

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Учебное пособие



Казанский университет
2012

УДК 539.3
Д46

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

Авторы:

Ю.Г. Коноплев, Л.У. Бахтиева, В.И. Митряйкин,
Ф.Х. Тазюков

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук Ю.П. Артюхин (К(П)ФУ)
доктор физ.-мат. наук В.Н. Паймушин (КНИТУ-КАИ)

Д46 **Динамическая устойчивость упругих пластин и оболочек:** учеб.
пособие / Л.У. Бахтиева, Ю.Г. Коноплев, В.И. Митряйкин, Ф.Х. Тазюков. –
Казань: Казан. ун-т, 2012. – 80 с.

ISBN 978-5-905787-30-0

Предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся по методам расчета конструкций, а также для работников научно-исследовательских институтов и конструкторских бюро.

Может быть использовано при расчёте на устойчивость элементов конструкций судов, летательных аппаратов, различных емкостей и резервуаров, находящихся под действием быстро изменяющихся во времени нагрузок.

ISBN 978-5-905787-30-0

© Коллектив авторов, 2012.

© Казанский университет, 2012.

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные оболочки и пластины являются важными составными частями многих конструкций: это корпуса всевозможных машин и судов, фюзеляжи и крылья летательных аппаратов, различные емкости, резервуары и другие инженерные сооружения.

Одной из основных причин разрушения оболочечных конструкций является потеря устойчивости исходной формы равновесия. Разрушение при этом происходит практически мгновенно, что может привести к тяжелым последствиям, поэтому расчет конструкций на устойчивость очень ответственен. Вместе с тем он и очень сложен, особенно когда внешние нагрузки быстро изменяются во времени [6, 11, 20].

Получение достоверных данных о критических нагрузках требует исследования нелинейных уравнений, для их решения применяются в основном численные методы, на основе которых разрабатываются программные комплексы [5, 9, 14, 22].

Однако в расчётной практике придается большое значение разработке и совершенствованию простых аналитических методов решения конкретных задач, наглядно отражающих влияние отдельных геометрических и физических параметров на устойчивость конструкции. Именно такой эффективный подход к задачам устойчивости обеспечивает теоретико-экспериментальный метод, который позволяет получить решение в аналитическом виде, а затем скорректировать полученные формулы с помощью экспериментальных данных [8, 10, 17, 19].

Цель учебного пособия – изложить основные положения теоретико-экспериментального метода применительно к решению задач устойчивости цилиндрических и конических оболочек, прямоугольных и круглых пластин, а также пологих панелей под действием динамических нагрузок; наглядно продемонстрировать достоинства этого метода при решении целого ряда практически важных задач.

Учебное пособие состоит из четырех частей.

В первой части дается общая постановка задачи, предлагается алгоритм ее решения.

Во второй части учебного пособия исследуется линеаризованное уравнение динамики оболочки, формулируются начальные условия и критерий динамической устойчивости. На примере круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, линейно изменяющегося во времени, описывается метод решения задачи, позволяющий получить формулы для расчета критических нагрузок, волновых чисел, коэффициентов динамичности и критических импульсов.

Третья часть посвящена решению ряда конкретных задач. Рассмотрены тонкие изотропные оболочки и пластины постоянной толщины, различным образом закрепленные по торцам и подверженные нагрузкам, изменяющимся во времени по некоторым законам (линейному, квадратичному и др.). Для всех задач получены расчетные формулы, позволяющие делать выводы о влиянии различных физических и геометрических параметров на динамическую устойчивость. Для уточнения констант, входящих в полученные формулы, рекомендовано проведение экспериментальных исследований.

В четвертой части учебного пособия описана методика проведения испытаний оболочек и пластин на динамическую устойчивость. Приведены результаты некоторых экспериментов, сделаны выводы о практической применимости полученных аналитических зависимостей.

Предложенные рекомендации могут быть использованы при расчёте на устойчивость элементов конструкций судов, летательных аппаратов, различных емкостей, резервуаров и других инженерных сооружений, находящихся под действием быстро изменяющихся во времени нагрузок.

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся по методам расчета конструкций, а также для работников научно-исследовательских институтов и конструкторских бюро.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y, z – декартовы координаты,

t – время,

h – толщина оболочки (пластины),

E – модуль упругости,

ν – коэффициент Пуассона,

ρ – плотность материала оболочки,

$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость звука в материале, ,

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жёсткость,

u, v, w – перемещения точек срединной поверхности,

T_1, T_2, S – усилия в срединной поверхности,

F – функция усилий,

φ, r – криволинейные координаты,

γ – угол конусности оболочки,

$\varphi_1 = \varphi \sin \gamma$,

R_0, R_1 – радиусы верхнего и нижнего оснований конуса,

H – высота конуса,

R – радиус цилиндрической оболочки,

l – длина цилиндрической оболочки,

$d = a/b$; a, b – стороны прямоугольной пластинки (рисунок 1),

m – число полуволн вдоль образующей,

n – число волн по окружности,

ω – частота собственных колебаний,

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial \varphi_1^2 \partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi_1^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi_1^4}.$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются круговые цилиндрические оболочки под действием динамического внешнего давления при различных способах закрепления торцов, прямоугольные и круглые пластины под действием динамического сжатия или динамического сдвига, конические оболочки под действием динамического внешнего давления (закон изменения давления – линейный, квадратичный и т. п.), пологие цилиндрические панели под действием поперечной нагрузки. Для расчета таких конструкций на устойчивость предлагается:

1. Использовать линеаризованные уравнения динамики тонких оболочек, полученные из общих нелинейных уравнений путем варьирования (с учетом только поперечных сил инерции).

2. Проинтегрировать уравнения по координатам с помощью процедуры Бубнова, в результате получить одно обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

3. Проинтегрировать уравнение по времени, при этом:

- a) задать начальные условия и сформулировать критерий динамической устойчивости,

- b) разбить временной интервал на два участка (в зависимости от направления сил инерции),

- c) ввести в рассмотрение полный прогиб оболочки, что позволит получить нетривиальное решение для нулевых начальных условий,

- d) выбрать аппроксимирующую функцию прогиба, удовлетворяющую начальным условиям и критерию динамической устойчивости,

- e) применить процедуру Бубнова,

f) полученные зависимости дополнить требованием, чтобы в предельном случае (при медленном нагружении) они совпадали с соответствующими формулами для статических задач.

4. Рассчитать критические нагрузки, волновые числа, коэффициенты динамичности, критические импульсы. Результаты получить в виде формул, справедливых при произвольных параметрах оболочек и пластин.

5. Уточнить экспериментальным путем коэффициенты, входящие в полученные структурные зависимости.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Метод решения описан для задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием линейно изменяющегося во времени внешнего поперечного давления.

2.1. Вывод разрешающего уравнения

Исходные нелинейные уравнения динамики цилиндрической оболочки приведены в [6]

$$D\nabla^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} T_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} T_2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} S + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + P - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\nabla^4 F = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

где $P = P_0 t$ – динамическое внешнее давление, P_0 – скорость нагружения.

После применения операции варьирования и допущения о безмоментности первоначального напряжения система (1) приобретает вид

$$D \nabla^4 \bar{w} - \frac{1}{R} \bar{F}_{xx} - T_{10} \bar{w}_{xx} - T_{20} \bar{w}_{yy} - 2S_0 \bar{w}_{xy} + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^4 \bar{F} = \frac{Eh}{R} \bar{w}_{xx}$$

где $\bar{w}$, $\bar{F}$ - вариации функций прогиба и усилий, T_{10} , T_{20} , S – усилия безмоментного начального состояния, для которых справедливы уравнения

$$\frac{\partial T_{10}}{\partial x} + \frac{\partial S_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{\partial T_{20}}{\partial y} = 0, \quad \frac{T_{20}}{R} = -P. \quad (3)$$

Для рассматриваемой задачи решение системы (3) имеет вид

$$T_{10} = S_0 = 0, \quad T_{20} = -PR = -P_0 R t. \quad (4)$$

К системе (2) применяется процедура метода Бубнова. При этом для случая шарнирного опирания аппроксимирующие функции выбираются в виде

$$\bar{F} = f(t) \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}, \quad \bar{w} = \xi(t) \sin \frac{m_1 x}{R} \sin \frac{ny}{R}, \quad (5)$$

$$m_1 = \frac{m\pi R}{l}$$

После интегрирования система (2) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \lambda(t) \xi = 0,$$

или после введения безразмерного параметра времени $\tau = t/t_k$ (t_k – критическое время, соответствующее моменту хлопка), к уравнению вида

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \lambda(\tau) \xi = 0, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (6)$$

$$\lambda(\tau) = \frac{t_k^2}{\rho h R^4} \left[-P_0 R^3 n^2 t_k \tau + D \left(n^4 + \frac{\beta^2 m_1^4}{n^4} \right) \right], \quad \beta^2 = \frac{Eh R^2}{D}.$$

Замечание. При выводе формулы (6) сделано допущение: $m_1 \ll n$, что справедливо при достаточно высоких скоростях нагружения.

2.2. Начальные условия и критерий динамической устойчивости

Поскольку функция $\xi(\tau)$ является вариацией полного прогиба оболочки, начальные условия для неё имеют вид

$$\xi(0) = 0, \quad \xi'(0) = 0. \quad (7)$$

В задачах динамики необходимо также сформулировать условие на правом краю интервала времени, т. е. критерий динамической устойчивости. Из работы А.В. Саченкова [18] следует, что это условие должно быть выбрано в виде

$$\xi'(1) = 0, \quad (8)$$

т. е. критическое время должно соответствовать обращению в нуль скорости характерных точек оболочки.

2.3. Преобразование разрешающего уравнения

Задача Коши (6) – (7) имеет лишь тривиальное решение. Поэтому введем в рассмотрение амплитуду полного прогиба оболочки

$$W = W_0 + \xi, \quad (9)$$

где W_0 – амплитуда докритического (безмоментного) прогиба.

Подставляя в (6) $\xi = W - W_0$, приводим уравнение к виду

$$Z'' + \lambda(\tau)Z = \lambda(\tau)\frac{W_0}{h}, \quad Z = W/h.$$

Из третьего уравнения системы (3) следует

$$\frac{EhW_0}{R^2} = \frac{T_{20}}{R} = -P_0 t, \quad \text{откуда} \quad W_0 = -\frac{P_0 R^2 t}{Eh}, \quad (10)$$

тогда уравнение для Z можно записать в виде

$$Z'' + \lambda(\tau)Z = -\lambda(\tau)\bar{P}_0 \tau, \quad \bar{P}_0 = P_0 R^2 t_k / Eh^2. \quad (11)$$

Из условий (7) и (8) с учетом (9) следуют

$$Z(0) = Z'(0) = 0 \quad - \text{начальные условия}, \quad (12)$$

$$Z'(1) = 0 \quad - \text{критерий устойчивости}. \quad (13)$$

Задача, таким образом, сводится к решению уравнения (11) с начальными условиями (12) и дополнительным условием (13). Для решения используется процедура метода Бубнова.

2.4. Выбор аппроксимирующей функции

Аппроксимирующая функция прогиба выбирается в соответствии с начальными условиями (12) в виде

$$Z = A \left(\tau^2 + B\tau^\alpha \right),$$

где A – амплитуда прогиба, α – константа, определяемая в процессе решения задачи ($\alpha \neq 2$). Из условия (13) следует, что $B = -2/\alpha$, тогда

$$Z = A \left(\tau^2 - \frac{2}{\alpha} \tau^\alpha \right). \quad (14)$$

Абсцисса точки перегиба для кривой (14) определяется равенством

$$\tau_1 = \left(\frac{1}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha - 2}}. \quad (15)$$

2.5. Решение уравнения

Уравнение (11) необходимо интегрировать по двум участкам: $0 \leq \tau \leq \tau_1$ и $\tau_1 \leq \tau \leq 1$, так как при переходе через точку τ_1 меняется тип уравнения (коэффициент $\lambda(\tau)$ меняет знак).

В результате интегрирования на первом участке $(0, \tau_1)$ получается уравнение

$$A(c_1 + c_2 \bar{B} - c_3 \bar{A}) + \bar{P}_0(c_4 \bar{B} - c_5 \bar{A}) = 0, \quad (16)$$

где
$$\bar{A} = \frac{t_\kappa^2}{\rho h R^4} \cdot P_0 R^3 n^2 t_\kappa, \quad \bar{B} = \frac{t_\kappa^2}{\rho h R^4} D(n^4 + \frac{\beta^2 m_1^4}{n^4}),$$

$$c_1 = \frac{2\tau_1^3(2\alpha^4 - 7\alpha^3 + 7\alpha^2 - 8\alpha + 12)}{3\alpha(\alpha^2 - 1)(2\alpha - 1)},$$

$$c_2 = \frac{\tau_1^5(2\alpha^6 + 3\alpha^5 - 9\alpha^4 - 39\alpha^3 + 23\alpha^2 + 40\alpha + 60)}{5\alpha^2(\alpha - 1)^2(\alpha + 3)(2\alpha + 1)},$$

$$c_3 = \frac{\tau_1^6(\alpha^6 + 3\alpha^5 - 5\alpha^4 - 27\alpha^3 + 4\alpha^2 + 36\alpha + 48)}{6\alpha^2(\alpha - 1)^2(\alpha + 4)(\alpha + 1)},$$

$$c_4 = \tau_1^4 \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 2)} \right], \quad c_5 = \tau_1^5 \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 3)} \right].$$

В уравнении (16) при $t_\kappa \rightarrow \infty$ и $P_0 \rightarrow 0$ должен осуществляться точный предельный переход к случаю статического нагружения. Поэтому необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$A c_2 + \bar{P}_0 c_4 = A c_3 + \bar{P}_0 c_5.$$

Из этого условия находим амплитуду

$$A = \bar{P}_0 (c_5 - c_4) / (c_2 - c_3). \quad (17)$$

Уравнение (16) с учётом (17) преобразуется к виду

$$P_0 t_k = \frac{D}{R^3} \left(n^2 + \frac{\beta^2 m_1^4}{n^6} \right) + \frac{b_1 \rho h R}{n^2 t_k^2}, \quad (18)$$

где $b_1 = c_1 (c_4 - c_5) / (c_3 c_4 - c_2 c_5)$ – величина, зависящая от параметра α . Численные значения этого коэффициента для различных значений α приведены в таблице 1.

Таблица 1

Зависимости параметров τ_1 , b_1 , b_2 и b_3 от коэффициента α

α	τ_1	b_1	b_2	b_3
1,5	0,250	1825,82	5,31	535,25
1,6	0,279	1306,06	1,88	88,30
1,7	0,305	998,68	1,60	53,67
1,8	0,328	800,58	1,50	41,05
1,9	0,349	664,59	1,44	34,60
3,0	0,500	232,73	1,26	21,95
4,0	0,577	154,55	1,21	21,98
5,0	0,630	120,19	1,18	23,20
10,0	0,760	67,48	1,11	31,51
20,0	0,849	45,19	1,07	47,18
30,0	0,887	37,74	1,05	61,12
40,0	0,908	33,89	1,04	72,75
50,0	0,922	31,50	1,04	86,17
60,0	0,932	29,87	1,03	97,83
70,0	0,940	28,67	1,03	109,10

Результат интегрирования по второму участку $(\tau_1, 1)$ имеет вид

$$A (a_1 + a_2 \bar{B} - a_3 \bar{A}) + \bar{P}_0 (a_4 \bar{B} - a_5 \bar{A}) = 0, \quad (19)$$

где

$$a_1 = \frac{-8\alpha^3 + 32\alpha^2 - 8\alpha - 12}{3(\alpha + 1)(2\alpha - 1)} - c_1, \quad a_2 = \frac{2\alpha^4 + 7\alpha^3 - 37\alpha^2 + 60}{5\alpha^2(\alpha + 3)(2\alpha + 1)} - c_2,$$

$$a_3 = \frac{\alpha^4 + 5\alpha^3 - 20\alpha^2 - 12\alpha + 48}{6\alpha^2(\alpha + 1)(\alpha + 4)} - c_3, \quad a_4 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha - B}{4\alpha(\alpha + 2)} - c_4,$$

$$a_5 = \frac{\alpha^2 + 3\alpha - 10}{5\alpha(\alpha + 3)} - c_5.$$

С учетом формулы (17) уравнение (19) преобразуется к виду

$$P_0 t_\kappa = \frac{b_2 D}{R^3} \left(n^2 + \frac{\beta^2 m_1^4}{n^6} \right) + \frac{b_3 \rho h R}{n^2 t_\kappa^2}, \quad (20)$$

где коэффициенты b_2 и b_3 зависят от α (таблица 1).

Эксперименты показывают, что волновое число m для оболочек средней длины можно принять равным единице, а число n существенно зависит от скорости нагружения. Для его определения к уравнениям (18) и (20) необходимо добавить условие минимума нагрузки по волновому числу n , которое на основании (18) можно записать в виде

$$P_0 t_\kappa = \frac{2D}{R^3} \left(n^2 - \frac{\beta^2 m_1^4}{n^6} \right). \quad (21)$$

Задача, таким образом, сводится к решению системы алгебраических уравнений (18), (20), (21) относительно неизвестных t_k , n и α .

После преобразований получается уравнение

$$(1 - \bar{a})^2 (1 - 3\bar{a}) = \tilde{P}_0 \bar{a}, \quad (22)$$

$$\text{где } \bar{a} = \frac{2b_1 + b_3 - b_1 b_2}{b_1 b_2 + 2b_1 + 3b_2} = \frac{\beta^2 m_1^4}{n^8}, \quad \tilde{P}_0 = \frac{b_1 \rho h R^{10} P_0^2}{4D^3 \beta^2 m_1^4}. \quad (23)$$

Величина α входит в уравнение (22) сложным образом. Поэтому решить его можно лишь численно.

Найденное значение α подставляется в (23) для определения волнового числа n , а затем в (21) для определения критического времени t_k (или критической нагрузки $P_k = P_0 t_k$). В таблице 2 приведены примеры расчета оболочки с параметрами: $R = 0,09$ м, $\rho = 3,04 \cdot 10^3$ нсек²/м⁴, $h = 8 \cdot 10^{-4}$ м, $l = 0,2$ м, $E = 7,56 \cdot 10^{10}$ ПА для шарнирного опирания и для заделки, результаты сравниваются с экспериментальными и теоретическими данными, имеющимися в литературе.

2.6. Получение расчётных формул

Расчёты показывают (таблица 2), что при значениях параметра $\bar{P}_0 \leq 10$ (что соответствует небольшим скоростям нагружения P_0) решение динамической задачи мало отличается от статического решения. При $\bar{P}_0 > 10$ (большие скорости нагружения) становится возможным упростить уравнения (18), (20), (21) и получить решение в виде аналитических формул. Из таблицы 2 видно, что с

Таблица 2
Расчёты для цилиндрических оболочек

Граничные условия Скорость нагружения	Шарнирное опирание			Заделка			Эксп. [12]		Теор. рез. раб. [6]	
	α	n	$P_0 t_k \cdot 10^{-5} \text{Па}$	α	n	$P_0 t_k \cdot 10^{-5} \text{Па}$	n	$P_0 t_k \cdot 10^{-5} \text{Па}$	n	$P_0 t_k \cdot 10^{-5} \text{Па}$
0	75	6	2,4	510	7	3,6	6	2,5	6	2,4
200	14	6	2,4	312	7	3,6	—	—	—	—
500	2,1	6	2,4	73	7	3,6	—	—	—	—
600	1,6	6	3,3	31	7	4,6	—	—	—	—
1000	1,59	7	4,9	14	9	7,7	—	—	—	—
2000	1,58	8	6,7	2	9	8,0	7	6,5	7	5,2
4700	1,58	9	8,9	1,59	10	10	8	8,1	9	7,4
6500	1,58	10	10,6	1,58	11	11	9	10	10	8,8

ростом скорости нагружения параметр α уменьшается, его значение стабилизируется и становится $\approx 1,6$. При этом $b_1(\alpha) \approx 1300$ (таблица 1). Для решения задач, таким образом, нет необходимости находить α из уравнения (22), а можно воспользоваться только уравнениями (18) и (21), где коэффициент b_1 известен. Пренебрегая в указанных уравнениях величиной $\frac{\beta^2 m_1^4}{n^8}$ по сравнению с единицей (что при высоких скоростях нагружения оправдано), получаем для определения величин $P_0 t_k$ и n следующие зависимости

$$P_0 t_k = \frac{D n^2}{R^3} + \frac{b_1 \rho h R}{n^2 t_k^2}, \quad P_0 t_k = \frac{2 D n^2}{R^3}, \quad (24)$$

из которых находим

$$n^8 = \frac{b_1 \rho h R^{10} P_0^2}{4 D^3} = 432 (1 - \nu^2)^3 b_1 \frac{R^{10} P_0^2}{V^2 E^2 h^8},$$

$$P_0 t_k = \frac{2 D}{R^3} \left(\frac{b_1 \rho h R^{10} P_0^2}{4 D^3} \right)^{1/4} = \frac{c}{\sqrt[4]{1 - \nu^2}} \frac{h}{R} \left(\frac{E P_0 R}{V} \right)^{1/2}, \quad (25)$$

где значение константы $c = 4,5$ при $b_1 = 1300$. Выражение (25) совпадает с аналогичной зависимостью, полученной в работе [12].

Формула для коэффициента динамичности K_d на основании (25) и известной формулы для статической критической нагрузки [6] будет

$$K_{\partial} = \frac{P_0 t_{\kappa}}{P_{\text{ст}}^{\kappa}} \approx 1,2 c \sqrt{1-v^2} \left(\frac{P_0 R}{EV} \cdot \frac{R l^2}{h^3} \right)^{1/2}, \quad P_{\text{ст}}^{\kappa} = \frac{4D\beta^{1/2}m_1}{3^{3/4}R^3}. \quad (26)$$

Можно получить также формулу для критического импульса I_{κ} , связанного с нагрузкой соотношением

$$I_{\kappa} = \int_0^{t_{\kappa}} P(t) dt = \int_0^{t_{\kappa}} P_0 t dt = \frac{P_0 t_{\kappa}^2}{2}.$$

С учетом (25) формула для критического импульса имеет вид

$$I_{\kappa} = \frac{c^2}{2\sqrt[4]{1-v^2}} \cdot \frac{h^2 E}{RV}. \quad (27)$$

В работе [11] к решению системы уравнений (1) предложен другой подход, основанный на их предварительном интегрировании по времени. При этом результаты расчетов для оболочки с теми же параметрами мало отличаются от данных таблицы 2.

Однако следует отметить, что входящая в уравнение (24) величина b_1 , а следовательно, и константа c в формулах (25)–(27) зависят от метода решения уравнения (11), от выбора аппроксимирующей функции (14) и от критерия динамической устойчивости.

Поэтому значение константы рекомендуется уточнить экспериментальным путём. Для уточнения константы можно также воспользоваться экспериментальными данными, имеющимися в литературе [4, 12].

3. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

3.1. *Общий алгоритм решения*

Для расчёта оболочки или пластины на динамическую устойчивость необходимо:

- а) вывести линеаризованные уравнения динамики оболочки (пластины),
- б) проинтегрировать уравнения методом Бубнова по пространственным координатам и получить уравнение вида (6), где коэффициент $\lambda(t)$ зависит от конкретной задачи,
- с) перейти от уравнения (6) к уравнению (11),
- д) получить уравнение типа (18), не вычисляя конкретных значений коэффициента b_1 ,
- е) записать условие минимума критической нагрузки по волновым числам типа уравнения (21),
- ф) решить совместно уравнения (18), (21) и получить расчётные формулы для основных динамических характеристик,
- г) уточнить экспериментальным путём константы, входящие в формулы.

3.2. *Цилиндрическая оболочка при внешнем давлении (другие случаи закрепления торцов)*

Линеаризованные уравнения динамики имеют вид (2). Аппроксимирующие функции выбираются согласно выводам работы [7] в виде

$$\bar{F} = f(t) \sin \frac{\kappa m_1 x}{R} \sin \frac{n y}{R}, \quad \bar{w} = \xi(t) \sin \frac{\kappa m_1 x}{R} \sin \frac{n y}{R},$$

где κ – коэффициент, характеризующий способ закрепления торцов оболочки.

Таблица 3
Результаты расчетов для различных видов закрепления

Граничные условия при $x=0$	Граничные условия при $x=l$	κ	Критическое давление (кПа)			
			$P_0=0$	$10^4 \frac{\kappa Pa}{c}$	$10^5 \frac{\kappa Pa}{c}$	$2 \cdot 10^5 \frac{\kappa Pa}{c}$
<i>Шарнирное опирание</i>		1	240	240	490	670
<i>Жесткое защемление</i>		1,5	357 $\gamma=1,5$	358 1,49	588 1,2	697 1,04
$w=w_{xx}=T_1=0$	$w=w_{xx}=u=0$	1,25	298 $\gamma=1,5$	299 1,25	515 1,05	677 1,01
<i>Свободный край</i>		0,5	119 $\gamma=0,5$	149 0,62	485 0,99	670 1,00
$w=w_x=u=0$	$w_{xxx}=w_{xx}=T_1=S=0$	0,6	142 $\gamma=0,6$	163 0,68	470 0,96	670 1,00
$w_{xxx}=w_x=u=S=0$		0,75	179 $\gamma=0,7$	191 0,8	475 0,97	663 0,991

В таблице 3 приведены значения κ для различных видов закрепления. Для нахождения динамических характеристик достаточно во всех уравнениях пунктов 2.5 и 2.6 заменить m_1 на κm_1 . В частности, формула (25) показывает, что значение

динамической критической нагрузки при высоких скоростях нагружения не зависит от характера закрепления торцов оболочки, т. к. величина m_1 в эту формулу не входит. Коэффициент γ в таблице 3 равен отношению критического давления при заданном виде закрепления к критическому давлению при шарнирном опирании.

3.3. Влияние предварительного статического нагружения

В случае, когда шарнирно опертая цилиндрическая оболочка предварительно нагружена статическим внешним давлением q и статическим осевым сжатием T , характеристическое уравнение (18) принимает вид

$$(P_0 t_k + q)n^2 R^3 + Tm_1^2 R^2 = D \left[(m_1^2 + n^2)^2 + \frac{\beta^2 m_1^4}{(m_1^2 + n^2)^2} \right] + \frac{b_1 \rho h R^4}{t_k^2}.$$

Результаты вычислений критического внешнего давления для предварительно нагруженной оболочки, а также экспериментальные данные получены в [8] и отображены на рисунке 1, где P_k – динамическая критическая нагрузка в случае ненагруженной оболочки, P_* – динамическая критическая нагрузка в случае нагруженной оболочки. Данные рисунка 1 получены для оболочки, предварительно нагруженной статическим внешним давлением q , не превышающим величину критического статического давления $q_{ст}$. Пунктирная линия соответствуют скорости нагружения $P_0 = 490$ МПа/с, сплошная линия – скорости нагружения $P_0 = 880$ МПа/с.

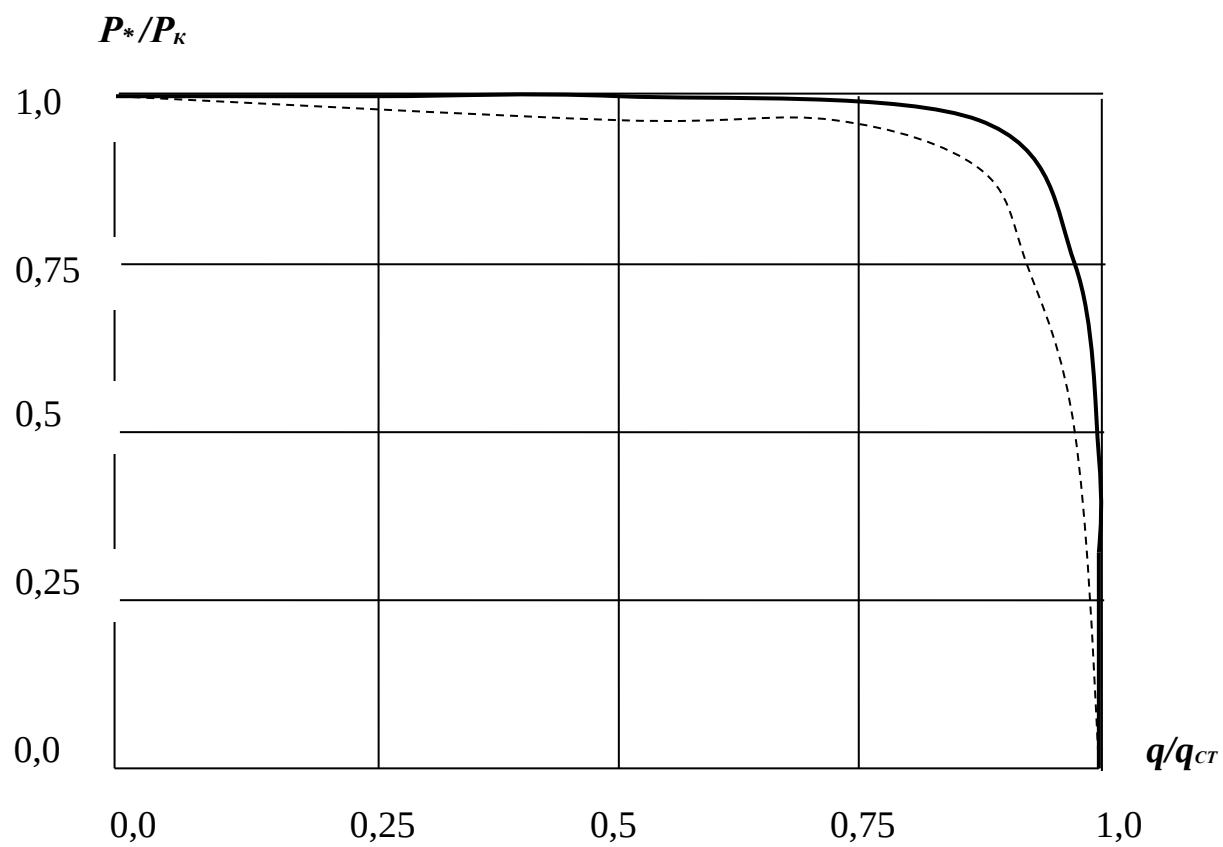


Рисунок 1

Анализ полученных результатов показывает, что предварительное нагружение статическим внешним давлением снижает величину динамической критической нагрузки, однако это влияние уменьшается с возрастанием скорости нагружения.

Аналогичные результаты получаются, если оболочка предварительно нагружена статическим осевым сжатием [8].

3.4. Прямоугольная пластина при динамическом сжатии

Пусть прямоугольная пластина равномерно сжата в одном направлении линейно изменяющимися во времени силами (рисунок 2). Линеаризованное уравнение динамики в данном случае имеет вид [6]

$$D\nabla^4 w - T_{10}w_{xx} - T_{20}w_{yy} - 2S_{10}w_{xy} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где $T_{20} = S_{10} = 0$, $T_{10}/h = -q_0 t$, q_0 – скорость нагружения.

а) В случае **шарнирного опирания** всех сторон пластины аппроксимирующую функцию прогиба можно выбрать в виде

$$w = \xi(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Интегрируя уравнение по пространственным координатам методом Бубнова, приходим к уравнению (6), где

$$\lambda(\tau) = \frac{t_\kappa^2}{\rho} \left[-m_1^2 q_0 t_\kappa \tau + \frac{D}{h} (m_1^2 + n_1^2)^2 \right], \quad m_1 = m\pi/a, \quad n_1 = n\pi/b.$$

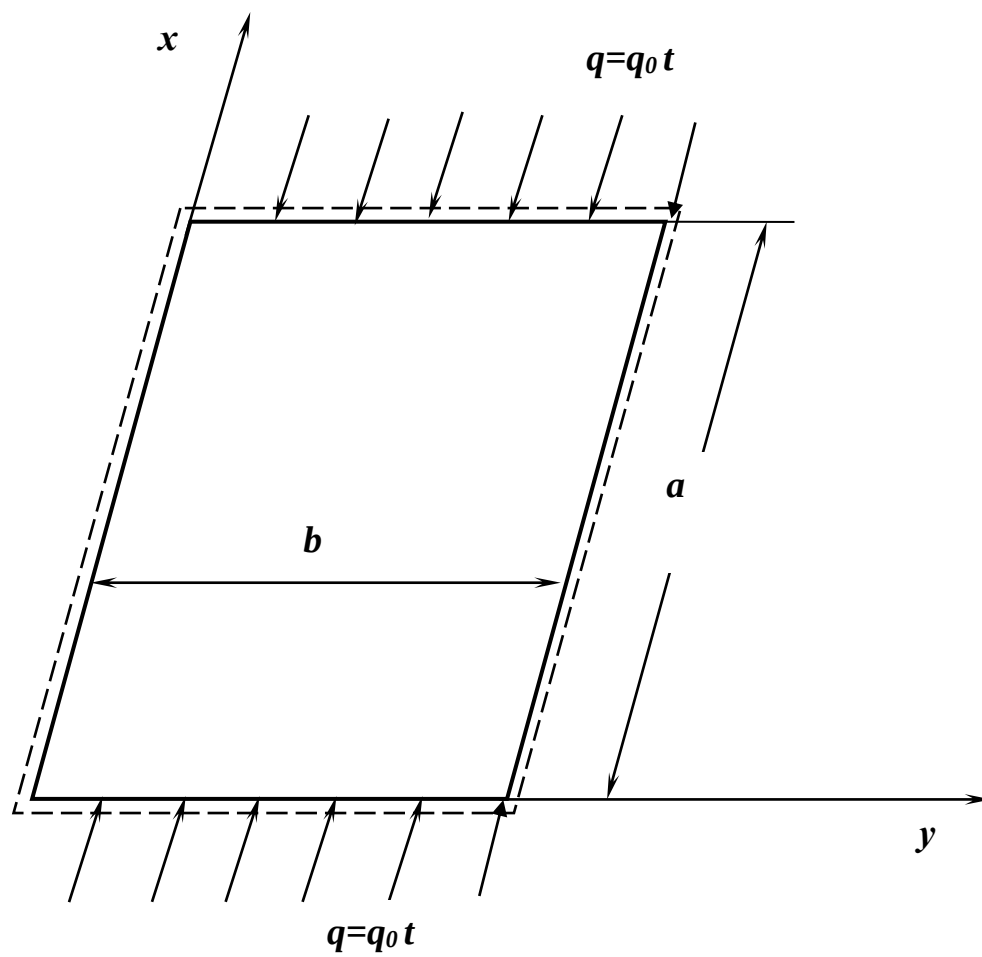


Рисунок 2

Уравнение типа (18) будет иметь вид

$$m_1^2 q_0 t_\kappa = \frac{D}{h} (m_1^2 + n_1^2)^2 + \frac{b_1 \rho}{t_\kappa^2}.$$

В работе [6] указано, что при одностороннем сжатии пластина теряет устойчивость с образованием одной полуволны вдоль y , поэтому $n = 1$ ($n_1 = \pi/b$, $n_1 \ll m_1$), и уравнение может быть записано в виде

$$q_0 t_\kappa = \frac{D}{h \bar{b}^2} (m_1^2 \bar{b}^2 + 2) + \frac{b_1 \rho}{m_1^2 t_\kappa^2}, \quad \bar{b} = \frac{b}{\pi}. \quad (28)$$

Условие минимума нагрузки по волновому числу m_1 примет вид

$$q_0 t_\kappa = \frac{2D}{h \bar{b}^2} (m_1^2 \bar{b}^2 + 1). \quad (29)$$

Известное решение статической задачи приведено в [6]

$$q_{ст}^\kappa = \frac{4D}{\bar{b}^2 h} = q^* E \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad q^* = \frac{\pi^2}{3(1-\nu^2)}, \quad m = 1. \quad (30)$$

Решая совместно уравнения (28) и (29) с учётом (30), можно прийти к приближенному уравнению для коэффициента динамичности

$$K_\partial^4 - K_\partial^3 - \frac{b_1}{S} = 0, \quad (31)$$

$$\text{где } K_{\partial} = q_0 t_k / q_{\text{ст}}^{\kappa}, \quad S = q^{*3} \left(\frac{EV \pi h^3}{q_0 b^4} \right)^2.$$

Численное решение уравнения (31) приводит к результатам, совпадающим с данными работы [6]

$$\text{при } S = 1: \quad K_{\partial} = 5, \quad m = 3,$$

$$\text{при } S = 10: \quad K_{\partial} = 3, \quad m = 2,$$

число m определяется из (29) с учётом (30), т.е. из условия

$$m^2 = (2K_{\partial} - 1) \left(\frac{a}{b} \right)^2. \quad (32)$$

При достаточно высоких скоростях нагружения ($S < 1$) $b_1 = 1300$ и из (31) следует

$$K_{\partial} \approx \left(\frac{b_1}{S} \right)^{1/4} = c_1 \left(\frac{q_0 b}{EV} \cdot \frac{b^3}{h^3} \right)^{1/2} (1 - \nu^2)^{3/4}, \quad c_1 = \frac{\sqrt[4]{27b_1}}{\pi^2} \approx 1,5. \quad (33)$$

По найденному значению K_{∂} с помощью (32) определяется волновое число m , а затем с помощью (29) динамическая критическая нагрузка $q_0 t_k$.

Значение константы c_1 в формуле (33) рекомендуется уточнить экспериментально или с помощью данных, имеющихся в литературе [6].

б) В случае, когда пластинка **жёстко закреплена** вдоль незагруженных сторон, а нагруженные стороны закреплены шарнирно, аппроксимирующая функция прогиба может иметь вид

$$w = \xi(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}.$$

Коэффициент $\lambda(\tau)$ в уравнении (6) будет

$$\lambda(\tau) = \frac{t_\kappa^2}{3\rho \bar{b}^4} \left[-3m_1^2 \bar{b}^4 q_0 t_\kappa \tau + \frac{D}{h} (3m_1^4 \bar{b}^4 + 8m_1^2 \bar{b}^2 + 16) \right],$$

$$m_1 = m\pi/a,$$

что приводит к характеристическому уравнению

$$m_1^2 \bar{b}^4 q_0 t_\kappa = \frac{D}{h} \left(m_1^4 \bar{b}^4 + \frac{8}{3} m_1^2 \bar{b}^2 + \frac{16}{3} \right) + \frac{b_1 \rho \bar{b}^4}{t_\kappa^2}. \quad (34)$$

Решение статической задачи:

$$m^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{b} \right)^2, \quad q_{\text{ст}}^\kappa \approx \frac{7D}{\bar{b}^2 h} = \frac{7}{4} q^* E \left(\frac{h}{\bar{b}} \right)^2. \quad (35)$$

К уравнению (34) добавляется условие минимума нагрузки по волновому числу m_1

$$q_0 t_\kappa = \frac{2D}{\bar{b}^2 h} \left(m_1^2 \bar{b}^2 + \frac{4}{3} \right). \quad (36)$$

Совместное решение уравнений (34) и (36) с учётом (35) приводит к уравнению для коэффициента динамичности

$$K_\partial^4 - \frac{16}{21} K_\partial^3 - \frac{128}{441} K_\partial^2 - \frac{b_1}{S} \left(\frac{4}{7} \right)^4 = 0, \quad (37)$$

которое решается численно.

При высоких скоростях нагружения ($S \leq 1$) можно положить

$$K_{\partial} = \frac{4}{7} \left(\frac{b_1}{S} \right)^{1/4}. \quad (38)$$

Сравнивая выражения (38) и (33) с учётом (35) и (30), можно заметить, что значение динамической критической нагрузки при высоких скоростях нагружения не зависит от характера закрепления сторон пластинки.

Таблица 4

Результаты численных расчётов для прямоугольной пластинки

Условие закрепления \ Скорость нагружения	$q_0 \cdot 10^{-5}$ Па/с	0	100	1000	2000
Шарнирное опирание	$q_{0t_k} \cdot 10^{-5}$ Па	2,81	7,45	21,6	30,24
	m	1	2	4	5
Жёсткое защемление	$q_{0t_k} \cdot 10^{-5}$ Па	4,92	8,26	22,2	30,4
	m	2	2	4	5
Свободный край	$q_{0t_k} \cdot 10^{-5}$ Па	1,00	6,44	20,4	28,81
	m	1	2	4	5

В таблице 4 приведены результаты численных расчётов пластинки с параметрами: $a = 0,1$ м, $b = 0,2$ м, $V = 5 \cdot 10^3$ м/сек, $E = 7,56 \cdot 10^{10}$ Па, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ м, $\nu = 0,3$ для различных условий закрепления сторон, при этом в случае, когда сторона $y = b$ свободна, а остальные стороны закреплены шарнирно, аппроксимирующая функция прогиба выбирается в виде

$$w = \xi(t) \sin \frac{m\pi x}{a} y.$$

3.5. Круговая усеченная коническая оболочка при внешнем давлении

Линеаризованные уравнения динамики оболочки (рисунок 3) имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
 D\nabla^2\nabla^2\bar{w} + \frac{1}{r^4} \operatorname{ctg}^2\gamma \left(2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\varphi_1^2} + \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot \bar{w} \right) - \frac{Eh\operatorname{ctg}^2\gamma}{r} \frac{\partial^2\bar{F}}{\partial r^2} - T_{10} \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r^2} - \\
 - T_{10} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\bar{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\varphi_1^2} + \operatorname{ctg}^2\gamma \frac{\bar{w}}{r^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2} = 0, \\
 r\nabla^2\nabla^2\bar{F} + \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Область применимости уравнений ограничивается неравенством $n_1^4 \geq \operatorname{ctg}^2\gamma$, где $n_1 = n/\sin\gamma$.

Докритические усилия можно определить из соотношений

$$T_1 = -\frac{P(t) r \operatorname{tg}\gamma}{2}, \quad T_{20} = -P(t) r \operatorname{tg}\gamma.$$

К системе (39) применяется процедура Бубнова, при этом для свободно опертой оболочки аппроксимирующие функции можно выбрать в виде

$$\bar{F} = f(t) e^{\mu z} \cos n_1\varphi_1 \sin m_1 z, \quad \bar{w} = \xi(t) e^{\mu z} \cos n_1\varphi_1 \sin m_1 z,$$

где введены обозначения

$$z = \ln r/r_0; \quad z_1 = \ln r_1/r_0; \quad m_1 = m\pi/z,$$

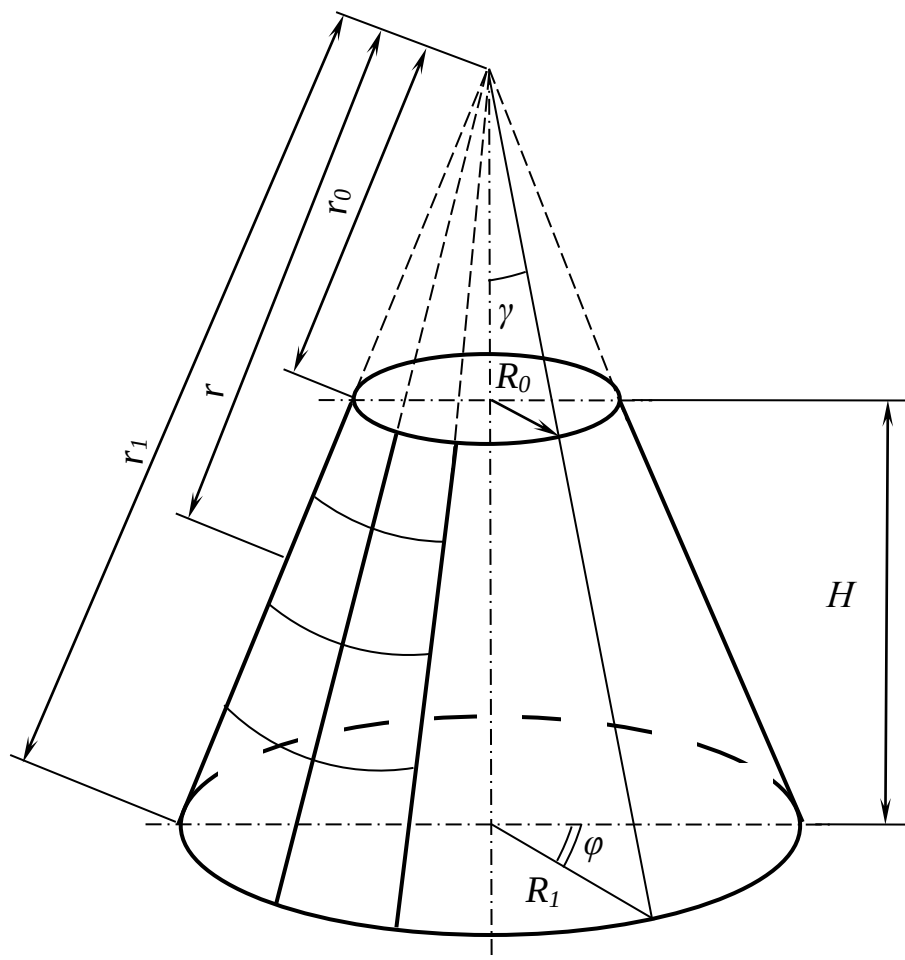


Рисунок 3

μ – параметр, при выборе которого следует пользоваться рекомендациями работы [1], а именно:

при	$z_1 < 2,7$	$\mu = 1,2,$
при	$2,7 \leq z_1 \leq 3,5$	$\mu = 1,6,$
при	$z_1 > 3,5$	$\mu = 2.$

После интегрирования система (39) сводится к уравнению (6), коэффициент $\lambda(\tau)$ имеет вид

$$\lambda(\tau) = \frac{t_\kappa^2}{\rho h r_1^4} \left[-P(t_\kappa \tau) r_1^3 n_1^2 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma + D \left(n_1^4 \theta + \frac{\eta_1^2 m_2^4}{n_1^4} \right) \right],$$

где приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \frac{E r_1^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}{D}, \quad m_2^4 = (m_1^2 + \mu^2)^2, \\ \eta_1^2 &= \frac{\eta^2 (1 - e^{-2\mu z_1}) (m_1^2 + (\mu + 1)^2) (\mu + 1)}{(1 - e^{-2(\mu+1) z_1}) (m_1^2 + \mu^2) \mu}, \\ \bar{\theta} &= \frac{(1 - e^{-(2\mu+1) z_1}) (m_1^2 + (\mu + 1)^2) (\mu + 1)}{(1 - e^{-2(\mu+1) z_1}) (m_1^2 + (\mu + 0.5)^2) (\mu + 0.5)}, \\ \theta &= \frac{(1 - e^{-2(\mu-1) z_1}) (m_1^2 + (\mu + 1)^2) (\mu + 1)}{(1 - e^{-2(\mu+1) z_1}) (m_1^2 + (\mu - 1)^2) (\mu - 1)}. \end{aligned}$$

Уравнение типа (18) имеет вид

$$P(t_k) = \frac{D}{r_1^3 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma} \left(n_1^2 \theta + \frac{\eta_1^2 \cdot m_2^4}{n_1^6} \right) + \frac{b_1 \rho h r_1}{\bar{\theta} n_1^2 t_k^2 \operatorname{tg} \gamma}. \quad (40)$$

Условие минимума нагрузки по волновому числу n_1 записывается в виде

$$P(t_k) = \frac{2D}{r_1^3 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma} \left(n_1^2 \theta - \frac{\eta_1^2 m_2^4}{n^6} \right) \quad (41)$$

Совместное решение уравнений (40) и (41) позволяет находить значение критических нагрузок и волновых чисел для любого закона изменения давления во времени.

а) Линейный закон изменения давления ($P = P_0 t$)

Левые части уравнений (40) и (41) приобретают вид $P(t_k) = P_0 t_k$, и задача сводится к кубическому уравнению

$$(1 - 3\bar{a}) \cdot (1 - \bar{a})^2 = \bar{P}_0 \bar{a} \quad (42)$$

где $\bar{a} = (\eta_1^2 m_2^4) / (n_1^8 \theta)$, $\bar{P}_0 = (b_1 \rho h r_1^{10} P_0^2 \bar{\theta}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma) / (4D^3 \eta_1^2 m_2^4 \theta^2)$.

Уравнение (42) решается численно или при помощи формулы Кардана. По найденному значению $\bar{a}$ определяется волновое число n_1 , а затем из формулы (41) – динамическая критическая нагрузка.

При достаточно высоких скоростях нагружения ($\bar{P}_0 > 10$) решение уравнения (42) упрощается и можно положить

$$\bar{a} = \frac{1}{\bar{P}_0}, \quad \text{откуда} \quad n_1^8 = \frac{\bar{P}_0 \eta_1^2 m_2^4}{\theta} = \frac{b_1 \rho h r_1^{10} P_0^2 \bar{\theta}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{4D^3 \theta^3}. \quad (43)$$

Для динамической критической нагрузки получается формула

$$P_{\text{дин}} = \frac{2D n_1^2 \theta}{r_1^3 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma} = c_2 \left[\frac{E^2 h^4 P_0^2 \theta}{(1-\nu^2) V^2 r_1^2 \bar{\theta}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} \right]^{1/4}, \quad c_2 = \sqrt[4]{\frac{b_1}{3}} \approx 4. \quad (44)$$

Чтобы получить расчётную формулу для коэффициента динамичности, необходимо в уравнении (40) перейти к пределу при $t_k \rightarrow \infty$, $P_0 \rightarrow 0$ и найти решение статической задачи

$$P_{\text{ст}} = \frac{4}{3^{3/4}} \cdot \frac{D \eta_1^{1/2} m_2 \theta^{3/4}}{r_1^3 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma},$$

где параметр μ для величин θ , $\bar{\theta}$, m_2 и η_1 выбирается согласно таблице 5.

Таблица 5
Зависимость параметра μ от z

z	0,18	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2	2,5	3
$\mu=\mu_{\text{ст}}$	2,05	2,1	2,3	2,45	2,5	2,6	2,65	2,7	2,8	4,0

Формула для коэффициента динамичности имеет вид

$$K_{\partial} = \frac{P_0 t_k}{P_{\text{ст}}} = 3,6 c_2 f_{\partial}(z_1) (1-\nu^2)^{1/2} \left(\frac{r_1^4 P_0 z_1^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{V E h^3} \right)^{1/2}, \quad (45)$$

где $f_{\partial}(z_1) = \frac{\bar{\theta}_{\text{ст}}}{\theta_{\text{ст}}} \sqrt{\frac{\theta}{\bar{\theta} f_{\text{ст}}}}, \quad f_{\text{ст}} = \frac{\eta_{1\text{ст}}}{\eta_{\text{ст}}} \left(1 + \frac{\mu^2 z_1^2}{\pi^2} \right).$

Величины с индексом «ст» соответствуют статическому значению параметра μ (таблица 5).

Формула для критического импульса получается в виде

$$I_{\kappa} = \frac{P_0 t_{\kappa}^2}{2} = \frac{c_2}{2} \frac{E h^2 \theta^{1/2}}{\sqrt{1-\nu^2} V r_1 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma}. \quad (46)$$

Входящая в формулы (44), (45), (46) константа c_2 уточняется экспериментальным путём.

б) Квадратичный закон изменения давления ($P = P_1 t^2$)

Левые части уравнений (40) и (41) имеют вид $P(t_k) = P_1 t_k^2$. В этом случае для определения волнового числа получается уравнение

$$n_1^8 \theta - \bar{P}_1 n_1^5 + \eta_1^2 m_2^4 = 0, \quad \bar{P}_1 = \frac{(b_1 P_1 r_1^7 \rho h \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma)^{1/2}}{D}, \quad (47)$$

решая которое при достаточно высоких скоростях нагружения ($\bar{P}_1 \geq 100$) с незначительной погрешностью находим

$$n_1^3 = \bar{P}_1 / \theta. \quad (48)$$

Тогда формула для динамической критической нагрузки будет

$$P_{дин} = P_1 t_k^2 = c_3 \left[\frac{E^2 h^4 P_1 \theta}{(1-\nu^2) V^2 r_1^2 \bar{\theta}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} \right]^{1/3}, \quad c_3 = 2 \sqrt[3]{\frac{b_1}{12}}. \quad (49)$$

Формула для критического импульса получается в виде

$$I_{\kappa} = \frac{P_1 t_{\kappa}^3}{3} = \frac{c_3^{3/2}}{3} \frac{E h^2 \theta^{1/2}}{\sqrt{1-\nu^2} V r_1 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma}. \quad (50)$$

в) Кубический закон изменения давления ($P = P_2 t^3$)

Уравнение для волнового числа имеет вид

$$n_1^8 \left(\theta + \frac{\eta_1^2 m_2^4}{n_1^8} \right)^{5/2} = \bar{P}_2 = \frac{P_2 r_1^9 b_1^{3/2} (\rho h)^{3/2} \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma}{D^{5/2}}, \quad (51)$$

из которого для достаточно высоких скоростей нагружения можно получить

$$n_1^8 = \bar{P}_2 / \theta^{5/2}, \quad (52)$$

$$P_{\text{дин.}} = P_2 t_{\kappa}^3 = c_4 \left[\frac{E^3 \sqrt{\theta} h^6 P_2}{(1-\nu^2)^{3/2} V^3 r_1^3 \bar{\theta}^3 \operatorname{tg}^3 \gamma} \right]^{1/4}, \quad c_4 = 2 \left(\frac{b_1}{12} \right)^{3/8}. \quad (53)$$

Формула для критического импульса принимает вид

$$I_{\kappa} = \frac{P_2 t_{\kappa}^4}{4} = \frac{c_4^{4/3}}{4} \frac{E h^2 \theta^{1/2}}{\sqrt{1-\nu^2} V r_1 \bar{\theta} \operatorname{tg} \gamma} \quad (54)$$

Сравнение формул (46), (50) и (54) показывает, что при достаточно высоких скоростях нагружения величина критического импульса не зависит от закона изменения давления во времени и для всех законов нагружения имеет вид

$$I_{\kappa} = c_0 \frac{E h^2 \theta^{1/2}}{\sqrt{1-\nu^2} V r_1 \overline{\theta} \operatorname{tg} \gamma} = \frac{c_0 f(z_1) E h^2}{\sqrt{1-\nu^2} V r_1 \operatorname{tg} \gamma}, \quad (55)$$

где

$$f(z_1) = \frac{\sqrt{\theta}}{\overline{\theta}}, \quad (56)$$

c_0 – константа, подлежащая определению экспериментальным путем.

3.6. Пологая цилиндрическая панель под действием поперечной нагрузки

Структурные формулы для задач динамической устойчивости могут быть получены и другим путём. Покажем это на примере задачи динамической устойчивости пологих цилиндрических панелей.

Уравнение движения (6) в этом случае имеет вид [3]

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega^2 \left(1 + \frac{P(t)}{P_{\text{ст}}} \right) \xi = 0, \quad (57)$$

где ω – собственная частота оболочки, соответствующая рассматриваемой форме потери устойчивости, $P(t)$ – параметр нагрузки, $P_{\text{ст}}$ – критическое значение нагрузки при статическом нагружении.

После перехода к безразмерной переменной $\tau = t\omega$, уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \left(1 + \frac{P(t)}{P_{\text{ст}}} \right) \xi = 0. \quad (58)$$

Анализ уравнения (58) показывает, что структурная формула для коэффициента динамичности устанавливает связь между динамической неустойчивостью, колебаниями и устойчивостью при статических нагрузках. При этом оказывается, что изменение формы, размеров оболочки, условий закрепления и т. п. влияет на процесс динамической потери устойчивости лишь постольку, поскольку при этом изменяется спектр собственных частот и критические нагрузки в статике. Иначе говоря, влияние конкретных свойств геометрии оболочки на её устойчивость при динамических нагрузках в достаточной мере учитывается такими её интегральными характеристиками, как ω и $P_{ст}$. Поэтому формула для коэффициента динамичности может быть записана в виде

$$K_d = \Phi(\omega, P_{ст}), \quad (59)$$

где Φ – функция, определяемая путём обработки экспериментальных данных.

3.7. Произвольный закон нагружения

Для приближенных расчётов при произвольном законе нагружения предлагается графический метод определения критического времени t_k , т. е. момента потери устойчивости.

Поскольку геометрический смысл величины критического импульса – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью t , прямыми $t = 0$ и $t = t_k$ и кривой зависимости нагрузки от времени $P(t)$ (рисунок 4), то на основе предыдущих рассуждений делается вывод, что для импульсов различной формы эти площади примерно одинаковы.

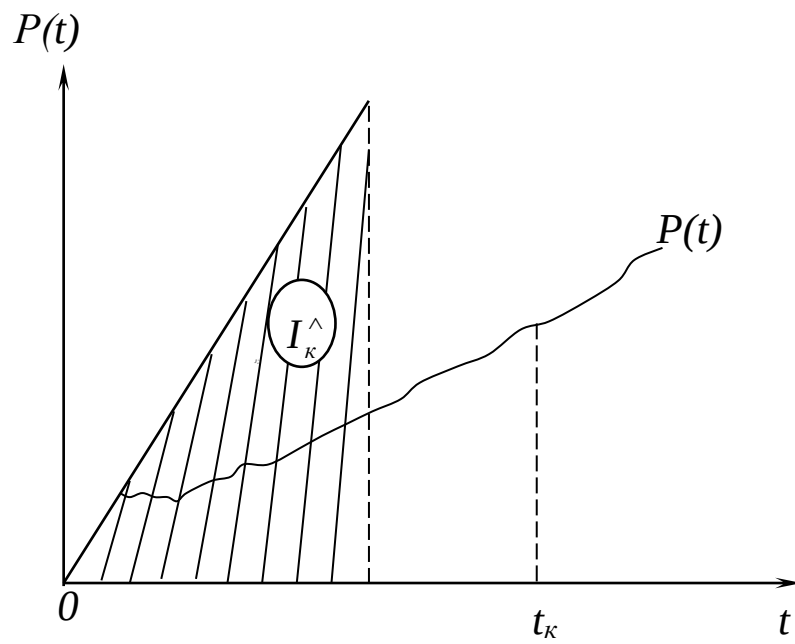


Рисунок 4

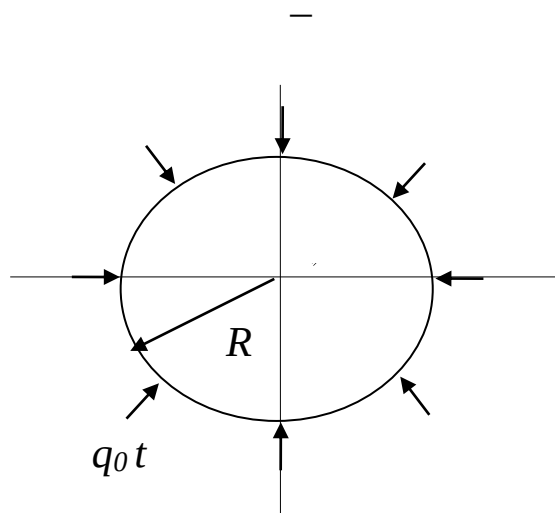


Рисунок 5

Для определения критического времени t_k достаточно найти величину критического импульса $I_k^\wedge$ для линейного закона нагружения, построить график функции $P(t)$ и подобрать графически величину t_k таким образом, чтобы площадь криволинейной трапеции оказалась равной $I_k^\wedge$.

3.8. Круглая пластина при динамическом сжатии

В случае, когда сплошная круглая пластина радиуса R сжимается усилиями $q_0 t$, равномерно распределенными по контуру (рисунок 5), имеем

$$T_{r0} = T_{\varphi 0} = -q_0 t h, \quad T_{r\varphi} = 0,$$

где r, φ – полярные координаты.

Линеаризованное уравнение динамики в рассматриваемом случае имеет вид [11]

$$D\Delta\Delta w + q_0 t \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (60)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

Аппроксимирующая функция прогиба выбирается согласно рекомендациям работы [11]

$$w = \xi(t) w_{mn}(r) \cos n\varphi, \quad (61)$$

где функция $w_{mn}(r)$ зависит от граничных условий.

а) Если пластина **защемлена** по контуру, то должны выполняться условия

$$w_{mn} = \frac{dw_{mn}}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R,$$

согласно которым можно положить

$$w_{mn} = J_n(\alpha_{n+1,m}) \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^n \right],$$

где $J_n(r)$ – функция Бесселя n -го порядка, $\alpha_{n+1,m}$ – m -й корень уравнения

$$J_{n+1}(r) = 0,$$

m – число полуволн вдоль радиуса пластины, $\alpha_{1,1} = 3,83$.

Интегрирование уравнения (60) по Бубнову приводит к характеристическому уравнению, аналогичному уравнению (18)

$$q_0 t_k = \alpha_{n,m}^2 \frac{D}{R^2 h} + \frac{b_1 \rho R^2}{\alpha_{n,m}^2 t_k^2}. \quad (62)$$

В предельном случае статического нагружения ($t_k \rightarrow \infty$) справедлива формула

$$q_{\text{ст}}^k = \alpha_{1,1}^2 \frac{D}{R^2 h} = 14,68 \frac{D}{R^2 h}. \quad (63)$$

Минимизируя в (62) критическое время по волновому числу $\alpha_{n,m}$ и учитывая соотношение (63), получаем при $b_1 = 1300$ формулы для критической нагрузки, коэффициента динамичности и критического импульса

$$q_0 t_k = 4,71 \left(\frac{q_0 E h}{V} \right)^{1/2}, \quad K_\delta = 3,5 \left(\frac{R}{h} \right)^2 \left(\frac{q_0 h}{E V} \right)^{1/2}.$$

$$I_k = 11,1 \left(\frac{E h}{V} \right).$$

б) Если контур пластины **оперт**, должны выполняться условия

$$w_{mn} = \frac{d^2 w_{mn}}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_{mn}}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R,$$

и функция $w_{mn}(r)$ может быть выбрана в виде

$$w_{mn} = J_n(\beta_{n,m}) \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^n \right],$$

где $\beta_{n,m}$ – корень уравнения

$$r J_n(r) - (1 - \nu) J_{n+1}(r) = 0,$$

$$\beta_{0,1} = 2,047, \quad \nu = 0,3.$$

Интегрирование уравнения (1) по Бубнову приводит в этом случае к характеристическому уравнению

$$q_0 t_k = \beta_{n,m}^2 \frac{D}{R^2} + \frac{b_1 \rho h R^2}{\beta_{n,m}^2 t_k^2} \frac{(\beta_{n,m}^2 - 2 - 2\nu^2)}{(\beta_{n,m}^2 - 1 + \nu^2)},$$

из которого при достаточно больших скоростях нагружения получаем

$$q_{\text{ст}}^k = \beta_{0,1}^2 \frac{D}{R^2 h} = 4,19 \frac{D}{R^2 h}, \quad q_0 t_k = 3,96 \left(\frac{q_0 E h}{V} \right)^{1/2},$$

$$I_k = 77,84 \left(\frac{E h}{V} \right).$$

Анализ полученных формул показывает, что при высоких скоростях нагружения величина динамической критической нагрузки не зависит от радиуса пластины, но, в отличие от случая прямоугольных пластин, существенно зависит от граничных условий.

3.9. Кольцевой сектор при равномерном сжатии

Рассматриваемая задача (рисунок 6) возникает в процессе производства конических оболочек методом «свертывания».

Для самоуравновешенности внешних сил необходимо на контуре дуги радиуса R_2 приложить сжимающие усилия

$$q_r = \frac{R_2 - R_1}{R_2} q_\varphi, \quad q_\varphi = q_0 t.$$

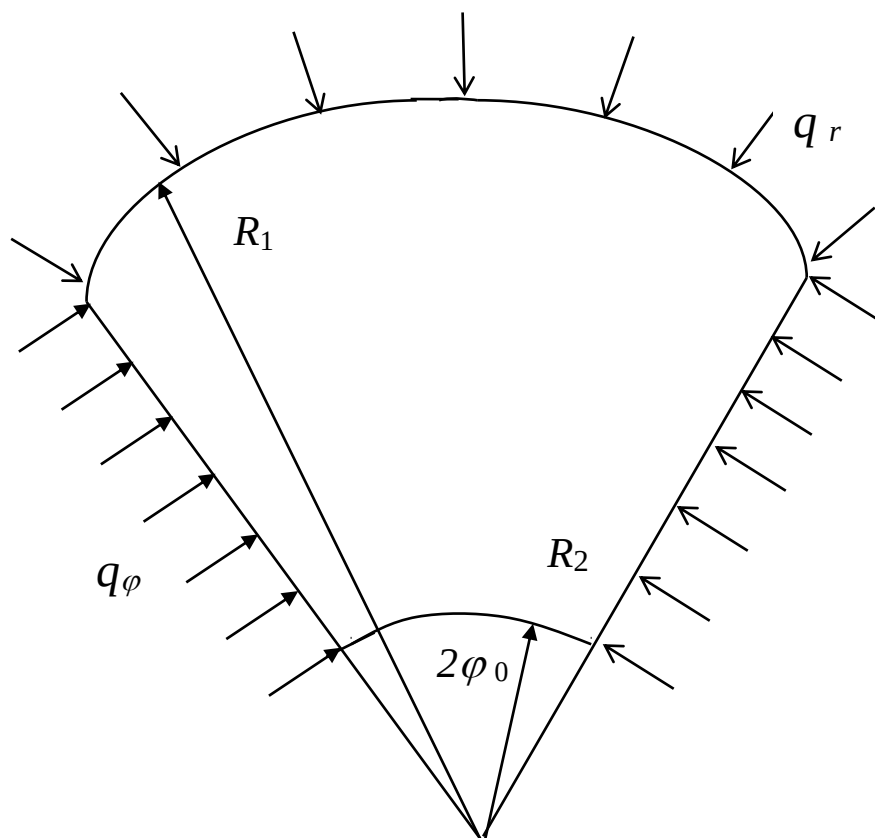


Рисунок 6

При условии **шарнирного опирания** на радиальных кромках $\varphi = \pm \varphi_0$ аппроксимирующая функция прогиба может быть выбрана в виде

$$w = \xi(t) r \sin n_1 \varphi, \quad n_1 = n\pi / \varphi_0,$$

что, как показано в [11], приводит после интегрирования по времени и координатам к характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q_0 t_k (R_1 - R_2) [n_1^2 (R_1 + R_2) + (R_1 - R_2)] = \\ = \frac{D}{h} (n_1^2 - 1)^2 \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{b_1 \rho (R_1^4 - R_2^4)}{t_k^2}. \end{aligned}$$

Минимизируя в этом уравнении критическое время t_k по волновому числу n_1 , получаем

$$q_0 t_k = \frac{4D(n_1^2 - 1) \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)}{h(R_1^2 - R_2^2)}.$$

Для критической статической нагрузки получаем формулу

$$q_{\text{ст}}^k = \frac{2D(\bar{n}_1^2 - 1)^2 \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)}{h(R_1 - R_2) [\bar{n}_1^2 (R_1 + R_2) + (R_1 - R_2)]}, \quad \bar{n}_1 = \pi / 2\varphi_0,$$

из которой для пластины с углом $2\varphi_0 = \pi$ следует вывод о невозможности перехода в изогнутое состояние под равномерной статической нагрузкой. В динамике процесс «свертывания» при

таком угле возможен, так как при достаточно высоких скоростях нагружения справедлива формула [11]

$$q_0 t_k = 3,96 \left(\frac{q_0 E h}{V} \right)^{1/2} \left[\frac{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) (R_1^2 + R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \right]^{1/4}.$$

3.10. Кольцевая пластина при динамическом сдвиге

В случае, когда сдвигающее усилие линейно зависит от времени, линеаризованное уравнение динамики имеет вид [11]

$$D \Delta \Delta w - \frac{2 T_{r\varphi}}{r^2} r_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где $T_{r\varphi} = T_0 t$ – погонное сдвигающее усилие в сечении $r = r_0$ (r_0, r_1 – внутренний и внешний радиусы пластины), T_0 – скорость изменения сдвигающего усилия.

Аппроксимирующая функция для случая шарнирного опирания по внутреннему и внешнему контурам пластины может быть выбрана в виде

$$w = \xi(t) \sin \frac{\pi z}{z_1} \sin n(\varphi - kz),$$

где $z = \ln(r/r_0)$, $z_1 = \ln(r_1/r_0)$, n – число полуволн вдоль окружности, k – тангенс угла наклона складки к радиусу кольца.

Интегрирование по Бубнову приводит к следующему характеристическому уравнению [11]

$$n_1^2 k S_k = n_1^4 (k^2 + 1)^2 + 6n_1^2 k^2 + 1 + 2n_1^2 + \alpha^{-2} + \\ + \alpha^{-1} (2 + 2n_1^2 k^2 - 2n_1^2) + S_0^2 S_k^{-2}, \quad (64)$$

где введены обозначения

$$S_k = \frac{2T_0 t_k r_0^2}{\alpha^2 D}, \quad S_0 = \frac{T_0}{EV} \left(\frac{r_0}{h} \right)^4 (e^{4z_1} - 1) \left(\frac{z_1}{z_1^2 + \pi^2} \right)^{1/2}, \\ n_1^2 = n^2 \alpha^{-2}, \quad \alpha = \pi / z_1.$$

Минимизируя в (64) критическое усилие S_k по волновому числу n_1 и параметру k , приходим к уравнениям

$$n_1^2 k S_k = 2n_1^4 (k^2 + 1)^2 + 6n_1^2 k^2 + 2n_1^2 \alpha^{-1} (k^2 - 1), \\ n_1^2 k S_k = 4n_1^4 (k^2 + 1)^4 + 12n_1^2 k^2 + 2n_1^2 \alpha^{-1}.$$

Решая полученную систему уравнений, получим зависимости усилия S_k и волнового числа n_1 от параметра k

$$S_k = 8 \cdot \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2} \cdot \frac{k}{1 - k^2}, \\ n^2 = n_1^2 \alpha^2 = \frac{(3k^2 - 1)\alpha^2 + (k^2 + 1)}{1 - k^4}.$$

Подставляя полученные зависимости в уравнение (64), приходим к уравнению для определения параметра k

$$k^4(2k^2 - 1) + \alpha^{-2}(2k^2 + k^4 - 1)k^2 + \alpha^{-4}k^4 = \bar{S}_0^2(1 - k^8),$$

$$\bar{S}_0 = \frac{S_0 \alpha^2}{16(1 + \alpha^2)},$$

которое решается численно.

Таблица 6
Результаты численных расчетов

r_1/r_0	$\bar{S}_0$	0	1	3	10
4/3	T_k	11,34	13,72	18,58	29,87
	n	9	11	14	19
	k^2	0,50	0,56	0,65	0,76
2	T_k	11,41	13,82	18,98	29,97
	n	4	5	6	8
	k^2	0,49	0,55	0,64	0,75
4	T_k	11,88	14,36	19,91	32,01
	n	2	2	3	4
	k^2	0,45	0,52	0,62	0,74

В таблице 6 приведены результаты расчетов критических усилий, волновых чисел и угла наклона вмятин для пластин с различным отношением внешнего радиуса кольца к внутреннему при некоторых скоростях нагружения. При малых скоростях

нагружения полученные результаты совпадают с соответствующими значениями для статической задачи, которая подробно исследовалась в [16]. При малых значениях отношения r_1/r_0 ($\ln(r_1/r_0) < 2$) результаты совпадают с соответствующими значениями для задачи устойчивости прямоугольной пластины при динамическом сдвиге.

3.11. Подкрепленная цилиндрическая оболочка

Для решения задач устойчивости подкрепленных оболочек существует два подхода. В первом случае подкрепленную оболочку рассматривают как однородную ортотропную. Другой подход заключается в том, что отдельно интегрируются уравнения устойчивости гладкой оболочки и подкрепления, а затем выполняются условия стыковки. В отличие от первого, второй подход не получил широкого распространения при решении задач динамической устойчивости. Однако с его помощью можно получить практически важные результаты.

Пусть круговая цилиндрическая оболочка подкреплена в середине шпангоутом и нагружена динамическим внешним давлением. Для расчета такой оболочки можно воспользоваться методикой, предложенной в [2], где сделаны следующие предположения:

1. Поведение обшивки описывается уравнениями полубезмоментной теории.

2. Центры тяжести поперечных сечений шпангоута лежат в срединной поверхности обшивки, оси шпангоута нерастяжимы.

3. В решении учитывается только изгибная жесткость шпангоута в своей плоскости.

4. Ширина шпангоута пренебрежимо мала по сравнению с длиной оболочки.

Изгиб кругового шпангоута с нерастяжимой осью под действием распределенной касательной нагрузки интенсивности T^* описывается уравнением

$$(EI)_{\text{ш}} \left(\frac{d^6 V}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 V}{d\varphi^4} + \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right) = -R^4 T^*,$$

где $(EI)_{\text{ш}}$ – изгибная жесткость шпангоута, V – окружные перемещения точек осевой линии шпангоута. Передаваемая на шпангоут касательная нагрузка равна разности сдвигающих сил на участках обшивки, прилегающих слева S_- и справа S_+ к шпангоуту

$$T^* = S_- - S_+.$$

Потеря устойчивости обшивки описывается уравнением

$$Eh \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{D}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{P_0 t}{R^3} \left[\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right] + \frac{\rho h}{R^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^4 \partial t^2} = 0, \quad \varphi = y/R.$$

Здесь Φ – функция перемещений, определяющая перемещения по формулам

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{R \partial \varphi^2}, \quad w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

Решение уравнения следует искать в виде

$$\Phi = \zeta(\tau) A(x) \cos n\varphi.$$

После интегрирования по времени приходим к уравнению

$$A^{IV} - \left(\frac{\lambda}{R}\right)^4 A = 0,$$

$$\lambda^4 = \frac{R n^4 (n^2 - 1)}{E h} \left[P_0 t_k - \frac{(n^2 - 1) D}{R^3} - \frac{b_1 \rho h R}{(n^2 - 1) t_k^2} \right].$$

Выражая касательную нагрузку, передаваемую на шпангоут, через функцию перемещений, можно найти перемещения точек оси шпангоута [11]. При этом должны выполняться следующие четыре условия:

- а) равенство окружных перемещений участков обшивки, прилегающих к шпангоуту слева и справа;
- б) равенство осевых перемещений;
- с) равенство осевых сил в обшивке слева и справа;
- д) равенство окружных перемещений точек оси шпангоута соответствующим окружным перемещениям обшивки.

Выполнение всех стыковочных условий приводит к системе линейных однородных уравнений [11], равенство нулю определителя которой дает характеристическое уравнение для определения параметра λ .

Если оболочка свободна оперта по обоим торцам, то уравнение для параметра λ распадается на два, одно из которых соответствует местной потере устойчивости, когда обшивка теряет устойчивость, а шпангоут сохраняет круговую форму (критическое давление P_m не зависит от жесткости шпангоута). Второе уравнение соответствует общей потере устойчивости, когда оболочка теряет устойчивость вместе с подкреплением. Критическое давление $P_{об} = P_0 t_k$ находится из уравнения

$$P_0 t_k = \frac{E h \lambda^4}{R n^4 (n^2 - 1)} + \frac{D(n^2 - 1)}{R^3} + \frac{b_1 \rho h R P_0^2}{(n^2 - 1)(P_0 t_k)^2},$$

в котором значение параметра λ зависит от жесткости шпангоута и волнового числа n .

В таблице 7 приведены результаты расчетов [11] отношения критической нагрузки общей потери устойчивости к критической нагрузке местной потери устойчивости в зависимости от скорости нагружения для оболочки с параметрами: $R/l=1$, $R/h=500$, $P^*=936 P_0 R^5 / V E h^4$.

Во второй строке таблицы 7 приведены значения критической жесткости шпангоута $(EI)_k$. Если жесткость шпангоута меньше критической, то происходит общая потеря устойчивости. Увеличение жесткости шпангоута приводит к повышению критической нагрузки. При достижении жесткости шпангоута критического значения происходит смена форм устойчивости с общей на местную. Дальнейшее повышение жесткости шпангоута не влияет на критическую нагрузку.

Таблица 7
Расчеты для подкрепленной оболочки

$P^* \cdot 10^{-4}$	0	1	2	4	8
$(EI / D l)_k$	1,50	1,10	0,76	0,42	0,16
$P_{об} / P_m$	2	1,46	1,25	1,10	1,03

Расчеты показывают, что при увеличении скорости нагружения критическая жесткость шпангоута уменьшается, а отношение $P_{об} / P_m$ стремится к единице.

3.12. Оболочка с вырезами

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, ослабленную системой прямоугольных вырезов, расположенных на равном расстоянии друг от друга вдоль образующей. Пусть на оболочку действует динамическое внешнее давление.

Учитывая, что при высоких скоростях нагружения критическая нагрузка слабо зависит от граничных условий и предполагая, что при потере устойчивости кривизна оболочки изменяется лишь в окружном направлении, будем судить об устойчивости оболочки по устойчивости кольца, мысленно выделенного двумя перпендикулярными к оси оболочки сечениями. Ширина b кольца равна расстоянию между центрами вырезов по образующей. Линеаризованное уравнение динамики в этом случае имеет вид [11]

$$\frac{EI}{b} \nabla_1^2 \bar{w} + P_0 t R^3 \nabla_1 \bar{w} + \rho h R^4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0, \quad (65)$$

$$\nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1, \quad t = t_k \tau, \quad \bar{w} = w(\varphi) \zeta(\tau).$$

К решению уравнения (65) применим подход, предложенный в [11], согласно которому сначала проинтегрируем его по времени

$$\frac{EI}{b} \nabla_1^2 w + P_0 t_k R^3 \nabla_1 w + \frac{\rho h R^4 w}{t_k^2} = 0.$$

Полученное уравнение с переменными коэффициентами можно решить методом последовательных приближений [15]. Нулевое приближение выберем в виде

$$w = - \left[1 + \frac{P_0 t_k R^3 b}{EI} + \frac{\rho h R^4 b}{EI t_k^2} \right] \times \sum A_i r_i e^{r_i \varphi}, \quad w^{(k)} = \sum A_i r_i^k e^{r_i \varphi}.$$

Здесь $r_1 = -r_3$, $r_2 = -r_4$ – корни характеристического уравнения

$$r^4 + a_2 r^2 + a_0 = 0, \quad (66)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{P_0 t_k R^3 b}{EI} \right) d\varphi, \quad a_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{P_0 t_k R^3 b}{EI} + \frac{\rho h R^4 b}{EI t_k^2} \right) d\varphi.$$

Функция $w(\varphi)$ должна удовлетворять условию симметрии. Если оболочка теряет устойчивость по n волнам, то для определения коэффициентов A_i имеем условия

$$\left. \frac{dw}{d\varphi} \right|_{\varphi = \frac{\pi}{n}} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right|_{\varphi = \frac{\pi}{2n}} = 0.$$

Приравнявая нулю определитель полученной системы, приходим к характеристическому уравнению вида

$$n^4 - a_2 n^2 + a_0 = 0.$$

Если вырезы отсутствуют, то характеристическое уравнение имеет вид

$$EI (n^2 - 1)^2 - P_0 t_k R^3 b (n^2 - 1) + \frac{b \rho h R^4}{t_k^2} = 0.$$

Минимизируя в этом уравнении критическую нагрузку по волновому числу, получаем

$$P_{\partial} = P_0 t_k = 7,2 \left(\frac{\rho EI P_0^2}{R^2} \right)^{1/4}, \quad P_{\text{ст}}^k = \frac{3EI}{R^3 b}.$$

Пусть оболочка перфорирована квадратными вырезами $a \times a$ ($a \ll R$), расположенными симметрично (k_1 – количество вырезов вдоль окружности). Тогда окружность рассматриваемого кольца можно представить в виде нескольких участков с различной жесткостью. Участок с вырезом характеризуется жесткостью $EI_1 = EI \left(1 - \frac{a}{b}\right)$.

Коэффициенты в уравнении (66) примут вид

$$a_0 = 2 + \frac{P_0 t_k R^3 b}{EI \delta}, \quad a_2 = -1 + \frac{P_0 t_k R^3 b}{EI \delta} + \frac{\rho h R^4 b}{EI t_k^2},$$

$$\delta = \left[\frac{a^2 k_1}{2\pi R(b-a)} + 1 \right]^{-1}.$$

После преобразований получаем значения критических нагрузок (статической и динамической) для оболочки с вырезами

$$\bar{P}_{\text{ст}} = P_{\text{ст}} \delta, \quad \bar{P}_{\partial} = P_{\partial} \delta^{1/2},$$

т.е. отношение критической нагрузки для оболочки с вырезами к критической нагрузке для оболочки без вырезов в динамике равно корню квадратному из аналогичного отношения в статике. В [11] показано, что, в отличие от *внешнего давления*, при *осевом сжатии* влияние малых вырезов в статике и динамике практически одинаково. В связи с приближенной постановкой задачи эти выводы носят лишь качественный характер и требуют уточнения с помощью эксперимента.

4. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА И ЕГО РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Общие положения

Эксперимент проводится с целью уточнения констант, входящих в расчётные формулы. Методика эксперимента описана для круговой конической оболочки и пологой цилиндрической панели.

Границы устойчивости при динамическом нагружении оболочек описываются уравнением гиперболы [4]

$$\left(\frac{P_{\phi}^{\vartheta}}{P_{\text{ст}}} - 1 \right) \left(\frac{I_{\phi}^{\vartheta}}{I_{\kappa}} - 1 \right) = 1,$$

с асимптотами $P_{\text{ст}}$ и I_{κ} , где P_{ϕ}^{ϑ} - давление во фронте волны, I_{ϕ}^{ϑ} - импульс давления. В качестве $P_{\text{ст}}$ может быть принято критическое значение при статическом внешнем давлении, полученное экспериментально, или близкая к нему теоретическая величина [17].

Построенная на основе экспериментальных данных кривая устойчивости позволяет определить асимптотическое значение I_{κ} , т. е. величину критического импульса давления при высоких скоростях нагружения. Эта величина сравнивается со значением, рассчитанным по формуле (55).

4.2. Требования к проведению испытаний

Установление величины критического импульса связано с выполнением эксперимента на нескольких образцах с одинаковыми параметрами. При проведении экспериментальных работ необходимо обеспечить повторяемость результатов

испытаний, которая достигается лишь при выполнении эксперимента в одинаковых условиях, т. е. все модели оболочек должны быть изготовлены по одной и той же технологии, с высоким качеством и иметь стабильные механические и геометрические характеристики, закрепление их должно осуществляться в одних и тех же, или изготавливаемых по одному классу точности зажимах. Испытания следует проводить на одной и той же установке, регистрацию показаний исследуемых величин осуществлять на одном и том же измерительном комплексе.

Особенно высокие требования предъявляются к проведению экспериментальных работ, связанных с изучением процесса потери устойчивости оболочек при их динамическом нагружении, т. к. изучаемый процесс протекает в весьма малые промежутки времени, что требует применения высокочувствительной, быстродействующей аппаратуры, позволяющей с достаточной достоверностью зафиксировать картину потери устойчивости исследуемого объекта.

4.3. Форма, размеры и методы отбора образцов

Анализ работ, в которых представлены результаты эксперимента с гладкими тонкостенными оболочками, показывает, что для изготовления образцов используются самые различные материалы (сталь в мягком и нагартованном состоянии, сплавы алюминия и т.д.). При выборе материала для изготовления тонкостенных моделей конических оболочек принимается во внимание следующее:

- 1) материал должен иметь достаточно высокий предел текучести, это позволяет уменьшить влияние пластических свойств на несущую способность оболочек;

2) материал должен допускать использование сравнительно простого технологического процесса изготовления моделей (это обстоятельство особенно важно при массовых испытаниях);

3) сортамент материала должен быть промышленного изготовления в диапазоне толщины 0,1-0,5 мм.

На основании изложенного, для изготовления оболочек использовался материал 20Х, для изготовления панелей – материал Х18Н9Т.

Геометрические параметры оболочек выбирались в диапазоне размеров, удобных для экспериментальных исследований и были обусловлены геометрическими характеристиками ударной трубы. Все образцы имели радиус нижнего основания $R = 80$ мм.

Толщина листа материала оболочек определялась с помощью вертикального оптиметра ИЗВ-2. Для этого вырезались полоски из листа материала вдоль и поперек проката размером 400*40 мм на различных участках, в центре которых проводились замеры толщины. Значение толщины определялось как среднее от трех размеров в каждой точке.

Заготовки для оболочек вырезались из листовой стали по специальным шаблонам, что позволило выдерживать необходимую точность геометрических размеров изготавливаемых образцов. Поскольку в дальнейшем измерялись начальные погиби в различных точках поверхности оболочки, то на поле заготовки наносилась координатная сетка. Это позволяло не только отыскивать необходимые точки, но и контролировать изготовление оболочек.

Оболочки изготавливались путем свертывания на специально изготовленных приспособлениях, которые представляют собой жёсткий конус с продольным сквозным пазом в зоне, соответствующей сварному шву оболочки. Паз предназначен для

подвода сварочных электродов. Наружная поверхность конуса тщательно полировалась до размера, соответствующего внутреннему диаметру оболочки. Заготовка обтягивалась по поверхности конуса, обматывалась резиновым жгутом и подвергалась точечной сварке на машине ТКМ-7. Съём изготовленных образцов производился взаимным смещением оболочки и жесткого конуса при помощи специального упора.

Последней операцией технологического процесса являлось шлифование торцов оболочек. При этой операции устраняются погрешности и дефекты резки, и других предшествующих операций. Шлифование торцов производилось на поверочной плите, обтянутой наждачной бумагой. Цилиндрические панели прямоугольной формы в плане, изготавливались из листовой стали толщиной 0,12-0,22 мм. Параметр кривизны панелей варьировался в пределах от 40 до 120 и удлинение от 1 до 25. Панели крепились с помощью эпоксидного клея и точечной сварки к жёстким оправкам, изготовленным из точеной стальной трубы диаметром 216 мм с толщиной стенки 6 мм. Модуль упругости определялся динамическим способом.

4.4. Испытательное оборудование

Экспериментальные исследования при статическом и динамическом нагружении внешним давлением проводились на универсальной экспериментальной установке.

Установка объединяет в себе необходимые нагрузочные и регистрирующие устройства и приборы с постоянной электромеханической связью и позволяет проводить испытания образцов и в статике, и в динамике при одинаковых граничных условиях. Принципиальная схема установки с измерительной аппаратурой приведена на рисунке 7, она состоит из камер

высокого 9 и низкого 4 давления. В качестве рабочей среды от компрессора 10 в камеру высокого давления через редуктор попадает воздух, давление которого контролируется по манометру 8 с ценой деления 0,01 МПа. Ударная волна создается внезапным разрывом диафрагмы, разделяющей камеры высокого и низкого давления.

При разрыве диафрагмы производится быстрый ввод газа в канал камеры низкого давления, где формируется ударная волна, движение которой направлено в сторону среза ударной трубы. На срезе ударной трубы при помощи специальных приспособлений крепятся испытываемые образцы. Для обеспечения возможности более широкого варьирования законом нагружения изготовлена специальная приставка, позволяющая преобразовать ступенчатый закон нагружения в линейный и квадратичный.

Измерительный комплекс приборов настроен для измерения скорости движения падающей волны, определения давления во фронте ударной волны, измерения величин деформации в определенных точках оболочки, изучения характера волнообразования, перемещений (прогибов) в трех точках панели и осреднённого прогиба в среднем сечении панели. Скорость движения ударной волны замерялась по временному интервалу прохождения волной базового расстояния $l = 1800$ мм между двумя датчиками 12, идентичными по своим характеристикам.

При прохождении фронта ударной волны контактные датчики замыкают цепи подачи сигналов соответственно на запуск и включение частотомера 43-33 (3), который работает в режиме счёта времени.

Для замера давления во фронте ударной волны использовались кварцевые пьезометрические датчики давления 17 типа РНД 5/18(2).

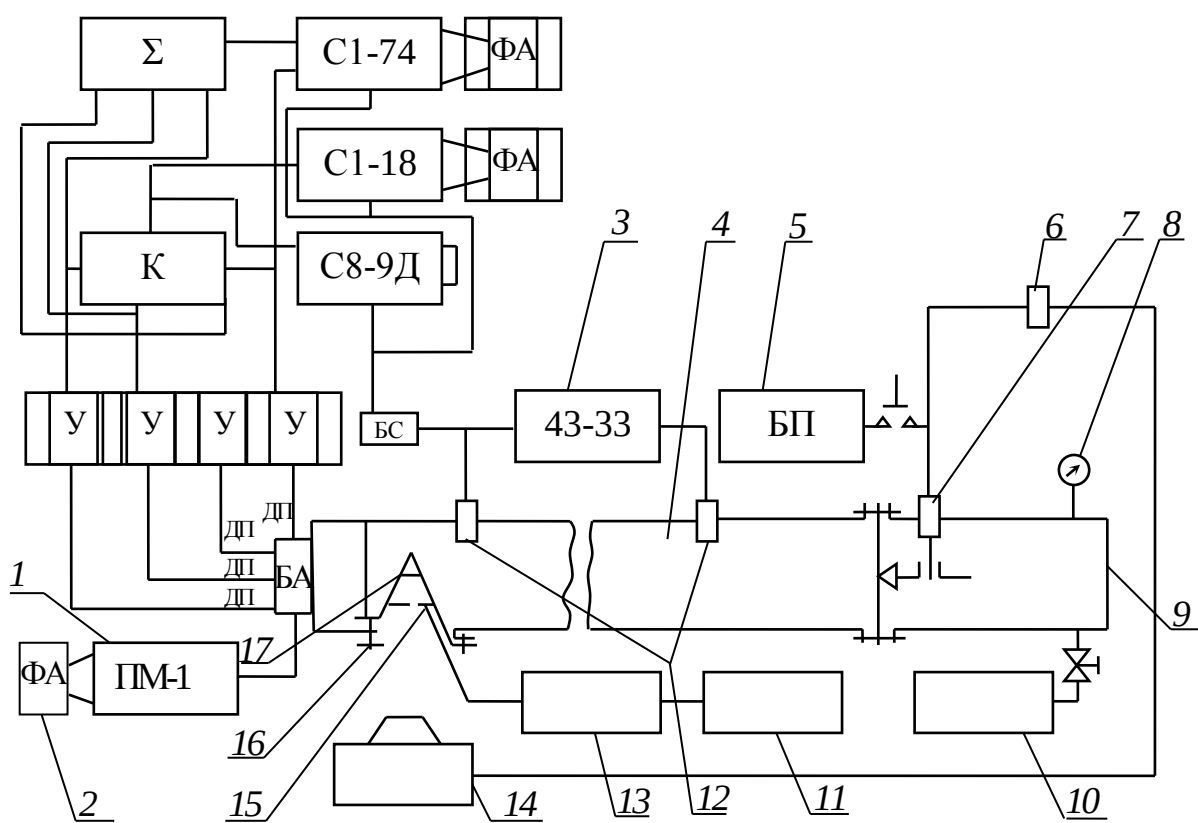


Рисунок 7

Один устанавливался на расстоянии 5 мм от поверхности оболочки, другой был вмонтирован в корпус обтекателя.

Сигнал от датчика давления подавался на экран пьезоизмерительного устройства РМ-1 (1) и с него проводилось фотографирование. Было разработано устройство для временного и дистанционного управления затвором фотоаппарата. Кроме того, для измерения давления применялись датчики ёмкостного типа с чувствительной мембраной диаметром 5 мм (1-я резонансная частота 60 кгц). Процесс выпучивания оболочек при динамическом нагружении исследовался с помощью скоростной киносъёмочной камеры СКС-1 (14). Съёмка проводилась при искусственном освещении с частотой 4000 кадр/с.

Для регистрации динамических деформаций оболочек применялись проволочные тензометры сопротивления с базой 10 мм, наклеенные в сечении, которое соответствует, как было установлено в предварительных опытах, наибольшему прогибу. Запись показаний электрических тензометров сопротивления, усиленных прибором ТОПАЗ-03 (13) фиксировалась электронным двухлучевым запоминающим осциллографом С1-20 (11).

Регистрация прогиба в отдельных точках позволяет судить о форме потери устойчивости, а кривая осреднённого прогиба используется для определения момента потери устойчивости.

Для регистрации прогибов применялись бесконтактные ёмкостные датчики, работающие на принципе частотной модуляции [13]. Высокая чувствительность датчиков позволила использовать их с электродами малых размеров и тем самым добиться приемлемой локализации зон измерения. В качестве регистрирующей аппаратуры использовались серийные осциллографы С8-9А, С1-18 и С1-74. На рисунке 7 приняты следующие условные обозначения: БД – блок датчиков, БС – блок

синхронизации, ДД – датчик давления, ДП – датчик перемещения, К – коммутатор, ПД – преобразователь формы импульса, У – усилитель, ФА – фотокамера, Σ - сумматор аналоговых сигналов. До начала испытаний проводилась тарировка всего измерительного комплекса по всем каналам и со всеми коэффициентами усиления. Датчик давления градуировался на специально изготовленной тарировочной трубе.

4.5. Проведение испытаний и обработка результатов

При определении границ устойчивости для каждой серии конических оболочек вначале задавались заведомо безопасные величины давления во фронте P_{ϕ}^3 и импульса I_{ϕ}^3 . Далее оболочку подвергали воздействию динамических нагрузок с возрастающей интенсивностью до тех пор, пока не происходило выпучивание стенок, регистрируемое с помощью скоростной киносъёмки и визуально.

Согласно принятому критерию, критическая динамическая нагрузка считается достигнутой в тот момент, когда стрела остаточного прогиба становится равной примерно толщине оболочки. Подобным прогибам, судя по данным опытов, соответствует достижение приведёнными напряжениями предела текучести материала.

При экспериментах импульс нагрузки I_{ϕ}^3 изменялся от 0,2 до 2 КПа С, давление во фронте P_{ϕ}^3 в пределах 0,1-3 МПа.

На рисунках 8 – 11 представлены границы устойчивости в плоскости «давление-импульс» для каждой серии оболочек. Сплошной линией показана граница, разделяющая области устойчивости и неустойчивости.

На рисунках 8 – 10 показана зависимость критического импульса нагрузки от угла конусности при постоянном отношении $r_1/r_0 = 3,55$. Влияние параметра $z_1 = \ln r_1/r_0$ на величину критического импульса нагрузки при постоянном значении $2\gamma = 40^\circ$ показано на рисунке 11.

Разброс в показаниях I_k при определенном законе нагружения для данной серии не превышал 5-10%. Стабильность результатов при динамических испытаниях выше, чем это наблюдалось при испытаниях подобных образцов на статическую нагрузку, причём с увеличением величины давления во фронте и уменьшением величины импульса нагрузки разброс в показаниях уменьшается.

Как показали отдельные экспериментальные исследования, наибольшее влияние на разброс опытных значений критических нагрузок оказывают начальные неправильности. При динамическом нагружении, в отличие от статического, за счёт резкого возрастания нагрузки и инерционности деформируемой оболочки образование выпучины в месте, где имеется начальная погибь, очевидно, запаздывает и процесс волнообразования происходит по всей поверхности образца. Поэтому начальные неправильности при динамической потере устойчивости оказывают меньшее влияние на значение критической нагрузки, чем это наблюдается при статических испытаниях. Причём с увеличением интенсивности нагружения это влияние уменьшается.

То, что процесс волнообразования при потере устойчивости происходит практически одновременно по всей поверхности оболочки, подтверждают результаты скоростной киносъёмки процесса выпучивания при динамическом нагружении. Установлено, что процесс выпучивания длился $13 \cdot 10^{-4}$ с.

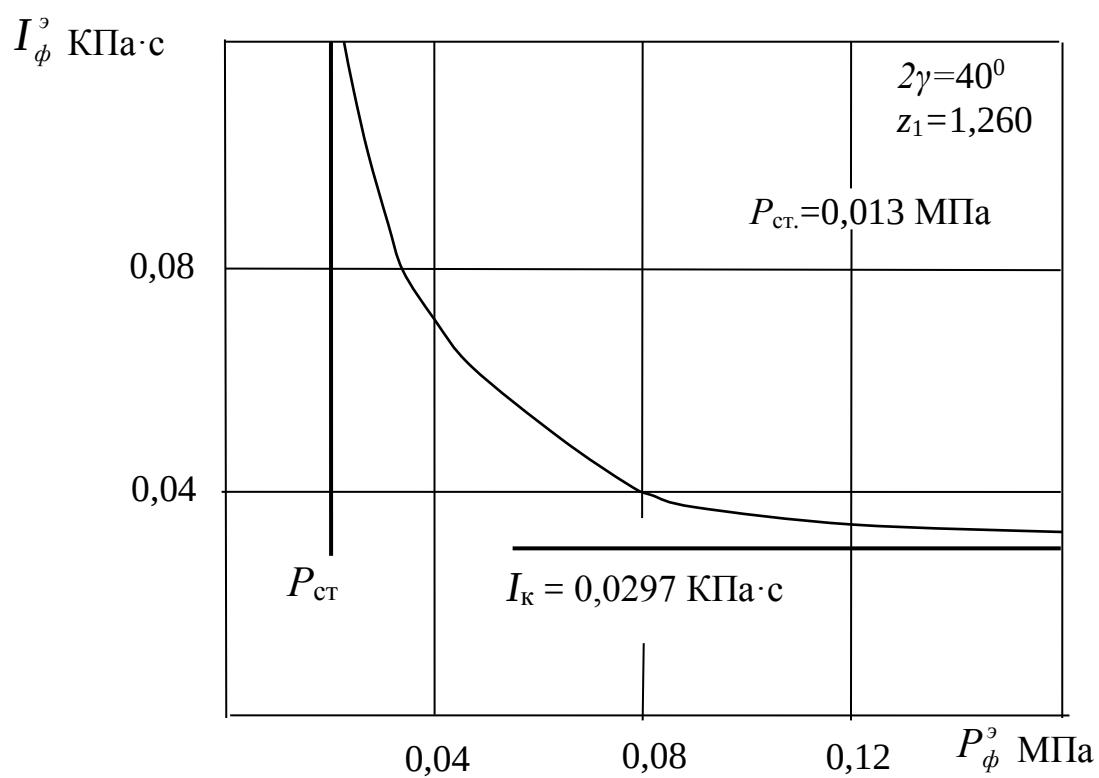


Рисунок 8

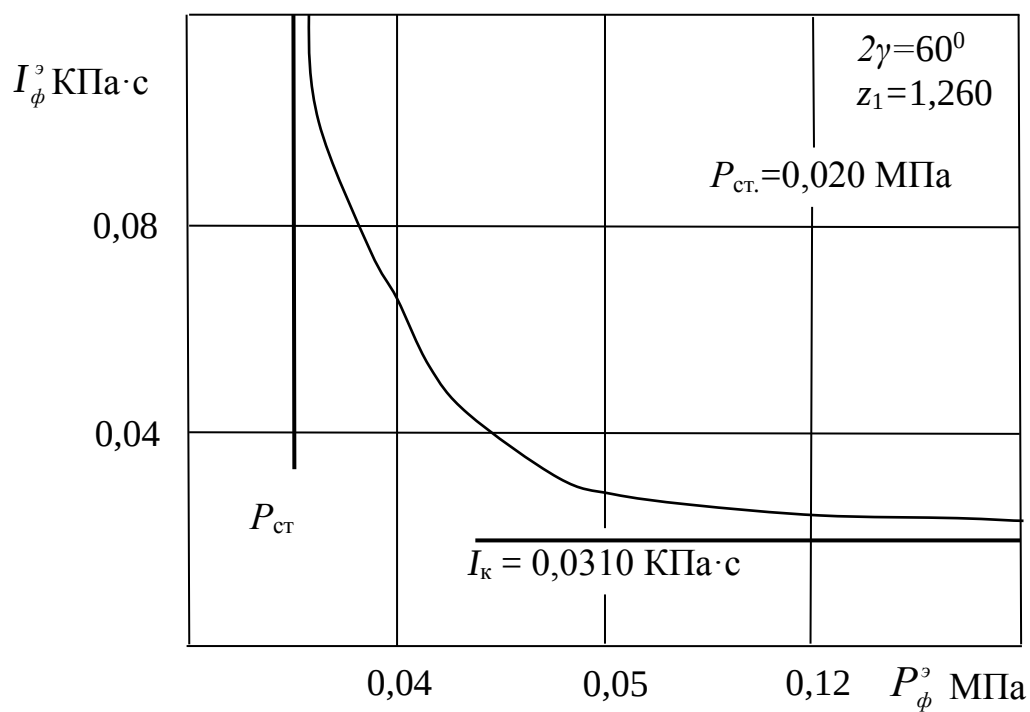


Рисунок 9

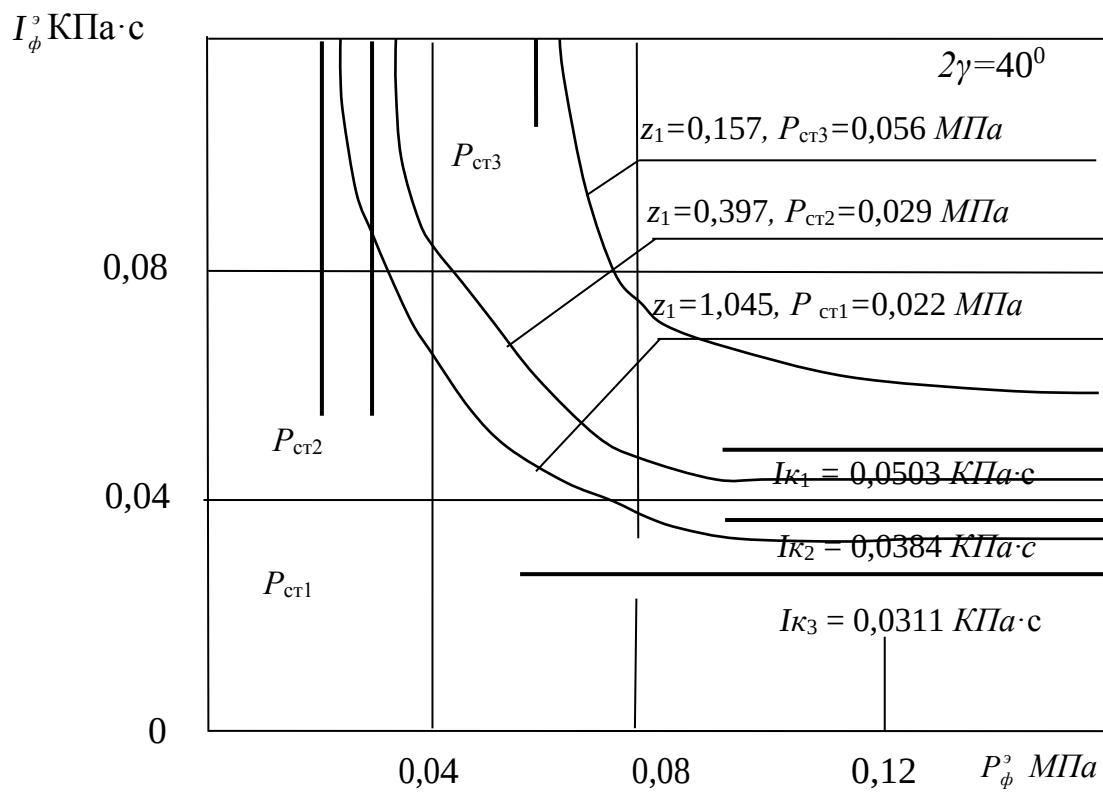


Рисунок 10

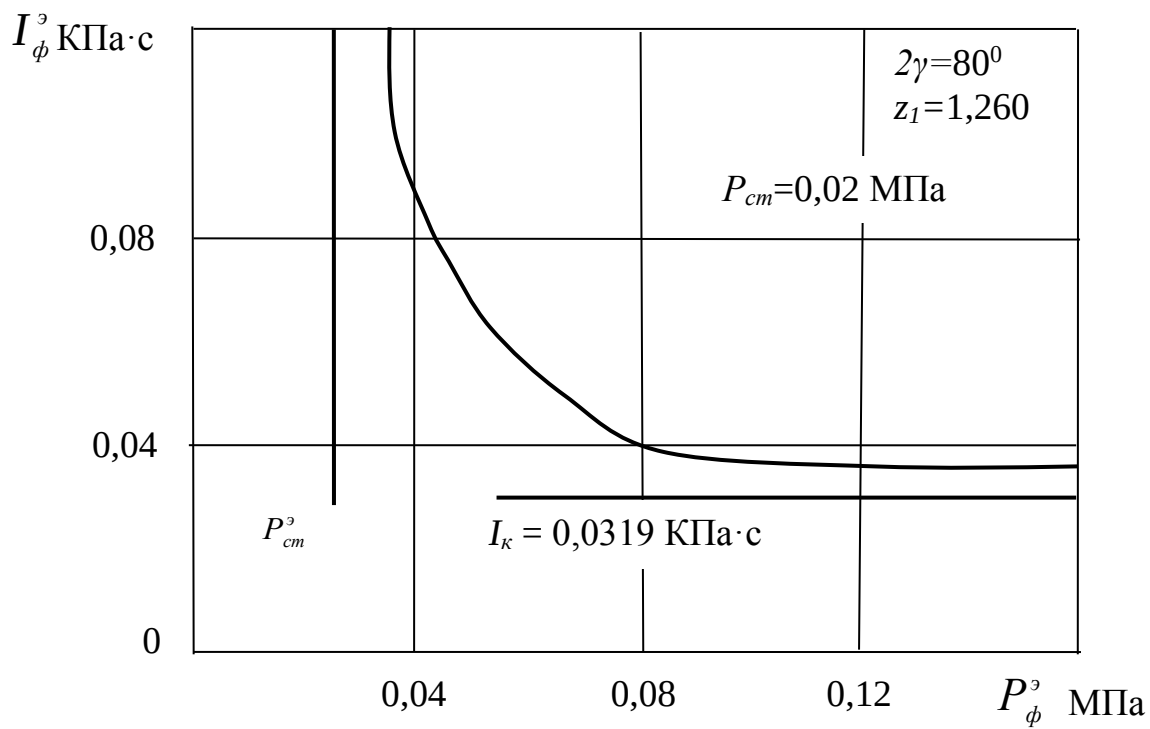


Рисунок 11

Через $4 \cdot 10^{-5}$ с на оболочке наметилось 10 равномерно расположенных вмятин. В дальнейшем вмятины увеличивались в плане, на границах вмятин появлялись резко выраженные рёбра.

Следует отметить, что при воздействии динамической нагрузки, близкой по величине к критической, происходила потеря устойчивости, как в упругой, так и в пластической зоне.

На первоначальных кадрах были видны упругие выпучины, которые перестраивались при дальнейшем нагружении.

Как показывают экспериментальные исследования, характер волнообразования при динамическом нагружении конических оболочек внешним давлением существенно отличается от статического. При динамическом нагружении для всех серий оболочек проявляются более высокие формы потери устойчивости. С увеличением интенсивности нагружения число волн в окружном направлении увеличивается. Выпучины в плане имеют форму вытянутого вдоль образующей конуса шестиугольника с более резко очерченным контуром и меньшей, чем в статике, глубиной.

Следует отметить, что проявление более высоких форм потери устойчивости наблюдается при воздействии нагрузок в 1,5-2,8 больших, чем при статическом нагружении. Для случаев воздействия динамической нагрузкой, по величине близкой к статической (квазистатической) характер волнообразования и число волн при динамическом и статическом нагружении одинаковы. Экспериментальные исследования конических оболочек с различными значениями параметра r_1/r_0 показывают, что с увеличением усечённости конуса (уменьшением r_1/r_0) границы устойчивости расширяются.

На рисунке 12 представлены осциллограммы для иллюстрации характера зависимости амплитуды деформаций от

времени при различной интенсивности динамической нагрузки. При этом выбраны показания пары тензорезисторов, которые находились в области с наибольшим остаточным прогибом (тензорезистор 1 наклеен вдоль образующей, тензорезистор 2 – в кольцевом направлении).

Вначале оболочку нагружали безопасной нагрузкой, после воздействия импульса нагрузки остаточных деформаций не возникало. При воздействии критического импульса происходит потеря устойчивости оболочки «хлопком». Деформации меняют свой знак и имеют значительные величины.

Испытание цилиндрических панелей проводилось следующим образом:

1) После закрепления панели на оправке с помощью лекальной линейки контролировалось отсутствие искажений цилиндрической формы вдоль образующей.

2) Для каждой панели экспериментально определялись собственные частоты до пятой гармоники и формы свободных колебаний (использовался метод перемещающейся опоры [21]). Это испытание служило дополнительным элементом контроля на отсутствие начальных неправильностей и дефектов монтажа панели.

3) Оправка с панелью закреплялась в камере нагружающего устройства, и проводилось её испытание на потерю устойчивости с регистрацией на фотоплёнку осциллограмм давления и прогибов. «Визуальный» контроль потери устойчивости осуществлялся с помощью запоминающего осциллографа С8-9А.

Определение критической нагрузки $P_{ст}$ также оказалось возможным проводить на описанной установке путём создания предельно низкого темпа нарастания давления. Поскольку время от начала нагружения до потери устойчивости составляло при

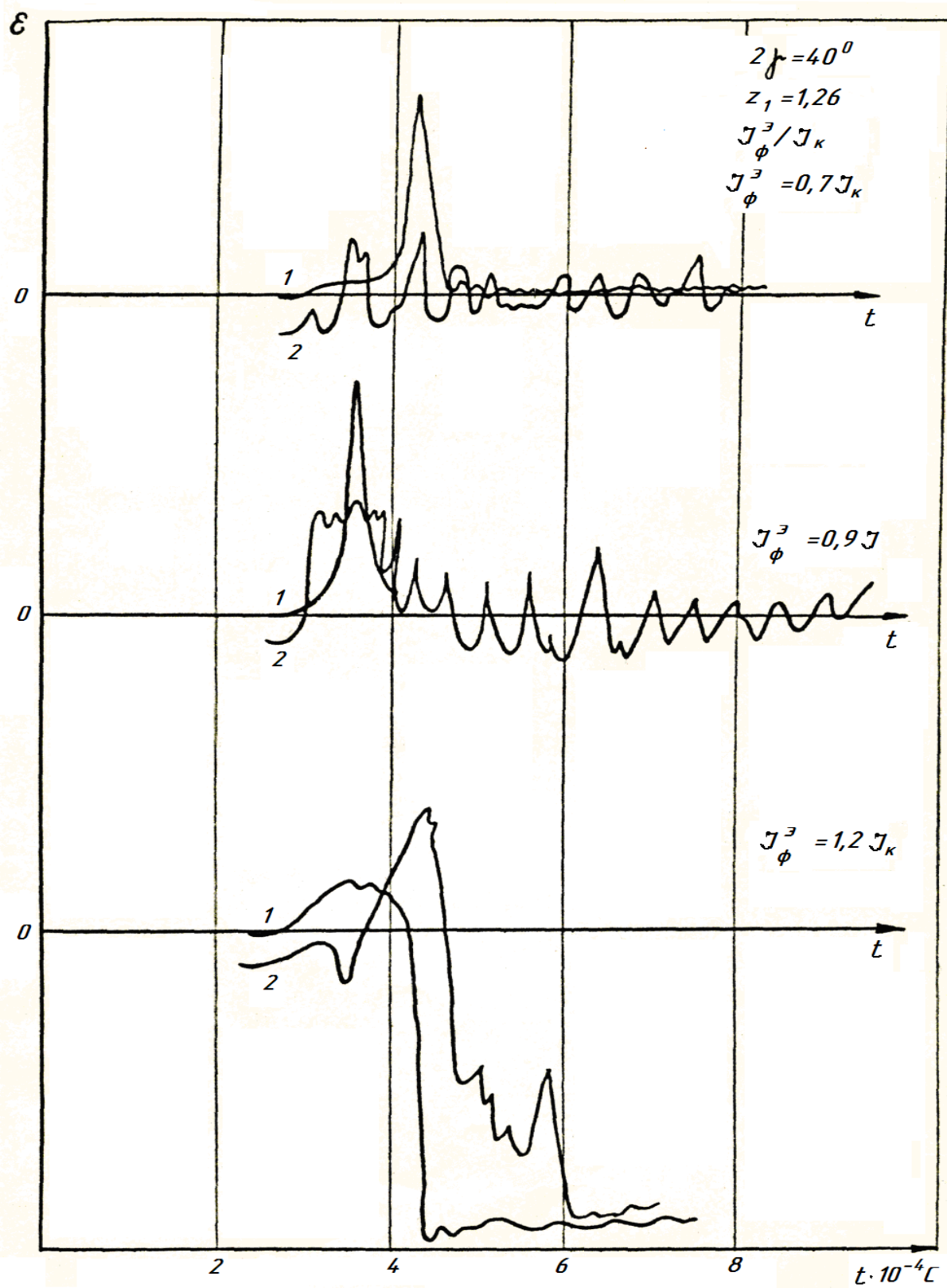


Рисунок 12

этом 5-6 мс, что примерно на порядок больше периода собственных колебаний панели, то динамические эффекты практически не проявлялись, то есть нагружение носило квазистатический характер.

На рисунках 13-16 приведены характерные осциллограммы для основных типов нагружения:

рис. 13 – квазистатическое нагружение, 2 мс/дел.;

рис. 14 – нагружение ступенчатым импульсом, 0,5 мс/дел.;

рис. 15 – линейный закон нагружения, 0,2 мс/дел.;

рис. 16 – квадратичный закон нагружения, 0,2 мс/дел.

Результаты проведённых экспериментов отражены на рисунках 17-19.

Полученные экспериментальные данные позволяют сделать некоторые выводы качественного характера:

1) Получено подтверждение высказанного ранее предположения о том, что геометрия оболочки в достаточной мере учитывается интегральными характеристиками ω и $P_{ст}$. Действительно, экспериментальные точки, особенно на рисунках 17 и 18, довольно хорошо группируются возле общих кривых, несмотря на то, что они получены для панелей различного удлинения и с различными значениями параметра кривизны.

2) При квазистатическом нагружении развитие вмятины начинается, как правило, по несимметричной форме. При этом отдельные точки панели совершают колебательные движения со сдвигом по фазе, так что центр вмятины как бы перетекает по поверхности панели от одного края к другому и обратно. Этот же эффект наблюдался и при нагружении ступенчатым импульсом в том случае, когда давление лишь незначительно превосходило $P_{ст}$. Отмеченное явление иллюстрируется на рисунке 20, на кото-

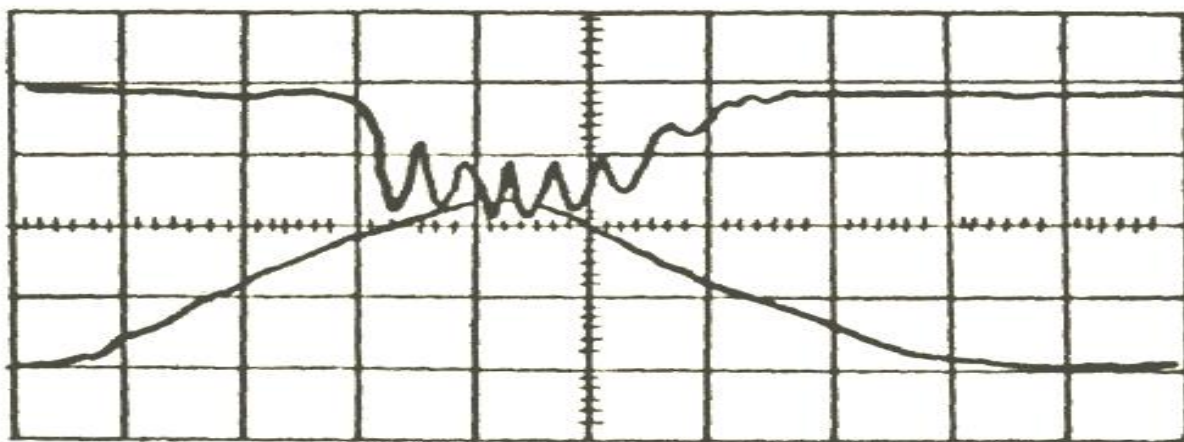


Рисунок 13

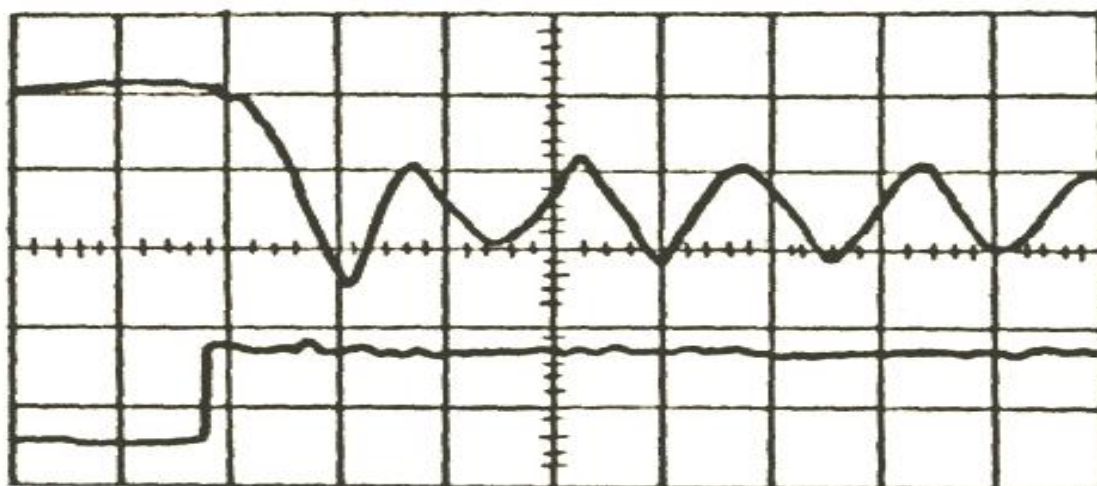


Рисунок 14

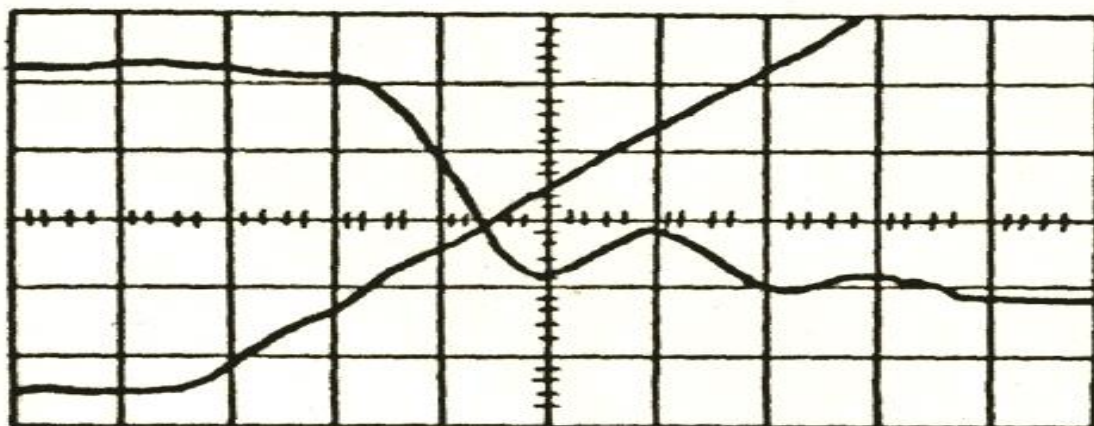


Рисунок 15

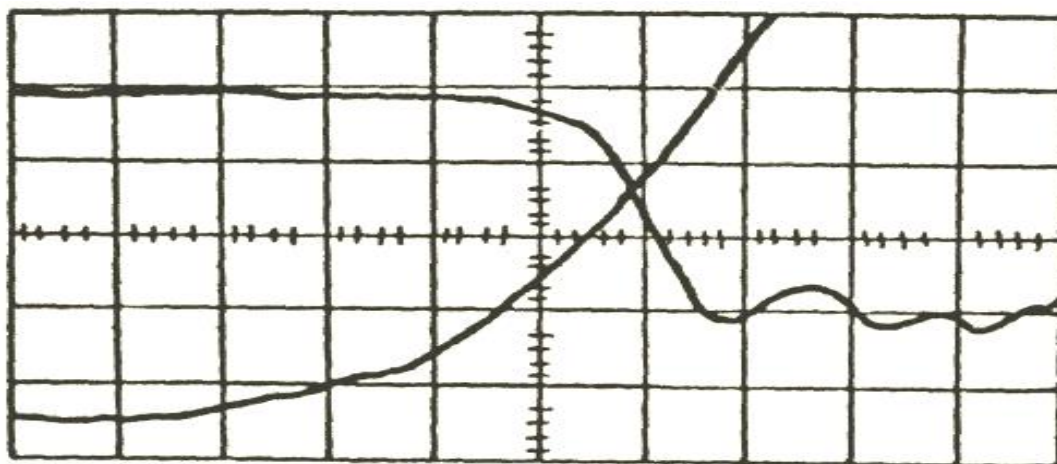


Рисунок 16

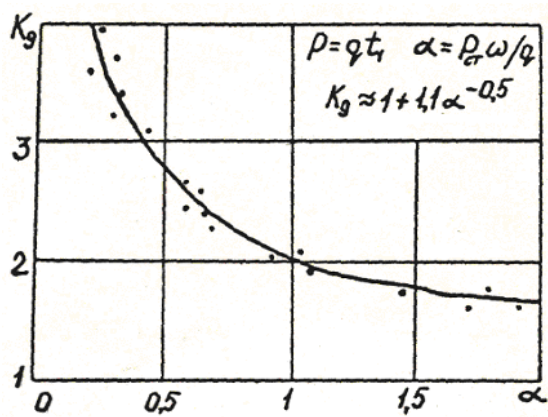


Рисунок 17

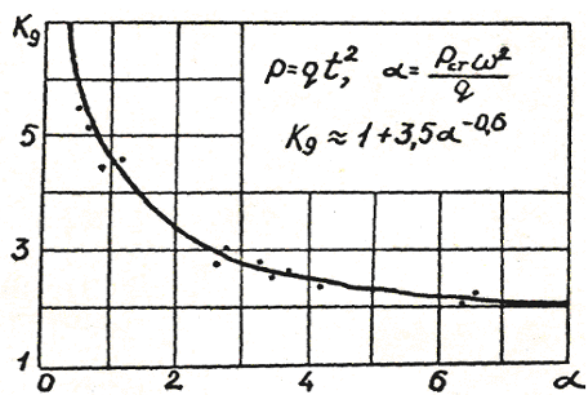


Рисунок 18

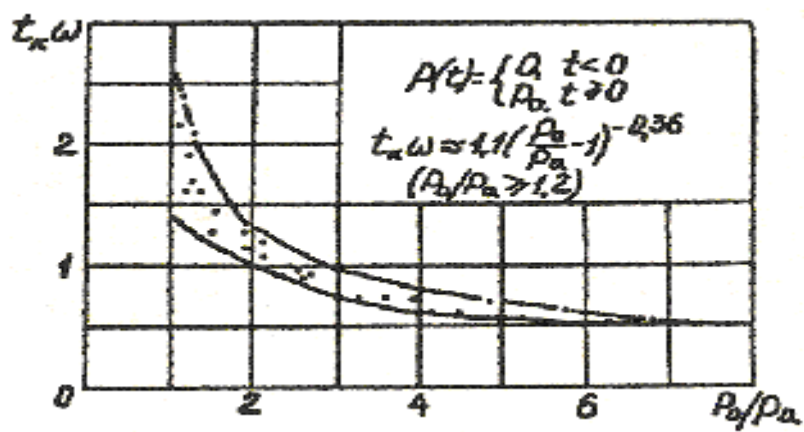


Рисунок 19

ром приведены осциллограммы процесса потери устойчивости и построенные по ним эпюры прогибов для различных моментов времени: при квазистатическом нагружении (а), и для ступенчатого импульса (б). При более интенсивном нагружении указанный эффект исчезал и вмятина начинала развиваться симметрично, захватывая сразу почти всю поверхность панели, так что изгибные деформации концентрировались возле прямолинейных кромок.

Вид остаточных вмятин после испытания панели на динамическую нагрузку может ввести в заблуждение относительно формы потери устойчивости. Как правило, после интенсивного нагружения у всех испытанных панелей более или менее отчётливо наблюдалось по две вмятины. Однако осциллограммы прогибов свидетельствуют об образовании в процессе потери устойчивости одной обширной вмятины с весьма пологим центром и крутыми склонами. Причём это наблюдалось даже у тех панелей, которые при статическом нагружении теряли устойчивость с образованием двух вмятин.

Очевидно, иллюзия образования двух вмятин после интенсивного нагружения связана с уже отмеченной концентрацией изгибных напряжений, а, следовательно, и остаточных деформаций вблизи прямолинейных кромок.

4.6. Определение констант и функций

Для определения константы c_0 в зависимости (55) используются границы устойчивости в координатах "давление-импульс", построенные с учётом экспериментальных результатов. Используя эти границы, можно экспериментально определить для каждой серии оболочек значение I_k . Сравнивая эти величины со значениями критического импульса для данной серии,

полученного по зависимости (55) можно получить значение коэффициента c_0 . Как показал эксперимент, с учетом коррекции это значение необходимо брать в пределах $6,03 < c_0 < 6,29$.

Для цилиндрических панелей на основе экспериментальных данных построены формулы для коэффициента динамичности K_∂ при линейном и квадратичном законах нагружения, а также для критической длительности импульса t_k при ступенчатом законе нагружения.

При расчёте панелей на динамическую устойчивость необходимо, прежде всего, определить – расчётом, по справочным данным или экспериментально – низшую собственную частоту панели ω и критическое давление при статическом нагружении $P_{ст}$. Затем, задавшись величиной скорости нарастания нагрузки q_0 , определить соответствующее значение параметра α и по приведенным на рисунках 17-19 эмпирическим формулам вычислить значение коэффициента динамичности.

Величина динамической критической нагрузки определяется как

$$P_{\partial ин} = K_\partial P_{ст}.$$

В случае ступенчатого импульса вместо скорости нагружения следует задать величину одного из параметров импульса – P (амплитуду) или t_k (длительность). Тогда критическое значение другого параметра можно определить по эмпирической формуле

$$t_k = \frac{1,1}{\omega} \left(\frac{P}{P_{ст}} \right)^{-0,36}.$$

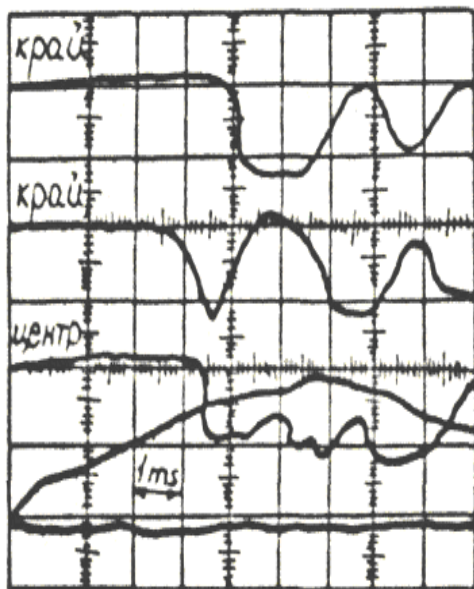


Рисунок 20 (а)

а: $\Delta t = 0,5$ мс

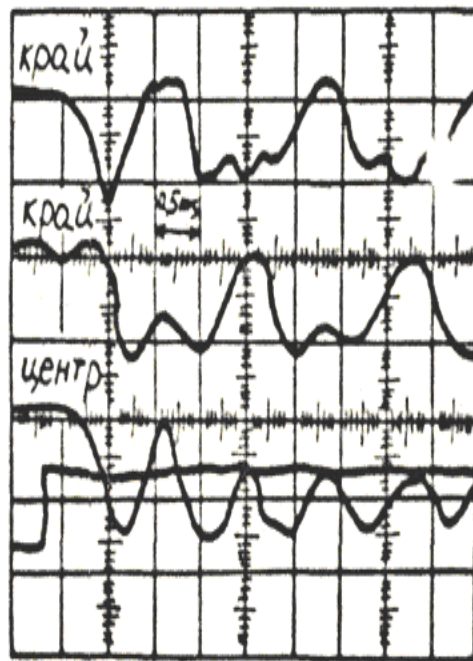


Рисунок 20(б)

б: $\Delta t = 0,25$ мс

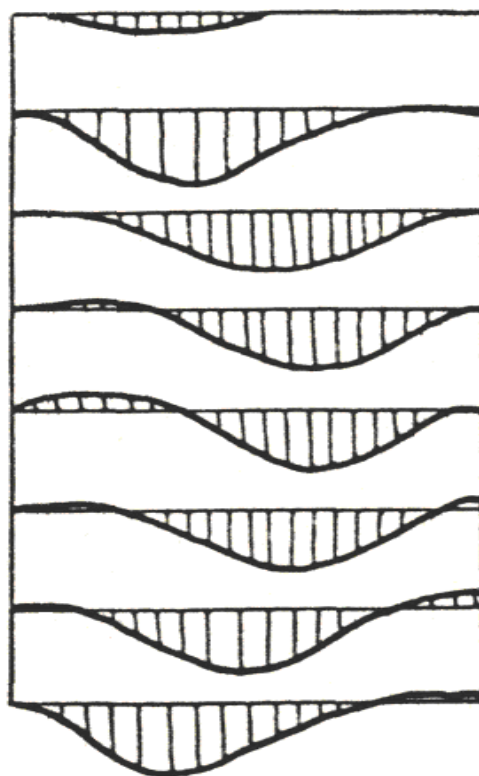
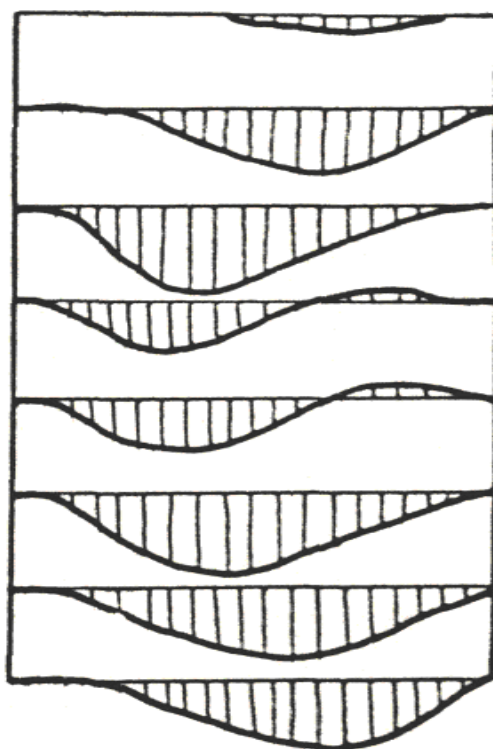


Рисунок 20

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агеносов Л.Г.* Устойчивость и свободные колебания тонких цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при различных краевых условиях. [Текст] / Л.Г. Агеносов, А.В. Саченков // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1964. – Вып. 2. – С. 111-126.
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. [Текст]: монография / Н.А. Алфутов. – Москва, Машиностроение. – 1978. – 312 с.
3. *Амиро И.Я.* К определению критических значений быстро возрастающих во времени сжимающих сил. [Текст] / И.Я. Амиро // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 5. – С. 54-60.
4. *Андерсон Д.* Динамическое выпучивание цилиндрических оболочек под действием нестационарного бокового давления. [Текст] / Д. Андерсон, Х. Линдберг // Ракетная техника и космонавтика, – 1968. – Т. 6, № 4. – С. 332-347.
5. *Баженов В.Г.* Экспериментально-теоретическое исследование нелинейного деформирования и потери устойчивости оболочек вращения при изгибе. [Текст] / В.Г. Баженов, А.И. Кибец, М.В. Петров, Т.Г. Федорова, Д.В. Шошин, А.А. Артемьева // Проблемы прочности и пластичности. – 2010. – Вып. 72. – С. 80-84.
6. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. [Текст]: монография / А.С. Вольмир. – Москва, Наука. – 1972. – 432 с.
7. *Григолюк Э.И.* Устойчивость оболочек. [Текст]: монография / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – Москва, Наука. – 1978. – 359 с.

8. *Дилекторский Б.Д.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при статическом внешнем давлении и гидроударе. [Текст] / Б.Д. Дилекторский, Ю.Г. Коноплев, А.А. Саченков, А.Л. Хавкин // Теория и методы исследования оболочек сложной формы: Межвузовский сборник. – Казань: изд-во КАИ. – 1978. – С. 38-42.

9. *Карпов В.В.* Программный комплекс исследования устойчивости оболочек. [Текст]: монография / В.В. Карпов, Д.А. Баранова, Р.Т. Беркалиев. – СПб: СПбГАСУ. – 2009. – 104 с.

10. *Коноплев Ю.Г.* Теоретико-экспериментальный метод в задачах устойчивости цилиндрических оболочек эллиптического сечения. [Текст] / Ю.Г. Коноплев, А.А. Саченков. // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1984. – Вып. 17, № 1. – С. 135-152.

11. *Коноплев Ю.Г.* Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях. [Текст]: монография / Ю.Г. Коноплев, Ф.Х. Тазюков. – Казань: изд-во Казанск. ун-та. – 1994. – 124 с.

12. *Минеев В.Е.* Исследование устойчивости замкнутых цилиндрических оболочек при динамическом действии всестороннего давления. [Текст] / В.Е. Минеев // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1970. – Вып. 6-7. – С. 596-623.

13. *Михлин Б.З.* Высокочастотные емкостные и индуктивные датчики. [Текст]: монография / Б.З. Михлин. – Москва, Госэнергоиздат. – 1960. – 87 с.

14. *Пикуль В.В.* К теории устойчивости оболочек. [Текст] / В.В. Пикуль // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 81-86.

15. *Преображенский И.И.* Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. [Текст]: монография / И.И. Преображенский. – Москва, Машиностроение. – 1981. – 192 с.

16. *Саченков А.В.* Об устойчивости кольцевых пластин и пологой усеченной сферической оболочки при сдвиге. [Текст] / А.В. Саченков // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1965. – Вып. 3. – С. 35-42.

17. *Саченков А.В.* Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек. [Текст] / А.В. Саченков // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1970. – Вып. 6-7. – С. 391-433.

18. *Саченков А.В.* Динамический критерий устойчивости пластин и оболочек. [Текст] / А.В. Саченков // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1976. – Вып. 12. – С. 281-293.

19. *Саченков А.В.* Решение динамических задач устойчивости оболочек теоретико-экспериментальным методом. [Текст] / А.В. Саченков // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1977. – № 7. – С. 137-141.

20. *Саченков А.А.* Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при совместном действии осевой сжимающей силы и гидравлического удара. [Текст] / А.А. Саченков // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1984. – Вып. 17, № 2. – С. 65-71.

21. *Шалабанов А.К.* Способ измерения форм колебаний твердых деформируемых тел. [Текст]: Авторское свидетельство № 654860. / А.К. Шалабанов. // Бюллетень изобретений. – 1979. – № 12. – С. 36.

22. *Якушев В.Л.* Нелинейная деформация и устойчивость тонких оболочек. [Текст]: монография / В.Л. Якушев: РАН. – Москва: Наука. – 2004. – 274 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	5
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	6
2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.....	7
2.1. Вывод разрешающего уравнения	7
2.2. Начальные условия и критерий динамической устойчивости.....	9
2.3. Преобразование разрешающего уравнения.....	10
2.4. Выбор аппроксимирующей функции.....	11
2.5. Решение уравнения.....	11
2.6. Получение расчётных формул	15
3. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ	19
3.1. Общий алгоритм решения	19
3.2. Цилиндрическая оболочка при внешнем давлении (другие случаи закрепления торцов).....	19
3.3. Влияние предварительного статического нагружения	21
3.4. Прямоугольная пластина при динамическом сжатии	23
3.5. Круговая усеченная коническая оболочка при внешнем давлении.....	28
3.6. Пологая цилиндрическая панель под действием поперечной нагрузки	36
3.7. Произвольный закон нагружения.....	37
3.8. Круглая пластина при динамическом сжатии	39
3.9. Кольцевой сектор при равномерном сжатии	42
3.10. Кольцевая пластина при динамическом сдвиге.....	45
3.11. Подкрепленная цилиндрическая оболочка	48
3.12. Оболочка с вырезами.....	52
4. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА И ЕГО РЕЗУЛЬТАТЫ.....	55
4.1. Общие положения.....	55
4.2. Требования к проведению испытаний	55
4.3. Форма, размеры и методы отбора образцов.....	56
4.4. Испытательное оборудование	58
4.5. Проведение испытаний и обработка результатов	62
4.6. Определение констант и функций	73
ЛИТЕРАТУРА.....	76

Учебное издание

Коноплев Юрий Геннадьевич
Бахтиева Ляля Узбековна,
Митряйкин Виктор Иванович,
Тазюков Фэрид Хоснутдинович

**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
УПРУГИХ ПЛАСТИН
И ОБОЛОЧЕК**

Учебное пособие

Отпечатано в полном соответствии с представленным оригинал-макетом

Подписано в печать 24.04.2012.
Форм. 60x84 1/16. Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая.
Печ. л. 5. Тираж 150. Заказ 113.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КФУ
420045, Казань, Кр. Позиция, 2а
Тел. 233-72-12