Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” куда я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply’ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 60

Наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области

Мы продолжаем изучать методы нахождения экстремумов (максимумов и минимумов), а также supremum и infimum у функции $z = f(p)$ от n переменных: $p = (x_1, \dots, x_n)$. Будет рассматриваться задача отыскания наибольшего и наименьшего значения функции в некоторой замкнутой области $\Omega \subset \mathrm{R}^n$. При таких ограничениях на значения переменных экстремумы могут находится как внутри области Ω, так и на ее границе. Таким образом, нам потребуется использовать методы выявления как условных, так и безусловных экстремумов, а также вычислять значения функции в «угловых» точках границы Ω, если эта область не ограничивается гладкой замкнутой прямой.

В общем, ничего нового здесь нет, и лучше обратиться к частным примерам для разъяснения постановки задачи и изложения методов определения наибольших и наименьших значений функции в замкнутой области.

Пример 1. *Найти найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$z = x^2 + y^2 - xy$$

в области

$$|x| + |y| \leq 1.$$

Решение поставленной задачи начинаем с отыскания глобальных экстремумов функции $z = x^2 + y^2 - xy$, после чего отбираем только те экстремальные точки, которые удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq 1$, то есть принадлежат области $\Omega = \{(x, y) : \quad |x| + |y| \leq 1\}$.

Составляем уравнения для стационарных точек:

$$z'_x = 2x - y = 0, \qquad z'_y = 2y - x = 0.$$

Единственным решение этой линейной системы уравнений является точка $p_0 = (0, 0)$, которая принадлежит Ω.

Чтобы определить тип этой точки, вычисляем вторые производные:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = -1.$$

Имеем: $A = C = 2,\ B = -1,\ \ D = AC - B^2 = 3$. Поскольку $D > 0$ и $A > 0$, то $p_0 = (0, 0)$ – точка минимума, в которой $z = 0$.

Это абсолютный (глобальный) минимуму функции на всей плоскости. Следовательно, наибольшее значение функции на Ω может находится только на четырех прямых $\pm x + \pm y = 1$ или в четырех углах $(1, 0),\ (0, 1),\ (-1, 0)$ и $(0, -1)$.

Поиск экстремума на прямых решается с помощью одного из методов «условного экстремум.» Легко понять, что лучше воспользоваться методом исключения:

$$x + y = 1,\ y = 1 - x;\ \ z = x^2 + (1 - x)^2 - x(1 - x) = 3x^2 - 3x + 1,\ z' = 6x - 3,$$

$$x - y = 1,\ y = x - 1;\ \ z = x^2 + (x - 1)^2 - x(x - 1) = x^2 - x + 1,\ z' = 2x - 1,$$

$$-x + y = 1,\ y = 1 + x;\ \ z = x^2 + (1 + x)^2 - x(1 + x) = x^2 + x + 1,\ z' = 2x + 1,$$

$$-x - y = 1,\ y = -1 - x;\ \ z = x^2 + (1 + x)^2 + x(1 + x) = 3x^2 + 3x + 1,\ z' = 6x + 3$$

Приравнивая производные нулю и решая полученные уравнения, находим стационарные точки экстремума на соответствующих прямых:

$$x + y = 1 :\ z' = 6x - 3 = 0 \implies p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$x - y = 1 :\ z' = 2x - 1 = 0 \implies p = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$-x + y = 1 :\ z' = 2x + 1 = 0 \implies p = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$-x-y=1: \ z'=6x+3=0 \implies p=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Для всех прямых $z''(p)$ строго больше нуля, так что это точки минимума, расположенные в середине отрезков. Значения функции в этих точках равны $1/4$ в первой и третьей четверти и $3/4$ – во второй и четвертой.

Осталось вычислить значения функции в угловых точках:

$$z(1,0)=z(0,1)=z(-1,0)=z(0,-1)=1.$$

Это максимальное значение функции.

Ответ: наименьшее значение функции, равное 0, достигается в точке $p_0=(0,0)$, наибольшее значение, равное 1, соответствует четырем угловым точкам Ω.

Пример 2. *Найти найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$u=x+y+z$$

в области

$$x^2+y^2 \leq z \leq 1.$$

Решение Наибольшее и наименьшее значения у функции $u=x+y+z$ могут достигаться только на границе области $\Omega=\{(x,y): \ \ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$, ибо u это плоскость, которая не обладает локальными экстремумами. Область Ω ограничена двумя поверхностями: $\Omega_1=\{(x,y): \ z=x^2+y^2, \ z \leq 1\}$ – усеченный на высоте $z=1$ параболоид и $\Omega_2=\{(x,y): \ z=1, x^2+y^2 \leq 1\}$ – часть плоскости $z=1$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$. Наибольшее и наименьшее значение функции u будем искать выявляя ее экстремальные точки на каждой из областей Ω_1 и Ω_2 по отдельности.

Ω_1 : Находим точки экстремума функции $u=x+y+z$ при условии, что $z=x^2+y^2$, причем нас будут интересовать только точки с $z \leq 1$. Составляем фукцию Лагранжа

$$L=x+y+z+\lambda(x^2+y^2-z),$$

вычисляем частные производные и приравниваем их нулю, чтобы установить «произвольные» (зависящие от λ) стационарные точки:

$$L'_x=1+2\lambda x=0, \quad L'_y=1+2\lambda y=0, \quad L'_z=1-\lambda=0.$$

Оказалось, что эти уравнения доставляют сразу искомые стационарные точки, ибо третье уравнение дает $\lambda = 1$, а первое и второе дают $x = y = -1/2$. Располагая условием связи $z = x^2 + y^2$, находим $z = 1/2$.

Итак, стационарная точка для области Ω_1 есть

$$p_1 = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Остается выяснить, является ли эта точка экстремальной и, коль это так, вычислить значение $u(p_1)$.

Вторые производные функции Лагранжа в стационарной точке:

$$L''_{xx} = 2\lambda = 2, \quad L''_{yy} = 2\lambda = 2, \quad L''_{zz} = 0, \quad L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0.$$

Квадратичная форма $d^2L = 2(dx^2 + dy^2)$ всегда положительна, поэтому, без учета первого дифференциала от условия, делаем вывод, что в точке p_1 минимум. Значение функции в этой точке:

$$u\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Ω_2 : Уравнение границы этой области $z = 1,\ x^2+y^2 = 1$. Так как $z = 1$, то ищем экстремумы функции $u = x + y + 1$ от двух переменных x и y.

Функция Лагранжа $L = x + y + \lambda(x^2 + y^2)$, ее производные

$$L'_x = 1 + 2\lambda x, \quad L'_y = 1 + 2\lambda y.$$

Приравнивая эти производные нулю, находим произвольные стационарные точки

$$x = y = -\frac{1}{2\lambda}. \tag{1}$$

Используя условие $x^2 + y^2 = 1$, получаем уравнение для значения λ : $2 = 4\lambda^2$, корни которого $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. Наконец, подставляя эти λ в (1), устанавливаем две искомые стационарные точки с координатами $x = y = \mp 1/\sqrt{2}$.

Определим тип этих стационарных точек:

$$L''_{xx} = L''_{yy} = 2\lambda = \pm\sqrt{2}, L''_{xy} = 0.$$

Квадратичные формы, соответствующие этим точкам. имеют вид

$$d^2L = \pm\sqrt{2}(dx^2 + dy^2),$$

и их знак не требует корректировки с помощью дифференциала от условия.

Итак, стационарные точки для Ω_2 суть

$$p_2 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)\ -\ \text{максимум}, \qquad p_3 = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)\ -\ \text{минимум}.$$

Значения функции u в этих точках:

$$u(p_2) = 1 + \sqrt{2}, \qquad u(p_3) = 1 - \sqrt{2}.$$

Так как $u(p_1) = -1/2 < 1 - \sqrt{2}$, то наименьшее значение функции u достигается в точке p_1.

Ответ: наименьшее значение функции, равное -1/2, достигается в точке

$$p_1 = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),$$

а наибольшее значение, равное $1 + \sqrt{2}$, – в точке

$$p_2 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right).$$

Задание 60

Решение следующих задач, взятых из задачников Виноградова и Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

395(В). *Найти найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$f = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}$$

в области

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2.$$

299(В). *Найти найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$f = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

в области

$$0 \le y \le x \le 2.$$

300(В). *Найти найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$f = \cos x \cos y \cos(x + y)$$

в области

$$0 \le x, y \le \pi.$$

3678*(). *Найти найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

в области

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 100.$$

3676(Д). *Найти найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

в области

$$x^2 + y^2 \le 25.$$