6. Интегральная формула Коши

1. Применение формулы Грина к аналитическим функциям.

Пусть D — некоторая ограниченная область в $\mathbb{C}$ (возможно, не односвязная и не линейно связная) с кусочно гладкой границей Γ, ориентированной так, что при прохождении границы область остается слева (см. файл Pic2.jpg). Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — функция комплексного переменного, аналитическая в $D+\Gamma$. Вычислим

$$I = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\Gamma v\,dx + u\,dy = I_1 + iI_2. \qquad (1)$$

Применяем формулу Грина для вычисления I_1 и I_2, учитывая выполнение условий Коши–Римана:

$$I_1 = \iint_D 0\,dxdy = 0, \qquad I_2 = \iint_D 0\,dxdy = 0.$$

Таким образом,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \qquad (1)$$

2. Интегральная формула Коши.

Пусть, теперь, Γ — замкнутый контур, ограничивающий область D, z_0 — точка из D и $f(z)$ — аналитическая в $D+\Gamma$ функция (см. файл Pic3.jpg). Покажем, почему справедлива *интегральная формула Коши*

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ аналитична всюду в $D+\Gamma$ кроме точки z_0. Выбираем ε достаточно маленьким так, чтобы окружность $O_\varepsilon(z_0)$ с центром z_0 и радиусом ε целиком лежала в D. Ориентируем окружность против часовой стрелки (см. Pic3.jpg), $O_\varepsilon^-(z_0)$ — та же окружность, но ориентированная по часовой стрелке. Применяем (1) к функции $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ аналитической в области, ограниченной кривыми Γ и $O_\varepsilon(z_0)$, и на границе:

$$0 = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \int_{O_\varepsilon^-(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

откуда

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

В частности, $\int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ от ε не зависит.

Так как функция $f(z)$ непрерывна, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Поэтому при малых значениях ε

$$\int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0) \int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,dz.$$

Более точно, можно строго доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0) \int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,dz.$$

Осталось сосчитать:

$$\int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int\limits_{O_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,d(z-z_0) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\varphi}}\,d(\varepsilon e^{i\varphi}) = \int\limits_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i$$

(Подставили $z - z_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$.)

В качестве примеров применения интегральной формулы Коши при вычисления интегралов предлагаю разобраться в примерах 1 и 2 пособия В.Т. Дубровина [Ду, стр. 41–42]. Заметим, что главное — разобраться, какая функция выступает в роли $f(z)$.