

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
ИНСТИТУТ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА им. А. В. ЛЫКОВА
Журнал основан в январе 1958 г.

ИФЖ

60


И
**ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

JOURNAL
OF ENGINEERING PHYSICS
AND THERMOPHYSICS

**Отдельный оттиск
Offprint**

**Том 91, № 4
Vol. 91, No. 4**

ИЮЛЬ–АВГУСТ
JULY–AUGUST

2018

ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Основан в январе 1958 г.

2018. ТОМ 91, № 4 (ИЮЛЬ–АВГУСТ)

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В ДИСПЕРСНЫХ И ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

- Рудобашта С. П., Зуева Г. А., Муравлева Е. А., Дмитриев В. М.** Массопроводность капиллярно-пористых коллоидных материалов при их конвективной сушке 903
- Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С.** Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками 912
- Хасанов М. К.** Режимы гидратообразования при инъекции углекислого газа в пористую среду, насыщенную метаном и водой 922
- Дьяченко Н. Н., Дьяченко Е. Н.** Компьютерное моделирование процесса фильтрования шахтных вод на слое песка 932
- Степкина М. Ю., Кудряшова О. Б.** Моделирование процесса электростатической сорбции на взвешенных частицах твердофазных порошков в воздушном пространстве 937
- Стефанович Л. И., Фельдман Э. П., Кириллов А. К.** Влияние трещин и пор на импедансные спектры углей 943
- Arunsandeep G. and Chandramohan V. P.** Numerical Solution for Determining the Temperature and Moisture Distributions of Rectangular, Cylindrical, and Spherical Objects during Drying 952

ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В ПРОЦЕССАХ ГОРЕНИЯ

- Жданова А. О., Кузнецов Г. В., Стрижак П. А.** Влияние плотности лесного горючего материала на подавление его термического разложения жидкостным аэрозолем 965
- Зима В. П., Касымов Д. П.** Экспериментальные исследования влияния природного пожара на древесный материал 972
- Крайнов А. Ю., Моисеева К. М.** Моделирование горения метано-воздушной смеси в замкнутом сферическом объеме 977
- Михайлов А. С., Пиралишвили Ш. А., Степанов Е. Г., Евдокимов О. А., Спесивцева Н. С.** Особенности сжигания пылевидного торфяного топлива в вихревом горелочном устройстве 984
- Белоцерковский М. А., Шкурко В. В., Сосновский А. В., Трусов Д. И.** Определение параметров рабочих газов, используемых в процессе гиперзвуковой металлизации стальных покрытий 992
- Пенязьков О. Г., Фомин Н. А.** Новые схемы цифровой спекл-фотографии 999

ТЕПЛОПЕРЕНОС ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

- Хузина Ф. Р., Салиева М. С., Красильников В. А., Набиуллин А. Р.** Начальный этап истечения вскипающей жидкости из полубесконечного канала. Решение в виде волны Римана 1016

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

- Исаев С. А., Леонтьев А. И., Мильман О. О., Судаков А. Г., Усачов А. Е., Гульцова М. Е.** Интенсификация теплообмена при ламинарном вихревом течении воздуха в узком канале с однорядными наклонными овальными траншеями 1022
- Волков В. Ф., Киселева Т. А., Чиркашенко В. Ф.** Численные и экспериментальные исследования возмущенных давлений в окрестности тандемной компоновки 1035
- Mishra S. R., Mohanty J., and Das J. K.** Free Convective Flow, Heat and Mass Transfer in a Micropolar Fluid over a Shrinking Sheet in the Presence of a Heat Source 1043

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛООБМЕН В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

- Карякин Ю. Е., Кузин В. М., Плетнев А. А., Федорович Е. Д.** Численное моделирование теплового состояния металлобетонного контейнера с отработавшим ядерным топливом при его транспортировке 1050

Янковский А. П. Влияние теплового воздействия на эффект увеличения несущей способности вращающихся дисков с тонкими высокомодульными покрытиями.....	1058
Кот В. А. Обобщенное решение смешанной задачи теплопроводности методом взвешенной температуры.....	1066
Бирюк В. В., Ларин Е. А., Лившиц М. Ю., Шелудько Л. П., Шиманов А. А. Блочная теплофикационная парогазовая установка.....	1089

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В РЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Бойцова А. А., Кондрашева Н. К. Исследование реологических свойств углеводородных систем с высоким содержанием смол и асфальтенов.....	1098
Салахов Р. Х., Хамидуллин Р. Ф., Мансуров З. А., Бодыков Д. У., Сейтжанова М. А. Исследование смачивающей способности деэмульгаторов для высоковязких и тяжелых нефтей Казахстана.....	1106

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

Гончаров В. К., Пузырев М. В., Ступакевич В. Ю. Управление потоками заряженных частиц в эрозионной лазерной плазме графитовой мишени в вакууме.....	1115
Аульченко С. М., Картаев Е. В. Управление размерами и фазовым составом субмикронных частиц диоксида титана, синтезируемых в проточном плазмохимическом реакторе.....	1122

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

Закиров Т. Р., Галеев А. А., Стаценко Е. О., Хайдарова Л. И. Расчет фильтрационных характеристик пористых сред по их цифровым образам с использованием решеточных уравнений Больцмана.....	1128
---	------

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Барбин Н. М., Колбин Т. С., Терентьев Д. И., Алексеев С. Г., Кайбичев И. А. Термические и теплофизические свойства системы радиоактивный графит–инертный газ при нагревании. Компьютерный эксперимент.....	1139
Кац М. Д., Кац И. М. Особенности определения теплофизических характеристик жидкостей методом лазерной вспышки.....	1150
Николаенко Ю. Е., Постол А. С. Экспериментальное исследование контактного термического сопротивления в зоне резьбового соединения соприкасающихся поверхностей.....	1157
Кочурова Н. Н., Коротких О. П., Абдуллин Н. Г., Киприанов А. А., Айрапетова Е. Р., Караев Р. Р., Petzold G. О диссоциации воды.....	1164
Фомин В. М., Волков В. Ф., Киселева Т. А., Чиркашенко В. Ф. Исследования проблемы звукового удара в ИТПМ СО РАН.....	1170

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЛИНИЯ

Одиннадцатая Международная теплофизическая школа "Информационно-сенсорные системы в теплофизических исследованиях", 6–9 ноября 2018 г. (г. Тамбов).....	1181
Памяти профессора Клайва Грейтида (29 сентября 1940 – 25 марта 2018).....	1183

Ответственный за выпуск: Л. Н. Шемет

Подписано в печать 05.07.2018. Формат 60×84%. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 32,55. Уч.-изд. л. 28,05. Тираж 90 экз. Заказ 134

Отпечатано в Республиканском унитарном предприятии «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/18 от 02.08.2013.
ЛП № 02330/455 от 30.12.2013.

220141, г. Минск, ул. Ф. Скорины, 40

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

УДК 532.546.7

Т. Р. Закиров^{1,2}, А. А. Галеев¹, Е. О. Стаценко¹, Л. И. Хайдарова¹

РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРИСТЫХ СРЕД ПО ИХ ЦИФРОВЫМ ОБРАЗАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Исследованы особенности применения моделей SRT и MRT решеточных уравнений Больцмана для расчета фильтрационных характеристик пористых сред с использованием их цифровых образов. Результаты расчетов, выполненных на основе этих моделей, сравнивались с результатами аналогичных расчетов, выполненных с использованием стационарных уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности. Расчеты ламинарного течения в трубке с использованием модели MRT имели существенно более высокую точность по сравнению с аналогичными расчетами по модели SRT и показали независимость от параметра релаксации. Установлено, что для течения жидкости в поровых каналах модель MRT и уравнения Навье–Стокса дают сопоставимые результаты, тогда как при использовании модели SRT имеет место зависимость численного решения от параметра релаксации.

Ключевые слова: математическое моделирование, решеточные уравнения Больцмана, рентгеновская микротомография, пористые среды.

Введение. Рентгеномографический метод, используемый для построения цифрового трехмерного изображения внутренней структуры пористой среды с субмикронным разрешением, успешно зарекомендовал себя при исследовании фильтрационно-емкостных свойств горных пород. Компьютерная обработка цифровых образов пористой среды делает возможным выделение в них двух фаз, соответствующих насыщенному флюидом порам и минеральному скелету среды, что позволяет рассчитать емкостные свойства среды и задать необходимые граничные условия для вычислительных экспериментов по движению жидкости в поровом канале. Применение данного метода для изучения свойств пористых сред было подробно рассмотрено в работах [1–4]. Использование цифровых образов пористых сред особенно актуально при исследовании их фильтрационных характеристик [5–7]. Моделирование движения жидкости в пористой среде на сетках, ассоциированных с ее цифровым образом, позволяет определить все компоненты тензора абсолютной проницаемости среды, что трудно реализуемо в лабораторных условиях, а также исследовать вопросы о представительности выбранного объема образца [8–10].

В настоящей работе в качестве основного метода исследования течения однофазной жидкости использован метод LBM (lattice Boltzmann method) [11–13]. Данный метод получил большую популярность ввиду его относительно простой численной реализации, например, по сравнению с уравнениями Навье–Стокса. Одним из этапов решения проблемы с использованием метода LBM является применение операции столкновения частиц, в результате которой состояние системы стремится к равновесному [14]. Для описания этого явления использовались модели решеточных уравнений Больцмана SRT (single relaxation time) [11] и MRT (multirelaxation time) [15, 16]. Основная цель исследования заключалась в выявлении особенностей применения этих моделей для расчета фильтрационных характеристик пористых сред, а также в оценке их достоверности при моделировании течения жидкости в поровом канале.

¹Казанский федеральный университет. Россия, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; э-почта: tirzakirov@krfu.ru; ²Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН. Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31. Поступила 15.02.2017.

Математическая модель. Решеточные уравнения Больцмана. В рамках LBM течение среды рассматривается с точки зрения динамики ансамбля частиц с заданным конечным числом возможных скоростей. Область течения разбивается сеткой с ячейками квадратной или кубической формы. Совокупность данных ячеек составляет решетку (lattice). Частицы за шаг по времени Δt могут совершить без взаимодействия друг с другом один акт перехода между соседними узлами решетки. Состояние системы в каждом узле сетки описывается функцией распределения частиц по скоростям $f(r, \mathbf{u}, t)$, определенной таким образом, что $f(r, \mathbf{u}, t) \cdot \Delta r \cdot \Delta u$ показывает количество частиц в момент времени t в окрестности точки $r(x, y, z)$ с координатами, изменяющимися в диапазонах от x до $x + \Delta x$, от y до $y + \Delta y$ и от z до $z + \Delta z$, которые движутся со скоростями от $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ до $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}(u_x + \Delta u_x, u_y + \Delta u_y, u_z + \Delta u_z)$.

Рассматривается задача о течении жидкости в поровом канале в двухмерной и трехмерной постановках. Для двухмерного течения используется дискретный набор скоростей D2Q9 (рис. 1): $e_1 = c(0, 0)$, $e_2 = c(1, 0)$, $e_3 = c(0, 1)$, $e_4 = c(-1, 0)$, $e_5 = c(0, -1)$, $e_6 = c(1, 1)$, $e_7 = c(-1, 1)$, $e_8 = c(-1, -1)$, $e_9 = c(1, -1)$.

Здесь $c = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ — базовая скорость, где Δl — шаг сетки. Для трехмерной задачи используется дискретный набор скоростей D3Q19: $e_1 = c(0, 0, 0)$; $e_2 = c(1, 0, 0)$; $e_3 = c(-1, 0, 0)$; $e_4 = c(0, 1, 0)$; $e_5 = c(0, -1, 0)$; $e_6 = c(0, 0, 1)$; $e_7 = c(0, 0, -1)$; $e_8 = c(1, 1, 0)$; $e_9 = c(-1, 1, 0)$; $e_{10} = c(1, -1, 0)$; $e_{11} = c(-1, -1, 0)$; $e_{12} = c(1, 0, 1)$; $e_{13} = c(-1, 0, 1)$; $e_{14} = c(1, 0, -1)$; $e_{15} = c(-1, 0, -1)$; $e_{16} = c(0, 1, 1)$; $e_{17} = c(0, -1, 1)$; $e_{18} = c(0, 1, -1)$; $e_{19} = c(0, -1, -1)$. Каждому вектору скорости из заданной совокупности e_i ($i = 1, \dots, 9$) для модели D2Q9 и e_i ($i = 1, \dots, 19$) для модели D3Q19 ставится в соответствие функция распределения, зависящая только от t и r : $f_i(r, t)$ ($i = 1, \dots, 9$) для модели D2Q9 и $f_i(r, t)$ ($i = 1, \dots, 19$) для модели D3Q19.

Описание динамики ансамбля частиц проводится в два этапа. Первый этап именуется этапом переноса (streaming step). На данном этапе частицы за время Δt смещаются в соседние узлы, причем направление скорости их движения не меняется. На втором этапе рассматривается процесс столкновения частиц (collision step), в результате которого функция распределения частиц стремится к равновесному состоянию. Эволюция функции распределения частиц во времени и пространстве описывается уравнением

$$f_i(r + e_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(r, t) + \Omega_i(r, t), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, 9$ для набора скоростей D2Q9, $i = 1, \dots, 19$ для набора D3Q19, $\Omega_i(r, t)$ — оператор столкновений.

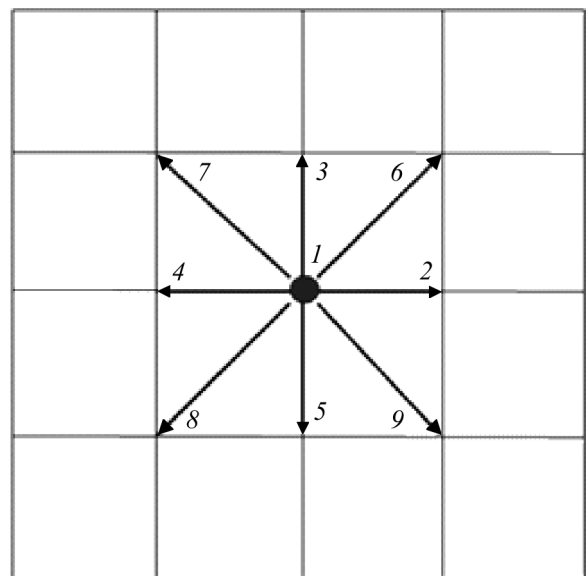


Рис. 1. Возможные вектора скорости частиц в методе решеточных уравнений Больцмана для двухмерной девятискоростной модели D2Q9

В отличие от классических постановок задач механики жидкости и газа, описываемых уравнениями Навье–Стокса, где решение ищется в переменных давление–скорость, уравнения в методе LBM решаются в переменных плотность–скорость. Макроскопические плотность и компоненты скорости флюида в ячейках вычисляются по формулам

$$\rho(r, t) = \sum_{i=1}^n f_i(r, t), \quad (2)$$

$$u(r, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n e_i f_i(r, t), \quad (3)$$

где $n = 9$ и $n = 19$ для двухмерной и трехмерной задач соответственно. В случае однофазного течения давление p связано с плотностью ρ в методе LBM соотношением $p = \frac{\rho c^2}{3}$ [14].

При исследовании гидродинамических процессов методом LBM необходимо соблюдение условия, при котором число Маха, вычисляемое как отношение средней по расчетной области скорости к базовой скорости c , не превышает 0.1. Для приближенного описания оператора столкновений Ω в уравнении (1) наиболее часто используются SRT- и MRT-модели.

SRT-модель. В рамках SRT-модели оператор столкновений Ω , названный в честь исследователей Бхатнагара, Гросса и Крука оператором BGK [17], имеет вид

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) - f_i(r, t)). \quad (4)$$

Этот оператор характеризует линейную релаксацию функции распределения f_i к равновесному состоянию. В формуле (4) функция $f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u})$ вычисляется по формуле

$$f_i^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) = w_i \rho(r) \left(1 + 3 \frac{e_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + 4.5 \frac{(e_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - 1.5 \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right). \quad (5)$$

Весовые коэффициенты w_i для модели D2Q9 равны $w_1 = \frac{4}{9}$, $w_{2-5} = \frac{1}{9}$, $w_{6-9} = \frac{1}{36}$, а для модели D3Q19 их значения составляют $w_1 = \frac{1}{3}$, $w_{2-8} = \frac{1}{18}$, $w_{9-19} = \frac{1}{36}$. Указанные числовые значения весовых коэффициентов обусловлены тем, что для любого вида решеток должно выполняться условие $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, где

$n = 9$ и $n = 19$ для наборов векторов D2Q9 и D3Q19 соответственно, поскольку $f(r, t)$ — вероятностная характеристика. Более того, равенство коэффициентов w_i при $i = 2, \dots, 5$ и $i = 6, \dots, 9$ для набора D2Q9, а также при $i = 2, \dots, 8$ и $i = 9, \dots, 19$ для набора D3Q19 обусловлено равнозначностью данных направлений. Наконец, численные значения указанных коэффициентов, оператор BGK, представленный в виде

уравнения (4) и равновесная функция распределения (5) обеспечивают соблюдение условий $\sum_{i=1}^n \Omega_i = 0$, $\sum_{i=1}^n e_i \Omega_i = 0$, при которых выполняется закон сохранения массы и момента движения системы. С использованием коэффициентов w_i , равновесной функции распределения (5), оператора столкновений BGK (4) и разложения Чепмена–Энскога возможно получение уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности с точностью до малых величин.

Параметр релаксации τ в операторе столкновений BGK служит для управления кинематической вязкостью μ флюида и связан с ней замыкающим соотношением

$$\mu = \left(\frac{2\tau - 1}{6} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta t}. \quad (6)$$

Из этого уравнения видно, что параметр τ не может принимать значения меньшего, чем 0.5, поскольку отрицательные значения вязкости жидкости нефизичны. С увеличением параметра τ вязкие свойства флюида также увеличиваются. Шаг по времени Δt выступает коэффициентом пропорциональности между параметром τ и вязкостью μ .

MRT-модель. Оператор столкновений в MRT-модели описывается уравнением [15]

$$\Omega_i = -M^{-1}S(m_i - m_i^{\text{eq}}). \quad (7)$$

Здесь $m_i = \sum_{k=1}^n M_{ik}f_k$, где $n = 9$ для набора D2Q9 и $n = 19$ для набора D3Q9.

Набор скоростей D2Q9. Матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В работе [15] показано, что матрица M может быть представлена в виде $m = (\rho, e, \varepsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T$, где e и ε — величины, пропорциональные энергии потока жидкости и ее квадрату, j_x и j_y — компоненты импульса движения жидкости, q_x и q_y — компоненты, пропорциональные потоку энергии, p_{xx} и p_{xy} — значения, характеризующие диагональную и недиагональную компоненты тензора вязких напряжений. Равновесные значения компонент функции $m^{\text{eq}} = (\rho^{\text{eq}}, e^{\text{eq}}, \varepsilon^{\text{eq}}, j_x^{\text{eq}}, q_x^{\text{eq}}, j_y^{\text{eq}}, q_y^{\text{eq}}, p_{xx}^{\text{eq}}, p_{xy}^{\text{eq}})^T$ вычисляются

$$\text{из соотношений } \rho^{\text{eq}} = \rho, \quad e^{\text{eq}} = -2\rho + \frac{3\rho(u_x^2 + u_y^2)}{c^2}, \quad \varepsilon^{\text{eq}} = \rho - \frac{3\rho(u_x^2 + u_y^2)}{c^2}, \quad j_x^{\text{eq}} = \frac{\rho u_x}{c}, \quad q_x^{\text{eq}} = -\frac{\rho u_x}{c},$$

$$j_y^{\text{eq}} = \frac{\rho u_y}{c}, \quad q_y^{\text{eq}} = -\frac{\rho u_y}{c}, \quad p_{xx}^{\text{eq}} = \frac{\rho(u_x^2 - u_y^2)}{c^2}, \quad p_{xy}^{\text{eq}} = \frac{\rho u_x u_y}{c^2}.$$

Матрица S имеет диагональный вид. Ее диагональные компоненты обозначим как $(s_\rho, s_e, s_\varepsilon, s_j, s_q, s_j, s_q, s_p, s_p)$. В работе [18] приведены результаты исследований, согласно которым оператор столкновения не оказывает влияния на массу и импульс жидкости в рассматриваемом узле, поэтому $s_\rho = s_j = 0$. Коэффициенты $s_e = s_\varepsilon = s_p = 1/\tau$, где параметр τ вычисляется по формуле (6). Коэффициенты s_q и s_ε связаны соотношением

$$s_q = 8 \frac{2 - s_\varepsilon}{8 - s_\varepsilon}. \quad (9)$$

Набор скоростей D3Q19. Матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -30 & -11 & 11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Применив операцию умножения матрицы M на компоненты столбца f_i , получаем $m = (\rho, e, \varepsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, j_z, q_z, 3p_{xx}, 3\pi_{xx}, p_{ww}, \pi_{ww}, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}, m_x, m_y, m_z)^T$, где $p_{ww} = p_{yy} - p_{zz}$, $\pi_{ww} = \pi_{yy} - \pi_{zz}$, π_{ij} и m_i — динамические характеристики движения, пропорциональные скорости флюида в четвертой и третьей степенях соответственно. Согласно [16], равновесные значения компонент функции $m^{eq} = (\rho^{eq}, e^{eq}, \varepsilon^{eq}, j_x^{eq}, q_x^{eq}, j_y^{eq}, q_y^{eq}, j_z^{eq}, q_z^{eq}, 3p_{xx}^{eq}, 3\pi_{xx}^{eq}, p_{ww}^{eq}, \pi_{ww}^{eq}, p_{xy}^{eq}, p_{yz}^{eq}, p_{zx}^{eq}, m_x^{eq}, m_y^{eq}, m_z^{eq})^T$ рассчитываются

$$\begin{aligned} \text{по формулам } \rho^{eq} &= \rho, \quad e^{eq} = -11\rho + \frac{19\rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{c^2}, \quad \varepsilon^{eq} = 3\rho - \frac{5.5\rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{c^2}, \quad j_x^{eq} = \frac{\rho u_x}{c}, \\ q_x^{eq} &= -\frac{2\rho u_x}{3c}, \quad j_y^{eq} = \frac{\rho u_y}{c}, \quad q_y^{eq} = -\frac{2\rho u_y}{3c}, \quad j_z^{eq} = \frac{\rho u_z}{c}, \quad q_z^{eq} = -\frac{2\rho u_z}{3c}, \quad 3p^{eq} = \frac{\rho(2u_x^2 - u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \\ 3\pi_{xx}^{eq} &= -0.5 \cdot \frac{\rho(2u_x^2 - u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \quad 3p_{ww}^{eq} = \frac{\rho(u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \quad \pi_{ww}^{eq} = -0.5 \cdot \frac{\rho(u_y^2 - u_z^2)}{c^2}, \quad p_{xy}^{eq} = \frac{\rho u_x u_y}{c^2}, \\ p_{yz}^{eq} &= \frac{\rho u_y u_z}{c^2}, \quad p_{xz}^{eq} = \frac{\rho u_x u_z}{c^2}, \quad m_x^{eq} = 0, \quad m_y^{eq} = 0, \quad m_z^{eq} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим компоненты матрицы S как $s_\rho, s_e, s_\varepsilon, s_j, s_q, s_p, s_\pi, s_m$. Здесь $s_e = s_\varepsilon = s_p = s_\pi = 1/\tau$, где параметр τ вычисляется по формуле (4). Как уже отмечалось, оператор столкновений не оказывает влияния на массу и импульс жидкости, поэтому $s_\rho = s_j = 0$. Коэффициенты s_q, s_m и s_ε связаны соотношением

$$s_m = s_q = 8 \frac{2 - s_\varepsilon}{8 - s_\varepsilon}. \quad (11)$$

Граничные и начальные условия в LBM. В начальный момент времени все компоненты скорости течения флюида в каждом узле расчетной области равны нулю (данное условие относится только к рассматриваемой в работе задаче и не является обязательным в решеточных уравнениях Больцмана), плотность жидкости в насыщенных флюидом узлах решетки равна плотности воды при нормальных условиях и составляет 1000 кг/м^3 . Функция $f_i(r, 0)$ соответствует равновесному состоянию (5) при $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ и $\mathbf{u} = 0 \text{ м/с}$.

Классические условия прилипания и непротекания жидкости на непроницаемых областях (внешние границы и препятствия внутри расчетной области), согласно которым нормальная к границе компонента скорости флюида равна нулю, а касательная к границе компонента равна скорости движения этой границы, равной нулю в нашем случае, реализуются в LBM при помощи операции отражения частиц от твердой поверхности (условие bounce-back) [11]. В данной работе рассматривается сетка mid-grid, в которой непроницаемая граница располагается посередине между узлами, т. е. в полушаге от ячеек.

Рассмотрим подробнее случай, когда верхняя граница является непроницаемой, т. е. твердой. Пусть в момент времени t в выбранном нами узле известны все значения функции f_i . В момент времени $t + \Delta t$ компоненты f_5, f_8 и f_9 являются неизвестными, поскольку значения плотности и скорости флюида в ячейках, принадлежащих к твердым фазам, не определены. Чтобы определить неизвестные компоненты функции f_i , используется операция отражения, согласно которой компоненты f_3, f_6 и f_7 , значения которых взяты на момент времени t , меняют свое направление на 180° (рис. 2). Общее правило можно записать в следующем виде:

$$f_i(r, t + \Delta t) = f_{i_opp}^*(r, t) . \tag{12}$$

Знак * означает, что данные величины соответствуют состояниям после применения оператора столкновения. Нижние индексы i и i_opp соответствуют противоположным направлениям. Отметим, что условие (11) при использовании MRT модели гарантирует наличие непроницаемой границы в точности посередине между узлами. На входной и выходной границах будем считать известными плотности ρ_{in} и ρ_{out} , а также касательную компоненту скорости, которая равна нулю. В качестве примера рассмотрим двухмерный случай, когда входная область соответствует левой границе (рис. 3).

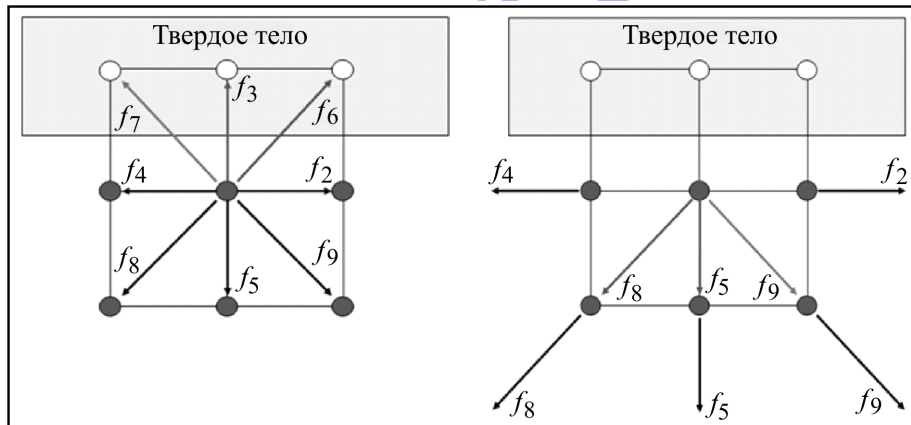


Рис. 2. Операция отражения bounce-back для сетки mid-grid

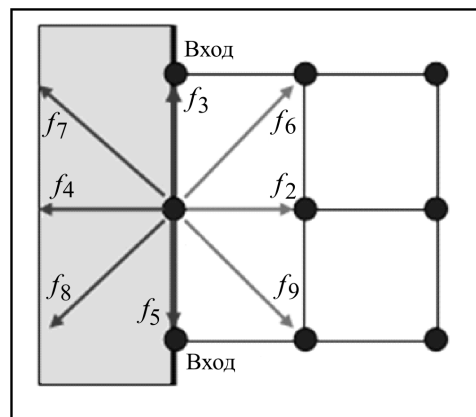


Рис. 3. Условия на входной границе области течения

Для набора скоростей D2Q9, после этапа переноса, функции f_2 , f_6 и f_9 для каждого узла входной граници и компонента скорости u_x являются неизвестными. Решая систему из 4-х уравнений, состоящую из уравнения (2) и двух уравнений (3) для компонент скорости u_x и u_y ($u_y = 0$), а также принимая во внимание условие Зоу–Хе [19], которое предполагает равновесие в направлении, перпендикулярном границе, и замыкает систему уравнений, т. е. $f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq}$, получаем соотношения

$$u_x = c \left(1 - \frac{f_1 + f_3 + f_5 + 2(f_4 + f_7 + f_8)}{\rho_{in}} \right), \quad (13)$$

$$f_2 = f_4 + \frac{2\rho_{in}u_x}{3c}, \quad (14)$$

$$f_6 = f_8 - 0.5(f_3 - f_5) + \frac{\rho_{in}u_x}{6c}, \quad (15)$$

$$f_9 = f_7 + 0.5(f_3 - f_5) + \frac{\rho_{in}u_x}{6c}. \quad (16)$$

Аналогичная методика расчета может применяться для любой геометрии узлов, принадлежащих входным или выходным граничным ячейкам.

Стационарные уравнения Навье–Стокса. Для оценки достоверности результатов, полученных с использованием LBM, проведен расчет однофазного течения жидкости с применением хорошо зарекомендовавших себя при решении данной задачи [5–10] классического уравнения неразрывности (17) и стационарных уравнений Навье–Стокса (18). Утверждение о стационарности течения жидкости в пористых средах опирается на результаты работы [5], в которой показано, что скорость потока при невысоких перепадах давления очень мала. Следовательно, инерционными силами по сравнению с диффузионными в рамках решаемой задачи можно пренебречь:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (17)$$

$$\mu \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (18)$$

Дискретизация системы уравнений (17), (18) осуществлялась с использованием метода конечных разностей [20], а для формирования сетки использовались основы метода MAC (маркеров и ячеек) [20]. На внешних границах и на твердых поверхностях внутри расчетной области задавались условия прилипания и непротекания жидкости, а на входной и выходной границах расчетной области — постоянные давления и условие Неймана для компоненты скорости, нормальной к выходной границе. Ячейка в методе MAC устроена таким образом, что давление $P_{i,j,k}$ (для трехмерного случая) определяется в центре, а компоненты скоростей, например $u_{x(i-1/2,j,k)}$ и $u_{x(i+1/2,j,k)}$, определяются в центрах ее левой и правой грани соответственно. Решение матричного уравнения, полученного в результате дискретизации системы уравнений (17), (18), отыскивалось при помощи библиотеки SPARSKIT с использованием процедуры ILU для разложения матрицы и итерационного метода решения уравнений (процедур BCGSTAB и GMRES) [21]. Более подробно рассматриваемая процедура описана в работах [7–10].

Результаты расчетов и обсуждение. В качестве первого примера численного расчета для тестирования SRT- и MRT-моделей LBM рассмотрим простейший вид движения жидкости — ламинарное течение в трубе цилиндрического сечения. Шаг сетки составляет $\Delta l = 10$ мкм, шаг по времени рассчитывается по формуле (6) при заданном значении τ . Для установившегося режима такого течения известна аналитическая формула, описывающая зависимость продольной компоненты скорости течения флюида u_x от расстояния до оси канала:

$$u_x^{an}(y) = \frac{\Delta P}{4\rho\mu L} (R^2 - y^2), \quad (19)$$

где R — гидравлический радиус, y — расстояние от оси канала. Для модели флюида приняты следующие значения параметров: $\mu = 1.0 \cdot 10^{-6}$ м²/с (или 1.0 сПз), $\rho = 1000$ кг/м³. Перепад давления ΔP между входной и выходной границами в численном эксперименте составлял $1 \cdot 10^{-6}$ Па.

Проведены численные расчеты для количества узлов в поперечном сечении канала 7, 10, 15, 20, 30, 50 и 100. Размерность сетки в продольном направлении во всех расчетах составляла 100 узлов. Для каждого варианта сечения был проведен ряд вычислительных экспериментов, в которых значения параметра τ составляли 0.51, 0.52, 0.55, 0.60, 0.80, 1.00 и 1.50. Расчеты выполнялись с использованием SRT- и MRT-моделей. В качестве критерия для оценки отклонения результатов расчетов, полученных методом LBM с использованием аналитической зависимости (19), принята относительная погрешность Δ , измеряемая в процентах:

$$\Delta = \frac{100}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \frac{u_x^{\text{LBM}}(y_i) - u_x^{\text{an}}(y_i)}{u_x^{\text{an}}(y_i)} \right|.$$

Результаты вычислений представлены на рис. 4. Из этого рисунка видно, что, независимо от значения τ , относительная погрешность расчетов при использовании MRT-модели в среднем на 2 порядка меньше, чем при применении оператора BGK, и возрастает с уменьшением размерности сетки. Для SRT-модели наблюдается ярковыраженная зависимость Δ от параметра релаксации τ , тогда как для MRT-модели она практически отсутствует. Более того, если для размерности сетки 50 и 100 узлов Δ не превышает 1% при использовании SRT-модели (что является существенной ошибкой даже для такой простейшей задачи), то для ситуации, когда $N < 50$, погрешность расчетов говорит о невозможности применения SRT-модели в таких случаях. Так, $\Delta = 14.2\%$ при $N = 7$ и варьируется в зависимости от τ , тогда как максимальная погрешность для MRT-модели составляет 0.2% и не подвержена влиянию параметра релаксации. Легко показать как аналитически, так и численно, что применение оператора BGK (4) не изменяет общую массу и импульс системы как во внутренних узлах расчетной области, так и в ячейках, граничащих с непроницаемыми областями. Следовательно, при использовании SRT-модели в приграничных узлах имеется зависимость между параметром релаксации τ и расстоянием между приграничной ячейкой и непроницаемой границей (для модели MRT с учетом соотношения (11) это расстояние составляет $0.5\Delta l$ и от τ не зависит). Поскольку основной целью настоящей работы являлось выяснение особенностей применения SRT- и MRT-моделей для исследования гидродинамических процессов в пористых средах с использованием их цифровых образов, данный пример был рассмотрен не случайно — ширина поровых каналов в микрофотографических изображениях в большинстве случаев составляет 25–75 мкм. При разрешающей способности съемки в 5 мкм (т. е. при шаге сетки $\Delta l = 5$ мкм) количество узлов в поперечном сечении канала в среднем колеблется в пределах от 5 до 15.

Таблица 1. Расчеты коэффициента проницаемости k_{xx} с использованием SRT и MRT моделей LBM при различных значениях параметра τ и на основе уравнений Навье–Стокса

Образец	τ	k_{xx} , мкм ²			Δ , %	
		LBM_SRT	LBM_MRT	Уравнения Навье–Стокса	SRT	MRT
Песчаник №1	0.51	6.05	10.35	10.56	-42.7	-2.0
	0.52	6.34	10.35		-40.0	-2.0
	0.55	7.01	10.35		-33.6	-2.0
	0.6	7.73	10.35		-26.8	-2.0
	0.8	9.5	10.35		-10.0	-2.0
	1	10.75	10.35		1.8	-2.0
	1.5	13.6	10.35		28.8	-2.0
Песчаник №2	0.51	4.55	5.85	6.02	-24.4	-2.8
	0.52	4.72	5.85		-21.6	-2.8
	0.55	4.91	5.85		-18.4	-2.8
	0.6	5.08	5.85		-15.6	-2.8
	0.8	5.58	5.85		-7.3	-2.8
	1	5.96	5.85		-1.0	-2.8
	1.5	6.78	5.85		12.6	-2.8

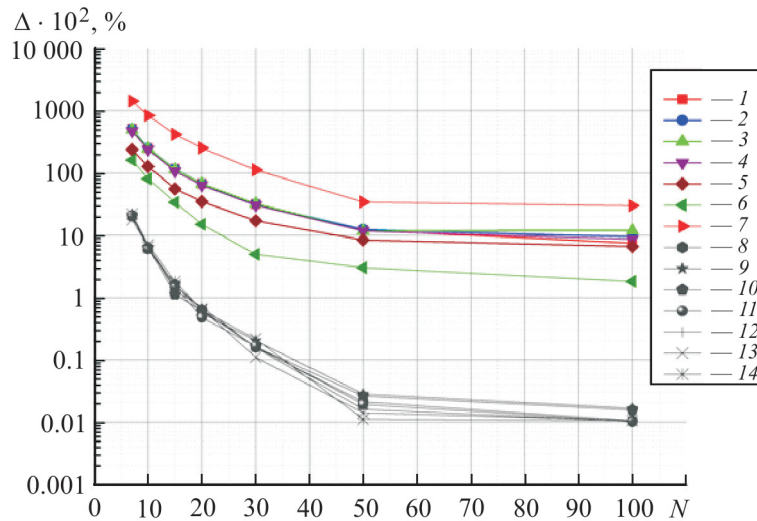


Рис. 4. Относительная погрешность расчетов для модели SRT (1–7) и модели MRT (8–14) LBM при $\tau = 0.51$ (1), 0.52 (2), 0.55 (3), 0.60 (4), 0.80 (5), 1.00 (6), 1.50 (7), 0.51 (8), 0.52 (9), 0.55 (10), 0.60 (11), 0.80 (12), 1.00 (13) и 1.5 (14)

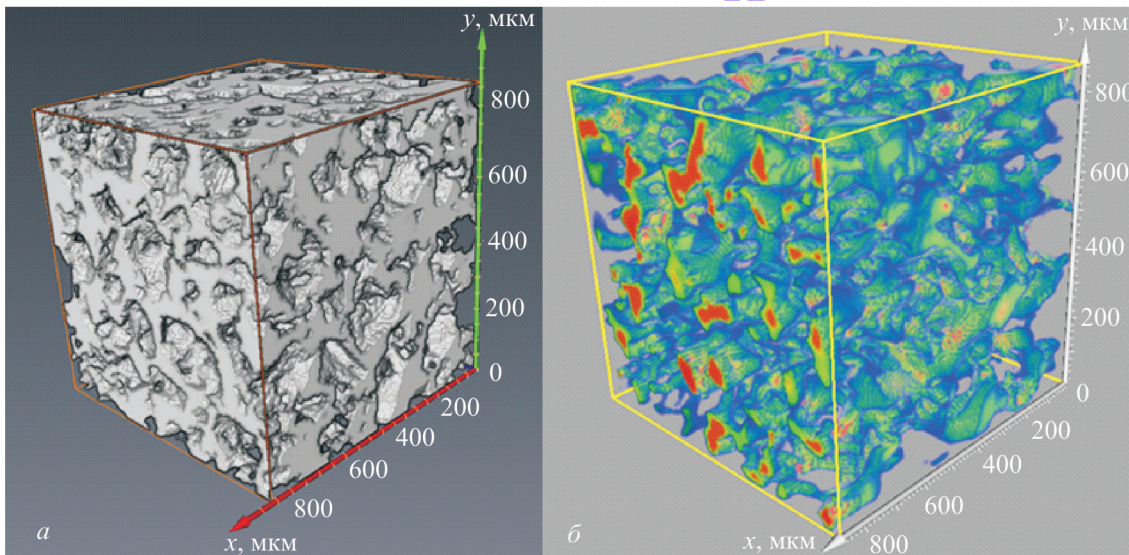


Рис. 5. Результаты вычислительных экспериментов: *а* — пористая структура песка; *б* — поле модуля скорости флюида в порах

Выполнены расчеты проницаемости двух цифровых образов песка, снятых с разрешением 5.8 и 2.8 мкм при $\tau = 0.51, 0.52, 0.55, 0.60, 0.80, 1.00$ и 1.50 с применением SRT- и MRT-моделей. Размеры расчетной области в обоих случаях составляли $150 \times 150 \times 150$ ячеек. Структура порового пространства песка и поле модуля скорости флюида в нем представлены на рис. 5. Для сопоставления результатов расчетов по моделям SRT и MRT с результатами аналогичных расчетов на основе уравнений Навье–Стокса использована компонента k_{xx} тензора абсолютной проницаемости, величина которой вычисляется при помощи закона Дарси по формуле $k_{xx} = \frac{Q\mu\Delta L}{\Delta S\Delta P}$, где Q — расход жидкости через выходное сечение канала, ΔS — площадь выходного сечения канала, ΔL — длина образца в направлении оси Ox . Результаты вычислений представлены в табл. 1. По данным, приведенным в этой таблице, можно сделать заключение, что использование SRT-модели приводит к большей относительной погрешности в определении коэффициента

проницаемости песчаника, сильно зависящей от τ , по сравнению с результатами расчета этого коэффициента с использованием уравнений Навье–Стокса. При этом результаты расчетов с применением MRT-модели являются удовлетворительными и независимыми от параметра релаксации. Небольшое отклонение в 2 и 2.8% связано с использованием стационарных уравнений Навье–Стокса и пренебрежением в них конвективной составляющей течения. Следует также отметить, что в случае использования оператора BGK наилучшее совпадение наблюдается при $\tau = 1$. Однако жесткое требование использования этого значения τ вызывает необходимость однозначного определения шага по времени Δt в (6), что может внести ограничения на перепад давления, при котором решение задачи сохраняет численную устойчивость.

Заключение. Установлено, что при численном решении задачи о ламинарном течении в трубе с использованием SRT-модели решеточных уравнений Больцмана наблюдается зависимость полученных результатов от параметра релаксации течения τ . Расчеты такого течения по MRT-модели указанных уравнений являются существенно более точными по сравнению с расчетами по SRT-модели и не зависят от параметра τ . Показано, что при исследовании течения жидкости в поровых каналах расчеты, выполненные на основе MRT-модели и уравнений Навье–Стокса, дают сопоставимые результаты. Не рекомендуется применять SRT-модель в исследованиях фильтрационных процессов в пористых средах, т. е. в случаях, когда характерный размер области течения содержит 5–20 узлов сетки и число контактов жидкости с непроницаемыми границами велико.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 15-11-10015) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант мол_а 16-35-00155).

Обозначения

e_i — компоненты векторов набора скоростей; f_i — функция распределения количества частиц по скоростям; N — количество узлов сетки в поперечном сечении канала; p — давление; r — координата ячейки расчетной сетки; t — время; \mathbf{u} — скорость движения жидкости; x, y, z — оси координат; Δ — относительная погрешность вычислений; μ — кинематическая вязкость жидкости; ρ — плотность флюида; τ — параметр релаксации течения. Индексы: an — аналитический; eq — равновесный; i — номер одного из возможных направлений скорости в ячейке; in — вход; out — выход; opp — противоположный.

Литература

1. Blunt M. J., Bijeljic B., Dong H., Gharbi O., Iglauer S., Mostaghimi P., Paluszny A., and Pentland C. Pore-scale imaging and modeling. *Adv. Water Resour.* 2013. Vol. 51. Pp. 197–216.
2. Andrew M., Bijeljic B., and Blunt M. J. Pore-scale contact angle measurements at reservoir conditions using X-ray tomography. *Adv. Water Resour.* 2014. Vol. 68. Pp. 24–31.
3. Watanabe N., Ishibashi T., Ohsaki Y., Tsuchiya Y., Tamagawa T., Hirano N., Okabe H., and Tsuchiya N. X-ray CT based numerical analysis of fracture flow for core samples under various confining pressures. *Eng. Geol.* 2011. Vol. 123. Pp. 338–346.
4. Farber L., Tardo S. G., and Michaels J. N. Use of X-ray tomography to study the porosity and morphology of granules. *Powder Technol.* 2003. Vol. 132. Pp. 57–63.
5. Mostaghimi P., Blunt M. J., and Bijeljic B. Computations of absolute permeability on micro-CT images. *Mathem. Geosci.* 2013. Vol. 45. Pp. 103–125.
6. Dvorkin J., Armbruster M., Baldwin C., Fang Q., Derzhi N., Gomez C., Nur B., Nur A., and Mu Y. The future of rock physics: computational methods vs. lab. testing. *First Break.* 2008. Vol. 26. Pp. 63–68.
7. Закиров Т. Р., Галеев А. А., Королев Э. А., Нуриев И. С., Стаценко Е. О. Исследование фильтрационно-емкостных свойств песчаников Ашальчинского месторождения методом рентгеновской компьютерной томографии. *Нефтяное хозяйство.* 2015. № 8. С. 36–40.
8. Закиров Т. Р., Галеев А. А., Коновалов А. А., Стаценко Е. О. Анализ "представительного элемента объема" фильтрационно-емкостных свойств песчаников Ашальчинского месторождения с использованием метода рентгеновской компьютерной томографии. *Нефтяное хозяйство.* 2015. № 10. С. 54–57.
9. Закиров Т. Р., Галеев А. А., Королев Э. А., Стаценко Е. О. Исследование коэффициентов пористости и абсолютной проницаемости карбонатного коллектора с применением метода рентгеновской компьютерной микро-томографии. *Нефтяное хозяйство.* 2016. № 6. С. 56–69.

10. **Zakirov T. R., Galeev A. A., Korolev E. A., and Statsenko E. O.** Flow properties of sandstone and carbonate rocks by X-ray computed tomography. *Current Sci.* 2016. Vol. 110, Issue 11. Pp. 2142–2147.
11. **Chen S. and Doolen G.** Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1998. Vol. 30. Pp. 329–364.
12. **Кривовичев Г. В.** Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана. *Вычислит. методы и программирование.* 2013. Т. 14. С. 1–8.
13. **Pan C., Luo L. S., and Miller C. T.** An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous medium flow simulation. *Comput. Fluids.* 2006. Vol. 35. Pp. 898–909.
14. **Succi S.** *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond.* Oxford University Press, 2001.
15. **Aslan E., Taymaz I., and Benim A. C.** Investigation of the lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow. *Int. J. Mater., Mech. Manuf.* 2014. Vol. 2, No. 4. Pp. 317–324.
16. **Niu X., Munekata T., Hyodoa Sh., and Suga K.** An investigation of water-gas transport processes in the gas-diffusion-layer of a PEM fuel cell by a multiphase multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model. *J. Power Source.* 2007. Vol. 172. Pp. 542–552.
17. **Bhatnagar P. L., Gross E. P., and Krook M. A.** Model for collision processes in gases. I. Small-amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.* 1954. Vol. 94. Pp. 511–525.
18. **Lallemand P. and Luo L.** Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. *Phys. Rev.* 2000. Vol. 61, No. 6. Pp. 6546–6562.
19. **Zou Q. and He X.** On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Phys. Fluids.* 1997. Vol. 9. Pp. 1591–1598.
20. **Белоцерковский О. М.** *Численное моделирование в механике сплошных сред.* Москва: Физ.-мат. лит-ра, 1994.
21. **Роуч П.** *Вычислительная гидродинамика.* Москва: Мир, 1980.