа точек, лежащих на прямой $x - y + 1 = 0$, следует обратиться к знаку квадратичной формы

$$Q(p) = A(p)dx^2 + 2C(p)dx\,dy + B(p)dy^2 = 2(dx + dy)^2 \,>\, 0.$$

Квадратичная форма положительна, поэтому все точки p являются точками минимума, но не строгого.

Итак, функция (2) является "корытом" с дном на прямой $x - y + 1 = 0$.

В следующем примере обратите особое внимание на методические указания, позволяющее избегать излишней "работы руками".

Пример 4. *Найти все точки экстремума функции*

$$z = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{3}$$

и определить их тип.

Решение. В первую очередь следует обратить внимание на две особенности функции (3): она определена только внутри кольца $x^2 + y^2 = 1$ и инвариантна относительно перестановок аргументов x и y. Последнее обстоятельство позволяет вычислять производные только по x, ибо производные по получаются простой подстановкой y вместо x. Следует также ввести обозначение для корня $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, поскольку он входит в виде отдельного сомножителя в функции (3), и поэтому будет многократно повторятся в выражениях для производных. Положим

$$V = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Для определения стационарных точек вычислим первые производные функции (3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yV + \frac{x^2 y}{V} = \frac{yV^2 - x^2 y}{V} = \frac{y}{V}(1 - 2x^2 - y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{V}(1 - 2y^2 - x^2).$$

Приравнивая эти производные нулю, находим первую стационарную точку $p_0 = (0, 0)$. Замечаем,что производные не существуют (обращаются в бесконечность) на точках окружности $x^2 + y^2 = 1$, но это граничные точки функции, в которых она принимает значение 0. Остальные стационарные точки определяются их системы уравнений

$$2x^2 + y^2 = 1, \qquad 2y^2 + x^2 = 1.$$

Эта система эквивалентна уравнениям $x^2 = 1/3$, $y^2 = 1/3$, которые доставляют еще 4 стационарных точки.

Итак, имеет 5 стационарных точек:

$$p_0 = (0, 0),$$

$$p_1 = (1/3, 1/3), \quad p_2 = (-1/3, -1/3), \quad p_3 = (1/3, -1/3), \quad p_4 = (-1/3, 1/3).$$

Для определения типа полученных точек вычислим значения вторых производных в этих точках; начнем с точки $p_0 = (0, 0)$.

Анализируя вид первых производных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yV + \frac{x^2 y}{V}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xV + \frac{y^2 x}{V},$$

нетрудно видеть, что $A(p_0) = z''_{xx}(0, 0) = 0$, поскольку у первого слагаемого yV производная по x от корня V, равная x/V, обращается в нуль при $x = 0$. Второе слагаемое имеет вид дроби, числитель которой содержит множитель x^2. Следовательно, производная по x от второго слагаемого будет содержать x как общий множитель, который "обнулит" это слагаемое.

Аналогично, по принципу симметричной записи функции и ее производных, получаем, что $C(p_0) = z''_{yy}(0, 0) = 0$.

Далее, при вычислении $B(p_0) = z''_{xy}(0, 0)$ замечаем, что производная по y от первого слагаемого обращается в единицу: $(yV)' = V + yV'$. Второе слагаемое имеет общий множитель x^2, от которого производная не берется, так что у этого слагаемого значение производной в точке $(0, 0)$ равна нулю.

Итак, $A = C = 0, B = 1;\ D = -1$. Поскольку $A = 0$, то экстремума нет, и вид знакопеременной квадратичной формы $d^2 z(p_0) = 2dxdy$ говорит, что это седловая точка.

Чтобы определить тип оставшихся четырех точек $p_1, \ldots, p_4$ (вычислить вторые производные), обратим внимание на запись первых производных в той форме, которая определила уравнения для этих точек:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{V}(1 - 2x^2 - y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{V}(1 - 2y^2 - x^2).$$

Поскольку функции $1-2x^2-y^2$ и $1-2y^2-x^2$ в этих точках обращаются в ноль, то не стоит вычислять производные от остальных сомножителей y/V и x/V, и поэтому

$$A(p_i) = z''_{xx}(p_i) = -\frac{4xy}{V}\bigg|_{(x,y)=p_i}, \quad C(p_i) = z''_{yy}(p_i) = -\frac{4xy}{V}\bigg|_{(x,y)=p_i},$$

$$B(p_i) = z''_{xy}(p_i) = -\frac{2y^2}{V}\bigg|_{(x,y)=p_i}, \quad i = 1,2,3,4,$$

откуда

$$D(p_i) = \frac{16x^2y^2 - 4y^2}{1-x^2-y^2}\bigg|_{(x,y)=p_i} = 5 > 0.$$

Следовательно, во всех точках $p_i,\ i = 1,2,3,4$, имеется экстремум.

Исследуем A, знак которого определяется значением произведения xy. Следовательно, $A > 0$ в точках $p_1 = (1/3, 1/3),\ p_2 = (-1/3, -1/3)$ (минимум), и $A < 0$ в точках $p_3 = (1/3, -1/3),\ p_4 = (-1/3, 1/3)$ (максимум).

Ответ:
точка $p_0 = (0,0)$ седловая;
в точках $p_1 = (1/3, 1/3),\ p_2 = (-1/3, -1/3)$ локальный минимум,
в точках $p_3 = (1/3, -1/3),\ p_4 = (-1/3, 1/3)$ локальный максимум.

Задание 58

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

Найти все точки экстремума и определить их тип у следующих функций:

3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad (x > 0,\ y > 0).$

3635. $z = x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y, (x > 0,\ y > 0).$

3637. $z = \sin x\ \sin y\ \sin(x + y),$
$0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi.$

3638. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}$

3641. $z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$

3651*. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0,$
$z = z(x, y)$ задана неявно.