Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский фонд фундаментальных исследований
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

**Международный научный семинар
«Нелинейные модели в механике,
статистике, теории поля и космологии»
GRACOS-18**

Сборник материалов

(*28 октября – 3 ноября 2018 г., Казань*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2018

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
М43

Печатается по решению организационного комитета международного семинара

GRACOS-18

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г. Игнатьева

М43 **VIII-й международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» - GRACOS-18** // Лекции и материалы семинара / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Академия наук РТ, 2018. - 176 с.

ISBN 978-5-9690-0467-2

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики, механики, прикладной математики и математического моделирования

VIII-th international scientific seminar "Nonlinear models in mechanics, statistics, field theory and cosmology" GRACOS-18 // Lectures and Proceedings of the seminar. Under the general edition of Yu.G. Ignat'ev. – Kazan: Academy of science of the Republic of Tatarstan Press, 2018. – 176 p.

The book of conference proceedings are intended for researchers, graduate students, undergraduates and senior students specializing in theoretical physics, mechanics, applied mathematics and mathematical modeling

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ – № 18-02-20129\18.

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632

ISBN 978-5-00019-308-2

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА «GRACOS-18»

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

УДК 530.122; 530.22

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КВАНТОВАННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В СТАТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ-ВРЕМЕНАХ

А.А. Попов[1]

1 *apopov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Получено аналитическое приближение для $\langle\varphi^2\rangle$ квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных пространствах-временах. Предполагалось, что поле является массивным или безмассовым, с произвольной константой ξ связи скалярного поля с кривизной и находится в квантовом состоянии с нулевой температурой. Выражение для $\langle\varphi^2\rangle$ разделено на низко- и высокочастотные части. Вклады высокочастотных мод в эти величины вычислены для произвольного квантового состояния. В качестве примера, низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ вычислен в асимптотически плоских пространствах-временах в квантовом состоянии, соответствующем вакууму Минковского (квантовое состояние Бульвара). Обсуждаются пределы применимости этих приближений.

Ключевые слова: поляризация вакуума, квантованное скалярное поле, гравитация.

СОДЕРЖАНИЕ:

1. Введение

Исследование эффектов квантованных полей на фоне внешнего гравитационного поля имеет долгую историю [1]. Эти эффекты оказались весьма важными, например, при описании ранней вселенной [2] и квантового испарения черных дыр [3]. Наиболее важными величинами, характеризующими квантованные поля во внешнем гравитационном поле, являются $\langle\varphi^2\rangle$ и $\langle T^\mu_\nu\rangle$, где φ есть квантованное поле, а T^μ_ν – оператор тензора энергии-импульса для φ. Однако, получить точную функциональную зависимость этих величин от метрики даже в однопетлевом приближении невозможно, за исключением ряда высокосимметричных пространств-времен (см., например, [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Численные вычисления, как правило, являются весьма трудоемкими [12, 13, 14, 15, 16, 25, 17, 18]. Очевидно, таким образом, что получение аналитических приближений для $\langle\phi^2\rangle$ и $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, когда это возможно, является полезным. Одним из наиболее широко используемых методов получения приближенных выражений для $\langle\varphi^2\rangle$ и $\langle T^\mu_\nu\rangle$ является разложение ДеВитта-Швингера этих величин в ряд по $1/(m^2 l_g^2)$, где m есть масса квантованного поля, а l_g – характерный масштаб радиуса кривизны фонового гравитационного поля [19]. Для конформно связанных безмассовых полей в некоторых классах пространств-времен, не фиксированных явно заданием функционального вида метрики, приближенные вычисления также производились. Например, аналитическое приближение для $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ в статических Эйнштейновских пространствах-временах ($R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$) было получено Пэйджем, Брауном и Оттевилом [20, 21, 22]. Эти результаты были обобщены на случай произвольных статических пространств-времен Занниасом [23]. Подход к вычислению приближенных выражений для $\langle\phi^2\rangle$ и $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, предложенный Фроловым и Зельниковым [24], основывается скорее на геометрических аргументах и общих свойствах тензора энергии-импульса, чем на теории поля. Приближение же Андерсона, Хискока и Самюэля [25] основывалось на методах квантовой теории скалярного поля. Они предполагали, что поле может находиться в вакуумном квантовом состоянии с нулевой или ненулевой температурой, может быть массивным или безмассовым и иметь произвольную константу связи

ξ поля с кривизной. Их результат был представлен в виде суммы двух частей: численной и аналитической

$$\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{ren} = \langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{numeric} + \langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{analytic}. \tag{1}$$

Аналитическая часть их выражений удовлетворяла закону сохранения и имела след, равный аномальному следу в случае конформно инвариантного поля. По этой причине они предложили использовать $\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{analytic}$ непосредственно как приближение для $\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle_{ren}$. Аналогичный результат был получен Гровесом, Андерсоном и Карлсоном [26] для безмассового поля спина 1/2 в произвольном статическом сферически симметричном пространстве-времени.

Принципиально важной проблемой всех этих приближений для безмассовых полей или массивных полей с массой $ml_g \lesssim 1$ является определение области их применимости. Некоторую уверенность в справедливости полученных приближений давало авторам сравнение полученных результатов с численными или аналитическими расчетами, проведенными для пространств-времен с заданным функционально видом метрики.

В этой лекции строятся приближенное выражение для $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных асимптотически плоских пространствах-временах. Поле предполагается массивным или безмассовым, имеющим произвольную константу связи скалярного поля с кривизной и находящемся в вакуумном состоянии с нулевой температурой. Выражение для $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ разбивается на низко и высокочастотные части. Для аппроксимации высокочастотных частей используется подход Андерсона, Хискока и Самюэля [25]. Эти части содержат все ультрафиолетовые расходимости и могут быть перенормированы. Низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ определяется в общем случае глобальной структурой пространства-времени и вычислен в статическом сферически симметричном асимптотически плоском пространстве-времени для квантового состояния, соответствующего вакууму Минковского (в общепринятой терминологии это соответствует выбору квантового состояния Бульвара). Важной частью исследования является получение пределов применимости рассмотренных приближений.

2. Высокочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ и $\langle T^{\mu}_{\nu}\rangle$ квантованного скалярного поля

Запишем метрику статического сферически симметричного пространства-времени в виде

$$ds^2 = f d\tau^2 + d\rho^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{2}$$

где f и r являются функциями собственной радиальной координаты ρ, а τ есть евклидово время ($\tau = it$, где t координата, соответствующая времениподобному вектору Киллинга, всегда существующему для статического пространства-времени).

Вакуумное среднее оператора ϕ^2 квантованного скалярного поля ϕ может быть вычислено с использованием метода раздвижки точек [27, 28] из евклидовой функции Грина $G_E(x,\tilde{x})$ следующим образом

$$\langle\phi^2\rangle_{unren} = G_E(x,\tilde{x}), \tag{3}$$

где $G_E(x,\tilde{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\,\Box_x - m^2 - \xi R(x)\right] G_E(x,\tilde{x}) = -\frac{\delta^4(x,\tilde{x})}{\sqrt{g(x)}}, \tag{4}$$

а $\Box_x$ и $g(x)$ вычисляются с использованием евклидовой метрики (2), m есть масса скалярного поля, ξ константа связи скалярного поля с кривизной пространства-времени R.

В метрике (2) правая часть (4) может быть представлена в виде

$$\frac{\delta^4(x,\tilde{x})}{\sqrt{g(x)}} = \frac{\delta(\tau-\tilde{\tau})\delta(\rho,\tilde{\rho})\delta(\Omega,\tilde{\Omega})}{r^2\sqrt{f}}, \tag{5}$$

где $\delta(\Omega,\tilde{\Omega})$ может быть разложена по полиномам Лежандра P_l

$$\delta(\Omega,\tilde{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\gamma), \tag{6}$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\tilde{\theta} + \sin\theta\sin\tilde{\theta}\cos(\varphi - \tilde{\varphi}) \tag{7}$$

Если скалярное поле находится в квантовом состоянии с температурой T, определенном по отношению к времениподобному вектору Киллинга, то евклидова функция Грина является периодической по $\tau - \tilde{\tau}$ с периодом $1/T$. Однако, здесь мы будем рассматривать случай квантового состояния скалярного поля с нулевой температурой. В этом случае

$$\delta(\tau - \tilde{\tau}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \cos\left[\omega(\tau - \tilde{\tau})\right]. \tag{8}$$

Таким образом, евклидова функция Грина может быть представлена в виде

$$G_E(x;\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty} d\omega \cos[\omega(\tau - \tilde{\tau})] \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\gamma)\ \chi_{\omega l}, \tag{9}$$

где $\chi_{\omega l}(\rho,\tilde{\rho})$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \left[\frac{1}{2f}\frac{df}{d\rho} + \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\rho}\right]\frac{d}{d\rho} - \left[\frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right]\right\}\chi_{\omega l} = -\frac{\delta(\rho - \tilde{\rho})}{r^2\sqrt{f}}. \tag{10}$$

Если обозначить независимые решения соответствующего однородного уравнения $p_{\omega l}(\rho)$ и $q_{\omega l}(\rho)$

$$\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \left[\frac{1}{2f}\frac{df}{d\rho} + \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\rho}\right]\frac{d}{d\rho} - \left[\frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right]\right\}\left\{\begin{matrix} p_{\omega l} \\ q_{\omega l}\end{matrix}\right\} = 0, \tag{11}$$

то $\chi_{\omega l}(\rho,\tilde{\rho})$ можно представить в виде

$$\chi_{\omega l}(\rho,\tilde{\rho}) = C_{\omega l}\ p_{\omega l}(\rho_<)\ q_{\omega l}(\rho_>) \tag{12}$$

где $C_{\omega l}$ есть нормировочная постоянная, $\rho_<$ and $\rho_>$ есть меньшее или большее значение ρ или $\tilde{\rho}$, соответственно. Фиксирование нормировочной константы $C_{\omega l}$ может быть достигнуто интегрированием (10) по ρ от $\tilde{\rho} - \delta$ до $\tilde{\rho} + \delta$ и стремлением $\delta \to 0$. Это дает следующее условие на вронскиан

$$C_{\omega l}\left[\ p_{\omega l}\frac{dq_{\omega l}}{d\rho} - q_{\omega l}\frac{dp_{\omega l}}{d\rho}\right] = \frac{-1}{r^2 f^{1/2}}. \tag{13}$$

В выше приведенных обозначениях выражение для $G_E(x;\tilde{x})$ имеет вид

$$G_E(x;\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty} d\omega\cos[\omega(\tau - \tilde{\tau})] \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\gamma)\ C_{\omega l}\ p_{\omega l}(\rho_<)\ q_{\omega l}(\rho_>). \tag{14}$$

Легко увидеть, что после подстановки

$$p_{\omega l} = \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}}\exp\left\{\int^{\rho} W f^{-1/2} d\rho\right\},$$
$$q_{\omega l} = \frac{1}{\sqrt{2r^2 W}}\exp\left\{-\int^{\rho} W f^{-1/2} d\rho\right\}, \tag{15}$$

условие на вронскиан (13) тождественно выполняется, если

$$C_{\omega l} = 1 \tag{16}$$

а уравнение на радиальные моды $p_{\omega l}(\rho)$ и $q_{\omega l}(\rho)$ (11) дает, в этом случае, следующее уравнение на функцию $W(\rho)$

$$W^2 = \omega^2 + \frac{f}{r^2}l(l+1) + fm^2 + \frac{f}{4r^2}$$

$$+V+\frac{f'}{8}\frac{(W^2)'}{W^2}+\frac{f}{4}\frac{(W^2)''}{W^2}-\frac{5f}{16}\frac{(W^2)'^2}{W^4}, \tag{17}$$

где

$$V=\left(2\xi-\frac{1}{4}\right)\frac{f}{r^2}+f\left(\frac{(r^2)''}{2r^2}+\frac{f'(r^2)'}{4fr^2}-\frac{(r^2)'^2}{4r^4}\right)$$
$$+\xi f\left(-\frac{f''}{f}-2\frac{(r^2)''}{r^2}+\frac{f'^2}{2f^2}+\frac{(r^2)'^2}{2r^4}-\frac{f'(r^2)'}{fr^2}\right). \tag{18}$$

В случае достаточно массивного поля, т.е.

$$m=\frac{1}{r_{\text{c}}}\gg\frac{1}{l_g}, \tag{19}$$

где

$$\frac{1}{l_g}=\max\left\{\frac{1}{|r|},\left|[\ln(fr^2)]'\right|,\ \left|[\ln(fr^2)]''\right|^{1/2},\ \left|[\ln(fr^2)]'''\right|^{1/3},\ \dots\right\}, \tag{20}$$

существует малый параметр

$$\varepsilon_{\text{WKB}}=\frac{r_{\text{c}}}{l_g}\ll 1 \tag{21}$$

по степеням которого может быть разложено решение уравнения (17). При этом нулевой член разложения может быть выбран в виде

$$(W^2)_{(0)}=\omega^2+\frac{f}{r^2}l(l+1)+fm^2. \tag{22}$$

Тогда член следующего порядка имеет вид

$$(W^2)_{(2)}=\frac{f}{4r^2}+V+\frac{f'}{8}\frac{{(W^2)_{(0)}}'}{(W^2)_{(0)}}+\frac{f}{4}\frac{{(W^2)_{(0)}}''}{(W^2)_{(0)}}-\frac{5f}{16}\frac{{(W^2)_{(0)}}'^2}{{(W^2)_{(0)}}^2} \tag{23}$$

и т.д. . Для удобства вычислений к нулевому члену разложения может быть добавлено слагаемое второго порядка малости по ε_{WKB}.

$$(W^2)_{(0)}=\omega^2+\frac{f}{r^2}l(l+1)+fm^2+\frac{1}{4r^2}=\omega^2+\frac{f}{r^2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+fm^2, \tag{24}$$

поскольку это не меняет соотношений

$$(W^2)_{(0)}\gg(W^2)_{(2)}\gg(W^2)_{(4)}\gg\dots \tag{25}$$

или

$$(W^2)_{(2)}\sim\varepsilon^2_{\text{WKB}}(W^2)_{(0)},\quad (W^2)_{(4)}\sim\varepsilon^4_{\text{WKB}}(W^2)_{(0)},\quad \dots \tag{26}$$

и

$$W^2=(W^2)_{(0)}+(W^2)_{(2)}+(W^2)_{(4)}+\dots. \tag{27}$$

Такой подход дает [19, 25] разложение ДеВитта-Швингера величины $\langle\varphi^2\rangle$ по степеням $1/(ml_g)$. Следует отметить, что добавление к нулевому члену итерационной процедуры членов второго порядка малости может потребовать дополнительного разложения полученного выражения для $\langle\varphi^2\rangle$ по малому параметру $1/(ml_g)$.

Здесь мы рассмотрим случай безмассового скалярного поля или поля с малой массой, т.е.

$$r_{\text{c}}=\frac{1}{m}\gtrsim l_g. \tag{28}$$

В этом случае малого параметра не существует, однако можно вычислить вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ высокочастотных мод. Такой вклад может быть получен учетом в интегралах по w в выражении (14)) только тех частот, для которых

$$w\geq w_0 \tag{29}$$

или

$$u \geq u_0 = w_0 \sqrt{r^2/f}, \tag{30}$$

то есть

$$\langle \varphi^2 \rangle^{\text{HFC}}_{unren} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{u_0}^{\infty} du \cos(u\varepsilon) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\sqrt{\frac{f}{r^2}} \frac{(l+1/2)}{W} - 1 \right], \tag{31}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{f}{r^2}} (\tau - \tilde{\tau}), \;\; u = \frac{r}{\sqrt{f}} \omega. \tag{32}$$

В качестве малого параметра итерационной процедуры решения уравнения (17) может быть выбран следующий

$$\varepsilon_{\text{WKB}} = \frac{\sqrt{f}}{w_0 l_g} = \frac{|r|}{u_0 l_g} \ll 1. \tag{33}$$

Это также означает (см. определение l_g (20) и u (32))

$$u_0 \gg \frac{|r|}{l_g} \geq 1. \tag{34}$$

Решение нулевого порядка по ε_{WKB} уравнения (17) может быть выбрано в виде

$$(W^2)_{(0)} = \omega^2 + \frac{f}{r^2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2. \tag{35}$$

Тогда решение второго есть

$$(W^2)_{(2)} = V + \frac{f'}{8} \frac{{(W^2)_{(0)}}'}{(W^2)_{(0)}} + \frac{f}{4} \frac{{(W^2)_{(0)}}''}{(W^2)_{(0)}} - \frac{5f}{16} \frac{{(W^2)_{(0)}}'^2}{{(W^2)_{(0)}}^2}, \tag{36}$$

Высокочастотная часть величины $\langle \phi^2 \rangle_{unren}$ получается подстановкой W^2 (27) в выражение (31)

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^2 \rangle^{\text{HFC}}_{unren} = \frac{1}{4\pi^2} \Bigg\{ & \frac{1}{r^2} S^0_0(\varepsilon, u_0) - \frac{V}{2f} S^0_1(\varepsilon, u_0) - \frac{r^2}{16f^2} \Bigg[f' \left(\frac{f}{r^2} \right)' \\
& +2f \left(\frac{f}{r^2} \right)'' \Bigg] S^1_2(\varepsilon, u_0) + \frac{5r^4}{32f^2} \left(\frac{f}{r^2} \right)'^2 S^2_3(\varepsilon, u_0) + \frac{r^2}{16f^2} \Big[\, 6V^2 - f'V' \\
& - 2fV'' \Big] S^0_2(\varepsilon, u_0) + \frac{r^4}{128f^3} \Bigg[\Bigg(20Vf' + 40fV' - f'f'' \left(\frac{f}{r^2} \right)' \\
& -2ff''' \Bigg) + \Big(40fV - 3f'^2 - 8ff'' \Big) \left(\frac{f}{r^2} \right)'' - 12ff' \left(\frac{f}{r^2} \right)''' \\
& -4f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'''' \Bigg] S^1_3(\varepsilon, u_0) + \frac{r^6}{512f^4} \Bigg[\Big(21f'^2 + 56ff'' \\
& -280fV \Big) \left(\frac{f}{r^2} \right)'^2 + 84f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)''^2 + 112f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)' \left(\frac{f}{r^2} \right)''' \\
& +252ff' \left(\frac{f}{r^2} \right)' \left(\frac{f}{r^2} \right)'' \Bigg] S^2_4(\varepsilon, u_0) + \frac{r^8}{512f^5} \Bigg[-231ff' \left(\frac{f}{r^2} \right)'^3 \\
& -462f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'' \Bigg] S^3_5(\varepsilon, u_0) \\
& + \frac{r^{10}}{2048f^6} \left[1155f^2 \left(\frac{f}{r^2} \right)'^4 \right] S^4_6(\varepsilon, u_0) \Bigg\} + O\left(\frac{\varepsilon^2_{\text{WKB}}}{L^2} \right),
\end{aligned} \tag{37}$$

Величины $S^k_n(\varepsilon, u_0)$ в этих выражениях имеют вид

$$S^k_n(\varepsilon, u_0) = \int_{u_0}^{\infty} du \cos(\varepsilon u) \sum_{l=0}^{\infty} \Bigg\{ \;\; \frac{(l+1/2)^{2k+1}}{\left(u^2 + (l+1/2)^2 \right)^{(2n+1)/2}}$$

$$-\text{расходящиеся члены}\Big\}, \tag{38}$$

где k и n есть целые числа, $k \geq 0$ и $n \geq -1$. "Расходящиеся члены" в суммах по l получаются разложением суммируемых функций по обратным степеням l и отбрасыванием членов, стремящихся к нулю при $l \to \infty$. Такое вычитание соответствует удалению расходимостей в суммах по l, которое обсуждалось выше

$$S^n_{n-1}(\varepsilon, u_0) = \int_{u_0}^{\infty} du \cos(\varepsilon u) \sum_{l=0}^{\infty} \Bigg\{ \frac{(l+1/2)^{2n+1}}{[u^2+(l+1/2)^2]^{(2n-1)/2}} - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + (2n-1)\frac{u^2}{2} \Bigg\}, \tag{39}$$

$$S^n_n(\varepsilon, u_0) = \int_{u_0}^{\infty} du \cos(\varepsilon u) \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{(l+1/2)^{2n+1}}{\left[u^2+(l+1/2)^2\right]^{(2n+1)/2}} - 1 \right\}. \tag{40}$$

Для других величин $S^k_n(\varepsilon, u_0)$ расходящихся членов нет. Детали вычисления $S^k_n(\varepsilon, u_0)$ в пределе $\varepsilon \to 0$ приведены в Приложении

$$S^0_{-1}(\varepsilon, u_0) = -\frac{2}{\varepsilon^4} - \frac{1}{24\varepsilon^2} + \frac{u_0^4}{12} - \frac{u_0^2}{48} + \frac{7}{1920}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{31}{129024}\frac{1}{u_0^2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \tag{41}$$

$$S^1_0(\varepsilon, u_0) = \frac{4}{\varepsilon^4} - \frac{u_0^4}{6} + \frac{7}{960}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{31}{32256}\frac{1}{u_0^2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \tag{42}$$

$$S^0_0(\varepsilon, u_0) = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{u_0^2}{2} - \frac{1}{24}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) + \frac{7}{3840}\frac{1}{u_0^2} + \varepsilon^2\left[-\frac{u_0^4}{8} + \frac{u_0^2}{96} - \frac{7}{2560} + \frac{7}{3840}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{31}{86016}\frac{1}{u_0^2}\right] + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{43}$$

$$S^1_1(\varepsilon, u_0) = \frac{2}{\varepsilon^2} + u_0^2 - \frac{7}{1920}\frac{1}{u_0^2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \tag{44}$$

$$S^n_n(\varepsilon, u_0) = \frac{(2n)!!}{(2n-1!!)}\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{(2n)!!}{(2n-1!!)}\frac{u_0^2}{2} + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln|\varepsilon|\right), \quad (n \geq 2), \tag{45}$$

$$S^0_1(\varepsilon, u_0) = -\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) + \frac{1}{48}\frac{1}{u_0^2} + \varepsilon^2\left[\frac{u_0^2}{4} + \frac{1}{48}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) - \frac{1}{32} - \frac{7}{2560}\frac{1}{u_0^2}\right] + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right) + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{46}$$

$$S^1_2(\varepsilon, u_0) = -\frac{2}{3}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right) + \varepsilon^2\left[\frac{u_0^2}{6} + \frac{7}{3840}\frac{1}{u_0^2}\right] + O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)$$

$$+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \tag{47}$$

$$S_{n+1}^n(\varepsilon,u_0)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left[-\left(C+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right)+\varepsilon^2\frac{u_0^2}{4}\right]+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)$$
$$+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (n\geq 2), \tag{48}$$

$$S_2^0(\varepsilon,u_0)=\frac{1}{6u_0^2}+\varepsilon^2\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\left(C+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right)-\frac{1}{96u_0^2}\right]+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)$$
$$+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (n\geq 2), \tag{49}$$

$$S_{n+2}^n(\varepsilon,u_0)=\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\left\{\frac{1}{2u_0^2}+\varepsilon^2\left[-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(C+\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon^2 u_0^2\right|\right)\right]\right\}$$
$$+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (n\geq 1), \tag{50}$$

$$S_{n+3}^n(\varepsilon,u_0)=-\frac{(2n)!!}{(2n+5)!!}\frac{3\varepsilon^2}{4u_0^2}+O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right),$$
$$(n\geq 0), \tag{51}$$

$$S_n^k(\varepsilon,u_0)=O\left(\frac{1}{u_0^4}\right)+O\left(\frac{\varepsilon^2}{u_0^4}\right)+O\left(\varepsilon^4\right), \quad (k\geq 0,\ n\geq k+4). \tag{52}$$

Подстановка этого выражения в (37) дает $\langle\varphi^2\rangle_{unren}^{\text{HFC}}$ - высокочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle_{unren}$. Отметим, что разложение $\langle\varphi^2\rangle_{unren}^{\text{HFC}}$ по степеням u_0 соответствует разложению ДеВитта-Швингера $\langle\varphi^2\rangle_{unren}$ по степеням ml_g.

Перенормировка $\langle\varphi^2\rangle$ достигается вычитанием ренормализационных контрчленов из $\langle\varphi^2\rangle_{unren}$ с последующим вычислением предела $\tilde{\tau}\to\tau$:

$$\langle\varphi^2\rangle_{ren}=\lim_{\tilde{\tau}\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\text{DS}}\right], \tag{53}$$

где

$$\langle\phi^2\rangle_{\text{DS}}=\frac{1}{8\pi^2\sigma}+\frac{1}{8\pi^2}\left[m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\left[C+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_{DS}^2|\sigma|}{2}\right)\right]$$
$$-\frac{m^2}{16\pi^2}+\frac{1}{96\pi^2}R_{\alpha\beta}\frac{\sigma^\alpha\sigma^\beta}{\sigma}, \tag{54}$$

константа m_{DS} равна массе m поля для массивного скалярного поля. В случае безмассового поля эта константа является известным параметром инфракрасного обрезания в $\langle T_\nu^\mu\rangle_{DS}$. Конкретный выбор величины m_{DS} соответствует конечной перенормировке коэффициентов при членах гравитационного лагранжиана, квадратичных по тензору Вейля и скалярной кривизне, и должен быть фиксирован экспериментом или наблюдениями. Величины σ^μ для метрики (2), рассчитанные с необходимой степенью точности, есть

$$\sigma^t=(t-\tilde{t})+\frac{f'^2}{24f}(t-\tilde{t})^3-\frac{1}{120}\left(\frac{f'^4}{8f^2}-\frac{3}{8}\frac{f'^2 f''}{f}\right)(t-\tilde{t})^5$$
$$+O\left((t-\tilde{t})^7\right),$$

$$\sigma^{\rho}=-\frac{f'}{4}(t-\tilde{t})^2-\frac{f'f''}{96}(t-\tilde{t})^4+O\left((t-\tilde{t})^6\right),$$
$$\sigma^{\theta}=\sigma^{\phi}=0,$$
$$\sigma=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sigma^{\mu}\sigma^{\nu}, \tag{55}$$

Все ультрафиолетовые расходимости $\langle\varphi^2\rangle$ содержатся в $\langle\varphi^2\rangle^{\text{HFC}}_{unren}$. Вычитая из последнего ренормализационные контрчлены, получим

$$\langle\varphi^2\rangle_{\text{WKB}}=\lim_{\tilde{\tau}\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle^{\text{HFC}}_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\text{DS}}\right]=\left(\varphi^2\right)_{(0)}+\left(\varphi^2\right)_{(2)}+O\left(\frac{1}{{u_0}^2L^2}\right), \tag{56}$$

где $\left(\varphi^2\right)_{(0)}$, $\left(\varphi^2\right)_{(2)}$ величины нулевого и второго ВКБ порядка для $\langle\varphi^2\rangle_{\text{WKB}}$ соответственно

$$\left(\varphi^2\right)_{(0)}=\frac{{u_0}^2}{8\pi^2r^2}, \tag{57}$$

$$\left(\varphi^2\right)_{(2)}=\frac{m^2}{16\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}\left[m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\ln\left|\frac{4u_0^2}{m^2_{DS}r^2}\right|-\frac{f'^2}{96\pi^2f^2}$$
$$+\frac{f''}{96\pi^2f^2}+\frac{f'(r^2)'}{96\pi^2fr^2}, \tag{58}$$

$$u_0=w_0\sqrt{r^2/f}\gg 1. \tag{59}$$

3. Низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$

Вклад низкочастотных мод в $\langle\varphi^2\rangle$ в общем случае определяется граничными условиями и топологией пространства-времени. Если пространство-время является асимптотически плоским, а характерный масштаб λ области, в которой гравитационное является сильным (пример дан ниже), много меньше параметра $\sqrt{f}/\omega_0$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{f}/\omega_0}\ll 1, \tag{60}$$

то в асимптотически плоской области низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle$ может быть разложен в ряд по степеням этого малого параметра. Ниже нулевой член такого разложения используется для приближенного описания низкочастотного вклада в $\langle\varphi^2\rangle$. Такой подход означает, что мы считаем длинноволновые моды приближенно совпадающими с длинноволновыми модами вакуума Минковского (в общепринятой терминологии теории черных дыр это соответствует вакуумному состоянию Бульвара в асимптотически плоской области). Для этих мод в координатах

$$ds^2=dT^2+dx^2+dy^2+dz^2=dT^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{61}$$

евклидова функция Грина имеет вид

$$G_E(T,x^{\alpha};\tilde{T},\tilde{x})=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\Omega d^3p\frac{\exp\left[i\Omega\left(T-\tilde{T}\right)+ip_{\alpha}\left(x^{\alpha}-\tilde{x}^{\alpha}\right)\right]}{\left(\Omega^2+p_x^2+p_y^2+p_z^2+m^2\right)}$$
$$=\frac{1}{4\pi^3}\int d\Omega e^{i\Omega\Delta T}\int_0^{\infty}dp\frac{p\sin(p\Delta r)}{\Delta r\left(\Omega^2+p^2+m^2\right)}$$
$$=\frac{1}{8\pi^2}\int d\Omega e^{i\Omega\Delta T}\frac{\exp\left(-\Delta r\sqrt{\Omega^2+m^2}\right)}{\Delta r}$$
$$=\frac{1}{8\pi^2}\int d\Omega e^{i\Omega\Delta T}\left[\frac{1}{\Delta r}-\sqrt{\Omega^2+m^2}+O(\Delta r)\right]. \tag{62}$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении соответствует обсуждавшейся выше, а также в работах [12, 13, 30, 31], расходимости. И также, как и выше, такая расходимость должна быть удалена. Таким образом, приближенным выражением для низкочастотного вклада в $\langle\varphi^2\rangle$ может служить

$$\langle\varphi^2\rangle_{\text{LFC}}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\left\{-\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0}d\Omega e^{i\Omega\Delta\tau}\sqrt{\Omega^2+m^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{8\pi^2}\left(\Omega_0\sqrt{{\Omega_0}^2+m^2}+m^2\ln\left|\frac{\Omega_0+\sqrt{{\Omega_0}^2+m^2}}{m}\right|\right). \tag{63}$$

В случае безмассового поля или поля с массой, удовлетворяющей условию $\Omega_0 \gg m$, это выражение может быть переписано следующим образом

$$\langle\varphi^2\rangle_{\text{LFC}}=-\frac{{\Omega_0}^2}{8\pi^2}-\frac{m^2}{16\pi^2}-\frac{m^2}{16\pi^2}\ln\left|\frac{4{\Omega_0}^2}{m^2}\right|+O\left(\frac{m^4}{{\Omega_0}^2}\right). \tag{64}$$

И если принять во внимание соотношение $\Omega_0 = \omega_0/\sqrt{f}$, то

$$\begin{aligned}\langle\varphi^2\rangle_{ren}=&\lim_{\tilde\tau\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\text{DS}}\right]=\lim_{\tilde\tau\to\tau}\left[\langle\varphi^2\rangle^{\text{HFC}}_{unren}-\langle\varphi^2\rangle_{\text{DS}}\right]+\langle\varphi^2\rangle_{\text{LFC}}\\ =&\langle\varphi^2\rangle_{\text{WKB}}+\langle\varphi^2\rangle_{\text{LFC}}\\ =&\frac{R}{16\pi^2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\ln\left|\frac{4{u_0}^2}{m_{DS}^2r^2}\right|-\frac{f'^2}{96\pi^2f^2}+\frac{f''}{96\pi^2f}+\frac{f'(r^2)'}{96\pi^2fr^2}\\ &+O\left(\frac{1}{L^2{u_0}^2}\right).\end{aligned} \tag{65}$$

4. Заключение

В этой лекции получено аналитическое приближение для $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ квантованного скалярного поля в статических сферически симметричных асимптотически плоских пространствах-временах. Предполагается, что константа ξ связи скалярного поля с кривизной произвольна, поле находится в квантовом состоянии с нулевой температурой и имеет произвольную массу m.

Условиями применимости аналитического приближения (65) являются

$$\lambda \ll \frac{\sqrt{f(\rho)}}{w_0} \ll L(\rho), \tag{66}$$

где λ есть характерный размер области асимптотически плоского пространства-времени, в которой гравитационное поле является сильным, а w_0 есть константа ВКБ разложения.

В качестве примера, рассмотрим гравитационное поле, создаваемое сферическим телом радиуса $r_0 > r_g$, где r_g есть гравитационный радиус этого тела. Тогда $\lambda \sim r_0$, а метрика пространства-времени вне этого тела есть

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_g}{r(\rho)}\right)dt^2+d\rho^2+r(\rho)^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{67}$$

где $r(\rho)$ - обратная функция к функции

$$\begin{aligned}\rho(r)=&\rho_0+r_g\left[\sqrt{\frac{r}{r_g}\left(\frac{r}{r_g}-1\right)}-\sqrt{\frac{r_0}{r_g}\left(\frac{r_0}{r_g}-1\right)}\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{r/r_g-1}+\sqrt{r/r_g}\right)\left(\sqrt{r_0/r_g-1}-\sqrt{r_0/r_g}\right)}{\left(\sqrt{r/r_g-1}-\sqrt{r/r_g}\right)\left(\sqrt{r_0/r_g-1}+\sqrt{r_0/r_g}\right)}\right|\right].\end{aligned} \tag{68}$$

При $r(\rho) \gg r_0$

$$f(\rho)\sim 1, \quad L(\rho)\sim r(\rho), \tag{69}$$

и условия (66) могут быть удовлетворены выбором w_0,

$$r_0 \ll w_0 \ll r(\rho). \tag{70}$$

Это означает, что вдали от тела (т.е. в области, где $r(\rho) \gg r_0$) приближение (65) является справедливым.

Присутствие в выражении (65) произвольного параметра $u_0 = w_0 r/\sqrt{f}$ является общей чертой аналитических приближений [25, 26, 32, 33, 34]. Для безмассовых полей этот параметр может быть объединен с константой m_{DS}.

Для конформно инвариантного скалярного поля приближение (65) совпадает с приближениями Пейджа, Брауна и Оттевила [20, 21, 22], Фролова, Зельникова [24] (для некоторого выбора произвольных параметров в их выражениях) и аналитическим приближением Андерсона, Хискока, Самюэля [25]. Отметим, что в этом случае низкочастотный вклад в $\langle\varphi^2\rangle_{ren}$ эквивалентен низкочастотному вкладу, который дает процедура работы [25]. Это означает, что приближения, полученные в [35, 36, 37], является корректными для конформно инвариантного квантованного скалярного поля, находящегося в вакуумном состоянии Бульвара, в статическом сферически симметричном асимптотически плоском пространстве-времени.

Приложение: Детали вычислений $S_n^k(\varepsilon, u_0)$

Первым шагом при вычисления величин $S_n^k(\varepsilon, u_0)$ является вычисление различных сумм по l. Начнем с вычисления суммы в выражении (39):

$$S(u,n)=\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{[u^2+(l+1/2)^2]^{(2n-1)/2}}-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right\},$$

$$n\geq 0. \tag{71}$$

Для вычисления воспользуемся методом Абеля-Плана [34, 38]

$$\sum_{l=0}^{\infty}F(l+1/2)=\int_q^{\infty}F(x)dx+\int_{q-i\infty}^{q}\frac{F(z)}{1+e^{i2\pi z}}dz-\int_q^{q+i\infty}\frac{F(z)}{1+e^{-i2\pi z}}dz, \tag{72}$$

где $-1/2<q<1/2$, $f(z)$ является голоморфной функцией для $Rez\geq q$ и $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left|F(x+iy)\right|<\epsilon(x)e^{a|y|},\quad 0<a<2\pi, \tag{73}$$

а $\epsilon(x)$ является произвольной функцией с асимптотическим поведением

$$\epsilon(x)\to 0 \quad \text{for} \quad x\to+\infty. \tag{74}$$

Используя эту формулу, мы можем вычислить сумму (71):

$$\begin{aligned}
S(u,n)=&\lim_{q\to+0}\left\{\int_q^{\infty}\left[\frac{x^{2n+1}}{(u^2+x^2)^{(2n-1)/2}}-x^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right]dx\right.\\
&+\int_{q-i\infty}^{q}\left[\frac{z^{2n+1}}{(u^2+z^2)^{(2n-1)/2}}-z^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right]\frac{dz}{(1+e^{i2\pi z})}\\
&\left.-\int_q^{q+i\infty}\left[\frac{z^{2n+1}}{(u^2+z^2)^{(2n-1)/2}}-z^2+(2n-1)\frac{u^2}{2}\right]\frac{dz}{(1+e^{-i2\pi z})}\right\}\\
&=\frac{(2n-1)}{3}\frac{(2n)!!\,u^3}{(2n-1)!!}+2(-1)^m\lim_{\delta\to+0}\left[\int_0^{u+\delta}\frac{x^{2n+1}dx}{(u^2-x^2)^{(2n-1)/2}(1+e^{2\pi x})}\right.\\
&\left.-\begin{pmatrix}\text{члены этого интеграла,}\\ \text{расходящиеся в пределе } \delta\to+0\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{(2n-1)\,u^3}{(2n-1)!!}\left\{\frac{(2n)!!}{3}-2\left(\frac{d}{udu}\right)^n\left[u^{2n}\int_0^1\frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi uy}}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$(n\geq 0). \tag{75}$$

Сумма в выражении (40) может быть вычислена дифференцированием $S(u,n)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{[u^2+(l+1/2)^2]^{(2n+1)/2}}-1\right\}=\frac{-1}{(2n-1)}\left(\frac{d}{udu}\right)S(u,n)\\
&=-\frac{(2n)!!\,u}{(2n-1)!!}+\frac{2}{(2n-1)!!}\left(\frac{d}{udu}\right)\left\{u^3\left(\frac{d}{udu}\right)^n\left[u^{2n}\int_0^1\frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi uy}}\right]\right\},
\end{aligned}$$

$$(n\geq 0). \tag{76}$$

Другие суммы в выражениях для $S_n^k(\varepsilon, u_0)$ (38) также могут быть вычислены дифференцированием $S(u,n)$:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{[u^2+(l+1/2)^2]^{(2n+2k+3)/2}}=\frac{(-1)^k(2n-1)!!}{(2n-1)(2n+2k+1)!!}\left(\frac{d}{udu}\right)^{k+2}S(u,n)$$
$$=-\frac{(2n)!!}{(2n+2k+1)!!}\frac{(2k-1)!!}{u^{2k+1}}$$
$$-\frac{2(-1)^k}{(2n+2k+1)!!}\left(\frac{d}{udu}\right)^{k+2}\left\{u^3\left(\frac{d}{udu}\right)^n\left[u^{2n}\int_0^1\frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi u y}}\right]\right\},\begin{pmatrix} n\geq 0,\\ k\geq 0\end{pmatrix}. \quad (77)$$

Интегралы по y во всех этих выражениях могут быть вычислены приближенно, поскольку подынтегральные выражения уменьшаются экспоненциально при $y > 1/(2\pi u)$. Параметр u во всех выражениях (38) удовлетворяет условию $u > u_0 \gg 1$. Поэтому основной вклад в этот интеграл дают малые величины y ($y \ll 1$), а, следовательно, квадратный корень в подынтегральном выражении может быть разложен в ряд по y. Затем верхний предел интегрирования может быть сдвинут к бесконечности:

$$\int_0^1\frac{y\sqrt{1-y^2}dy}{1+e^{2\pi u y}}=\int_0^{\infty}\frac{ydy}{1+e^{2\pi u y}}\left[1-\frac{y^2}{2}-\frac{1!!}{4!!}y^4-\frac{3!!}{6!!}y^6+O(y^8)\right]$$
$$=\frac{1}{48u^2}-\frac{7}{3840u^4}-\frac{31}{129024u^6}+O\left(\frac{1}{u^{10}}\right). \quad (78)$$

Подставляя это выражение в (75)-(77) и интегрируя в (38) мы получим окончательные выражения (41)-(52).

Литература

1. Schrödinger E., *T* // h – e. – Vol. **p**, – P. roper vibrations of the expandung universe / E. Schrödinger, / // / – P. – Vol. **h**, – P. ysica. – 1939. – №6. – P. 899-912.

2. Гриб А. А. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях / А.А. Гриб, С.Г. Мамаев, В.М. Мостепаненко. – М.:Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.

3. Frolov V.P. Black Holes Physics: Basic Concepts and New Developments / V.P. Frolov, I.D. Novikov. – Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/Boston/London, 1998. – 770 p.

4. Dowker J. S. Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space / J.S. Dowker, R. Critchley // Phys. Rev. D. – 1976. – №13. – P. 3224-3232.

5. Brown L. S. Stress-tensor trace anomaly in a gravitational metric: General theory, Maxwell field / L.S. Brown, J.P. Cassidy // Phys. Rev. D. – 1977. – № 15. – P. 2810-2829.

6. Bunch T. S. Quantum Field Theory in De Sitter Space:Renormalization by Point-Splitting / T.S. Bunch, P.C. Davies // W. Proc. R. Soc. London. – 1978. – A360. – P. 117-134.

7. Bunch T.S. On renormalisation of the quantum stress tensor in curved space-time by dimensional regularisation / T.S. Bunch // J. Phys. A: Math. Gen. – 1979. №12. – P. 517-531.

8. Allen B. Massless minimally coupled scalar field in de Sitter space / B. Allen, A. Folacci // Phys. Rev. D. – 1987. №35. – P. 3771-3778.

9. Folacci A. Quantum field theory of p-forms in curved space-time / A. Folacci // J. Math. Phys. – 1991. – №32. – P. 2813-2827.

10. Folacci A. Two-point functions and stress-energy tensors of p-forms in de Sitter and anti-de Sitter spaces / A. Folacci // J. Math. Phys. – 1991. – №32. P. 2828-2838.

11. Kirsten K. Massless minimally coupled fields in de Sitter space: O(4)-symmetric states versus de Sitter–invariant vacuum / K. Kirsten, J. Garriga. // Phys. Rev. D. – 1993. – №48. P. 567-577.

12. Howard K.W. Quantum stress tensor in Schwarzschild space-time / K.W. Howard, P. Candelas // Phys. Rev. Lett. – 1984. – №53. – 403-406.

13. Candelas P. Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime / P. Candelas // Phys. Rev. D. – 1980. – №21. – P. 2185-2202.

14. Fawcett M.S. The Energy-Momentum Tensor near a Black Hole / M.S. Fawcett // Commun. Math. Phys. – 1983. – №89. P. 103-115.

15. Jensen B. Renormalized electromagnetic stress tensor in Schwarzschild spacetime / B. Jensen, A. Ottevill // Phys. Rev. D. – 1989. №39. – P. 1130-1138.

16. Jensen B. Anisotropy of the quantum thermal state in schwarzschild space-time / B. Jensen, J. G. Mc Laughlin, A. Ottevill // Phys. Rev. D. – 1992. №45. P. 3002-3005.

17. Anderson P.R. Semiclassical stability of the extreme Reissner-Nordström black hole / P.R. Anderson, W.A. Hiscock, D.J. Loranz // Phys. Rev. Lett. – 1995. – №74. – P. 4365-4368.

18. Bezerra de Mello E.R. Vacuum polarization of a massless spinor field in global monopole spacetime / E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, N.R. Khusnutdinov // Phys. Rev. D. – 1999. – №60. – P. 063506.

19. ДеВитт Б. С. Динамическая теория групп и полей / Б.С. ДеВитт // Пер. с англ.;Под ред. Г. А. Вилковыского. – М.:Наука, 1987. – 288 с.

20. Page D.N. Thermal stress tensors in static Einstein spaces / D.N. Page // Phys. Rev. D. – 1982. №25. – P. 1499-1509.

21. Brown M. R., Ottewill A. C. Effective actions and conformal transformations / M.R. Brown, A.C. Ottewill // Phys. Rev. D. – 1985. №31. P. 2514-2520.

22. Brown M.R. Conformally invariant quantum field theory in static Einstein space-times / M.R. Brown, A.C. Ottewill, D.N. Page // Phys. Rev. D. – 1986. №33. – P. 2840-2850.

23. Zannias T. Renormalized thermal stress tensor for arbitrary static space-times / T. Zannias // Phys. Rev. D. – 1984. – №30. – P.1161-1167.

24. Frolov V.P. Killing approximation for vacuum and thermal stress-energy tensor in static space-times / V.P. Frolov, A.I. Zelnikov // Phys. Rev. D. – 1987. – №35. – P. 3031-3044.

25. Anderson P.R. Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes / P.R. Anderson, W.A. Hiscock, D.A. Samuel // Phys. Rev. D. – 1995. – №51. – P. 4337-4358.

26. Groves P.B. Method to compute the stress-energy tensor for the massless spin 1/2 field in a general static spherically symmetric spacetime / P.B. Groves, P.R. Anderson, E.D. Carlson // Phys. Rev. D. – 2002. – №66. – P. 124017.

27. Christensen S.M. Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method / S.M. Christensen // Phys. Rev. D. – 1976. – №14. – P. 2490-2501.

28. Christensen S.M. Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation / S.M. Christensen // Phys. Rev. D. – 1978. – №17. – P. 946-963.

29. Popov A. A. Analytical approximation for $\langle\varphi^2\rangle$ of a quantized scalar field in ultrastatic asymptotically flat spacetimes / A.A. Popov // Phys. Rev. D. – 2004. – №70. – P. 084047.

30. Candelas P. Vacuum $\langle\phi^2\rangle$ in Schwarzschild spacetime / P. Candelas, K. W. Howard // Phys. Rev. D. – 1984. – №29. – P. 1618-1625.

31. Howard K.W. Vacuum $\langle T_\mu{}^\nu\rangle$ in Schwarzschild spacetime / K.W. Howard // Phys. Rev. D. – 1984. – №30. – P. 2532-2547.

32. Anderson P.R. A method to compute $\langle\phi^2\rangle$ in asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetimes / P.R. Anderson // Phys. Rev. D. – 1990. №41. – P. 1152-1162.

33. Popov A.A. Vacuum polarization of a scalar field in wormhole spacetimes / A.A. Popov, S.V. Sushkov // Phys. Rev. D. – 2001. – №63. – P. 044017.

34. Popov A. A. Stress-energy of a quantized scalar field in static wormhole spacetimes / A.A. Popov // Phys. Rev. D. – 2001. – №64. – P. 104005.

35. Balbinot R. Vacuum polarization in the Schwarzschild space-time and dimensional reduction / R. Balbinot, A. Fabbri, V. Frolov, P. Nicolini, P. Sutton, A. Zelnikov // Phys. Rev. D. – 2001. – №63. – P. 084029.

36. Balbinot R. Vacuum polarization in two-dimensional static spacetimes and dimensional reduction / R. Balbinot, A. Fabbri, P. Nicolini, P. Sutton // Phys. Rev. D. – 2002. – №66. – P. 024014.

37. Frolov V. The dimensional reduction anomaly / V. Frolov, P. Sutton, A. Zelnikov // Phys. Rev. D. – 2000. – №61. – P. 024021.

38. Евграфов М. А. Аналитические функции / М.А. Евграфов // М.:Наука, 1968. – 342 с.

VACUUM POLARIZATION OF A QUANTIZED SCALAR FIELD IN STATIC SPHERICALLY SYMMETRIC ASYMPTOTICALLY FLAT SPACETIMES

A.A. Popov

Analytical approximations for $\langle\varphi^2\rangle$ of a quantized scalar field in static spherically symmetric spacetimes are obtained. The field is assumed to be both massive and massless, with an arbitrary coupling ξ to the scalar curvature, and in a zero temperature vacuum state. The expression for $\langle\varphi^2\rangle$ is divided into low- and high-frequency parts. The contributions of the *high-frequency modes to these quantities are calculated for an arbitrary quantum state. As an example, the low-frequency contribution to* $\langle \varphi^2 \rangle$ *is calculated in asymptotically flat spacetimes in a quantum state corresponding to the Minkowski vacuum (Boulware quantum state). The limits of the applicability of these approximations are discussed.*

Keywords: vacuum polarization, quantized scalar field, gravitation.