ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 477, № 3, с. 278–281

МАТЕМАТИКА

УДК 510.57+519.635.8

О КОНСТРУКТИВНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЯХ И ВЫЧИСЛИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2017 г. С. В. Селиванова[1,2,*], В. Л. Селиванов[2,3,]**

Представлено академиком РАН С.С. Гончаровым 12.05.2017 г.

Поступило 22.05.2017 г.

В работе установлена связь между конструктивными числовыми полями и вычислимыми действительными числами. Эта связь применена для доказательства вычислимости (в строгом смысле вычислимого анализа) решений важных систем дифференциальных уравнений в частных производных, причём с использованием алгоритмов, реально применяемых в численном анализе.

DOI: 10.7868/S0869565217330040

Теория вычислимости на дискретных структурах является прочным фундаментом прикладных работ в дискретной математике и информатике. С этим контрастирует положение в бурно развивающейся теории вычислимости на непрерывных структурах (см., например, [1–4]), которая до сих пор слабо связана с численным анализом. В данной работе установим связь между конструктивными числовыми полями (см., например, [5, 6]) и полем $\mathbb{R}_c$ вычислимых действительных чисел, которую используем для доказательства вычислимости (в строгом смысле вычислимого анализа [1, 2]) решений важной системы дифференциальных уравнений, причём с использованием алгоритма, используемого в численном анализе. Эта связь выражается следующим утверждением.

Т е о р е м а 1. *Для любого конечного $F \subseteq \mathbb{R}_c$ найдётся сильно конструктивное вещественно замкнутое подполе $(\mathbb{B}, \beta)$ упорядоченного поля $\mathbb{R}_c$ такое, что $F \subseteq \mathbb{B}$.*

Полезность этого результата проиллюстрируем на примере симметрических гиперболических систем, введённых в [7] и широко применимых в математической физике (см., например, [7–11]). Задача Коши для этой системы формулируется так:

$$A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m), \ \ t \geq 0, \qquad (1)$$
$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_m).$$

Здесь $A = A^* > 0$ и $B_i = B_i^*$ – постоянные вычислимые $(n \times n)$-матрицы, $t \geq 0$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in Q = [0,1]^m$, $\varphi\colon Q \to \mathbb{R}^n$, $f\colon Q \times [0, T] \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ для некоторого $T > 0$, $\mathbf{u}\colon Q \times [0, T] \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ – частичная функция, действующая на области H существования и единственности решения задачи (1).

Т е о р е м а 2. *Пусть $M > 0$, $p \geq 2$ – целые числа. Оператор $(\varphi, f, T) \mapsto \mathbf{u}$ решения задачи Коши (1), сопоставляющий начальным данным $\varphi \in C^{p+1}(Q, \mathbb{R}^n)$, правой части $f \in C^p(Q \times [0, T], \mathbb{R}^n)$ и времени $T > 0$ единственное решение $\mathbf{u} \in C^p(H \cap Q \times [0, T], \mathbb{R}^n)$, является вычислимой частичной функцией из $C_s(Q, R^n) \times C_s(Q \times [0, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+$ в $C_{sL_2}(H \cap Q \times [0, T], \mathbb{R}^n)$. Здесь $C_s(Q, \mathbb{R}^n)$, $C_{sL_2}(Q \times [0, T], \mathbb{R}^n)$, $C_{sL_2}(H \cap Q \times [0, T], \mathbb{R}^n)$ – пространства непрерывно дифференцируемых функций (C^{p+1} или C^p на соответствующих множествах) таких, что все их первые и вторые производные равномерно ограничены константой M, с* sup*-нормой $\|\varphi\|_s = \sup_{x \in Q} \|\varphi(x)\|$, $\|f\|_s = \sup_{(x,t) \in Q \times T} \|f(x, t)\|$ на $C(Q, R^n)$ и*

---

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск*

[2] *Новосибирский государственный университет*

[3] *Институт систем информатики им. А.П. Ершова Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск*

*E-mail: s-seliv@math.nsc.ru

**E-mail: vseliv@iis.nsk.su

$C(Q \times [0, T], \mathbb{R}^n)$, *и* sL_2*-нормой* $||u||_{sL_2} = \sup_t \sqrt{\int_Q ||u(x, t)||^2\, dx}$ *на* H *соответственно.*

Перечисленные пространства являются вычислимыми метрическими пространствами (ВМП) в следующем смысле [1, 2]. Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M, d) называется быстрой последовательностью Коши, если $d(x_i, x_n) < 2^{-n}$ для всех n и $i > n$. ВМП называется тройка (M, d, μ), где (M, d) – МП, а $\mu\colon \mathbb{N} \to M$ таково, что $\mathrm{rng}(\mu)$ – (счётное) всюду плотное подмножество в M и $\{d(\mu_m, \mu_n)\}$ – вычислимая двойная последовательность вещественных чисел. Нумерация μ индуцирует частичную сюръекцию $\mu^*\colon \mathcal{N} \rightharpoonup M$ из бэровского пространства $\mathcal{N}$ всех последовательностей натуральных чисел на M: $\mu^*(p) = x$ в точности тогда, когда $\{\mu_{p(n)}\}$ – быстрая последовательность Коши, сходящаяся к x. Частичная функция f между ВМП (M, d, μ) и (M_1, d_1, μ_1) вычислима, если существует вычислимая частичная функция $\widehat{f}$ на $\mathcal{N}$ такая, что $\mu_1^*(\widehat{f}(p)) = f(\mu^*(p))$ для каждого $p \in \mathrm{dom}(\mu^*)$ (т.е. если $\{\mu(p(n))\}$ – быстрая последовательность Коши, сходящаяся к $x \in M$, то $\{\mu_1(\widehat{f}(p)(n))\}$ – быстрая последовательность Коши, сходящаяся к $f(x) \in M_1$).

Счётными всюду плотными подмножествами в изучаемых пространствах являются множества полилинейных интерполяций рационально-значных сеточных функций [9] на равномерных сетках G_N (на кубе Q) шага $h = \frac{1}{2^N}$ с дискретными аналогами выше приведённых функциональных норм. Вычислимая нумерация поля $\mathbb{Q}$ индуцирует нумерации этих плотных множеств. Полилинейные интерполяции сеточных функций $f^{(h)}$ обозначаем $\widehat{f^{(h)}}$. Для установления вычислимости оператора решения (1) достаточно указать алгоритм, который по рациональным сеточным функциям $\varphi\colon G_N \to \mathbb{Q}^n$, $f\colon G_N^\tau \to \mathbb{Q}^n$ и рациональному числу T, вычисляет сеточную функцию $v\colon G_N^\tau \to \mathbb{Q}^n$ со следующим свойством: если $\{\tilde{\varphi}_k\}$ (соответственно $\{\tilde{f}_k\}$, $\{T_k\}$) – быстрые последовательности Коши, сходящиеся к точным значениям начальной функции φ (соответственно, к правой части f, данному T), то $\{\tilde{v}_k\}$ – быстрая последовательность Коши, сходящаяся к решению $\mathbf{u}$ системы (1). В алгоритме используем схему Годунова [8] для системы (1). Для случая $m = 2$ разностный оператор $\left\{u_{i-1/2, j-1/2}\right\} \mapsto \left\{u^{i-1/2, j-1/2}\right\}$, переводящий сеточную функцию с некоторого временного уровня $t = l\tau$ на следующий уровень $t = (l+1)\tau$ $\left(\text{при } l = 0, \left\{u_{i-1/2, j-1/2}\right\} = \left\{\varphi_{i-1/2, j-1/2}\right\}\right)$, определяется системой

$$A\frac{u^{i-1/2, j-1/2} - u_{i-1/2, j-1/2}}{\tau} + B\frac{\mathcal{U}_{i, j-1/2} - \mathcal{U}_{i-1, j-1/2}}{h} + C\frac{\mathcal{U}_{i-1/2, j} - \mathcal{U}_{i-1/2, j-1}}{h} = f_{i-1/2, j-1/2}. \qquad (2)$$

Известно [9], что H – пересечение полупространств $t \ge 0$, $x_i - \lambda_{\max}^{(i)} t \ge 0$, $x_i - 1 - \lambda_{\min}^{(i)} t \le 0$, $(i = 1, 2, ..., m)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$, где $\lambda_{\max}^{(i)}$, $\lambda_{\min}^{(i)}$ – максимальные (соответственно минимальные) собственные значения матричных пучков $\lambda A - B_i$. При $\lambda_{\min}^{(i)} < 0 < \lambda_{\max}^{(i)}$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, H – компакт; случай неограниченного H рассматривается аналогично. В [13] доказано, что вектор $(\lambda_{\max}^{(1)}, ..., \lambda_{\max}^{(m)}, \lambda_{\min}^{(1)}, ..., \lambda_{\min}^{(m)})$ и шаг по времени τ, обеспечивающий устойчивость схемы (2) [8], вычислимы по $A, B_1, ..., B_m$.

Схема (2) аппроксимирует систему (1) с первым порядком точности [8]. Алгоритм содержит вычисление собственных значений и собственных векторов матриц, а также сравнение собственных значений с нулём (для вычисления $\mathcal{U}$) и решение линейных систем алгебраических уравнений. Это приводит к известным вычислительным трудностям, поскольку сравнение с нулём и вычисление собственных векторов разрывны [14]. Эти трудности можно обойти с помощью следующего приёма. По теореме 1 найдётся конструктивное вещественно замкнутое числовое поле $\mathbb{B}$, содержащее все коэффициенты матриц A, B_i. В этом поле все упомянутые вычисления можно сделать с абсолютной точностью, получив аппроксимирующую функцию v_k со значениями в $\mathbb{B}$. Числа из $\mathbb{B}$ оказываются равномерно вычислимыми, что позволяет вернуться к рациональным сеточным приближениям (в численном анализе, наоборот, приближения делаются вначале, что приводит к необходимости дополнительной оценки погрешности).

Поле $\mathbb{R}_c$ вещественно замкнуто, но не конструктивизируемо [1, 2]. Пусть κ – конструктивизация $\mathbb{Q}$ и $\{\varphi_n\}$ – стандартная вычислимая нумерация всех вычислимых частичных функций на $\mathbb{N}$. Определим частичную функцию ρ из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{R}_c$: $\rho(n) = x$ в точности тогда, когда φ_n всюду определена и $\{\kappa\varphi_n(i)\}_i$ – быстрая последовательность Коши, сходящаяся к x. Напомним, что нумерация μ сводится к (частичной) нумерации ν $(\mu \le \nu)$, если $\mu = \nu \circ f$ для некоторой вычислимой функции f на $\mathbb{N}$. Следующее утверждение, из которого несложно вывести теорему 1, доказывается с использованием свойств конструктивных упорядоченных полей (см., например, [5, теорема 2.3.6]).

Предложение 1. 1) *Пусть $\mathbb{B}$ — упорядоченное подполе упорядоченного поля $\mathbb{R}$, и β — конструктивизация $\mathbb{B}$. Тогда $\beta \le \rho$, в частности $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}_c$.*

2) *Пусть $\mathbb{B}$ — подполе поля $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$ и β — такая конструктивизация $\mathbb{B}$, что $\beta \le \rho$. Тогда β — конструктивизация упорядоченного поля $(\mathbb{B}; <)$.*

3) *Пусть $\mathbb{B}$ — вещественно замкнутое подполе поля $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$ и β — конструктивизация $\mathbb{B}$. Тогда β — сильная конструктивизация упорядоченного поля $(\mathbb{B}; <)$.*

Пусть $(\mathbb{B}, \beta)$ — сильно конструктивное вещественно замкнутое упорядоченное подполе $\mathbb{R}_c$. Тогда по данному многочлену $p(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_k x^k$ с коэфициентами в $\mathbb{B}$ можно вычислить строку $r_1 < \cdots < r_m$, $m \ge 0$, всех различных корней многочлена $p(x)$, а также кратность любого корня r_j. Это замечание вместе с алгоритмами линейной алгебры и предложением 1 приводят к следующим следствиям.

Следствие 1. *Пусть $(\mathbb{B}, \beta)$ — сильно конструктивное вещественно замкнутое упорядоченное подполе упорядоченного поля $\mathbb{R}_c$. По данной симметричной $(n \times n)$-матрице M с коэффициентами в $\mathbb{B}$ можно вычислить (относительно нумерации β) некоторый ортонормированный базис $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \in \mathbb{B}^n$ собственных векторов матрицы M.*

Следствие 2. *Пусть $(\mathbb{B}, \beta)$ — сильно конструктивное вещественно замкнутое упорядоченное подполе упорядоченного поля $\mathbb{R}$. По данным симметричным $(n \times n)$-матрицам $A, B_1, \ldots, B_m$ с коэффициентами в $\mathbb{B}$, по данным сеточным функциям $\varphi^{(h)}$ на G_k, $f^{(h)}$ на G_k^τ со значениями в $\mathbb{B}$ и по числам T, $\tau \in \mathbb{B}$ можно вычислить (относительно нумерации β) сеточную функцию $v^{(h)}$ на G_k^τ (со значениями в $\mathbb{B}$), описанную в схеме Годунова.*

Кратко поясним, как отсюда выводится теорема 2. По теореме 1, существует сильно конструктивное упорядоченное вещественное поле $(\mathbb{B}, \beta)$, которое содержит все коэффициенты матриц $A, B_1, \ldots, B_m$. Вычислим последовательность $\{v_k\}$ сеточных функций $v_k : G_{i_k}^\tau \to \mathbb{B}^n$ из φ_k, f_k, T_k и A, $B_1, \ldots, B_m$, при помощи алгоритма разностной схемы (2). Согласно следствию 2, оператор $(\varphi_k, f_k, T_k) \mapsto v_k$ вычислим (относительно β). Достаточно доказать, что для некоторой константы c (зависящей только от $A, B_1, \ldots, B_m$, p и M) выполнена оценка $\| \tilde{v}_k - \mathbf{u} \|_{sL_2} \le c \cdot \dfrac{1}{2^k}$, для всех k, т.е. $\{\tilde{v}_k\}$ быстро сходится в $C_{sL_2}(H, \mathbb{R}^n)$ к $\mathbf{u}$. Заметим, что $\| \tilde{v}_k - \mathbf{u} \|_{sL_2} \le \| \tilde{v}_k - \tilde{u}_k \|_{sL_2} + \| \tilde{u}_k - \widetilde{u|_{G_k^{\tau_k}}} \|_{sL_2} + \| \widetilde{u|_{G_k^{\tau_k}}} - \mathbf{u} \|_{sL_2}$, где $\tilde{u}_k$ — интерполяция сеточной функции, вычисленной по алгоритму (2) из точных значений $\varphi|_{G_k}$, $f|_{G_k^\tau}$; $\widetilde{u|_{G_k^{\tau_k}}}$ — интерполяция G_k-дискретизации точного решения $\mathbf{u}$ дифференциальной задачи (1). Слагаемые в правой части последнего неравенства оцениваются соответственно с учётом устойчивости разностной схемы (2); по теореме о сходимости разностной схемы в сеточных нормах [8, 10]; с помощью свойств интерполяций [12] и оценок, аналогичных используемым в схеме доказательства теоремы единственности для (1) в [8, с. 194].

Наш метод позволяет доказать различные варианты и обобщения теоремы 2. В отличие от немногих имеющихся в области вычислимости дифференциальных уравнений с частными производными результатов, наш подход не требует существования явных формул решения и, следовательно, применим к более широкому классу задач. Анализ сложности вычислений в числовых полях может привести к нетривиальным оценкам сложности вычисления решений дифференциальных уравнений.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.8126.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weihrauch K.* Computable Analysis. B.: Springer, 2000.
2. *Brattka V., Hertling P., Weihrauch K.* In: New Computational Paradigms. B.: Springer, 2008. P. 425–491.
3. Handbook of recursive mathematics. V. 1, 2 / Ed. Yu. L. Ershov, et al. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 138. Amsterdam: North-Holland, 1998.
4. *Kohn W., Nerode A., Remmel J.B.* In: Hybrid Systems V. N.Y.: IEEE, 1997. P. 122–141.
5. *Ершов Ю.Л., Гончаров С.С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
6. *Stoltenberg-Hansen V., Tucker J.V.* In: Handbook of Computability Theory. N.Y.: Elsevier, 1999. P. 363–447.

7. *Friedrichs K.O.* // Commun. on Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. P. 345–392.

8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова и др. М.: Наука, 1976.

9. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

10. *Strikverda J.C.* Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. N.Y.: SIAM, 2004.

11. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. V. 19.

12. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Физматгиз, 1980.

13. *Selivanova S.V., Selivanov V.L.* // J. Univ. Comp. Sci. 2009. V. 15. № 6. P. 1337–1364.

14. *Ziegler M., Brattka V.* // Lect. Notes Comp. Sci. 2001. V. 2064. P. 378–388.