КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. В. АМИНОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

2-е издание, исправленное

КАЗАНЬ

2020

УДК 514.8: 517
ББК 22.151: 22.31

Рецензент: кафедра геометрии
Института математики и механики
Казанского федерального университета

Рекомендовано: Учебно-методический совет
Института физики Казанского федерального университета

Для студентов Института физики, специальности
03.05.01 —- астрономия, 03.03.02 — физика, 03.03.03 — радиофизика,
Инженерного института, специальность
16.03.01 — техническая физика

Аминова А.В.
Сборник задач и упражнений по векторному и тензорному анализу. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2020. – 63 с.

ISBN

В сборник (2-е изд. — 2020 г.) включено более 260 задач и упражнений по важнейшим разделам векторного и тензорного анализа с приложениями в механике, электродинамике, специальной и общей теории относительности.

Для студентов физических, механико-математических и инженерных специальностей высших учебных заведений.

Табл. 1. Рис. 1. Библ. 18 назв.

УДК 514.8: 517
ББК 22.151: 22.31

ISBN

-

Глава 1.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Градиент. Производная по направлению

1°. Градиент. *Градиентом* непрерывно дифференцируемого скалярного поля $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

где

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

— *оператор Гамильтона*, или *набла*. Градиент скалярного поля u в данной точке (x_0, y_0, z_0) направлен по нормали к *поверхности уровня* $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$, проходящей через эту точку. Градиент в каждой точке по величине

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

и направлению дает наибольшую скорость изменения функции u.

Оператор Гамильтона ∇ подчиняется обычным правилам векторной алгебры, если выражение, на которое он действует, не содержит произведений. В противном случае он применяется в соответствии с правилом дифференцирования произведений, например,

$$\begin{aligned} \nabla\,(u\ v\ w) &= \nabla\ \overset{\downarrow}{u}\ v\ w\ + \nabla\ u\ \overset{\downarrow}{v}\ w + \nabla\ u\ v\ \overset{\downarrow}{w} = \\ &= (\nabla u)\,v\ w + u\,(\nabla v)\,w + u\ v\,(\nabla w) = \\ &= v\ w \operatorname{grad} u + u\ w \operatorname{grad} v + u\ v \operatorname{grad} w \end{aligned}$$

(стрелкой отмечены множители, на которые действует оператор набла).

Для любого векторного поля $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ определен дифференциальный оператор

$$\langle \mathbf{a}, \nabla \rangle = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

2°**.** *Производная скалярного поля u в направлении единичного вектора*

$$\mathbf{l}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \cos\alpha\,\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial u}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial u}{\partial z} \equiv$$
$$\equiv < \mathrm{grad}\ u, \mathbf{l} > = |\mathrm{grad}\ u| \cos(\widehat{\mathrm{grad}\ u, \mathbf{l}}).$$

1. Доказать, что

$$\nabla u\,(M) = \mathrm{grad}\ u\,(M) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{V} \iint_S u\,\mathbf{n}\,dS,$$

где S — замкнутая поверхность, окружающая точку M и ограничивающая объем V, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности S, $d\,(S)$ — диаметр поверхности S.

2. Найти величину и направление градиента скалярного поля

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

в точках: а) $O\,(0,0,0)$, б) $A\,(1,1,1)$ и в) $B\,(2,0,1)$. В какой точке градиент равен нулю?

3. Пусть

$$u = xy - z^2.$$

Найти величину и направление grad u в точке $M\,(-9,12,10)$. Чему равна производная $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy?

4. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент скалярного поля

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

а) перпендикулярен к оси Oz;

б) параллелен оси Oz;

в) равен нулю?

5. Дано скалярное поле

$$u = \ln\frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ имеет место равенство $|\mathrm{grad}\ u| = 1$?

6. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

Найти поверхность уровня, проходящую через точку $M\,(9, 12, 28)$. Чему равен $\max u$ в области $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$?

7. Найти угол φ между градиентами скалярного поля

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A\,(1, 2, 2)$ и $B\,(-3, 1, 0)$.

8. Пусть дано скалярное поле

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Построить поверхности уровня и поверхности равного модуля градиента поля.

Найти $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\mathrm{grad}\ u|$, $\sup |\mathrm{grad}\ u|$ в области $1 < z < 2$.

9. С точностью до бесконечно малых высших порядков найти расстояние в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня

$$u\,(x, y, z) = c \quad \text{и} \quad u\,(x, y, z) = c + \Delta c,$$

где $u\,(x_0, y_0, z_0) = c$ и $\mathrm{grad}\ u\,(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

10. Доказать формулы:

а) $\mathrm{grad}\,(u + c) = \mathrm{grad}\ u$;

б) $\mathrm{grad}(c\ u) = c\ \mathrm{grad}\ u$;

в) $\mathrm{grad}\,(u + v) = \mathrm{grad}\ u + \mathrm{grad}\ v$;

г) $\mathrm{grad}\,(u\ v) = v\ \mathrm{grad}\ u + u\ \mathrm{grad}\ v$;

д) $\mathrm{grad}\left(u^2\right) = 2\ u\ \mathrm{grad}\ u$;

е) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

(c — постоянная).

11. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad}(\mathbf{r}^2)$; в) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$, где $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

12. Найти $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

13. Найти $\operatorname{grad} \langle \mathbf{c}, \mathbf{r} \rangle$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала координат.

14. Найти $\operatorname{grad}(|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2)$ ($\mathbf{c}$ — постоянный вектор).

15. Доказать формулу

$$\operatorname{grad} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

16. Доказать формулу

$$\nabla^2(uv) = u\,\nabla^2 v + 2\nabla u\,\nabla v + v\,\nabla^2 u,$$

где

$$\nabla^2 = \langle \nabla, \nabla \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

17. Доказать, что если функция $u = u(x,y,z)$ дифференцируема в выпуклой области Ω и $|\operatorname{grad} u| \le M$, где M — постоянная, то для любых точек A, B из Ω имеем

$$|u(A) - u(B)| \le M\rho(A,B),$$

где $\rho(A,B)$ — расстояние между точками A и B.

18. Найти производную скалярного поля

$$u = x^2 + 3y^2 - 2y + 4z^3$$

в точке $M(1,1,1)$ в направлении градиента поля u этой точке.

19. Найти производную скалярного поля

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

в данной точке $M(x,y,z)$ в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}$ этой точки.

В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

20. Найти производную скалярного поля $u = \dfrac{1}{r}$ в направлении

$$\mathbf{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

В каком случае эта производная равна нулю?

21. Найти производную скалярного поля $u = u\,(x, y, z)$ в направлении градиента скалярного поля $v = v\,(x, y, z)$.

В каком случае эта производная будет равна нулю?

22. Написать в ортах векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \operatorname{grad} u,$$

если

$$u = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

§ 2. Дивергенция. Ротор

1°. В е к т о р н а я л и н и я и в е к т о р н а я т р у б к а. *Векторной* (*силовой*) *линией векторного поля*

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{r}) = a_x\,(x, y, z)\,\mathbf{i} + a_y\,(x, y, z)\,\mathbf{j} + a_z\,(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

определенного в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, называется лежащая в Ω кривая, направление касательной к которой в каждой ее точке совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ в этой точке. Дифференциальное уравнение векторной линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$, проходящей через точку $\mathbf{r}_0$, имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda\ \mathbf{a}\,(\mathbf{r}\,(t))\,, \quad \mathbf{r}\,(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Векторной трубкой векторного поля $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ называют часть пространства, ограниченную поверхностью, нормаль к которой в каждой точке $\mathbf{r}$ поверхности ортогональна вектору $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ в этой точке.

2°. Д и в е р г е н ц и я и р о т о р. *Дивергенцией*, или *расходимостью* непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ называется скалярное поле

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \langle \nabla, \mathbf{a} \rangle = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Вектор

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

называют *ротором*, или *вихрем*, или также *ротацией* векторного поля $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$.

3°. Композиция двух *дифференциальных операций первого порядка* (т. е. градиента, дивергенции и ротора) называется *дифференциальной операцией второго порядка*. Все дифференциальные операции второго порядка перечислены в следующей таблице (заштрихованным клеткам отвечают операции, не имеющие смысла).

Т а б л и ц а 1.1. *Дифференциальные операции второго порядка.*

$\hookrightarrow$	Скалярное поле $u(\mathbf{r})$	Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$	Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$
	grad	div	rot
grad	//////////////	grad div $\mathbf{a}(\mathbf{r})$	//////////////
div	div grad $u(\mathbf{r})$	//////////////	div rot $\mathbf{a}(\mathbf{r}) \equiv 0$
rot	rot grad $u(\mathbf{r}) \equiv 0$	//////////////	rot rot $\mathbf{a}(\mathbf{r})$

Выражение div grad называется *оператором Лапласа*, или *лапласианом* и обозначается $\triangle$. В декартовых координатах

$$\triangle = \langle \nabla, \nabla \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

По определению,

$$\triangle \mathbf{a} = \triangle a_x\ \mathbf{i} + \triangle a_y\ \mathbf{j} + \triangle a_z\ \mathbf{k}.$$

Уравнение $\triangle u = 0$ называется *уравнением Лапласа*, а его решения, непрерывные вместе с их частными производными первого и второго порядков, — *гармоническими функциями.*

23. Определить силовые линии векторного поля

$$\mathbf{a} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

24. Доказать непосредственным вычислением, что дивергенция вектора $\mathbf{a}$ не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат.

25. Доказать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_{S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \, dS,$$

где S — замкнутая поверхность, окружающая точку M и ограничивающая объем V, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, $d(S)$ — диаметр поверхности S.

26. Найти дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{a} = \frac{-x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точке $M(3, 4, 5)$.

27. Найти

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

28. Доказать, что

а) $\operatorname{div} \ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$;

б) $\operatorname{div} \ (u\ \mathbf{c}) = \langle \mathbf{c}, \operatorname{grad} u \rangle$;

в) $\operatorname{div} \ (u\ \mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} u$.

($\mathbf{c}$ — постоянный вектор, u — скалярное поле).

29. Найти $\operatorname{div} [\operatorname{grad} f(u)]$.

30. Найти $\operatorname{div} [\operatorname{grad} f(r)]$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В каком случае $\operatorname{div} [\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

31. Вычислить а) $\operatorname{div} \mathbf{r}$; б) $\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

32. Вычислить $\operatorname{div} [f(r)\, \mathbf{c}]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

33. Найти $\operatorname{div} [f(r)\, \mathbf{r}]$. В каком случае дивергенция равна нулю?

34. Найти а) $\operatorname{div} \ (u \operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div} \ (u \operatorname{grad} v)$.

35. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Найти дивергенцию вектора скорости $\mathbf{V}$ и вектора ускорения $\mathbf{W}$ в точке $M(x, y, z)$ пространства в данный момент времени.

36. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого конечной системой притягивающих центров.

37. Доказать формулы:

а) $\operatorname{grad}\, \varphi\,(f\,(r)) = \dfrac{d\varphi}{df}\, \operatorname{grad}\, f,$

б) $\operatorname{div}\, \mathbf{a}\,(f\,(r)) = \langle \operatorname{grad}\, f, \dfrac{d\mathbf{a}}{df}\rangle,$

в) $\operatorname{rot}\, \mathbf{a}\,(f\,(r)) = \operatorname{grad}\, f \times \dfrac{d\mathbf{a}}{df} \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$

38. Доказать, что:

а) $\operatorname{rot}\ (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{rot}\, \mathbf{a} + \operatorname{rot}\, \mathbf{b};$

б) $\operatorname{rot}\ (u\, \mathbf{a}) = u \operatorname{rot}\, \mathbf{a} + (\operatorname{grad}\, u) \times \mathbf{a}.$

39. Найти: а) $\operatorname{rot}\, \mathbf{r}$; б) $\operatorname{rot}\, [f\,(r)\, \mathbf{r}]$.

40. Найти величину и направление $\operatorname{rot}\, \mathbf{a}$ в точке $M\,(1, 2, -2)$, если

$$\mathbf{a} = \frac{y}{z}\ \mathbf{i} + \frac{z}{x}\ \mathbf{j} + \frac{x}{y}\ \mathbf{k}.$$

41. Найти: а) $\operatorname{rot}\, [\mathbf{c} f\,(r)]$; б) $\operatorname{rot}\, [\mathbf{c} \times (f(r)\mathbf{r})]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

42. Доказать, что $\operatorname{div}\, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \langle \mathbf{b}, \operatorname{rot}\, \mathbf{a}\rangle - \langle \mathbf{a}, \operatorname{rot}\, \mathbf{b}\rangle$.

43. Найти: а) $\operatorname{rot}\, \operatorname{grad}\, u$; б) $\operatorname{div}\, \operatorname{rot}\, \mathbf{a}$.

44. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $\mathbf{l}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ с постоянной угловой скоростью ω. Найти ротацию вектора линейной скорости $\mathbf{V}$ в точке пространства $M\,(x, y, z)$ в данный момент времени.

45. Пусть $\mathbf{a} = x^2\ \mathbf{i} + y^2\ \mathbf{j} + z^2\ \mathbf{k}$. Вычислить

а) $\operatorname{rot}\, \operatorname{rot}\, \mathbf{a};$

б) $\operatorname{grad}\, \operatorname{div}\, \mathbf{a}.$

46. Найти $\operatorname{div}\, \operatorname{grad}\, u$, если

а) $u = e^{xy} + e^{xz} + e^{yz};$

б) $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z};$

в) $u = r\cos r \qquad \left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$

47. Доказать тождества:

а) $\operatorname{rot}\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + \langle\mathbf{b},\nabla\rangle\,\mathbf{a} - \langle\mathbf{a},\nabla\rangle\,\mathbf{b}$;

б) $\operatorname{grad}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} + \langle\mathbf{b},\nabla\rangle\,\mathbf{a} + \langle\mathbf{a},\nabla\rangle\,\mathbf{b}$.

У к а з а н и е. Доказательство этих тождеств следует производить с помощью оператора ∇, пользуясь правилами дифференцирования и перемножения векторов и не переходя к проекциям на оси координат.

48. Доказать тождества:

а) $\mathbf{c}\operatorname{grad}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \langle\mathbf{a},\langle\mathbf{c},\nabla\rangle\,\mathbf{b}\rangle + \langle\mathbf{b},\langle\mathbf{c},\nabla\rangle\,\mathbf{a}\rangle$;

б) $\langle\mathbf{c},\nabla\rangle[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{a}\times\langle\mathbf{c},\nabla\rangle\mathbf{b} - \mathbf{b}\times\langle\mathbf{c},\nabla\rangle\,\mathbf{a}$;

в) $\langle\nabla,\mathbf{a}\rangle\,\mathbf{b} = \langle\mathbf{a},\nabla\rangle\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$;

г) $\langle[\mathbf{a}\times\mathbf{b}],\operatorname{rot}\mathbf{c}\rangle = \langle\,\mathbf{b},\langle\mathbf{a},\nabla\rangle\,\mathbf{c}\rangle - \langle\mathbf{a},\langle\mathbf{b},\nabla\rangle\,\mathbf{c}\,\rangle$;

д) $[\mathbf{a}\times\nabla]\times\mathbf{b} = \langle\mathbf{a},\nabla\rangle\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}$;

е) $[\nabla\times\mathbf{a}]\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \langle\mathbf{a},\nabla\rangle\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} - \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

49. Вычислить $\langle\mathbf{a},\nabla\rangle[\varphi(r)\;\mathbf{r}]\qquad\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.

50. Найти функцию $f\left(\mathbf{r}^2\right)$, удовлетворяющую условию

$$\triangle f\left(\mathbf{r}^2\right) = 0.$$

51. Найти дивергенцию и вихри следующих векторов:

а) $\langle\mathbf{b},\mathbf{r}\rangle\,\mathbf{c}$; б) $\langle\mathbf{c},\mathbf{r}\rangle\,\mathbf{r}$; в) $\mathbf{c}\times\mathbf{r}$; г) $\varphi(r)\,[\mathbf{c}\times\mathbf{r}]$; д) $\mathbf{r}\times[\mathbf{c}\times\mathbf{r}]$

($\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — постоянные векторы, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

52. Вычислить:

а) $\operatorname{grad}\langle\mathbf{a}(\mathbf{r}),\mathbf{r}\rangle$; б) $\operatorname{grad}\langle\mathbf{a}(\mathbf{r}),\mathbf{b}(\mathbf{r})\rangle$;

в) $\operatorname{div}\,[r^3\,\mathbf{a}(\mathbf{r})]$; г) $\operatorname{div}\,[\varphi(r)\,\mathbf{a}(\mathbf{r})]$;

д) $\operatorname{rot}\,[\varphi(r)\,\mathbf{a}(\mathbf{r})]$; е) $\langle\mathbf{l},\nabla\rangle[\varphi(r)\,\mathbf{a}(\mathbf{r})]$

($\mathbf{l} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

53. Доказать, что $\langle\mathbf{a},\nabla\rangle\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}$ при $\mathbf{a}^2 = \mathrm{const}$.

54. Показать, что если скалярная функция u является решением уравнения $\triangle u + k^2 u = 0$ и $\mathbf{c}$ — некоторый постоянный вектор, то векторные функции $\mathbf{L} = \operatorname{grad} u$, $\mathbf{M} = \operatorname{rot}\,(u\,\mathbf{c})$, $\mathbf{N} = \operatorname{rot}\,\mathbf{M}$ удовлетворяют уравнению $\triangle \mathbf{a} + k^2 \mathbf{a} = 0$.

55. Найти области, в которых функции $\dfrac{1}{r}$ и $\ln\sqrt{x^2+y^2}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, являются гармоническими.

§ 3. Поток. Циркуляция

1°. Поток вектора через поверхность. Если $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ — векторное поле, определенное в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, $S \subset \Omega$ — двусторонняя кусочно-гладкая поверхность и $\mathbf{n}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — орт нормали к выбранной стороне поверхности, то *потоком векторного поля* $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ *через поверхность* S *в выбранную сторону* называется поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S a_n dS = \iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dS,$$

где $a_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle$ — нормальная проекция вектора $\mathbf{a}$.

Формула Гаусса—Остроградского в векторной форме имеет вид

$$\iint\limits_S a_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\,\mathbf{a}\; dxdydz,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, и $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

2°. Циркуляция векторного поля. Пусть $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ — векторное поле, определенное в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и C — *замкнутая* кусочно-гладкая кривая, лежащая в Ω. *Циркуляцией* векторного поля $\mathbf{a}\,(\mathbf{r})$ вдоль кривой C называется криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C \mathbf{a}\; \mathbf{dr} = \oint\limits_C a_x dx + a_y dy + a_z dz = \oint\limits_C \langle \mathbf{a}, \vec{\tau} \rangle ds = \oint\limits_C a_\tau ds,$$

где $\vec{\tau}$ — единичный касательный вектор к кривой C, a_τ — проекция вектора $\mathbf{a}$ в точке M на направление касательной к кривой C в той же точке.

Если поле $\mathbf{a}$ есть силовое поле, то криволинейный интеграл $\int\limits_C \mathbf{a}\; \mathbf{dr}$

вдоль некоторой (необязательно замкнутой) кривой C выражает *работу* сил поля при перемещении точки по этой кривой.

Формула Стокса в векторных обозначениях принимает вид

$$\oint\limits_C \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \, dS = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \, dS,$$

где C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S, причем направление нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, стоящего на поверхности S, головой по направлению нормали, обход контура совершался против хода часовой стрелки (для правой системы координат).

3°. Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *потенциальным*, если оно является градиентом некоторого скалярного поля u:

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u.$$

Функция $u = u(x, y, z)$, определяемая с точностью до аддитивной постоянной, называется *потенциалом* векторного поля $\mathbf{a}$.

Если потенциал u — однозначная функция, то

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = u(B) - u(A),$$

а циркуляция вектора $\mathbf{a}$ вдоль замкнутого пути равна нулю.

Для того чтобы в односвязной области векторное поле $\mathbf{a}$ было потенциальным, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0,$$

т. е. такое поле должно быть безвихревым.

4°. Соленоидальное векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *соленоидальным*, если оно является ротором некоторого векторного поля $\mathbf{b}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

Векторное поле $\mathbf{b}(\mathbf{r})$, определяемое с точностью до градиента произвольной функции, называется *векторным потенциалом* поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$.

Необходимым и достаточным условием соленоидальности векторного поля $\mathbf{a}$ является равенство нулю его дивергенции, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$.

Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *лапласовым*, если оно потенциально и соленоидально, т. е. если $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Скалярный потенциал u лапласова поля $\mathbf{a}$ является решением уравнения Лапласа $\triangle u = 0$, где $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$.

5°. Основная теорема векторного анализа. Любое непрерывное векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе со своими дивергенцией и вихрем, может быть единственным образом (с точностью до постоянного вектора) представлено в виде суммы потенциального векторного поля $\mathbf{a}_1(\mathbf{r})$ и соленоидального векторного поля $\mathbf{a}_2(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{r}),$$

где

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{a}_2(\mathbf{r}) = 0.$$

56. Найти поток радиус-вектора $\mathbf{r}$: а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le z^2 \quad (0 \le z \le h)$; б) через основание этого конуса.

57. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = y\, z\, \mathbf{i} + x\, z\, \mathbf{j} + x\, y\, \mathbf{k}$$

а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \le a^2 \quad (0 \le z \le h)$;
б) через полную поверхность этого цилиндра.

58. Найти поток радиус-вектора $\mathbf{r}$ через поверхность

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (0 \le z \le 1).$$

59. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = x^2\, \mathbf{i} + y^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$$

через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

60. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = y\, \mathbf{i} + z\, \mathbf{j} + x\, \mathbf{k}$$

через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями

$$x = 0, \quad y = 0 \quad z = 0, \quad x + y + z = a \quad (a > 0).$$

Проверить результат, применяя формулу Гаусса—Остроградского.

61. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = x^3\ \mathbf{i} + y^3\ \mathbf{j} + z^3\ \mathbf{k}$$

через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

62. Доказать, что поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность S, заданную уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(u, v)\ \ ((u, v) \in \Omega)$, равен

$$\iint\limits_S a_n\ dS = \iint\limits_\Omega \left(\mathbf{a},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\ dv,$$

где $a_n = \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle$ и $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

63. Найти поток вектора $\mathbf{a} = \dfrac{m\mathbf{r}}{r^3}$, где m — постоянная, через замкнутую поверхность S, окружающую начало координат.

64. Найти поток вектора

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\ \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

где e_i — постоянные, r_i — расстояния точек M_i (*источники*) от переменной точки $M\,(\mathbf{r})$, через замкнутую поверхность S, окружающую точки $M_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n$.

65. Доказать, что

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\ dS = \iiint\limits_V \nabla^2 u\ dx\ dy\ dz,$$

где поверхность S ограничивает тело V.

66. Количество тепла, протекающее в поле температуры $u(x, y, z)$ за единицу времени через элемент поверхности dS, равно

$$dQ = -k\ \langle \mathbf{n}, \operatorname{grad}\ u \rangle\ dS,$$

где k — коэффициент внутренней теплопроводности и $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S. Определить количество тепла, накопленное телом V за единицу времени. Используя скорость повышения температуры, вывести уравнение, которому удовлетворяет температура тела (*уравнение теплопроводности*).

67. Находящаяся в движении несжимаемая жидкость заполняет объем V. Предполагая, что в области Ω отсутствуют источники и стоки, вывести *уравнение непрерывности*

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\ (\rho\ \mathbf{v}) = 0,$$

где $\rho = \rho\,(x, y, z)$ — плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, t — время.

Указание. Рассмотреть поток жидкости через произвольный объем τ, содержащийся в Ω.

68. Найти работу вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ вдоль отрезка винтовой линии

$$\mathbf{r} = a\cos t\ \mathbf{i} + a\sin t\ \mathbf{j} + b\ t\ \mathbf{k} \qquad (0 \le t \le 2\pi)\,.$$

69. Найти работу векторного поля

$$\mathbf{a} = \frac{1}{y}\ \mathbf{i} + \frac{1}{z}\ \mathbf{j} + \frac{1}{x}\ \mathbf{k}$$

вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M\,(1,1,1)$ и $N\,(2,4,8)$.

70. Найти работу векторного поля

$$\mathbf{a} = e^{y-z}\ \mathbf{i} + e^{z-x}\ \mathbf{j} + e^{x-y}\ \mathbf{k}$$

вдоль прямолинейного отрезка между точками $O\,(0,0,0)$ и $M\,(1,3,5)$.

71. Найти работу векторного поля

$$\mathbf{a} = (y+z)\ \mathbf{i} + (2+x)\ \mathbf{j} + (x+y)\ \mathbf{k}$$

вдоль кратчайшей дуги большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, соединяющей точки $M\,(3,4,0)$ и $N\,(0,0,5)$.

72. Найти работу вектора $\mathbf{a} = f\,(r)\ \mathbf{r}$, где f — непрерывная функция от $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, вдоль дуги AB.

73. Найти циркуляцию вектора

$$\mathbf{a} = -y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j} + c\ \mathbf{k} \qquad (c - \text{постоянная})$$

а) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;

б) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

74. Найти циркуляцию Г вектора

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\ \left(\arctan\ \frac{y}{x}\right)$$

вдоль замкнутого контура C в двух случаях: а) C не окружает ось Oz; б) C окружает ось Oz.

75. Дано векторное поле

$$\mathbf{a} = \frac{y}{\sqrt{z}}\ \mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\ \mathbf{j} + \sqrt{xy}\ \mathbf{k}.$$

Вычислив rot **a** в точке $M\,(1,1,1)$, приближенно найти циркуляцию Г поля **a** вдоль бесконечно малой окружности.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2,$$

$$(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0,$$

где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

76. Плоский установившийся поток жидкости характеризуется вектором скорости

$$\mathbf{w} = u\,(x,y)\ \mathbf{i} + v\,(x,y)\ \mathbf{j}.$$

Определить а) количество жидкости Q, протекающее через замкнутый контур C, ограничивающий область S (*расход жидкости*); б) циркуляцию Г вектора скорости вдоль контура C.

Каким уравнениям удовлетворяют функции u и v, если жидкость несжимаемая и поток безвихревой?

77. Показать, что поле

$$\mathbf{a} = y\ z\ \ (2x + y + z)\ \ \mathbf{i} + x\ z\ \ (x + 2y + z)\ \ \mathbf{j} + x\ y\ \ (x + y + 2z)\ \ \mathbf{k}$$

потенциальное и найти потенциал этого поля.

78. Убедившись в потенциальности векторного поля

$$\mathbf{a} = \frac{2}{(y+z)^{1/2}}\ \mathbf{i} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\ \mathbf{j} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\ \mathbf{k},$$

найти работу поля **a** вдоль пути, соединяющего в положительном октанте точки $M\,(1,1,3)$ и $N\,(2,4,5)$.

79. Найти потенциал гравитационного поля

$$\mathbf{a} = -\frac{m}{r^3}\ \mathbf{r},$$

создаваемого массой m, помещенной в начало координат.

80. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого системой масс m_i, помещенных в точках M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

81. Доказать, что векторное поле $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$, где $f(r)$ — однозначная непрерывная функция от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

82. Интеграл по объему

$$\iiint\limits_V \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{rot} \mathbf{a} \rangle \, dV$$

преобразовать в интеграл по поверхности.

83. Вычислить интегралы

$$\iint\limits_S \mathbf{r}\, \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \, dS, \qquad \iint\limits_S \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle \, \mathbf{n} \, dS,$$

где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, $\mathbf{n}$ — орт нормали к замкнутой поверхности S.

84. Интегралы по замкнутой поверхности S

$$\iint\limits_S \mathbf{n}\, \varphi \, dS, \qquad \iint\limits_S [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \, dS, \qquad \iint\limits_S \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \, \mathbf{a} \, dS$$

($\mathbf{b}$ — постоянный вектор, $\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности S) преобразовать в интегралы по объему, заключенному внутри поверхности S.

У к а з а н и е. Решение выполнить по образцу задачи 83.

85. Воспользовавшись одним из тождеств, доказанных в задаче 84, вывести закон Архимеда путем суммирования сил давления, приложенных к элементам поверхности погруженного в жидкость тела.

86. Пусть $f(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ является дифференцируемой функцией от $\mathbf{r}$ и удовлетворяет условию

$$f(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{r}) = c_1 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{r}) + c_2 f(\mathbf{a}_2, \mathbf{r}),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Доказать, что если V — произвольный объем, S — ограничивающая его поверхность и $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к этой поверхности, то имеет место *обобщенная теорема Гаусса—Остроградского*:

$$\iint\limits_S f(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \, dS = \iiint\limits_V f(\nabla, \mathbf{r}) \, dV.$$

Оператор ∇ в подынтегральной функции $f(\nabla, \mathbf{r})$ действует на $\mathbf{r}$ и стоит левее всех переменных.

У к а з а н и е. Разложить $\mathbf{n}$ по ортам декартовой системы координат и воспользоваться теоремой Гаусса—Остроградского:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dV = \iint\limits_S \varphi\, n_x\, dS.$$

87. Решить задачи 83 и 84 с помощью обобщенной теоремы Гаусса–Остроградского. (См. задачу 86).

88. Интеграл по замкнутому контуру $\oint \varphi\, dS$ преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур.

89. Интеграл $\oint u\, df$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур (u, f — скалярные функции координат).

90. Доказать тождество

$$\iiint\limits_V [\langle \mathbf{a}, \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{b}\rangle - \langle \mathbf{b}, \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}\rangle]\, dV =$$

$$= \iint\limits_S \langle (\mathbf{b} \times \mathrm{rot}\ \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\ \mathbf{b}), \mathbf{n}\rangle\, dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V.

91. Внутри объема V вектор $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию $\mathrm{div}\ \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0$, а на границе объема (поверхность S) — условию $a_n = 0$. Доказать, что

$$\iiint\limits_V \mathbf{a}(\mathbf{r})\, dV = 0.$$

92. Доказать, что

$$\mathrm{div}_{\mathbf{R}} \iiint\limits_V \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}\, dV = 0,$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ — вектор, определенный в задаче 91.

§ 4. Разные задачи

93. *Круговыми вектор-функциями* называются единичные вектор-функции $\mathbf{g}_1(\varphi)$ и $\mathbf{g}_2(\varphi)$, заданные в плоскости (x, y) в виде ортов $(|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_2| = 1)$, составляющих углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$ с осью Ox. Найти их разложения по осям Ox, Oy и выразить $\dfrac{d\mathbf{g}_1}{d\varphi}$ и $\dfrac{d\mathbf{g}_2}{d\varphi}$ через $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$.

94. Найти проекции скорости и ускорения точки, движущейся в плоскости, на направление радиус-вектора (*радиальные составляющие*) и на перпендикуляр к нему (*трансверсальные составляющие*), если уравнения движения точки имеют вид:

$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t),$$

где $r = |\mathbf{r}|$, а φ — угол, который составляет радиус-вектор с осью Ox.

95. Показать, что если сила, действующая на материальную точку, направлена по касательной к ее траектории, то траектория точки есть прямая.

96. Показать, что поле ускорений жидкости $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ имеет потенциал Φ, если поле скоростей потенциально $(\mathbf{v} = \nabla\varphi)$. Найти Φ.

97. Выразить кинетическую энергию безвихревого движения несжимаемой жидкости в односвязном объеме

$$T = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_V \mathbf{v}^2\, dV = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_V (\nabla\varphi)^2\, dV$$

через интеграл по границе этого объема — поверхности S. Показать, что если на границе S объема V жидкость покоится, то единственно возможным безвихревым движением является покой.

98. Уравнение равновесия жидкости имеет вид

$$\rho\,\mathbf{f} = \nabla p,$$

где ρ — плостность, $\mathbf{f}$ — интенсивность массовых сил (в поле тяжести $\mathbf{f} = \mathbf{g}$), p — давление.

Показать, что равновесие жидкости может иметь место только в таком силовом поле, где силовые линии (векторные линии поля $\mathbf{f}$) ортогональны к векторным линиям поля $\operatorname{rot}\mathbf{f}$.

99. Поле скоростей движения вязкой жидкости между двумя параллельными бесконечными пластинами имеет вид

$$\mathbf{V} = V_x\ \mathbf{i} = \left[\frac{1}{2\ \mu}\ \frac{dp}{dx}\ \left(y^2 - h\ y\right) + \frac{u_1 - u_2}{h}\ y + u_2\right]\mathbf{i},$$

где ось x направлена вдоль нижней пластины; h — расстояние между пластинами, из которых верхняя имеет скорость u_1, а нижняя u_2; μ, $\dfrac{dp}{dx}$ — постоянные вязкость и градиент давления p.

Определить циркуляцию скорости по окружности радиуса R, центр которой находится посредине между пластинами.

100. *Вихревой линией* векторного поля $\mathbf{V}$ называется векторная линия поля $\operatorname{rot}\ \mathbf{V}$. *Вихревой трубкой* векторного поля $\mathbf{V}$ называется поверхность, образуемая вихревыми линиями, проходящими через некоторый замкнутый контур.

Показать, что поток вихря $\operatorname{rot}\ \mathbf{V}$ через сечение вихревой трубки векторного поля $\mathbf{V}$ одинаков для всех сечений трубки (*теорема Гельмгольца*).

У к а з а н и е. Используя условие соленоидальности поля $\operatorname{rot}\ \mathbf{V}$, рассмотреть поток $\operatorname{rot}\ \mathbf{V}$ через замкнутую поверхность, образованную двумя произвольными сечениями вихревой трубки и ее боковой поверхностью.

101. *Интенсивностью вихревой трубки* векторного поля $\mathbf{V}$ называется поток вихря поля $\mathbf{V}$ через её поперечное сечение. Показать, что интенсивность вихревой трубки векторного поля $\mathbf{V}$ равна циркуляции вектора $\mathbf{V}$ по замкнутому контуру, пересекающему все вихревые линии трубки, т е. охватывающему трубку.

У к а з а н и е. Применить теорему Стокса к контуру, охватывающему трубку, и к поверхности, ограниченной им (к сечению трубки).

102. Рассмотрим в движущейся жидкости, имеющей поле скоростей $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, векторные линии другого векторного поля $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Это могут быть векторные линии поля ускорений, поля вихрей и др.

Найти необходимое условие сохраняемости этих векторных линий, т. е. условие, при котором они будут все время состоять из одних и тех же частиц жидкости, не разрушаясь (*теорема Фридмана*).

103. Пусть поле скоростей $\mathbf{V}$ несжимаемой жидкости занимает неограниченное пространство. Вследствие несжимаемости всюду

$$\operatorname{div}\ \mathbf{V} = 0.$$

Пусть на линии L в некоторой области этого поля имеем rot $\mathbf{V} \neq 0$, так что циркуляция по любому контуру, охватывающему L, равна Г. Тогда линию L можно рассматривать как элементарную вихревую трубку, имеющую сечение dS. Требуется отыскать поле вне вихревой трубки.

104. Используя результат задачи 103, найти поле прямолинейной вихревой нити и поле кольцевой (круговой) вихревой нити.

105. Найти дивергенцию и вихрь поля скоростей $\mathbf{V}$ и поля ускорений $\mathbf{W}$ твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, зная, что

$$\mathbf{V} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{W} = \vec{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \mathbf{r}],$$

где $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ — постоянные векторы.

106. Показать, что поток радиус-вектора $\mathbf{r}$ через любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V, равен $3V$.

107. Вычислить циркуляцию по окружности радиуса R с центром в начале координат векторных полей:

а) $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}\,(-y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j})$;

б) $\mathbf{B} = (x\ y + 1)\ \ \mathbf{i} + \left(\dfrac{x^2}{2} + x + 2\right)\ \mathbf{j}$.

108. Материальная точка движется согласно уравнению движения

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos w\ t + \mathbf{b} \sin w\ t,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, w — постоянная.

Показать, что сила, действующая на точку, является *центральной* (направленной все время к началу координат).

109. Доказать тождества:

а) div $([\mathbf{r} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{c}) = -2\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$; б) div $([\mathbf{r} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{r}) = -2\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle$;

в) div $[\nabla\varphi \times \nabla\psi] = 0$; г) rot $([\mathbf{c} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{r}) = 3\ \mathbf{c} \times \mathbf{r}$;

д) rot $([\mathbf{c} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$; е) div $(\mathbf{r}^2 \mathbf{c}) = 2\ \langle \mathbf{r}, \mathbf{c} \rangle$;

ж) rot $(\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle\ \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$; з) grad $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{a}$

($\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ — постоянные векторы).

110. В некоторых случаях бывает удобно вместо декартовых координат a_x, a_y, a_z вектора $\mathbf{a}$ рассматривать его *циклические координаты*, определяемые формулами

$$a_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_x \pm i a_y \right), \quad a_0 = a_z.$$

а) Выразить скалярное и векторное произведения двух векторов через их циклические координаты.

б) Выразить циклические координаты радиус-вектора через шаровые функции Лежандра.

111. Вывести формулы:

а) $\Delta\ f\,(\varphi) = \dfrac{df}{d\varphi}\ \Delta\ \varphi + \dfrac{d^2 f}{d\varphi^2}\ \ (\mathrm{grad}\ \varphi)^2\,;$

б) $\Delta\,(\varphi\ \psi) = \varphi\ \Delta\psi + \psi\ \Delta\varphi + 2\ \langle \mathrm{grad}\ \varphi, \mathrm{grad}\ \psi\rangle;$

в) $\Delta\ \varphi^{\alpha} = \alpha\ \varphi^{\alpha-2}\ \ \Big(\varphi\ \Delta\varphi + (\alpha-1)\ \ (\mathrm{grad}\ \varphi)^2\Big)\,;$

г) $\Delta\ \ \ln\varphi = \dfrac{\Delta\ \varphi}{\varphi} - \left(\dfrac{\mathrm{grad}\ \varphi}{\varphi}\right)^2\,;$

д) $\Delta\ e^{\varphi} = e^{\varphi}\ \ \Big(\Delta\ \varphi + (\mathrm{grad}\ \varphi)^2\Big)\,.$

Глава 2.

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 5. Алгебра тензоров

1°. О п р е д е л е н и е т е н з о р а. Пусть $\mathcal{L}_n$ есть n-мерное линейное пространство над полем $\mathbf{K}$ комплексных или действительных чисел. [1]

Тензором типа (r, s), где $r, s \geq 0$, на $\mathcal{L}_n$ называется *полилинейная функция* (т. е. функция, линейная по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных аргументов)

$$B : \underbrace{\mathcal{L}_n \times \cdots \times \mathcal{L}_n}_{r\ \text{раз}} \times \underbrace{\mathcal{L}_n^* \times \cdots \times \mathcal{L}_n^*}_{s\ \text{раз}} \to \mathbf{K},$$

сопоставляющая каждым r векторам

$$X_1, \ldots, X_r$$

из $\mathcal{L}_n$ и s ковекторам

$$u^1, \ldots, u^s$$

из линейного пространства $\mathcal{L}_n^*$, сопряженного с $\mathcal{L}_n$, число

$$B\left(X_1, \ldots, X_r, u^1, \ldots, u^s\right) \in \mathbf{K}.$$

Тензор типа $(r, 0)$ называется *ковариантным*, а тензор типа $(0, s)$ — *контравариантным*. Тензор типа (r, s), где $r > 0$ и $s > 0$, называется *смешанным*.

Тензоры типа $(1, 0)$ являются ковекторами, а тензоры типа $(0, 1)$ — векторами, в силу отождествления $\mathcal{L}_n = (\mathcal{L}_n^*)^*$. Тензоры типа $(0, 0)$ называются *скалярами* (*инвариантами*) и отождествляются с элементами поля $\mathbf{K}$.

Число $r + s$ называется *рангом*, или *валентностью* тензора типа (r, s).

---

[1] Понятия вектора, ковектора, линейного пространства $\mathcal{L}_n$ над полем $\mathbf{K}$, сопряженного пространства $\mathcal{L}_n^*$, базиса и кобазиса, а также аффинного пространства и аффинной системы координат предполагаются известными из курса линейной алгебры.

Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ — произвольный базис пространства $\mathcal{L}_n$, а $(e^1,\dots,e^n)$ — кобазис пространства $\mathcal{L}_n^*$:

$$e^i\left(e_j\right)=\delta^i_j=\begin{cases}1, \text{если } i=j,\\ 0, \text{если } i\neq j \qquad (i,j=1,\dots,n)\,.\end{cases}$$

Если [2]

$$X_1=X_1^{i_1}e_{i_1},\dots,X_r=X_r^{i_r}e_{i_r},\quad u^1=u^1_{j_1}e^{j_1},\dots,u^s=u^s_{j_s}e^{j_s},$$

то, в силу полилинейности,

$$B(X_1,\dots,X_r,u^1,\dots,u^s)=B^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}X_1^{i_1}\dots X_r^{i_r}u^1_{j_1}\dots u^s_{j_s},$$

где n^{r+s} чисел

$$B^{j_1\dots j_s}_{i1\dots i_r}=B(e_{i_1},\dots,e_{i_r},e^{j_1},\dots,e^{j_s})$$

называются *компонентами*, или *координатами тензора* B в базисе $(e_1,\,\dots,\,e_n)$.

В новом базисе $(e_{1'},\dots,e_{n'})$:

$$e_{i'}=A^i_{i'e_i},\qquad e^{i'}=A^{i'}_i e^i,$$

где $A=(A^i_{i'})$ — матрица перехода от базиса $(e_1,\dots,e_n)$ к базису $(e_1',\dots,e_n')$, а $A^{-1}=(A^{i'}_i)$ — обратная матрица, в силу полилинейности, для компонент

$$B^{j_1',\dots,j_s'}_{i_1',\dots,i_r'}=B(e_{i_1'},\dots,e_{i_r'},e^{j_1'},\dots,e^{j_s'})$$

тензора B будут иметь место формулы

$$B^{j_1',\dots,j_s'}_{i_1',\dots,i_r'}=A^{i_1}_{i_1'}\dots A^{i_r}_{i_r'}A^{j_1'}_{j_1}\dots A^{j_s'}_{j_s}B^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r},$$

определяющие *тензорный закон преобразования.*

Относительный тензор, или *псевдотензор типа* (r,s) *веса* N определяется законом преобразования

$$B^{j_1',\dots,j_s'}_{i_1',\dots,i_r'}=|\det(A^{l'}_l)|^N A^{i_1}_{i_1'}\dots A^{i_r}_{i_r'}A^{j_1'}_{j_1}\dots A^{j_s'}_{j_s}B^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$$

(иногда в правой части добавляется множитель $\operatorname{sgn}\det(A^l_{l'})$, т. е. -1, если детерминант $\det(A^l_{l'})$ отрицателен).

[2] Здесь и далее предполагается, что 1) по каждому "*немому*" *индексу*, встречающемуся дважды, один раз внизу и один раз наверху, производится суммирование от 1 до n, если только не оговорено противное, например, x^ie_i (не суммировать); 2) все *свободные индексы*, встречающиеся только внизу или только наверху, пробегают независимо друг от друга значения от 1 до n, так что уравнение с k свободными индексами является сокращенной записью n^k уравнений.

2°. Сложение тензоров. Множество $\mathcal{T}_r^s(\mathcal{L}_n)$ всех тензоров типа (r,s) на $\mathcal{L}_n$ является линейным пространством над полем $\mathbf{K}$ относительно обычных операций сложения и умножения функций на числа. Из предыдущего следует, что

$$T_1^0(\mathcal{L}_n) \equiv T_1(\mathcal{L}_n) = \mathcal{L}_n^*, \quad \mathcal{T}_0^1(\mathcal{L}_n) \equiv \mathcal{T}^1(\mathcal{L}_n) = \mathcal{L}_n, \qquad \mathcal{T}_0^0(\mathcal{L}_n) = \mathbf{K}.$$

При *сложении* двух тензоров B и F типа (r,s) их компоненты складываются:

$$(B+F)_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} = B_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} + F_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}.$$

3°. Умножение тензора на число. При *умножении тензора* $B \in \mathcal{T}_r^s(\mathcal{L}_n)$ *на число* $\alpha \in \mathbf{K}$ его компоненты умножаются на это число:

$$(\alpha\, B)_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} = \alpha\, B_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}.$$

4°. Умножение тензоров. Для любых двух тензоров на $\mathcal{L}_n$ определена *операция умножения*, обозначаемая символом $\otimes$. *Произведением тензоров* $F \in \mathcal{T}_p^q(\mathcal{L}_n)$ и $B \in \mathcal{T}_r^s(\mathcal{L}_n)$ называется тензор $F \otimes B$ типа $(p+r, q+s)$, определенный формулой

$$F \otimes B\left(X_1, \ldots, X_{p+r}, u^1, \ldots, u^{q+s}\right) =$$

$$= F\left(X_1, \ldots, X_p, u^1, \ldots, u^q\right) B\left(X_{p+1}, \ldots, X_{p+r}, u^{q+1}, \ldots, u^{q+s}\right).$$

Умножение тензоров дистрибутивно относительно сложения:

$$(B+F) \otimes D = B \otimes D + F \otimes D, \qquad B \otimes (F+D) = B \otimes F + B \otimes D,$$

и ассоциативно:

$$(B \otimes F) \otimes D = B \otimes (F \otimes D),$$

но в общем случае некоммутативно:

$$B \otimes F \neq F \otimes B.$$

При умножении тензоров их компоненты перемножаются:

$$(F \otimes B)_{i_1\ldots i_{p+r}}^{j_1\ldots j_{q+s}} = F_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} B_{i_{p+1}\ldots i_{p+r}}^{j_{q+1}\ldots j_{q+s}}.$$

Всевозможные тензорные произведения вида

$$e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_s}$$

составляют базис линейного пространства $\mathcal{T}_r^s(\mathcal{L}_n)$. Координатами тензора B в этом базисе являются его компоненты:

$$B = B_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_s}.$$

Отсюда следует, что размерность линейного пространства тензоров типа (r,s) равна числу их компонент:

$$\dim \mathcal{T}_r^s\,(\mathcal{L}_n) = n^{r+s}.$$

Относительно операций $+$ и $\otimes$ все линейные пространства $\mathcal{T}_r^s\,(\mathcal{L}_n)$, $r,s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, составляют алгебраический объект, обозначаемый символом $\mathcal{T}\,(\mathcal{L}_n)$ и называемый *тензорной алгеброй* линейного пространства $\mathcal{L}_n$.

5°. Свертывание тензоров. Пусть $r,s \geq 1$. Для каждой упорядоченной пары (k,l) индексов k,l таких, что $1 \leq k \leq r$ и $1 \leq l \leq s$, существует единственное линейное отображение, называемое *свертыванием* и обозначаемое $\mathcal{C}$, пространства $\mathcal{T}_r^s\,(\mathcal{L}_n)$ в $\mathcal{T}_{r-1}^{s-1}\,(\mathcal{L}_n)$, которое отображает

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes u^1 \otimes \cdots \otimes u^s$$

в

$$u^l(X_k) X_1 \otimes \cdots \otimes X_{k-1} \otimes X_{k+1} \otimes \cdots \otimes X_r \otimes u^1 \otimes \cdots \otimes u^{l-1} \otimes u^{l+1} \otimes \cdots \otimes u^s,$$

где

$$X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{L}_n, \quad u^1, \ldots, u^s \in \mathcal{L}_n^*,$$

а $u^l\,(X_k)$ — значение ковектора u^l на векторе X_k. Свертывание $\mathcal{C}$ отображает тензор $B \in \mathcal{T}_r^s\,(\mathcal{L}_n)$ с компонентами $B_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}$ в тензор $\mathcal{C}B \in \mathcal{T}_{r-1}^{s-1}\,(\mathcal{L}_n)$ с компонентами

$$(\mathcal{C}B)_{i_1\ldots i_{r-1}}^{j_1\ldots j_{s-1}} = B_{i_1\ldots i_{l-1}\ h\ i_l\ldots i_{r-1}}^{j_1\ldots j_{k-1}\ h\ j_k\ldots j_{s-1}} \equiv \sum_{h=1}^{n} B_{i_1\ldots i_{l-1}\ h\ i_l\ldots i_{r-1}}^{j_1\ldots j_{k-1}\ h\ j_k\ldots j_{s-1}}.$$

Говорят, что этот тензор получен *свертыванием тензора B по l-у нижнему и k-у верхнему индексам.*

Каждый линейный оператор (эндоморфизм) $\widehat{P} \in \mathrm{End}\ \mathcal{L}_n$ пространства $\mathcal{L}_n$, т. е. линейное отображение $X \to \widehat{P}X$ из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_n$ определяет по формуле

$$P\,(X,u) = u\left(\widehat{P}X\right), \qquad u \in \mathcal{L}_n^*,$$

смешанный тензор $P \in \mathcal{T}_1^1\,(\mathcal{L}_n)$, свертывание которого $\mathcal{C}P$ совпадает со следом соответствующего эндоморфизма:

$$\mathcal{C}P = P_i^i \equiv P_1^1 + \cdots + P_n^n = \mathrm{tr}\widehat{P} \equiv \mathrm{tr}P.$$

Отображение $\widehat{P} \to P$ является изоморфизмом линейных пространств $\mathrm{End}\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{L}_n)$. Поэтому линейный оператор отождествляется с соответствующим тензором типа $(1,1)$.

Для любого вектора $X \in \mathcal{L}_n$ и ковектора $u \in \mathcal{L}_n^*$ произведение $u \otimes X$ есть тензор типа $(1,1)$. Свертывание $\mathcal{C} : \mathcal{T}_1^1 \to \mathbf{K}$ отображает $u \otimes X$ в $u(X)$:

$$\mathrm{tr}\,(u \otimes X) = u(X) = u_1 X^1 + \cdots + u_n X^n \equiv u_i X^i.$$

6°. А л ь т е р н и р о в а н и е и с и м м е т р и р о в а н и е. Пусть $B \in \mathcal{T}_r^0(\mathcal{L}_n) \equiv \mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$. Для любой перестановки $\sigma : i \to \sigma(i)$ чисел $(1, \ldots, r)$ отображение $\widetilde{\sigma} : B \to \sigma B$, определенное формулой

$$(\sigma B)(X_1, \ldots, X_r) = B\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}\right),$$

или

$$(\sigma B)_{i_1 \ldots i_r} = B_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(r)}},$$

является автоморфизмом линейного пространства $\mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$.

Ковариантный тензор B типа $(r, 0)$ называется *симметричным*, если $\sigma B = B$, и *кососимметричным*, если $\sigma B = \operatorname{sgn}(\sigma) B$, где σ — произвольная перестановка чисел $(1, \ldots, r)$, а $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — её знак, равный $(-1)^{\nu(\sigma)}$, здесь $\nu(\sigma)$ — число *инверсий* в перестановке σ, т. е. число пар $(\sigma(i), \sigma(j))$, для которых $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Альтернированием называется линейное отображение $\mathcal{A} : B \to \mathcal{A}B$ из $\mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$ в $\mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$, определенное формулой

$$(\mathcal{A}B)(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!} \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\sigma B),$$

здесь и далее $\sum\limits_\sigma$ означает суммирование по всем перестановкам σ чисел $(1, \ldots, r)$. Компоненты тензора $\mathcal{A}B$ равны

$$(\mathcal{A}B)_{i_1 \ldots i_r} = \frac{1}{r!} \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) B_{i_{\sigma(1)}} \ldots i_{\sigma(r)} \equiv B_{[i_1 \ldots i_r]}.$$

Симметрированием называется линейное отображение $\mathcal{S} : B \to SB$ из $\mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$ в $\mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$, определенное формулой

$$(SB)(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!} \sum_\sigma (\sigma B).$$

Компоненты тензора $\mathcal{S}B$ равны

$$(\mathcal{S}B)_{i_1 \ldots i_r} = \frac{1}{r!} \sum_\sigma B_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(r)}} \equiv B_{(i_1 \ldots i_r)}.$$

Альтернирование и симметрирование контравариантных тензоров определяется аналогично.

112. В трехмерном пространстве заданы вектор X, ковектор u и тензоры B и F типа $(1,1)$ с компонентами в базисе (e_1, e_2, e_3):

$$\left(X^i\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ (u_i) = (3, 7, 1); \ \left(B^i_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \left(F^i_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Написать разложения тензоров X, u, B и F по базисам.

113. Найти компоненты и написать разложения по базисам следующих тензоров:

а) $2B+F$; б) $B-F$; в) $X\otimes u$; г) $B\otimes X$;

д) $F\otimes X$; е) $F\otimes u-2\;B\otimes u$; ж) $B\otimes F$; з) $F\otimes B$;

и) $B\otimes F\otimes u\otimes X$; к) $X\otimes F\otimes B\otimes u$; л) $\mathcal{C}\,(B\otimes X)$; м) $\mathcal{C}\,(u\otimes F)$;

н) $\mathcal{C}\;[\mathcal{C}\,(B\otimes F)]$,

где тензоры X, B и F определены в задаче 112.

114. Вычислить

а) $\mathrm{tr}\,(X\otimes u)\,$; б) $\mathrm{tr}\;B$; в) $\mathrm{tr}\;F$; г) $B^i_e\;F^e_j$;

д) $B^e_j\;F^i_e$; е) $B^i_e\;F^e_j\;X^j\;u_i$; ж) $B^i_j\;u_i$; з) $F^i_j\;X^j$,

где тензоры X, B и F определены в задаче 112.

115. Пусть B и F — тензоры типов $(3,0)$ и $(0,2)$ соотвественно. Образовать из них тензоры первого, второго и третьего рангов.

116. Доказать тождества:

$$\det\left(X^j_i\right)=\begin{vmatrix}X^1_1\dots X^1_r\\ \dots\\ X^r_1\dots X^r_r\end{vmatrix}\equiv r!\;X^{[1}_1\dots X^{r]}_r\equiv r!\;X^1_{[1}\dots X^r_{r]}.$$

117. Доказать, что для любой перестановки σ чисел $(1,\dots,r)$ имеет место тождество

$$B_{i_1\dots i_r}F^{i_1\dots i_r}=B_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(r)}}F^{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(r)}}.$$

118. Доказать тождество

$$X^{i_{\sigma(1)}}_{j_1}\dots X^{i_{\sigma(r)}}_{j_r}=X^{i_1}_{j_{\tau(1)}}\dots X^{i_r}_{j_{\tau(r)}}\qquad(\tau=\sigma^{-1}).$$

119. Доказать, что кососимметричный тензор кососимметричен, а симметричный тензор симметричен по любой паре своих аргументов.

120. Доказать, что тензор $B\in\mathcal{T}_r\,(\mathcal{L}_n)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда

$$B_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(r)}}=\mathrm{sgn}(\sigma)B_{i_1\dots i_r},$$

и симметричен тогда и только тогда, когда

$$B_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(r)}}=B_{i_1\dots i_r}$$

для любых индексов $i_1\dots i_r$ и любой перестановки σ.

121. Доказать, что для любого $B \in \mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$ тензор $\mathcal{A}B$ является кососимметричным, и тензор B кососимметричен тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}B = B$, т. е. $B_{i_1\dots i_r} = B_{[i_1\dots i_r]}$.

122. Доказать, что для любого $B \in \mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$ тензор $\mathcal{S}B$ является симметричным, и тензор B симметричен тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}B = B$, т. е. $B_{i_1\dots i_r} = B_{(i_1\dots i_r)}$.

123. Доказать, что тензор $B \in \mathcal{T}_0^r(\mathcal{L}_n) \equiv \mathcal{T}^r(\mathcal{L}_n)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $B^{i_1\dots i_r} = B^{[i_1\dots i_r]}$, и симметричен тогда и только тогда, когда $B^{i_1\dots i_r} = B^{(i_1\dots i_r)}$, где

$$B^{[i_1\dots i_r]} \equiv \frac{1}{r!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) B^{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(r)}}; \quad B^{(i_1\dots i_r)} = \frac{1}{r!}\sum_\sigma B^{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(r)}}.$$

124. Показать, что для любой перестановки σ чисел $(1,\dots,r)$ и любого тензора $B \in \mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$ справедливы равенства:

а) $\mathcal{A}(\sigma B) = \sigma(\mathcal{A}B) = \operatorname{sgn}(\sigma)\mathcal{A}B \qquad (\mathcal{A}\circ\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}\circ\mathcal{A} = \operatorname{sgn}(\sigma)\mathcal{A})$;

б) $\mathcal{S}(\sigma B) = \sigma(\mathcal{S}B) = \mathcal{S}B \qquad (\mathcal{S}\circ\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}\circ\mathcal{S} = \mathcal{S})$;

в) $\mathcal{A}(\mathcal{A}B) = \mathcal{A}B \qquad (\mathcal{A}\circ\mathcal{A} = \mathcal{A})$;

г) $S(\mathcal{S}B) = \mathcal{S}B \qquad (\mathcal{S}\circ\mathcal{S} = \mathcal{S})$,

где $\circ$ означает композицию, $\widetilde{\sigma} : B \to \sigma B$.

125. Пусть B — симметричный, F — кососимметричный и D — произвольный тензоры типа $(2,0)$. Записать в явном виде $D_{[ij]}$, $D_{(ij)}$, $F_{[ij]}$, $F_{(ij)}$, $S_{[ij]}$, $S_{(ij)}$.

126. Вывести формулы:

а) $B_{((i_1\dots i_r))} = B_{(i_1\dots i_r)}$; б) $B_{[[i_1\dots i_r]]} = B_{[i_1\dots i_r]}$;

в) $B_{(i_1\dots[i_\ell i_m]\dots i_r)} = 0$; г) $B_{[i_1\dots[i_\ell i_m]\dots i_r]} = B_{[i_1\dots i_\ell i_m \dots i_r]}$.

127. Доказать равенства:

$$(\mathcal{A}B)(X_1,\dots,X_r) = B_{[i_1\dots i_r]}X_1^{i_1}\dots X_r^{i_r} = B_{i_1\dots i_r}X_1^{[i_1}\dots X_r^{i_r]} =$$

$$= B_{i_1\dots i_r}X_{[1}^{i_1}\dots X_{r]}^{i_r} = \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n} B_{i_1\dots i_r}\begin{vmatrix} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_1} \\ \dots \\ X_1^{i_r} \dots X_r^{i_r}\end{vmatrix}.$$

Записать эти равенства в явном виде для $r = 2$.

128. Используя результаты задачи 127, вычислить

$$(\mathcal{A}B)\,(X,Y) \quad \text{и} \quad \mathcal{S}B\,(X,Y)\,,$$

если $B = B_{ij}e^i \otimes e^j$, $X = X^i e_i$, $Y = Y^i e_i$ и

а) $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \left(X^i\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \left(Y^i\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

б) $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; \left(X^i\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \left(Y^i\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

129. Вычислить $(\mathcal{A}B)\left(u^1, u^2, u^3\right)$ и $(\mathcal{S}B)\left(u^1, u^2, u^3\right)$, где

$$B = 2\ e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + 3\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_4 \otimes e_1 +$$

$$+2\ e_4 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3 \otimes e_2;$$

$$u^1 = e^1 + 2\ e^2 - e^4; \quad u^2 = e^2 - e^3; \quad u^3 = e^1 + e^4$$

— тензоры в 4-мерном пространстве с базисом (e_1, e_2, e_3, e_4).

130. Доказать, что всякий тензор типа $(2,0)$ (или $(0,2)$) можно представить в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров того же типа. Найти симметричную и кососимметричную части тензоров второго ранга, указанных в задаче 128.

131. Доказать, что симметричный тензор второго ранга в n-мерном пространстве имеет не более $n\,(n+1)\,/2$ различных компонент. Если B_{ij} — компоненты кососимметричного тензора, то $B_{ii} = 0$ и существует не более $n\,(n-1)\,/2$ различных компонент B_{ij} $(i \neq j)$.

132. Если ранг кососимметричного тензора в n-мерном пространстве больше n, то этот тензор равен нулю.

133. Вычислить компоненты тензоров, указанных в задачах 112 и 128, в новом базисе $(e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$, если

а) $e'_1 = e_1 + e_2,\ e'_2 = e_2 + e_3,\ e'_3 = e_1 + e_3;$

б) $e'_1 = e_1 - e_2,\ e'_2 = e_1 + e_2,\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3.$

Как в случаях а) и б) преобразуются базисы в пространствах $\mathcal{T}_2\left(\mathcal{L}_n\right)$, $\mathcal{T}^2\left(\mathcal{L}_n\right)$, $\mathcal{T}_1^1\left(\mathcal{L}_n\right)$, $\mathcal{T}_1^2\left(\mathcal{L}_n\right)$, $\mathcal{T}_2^1\left(\mathcal{L}_n\right)$?

134. Доказать, что если $X^i V_i$ — инвариант а) при любом векторе X^i, то V_i — компоненты ковектора; б) при любом ковекторе V_i, то X^i — компоненты вектора.

135. Доказать, что если $B_k^{ij}\ U_i\ V_j\ X^k$ — инвариант при произвольных ковекторах U_i, V_j и векторе X^k, то B_k^{ij} — компоненты тензора типа $(1,2)$.

136. Доказать, что если $\varphi = B_{ij}X^iX^j$ — скаляр при любом векторе X^i, то B_{ij} — компоненты тензора. Если, в частности, $\varphi = 0$, то $B_{(ij)} = 0$, т. е. B — кососимметричный тензор.

137. Пусть B_{ij} — компоненты тензора $B \neq 0$ типа $(2, 0)$, а α и $\beta \neq 0$ — инварианты. Доказать, что если $\alpha B_{ij} + \beta B_{ji} = 0$, то либо $\alpha = -\beta$ и B — симметричный тензор, либо $\alpha = \beta$ и B — кососимметричный тензор.

138. Доказать, что если $B_{ijk}\ X^iX^jX^k = 0$ при произвольном векторе X^i, то $B_{(ijk)} = 0$. Записать последнее соотношение в явном виде (через компоненты B_{ijk}).

139. Доказать, что если тензор типа $(3, 0)$ симметричен по первому и второму аргументам и кососимметричен по второму и третьему аргументам, то он равен нулю.

140. Доказать, что если тензор B_{ijk} симметричен по индексам i и j, то

$$B_{(ijk)} = \frac{1}{3}\left(B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij}\right).$$

141. Доказать, что если тензор B_{ijk} кососимметричен по индексам i и j, то

$$B_{[ijk]} = \frac{1}{3}\left(B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij}\right).$$

142. Доказать, что если $B_{ijke}X^iX^jX^kY^e = 0$ при любых векторах X^i и Y^l, то

$$B_{ijke} + B_{kjie} + B_{iekj} + B_{keij} = 0.$$

Если, кроме того,

$$B_{ijke} + B_{jike} = 0, \quad B_{ijke} + B_{ijek} = 0, \quad B_{ijke} + B_{jkie} + B_{kije} = 0,$$

то $B_{ijke} = 0$.

143. Доказать, что тензор $B = B_{ij}e^i \otimes e^j$ является произведением ковекторов u^1 и u^2: $B = u^1 \otimes u^2$, тогда и только тогда, когда $B_{ke}B_{ij} - B_{ie}B_{kj} = 0$.

144. Доказать следующие соотношения:

а) $B_{ijk} = B_{(ijk)} + B_{[ijk]} + \dfrac{2}{3}\left(B_{[ij]k} + B_{[kj]i}\right) + \dfrac{2}{3}\left(B_{(ij)k} - B_{k(ij)}\right);$

б) $B_{[i_1\ldots i_r]}F^{i_1\ldots i_r} = B_{i_1\ldots i_r}F^{[i_1\ldots i_r]} = B_{[i_1\ldots i_r]}F^{[i_1\ldots i_r]}$.

145. Показать, что тензоры $\dfrac{1}{2}\left(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i\right)$, $i \leq j$, образуют базис в линейном пространстве симметричных тензоров D типа $(2, 0)$ на $\mathcal{L}_n$, а тензоры $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$, $i < j$, — базис в линейном пространстве кососимметричных тензоров B типа $(2, 0)$ на $\mathcal{L}_n$. Написать разложения тензоров D и B по этим базисам.

146. Сколько независимых компонент существует у тензора $B^{i_1\cdots i_r}$,

а) симметричного по $s \leq r$ индексам;

б) кососимметричного по $s \leq r$ индексам?

§ 6. Внешняя алгебра

1°. Внешнее умножение. Ковариантный тензор $\omega \in \mathcal{T}_k(\mathcal{L}_n)$ называется *внешней*, или *косой формой степени* k, или, короче, k*-формой*, если он кососимметричен, т. е. если $\mathcal{A}\omega = \omega$.

Внешним произведением $\omega^1 \wedge \omega^2$ k-формы ω^1 на q-форму ω^2 называется внешняя форма степени $k+q$

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{(k+q)!}{k!\;q!}\mathcal{A}\left(\omega^1 \otimes \omega^2\right).$$

Коэффициенты этой формы равны

$$\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right)_{i_1\ldots i_{k+q}} = \frac{(k+q)!}{k!\;q!}\omega^1_{[i_1\ldots i_k}\omega^2_{i_{k+1}\ldots i_{k+q}]}.$$

Внешнее умножение $\wedge$ ассоциативно:

$$\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right) \wedge \omega^3 = \omega^1 \wedge \left(\omega^2 \wedge \omega^3\right),$$

дистрибутивно:

$$\left(\omega^1 + \omega^2\right) \wedge \omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3,$$

и кососоммутативно:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = (-1)^{kq}\,\omega^2 \wedge \omega^1$$

для любой k-формы ω^1 и q-формы ω^2. Кроме того,

$$\left(\alpha\omega^1\right) \wedge \omega^2 = \omega^1 \wedge \left(\alpha\omega^2\right) = \alpha\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right), \qquad \alpha \in \mathbf{K}.$$

Множество k-форм образует линейное пространство $\Lambda_k(\mathcal{L}_n) \subset \mathcal{T}_k(\mathcal{L}_n)$. Так как при $k=0$ и $k=1$ условие кососимметричности не накладывает никаких ограничений, то $\Lambda_0(\mathcal{L}_n) = \mathcal{T}_0(\mathcal{L}_n) = \mathbf{K}$, $\Lambda_1(\mathcal{L}_n) = \mathcal{T}_1(\mathcal{L}_n) = \mathcal{L}_n^*$. По отношению к операциям $+$ и $\wedge$ линейные пространства $\Lambda_k(\mathcal{L}_n)$, $k = 0, 1, \ldots$, составляют алгебраический объект, обозначаемый $\Lambda(\mathcal{L}_n)$ и называемый *внешней алгеброй* пространства $\mathcal{L}_n$ (или его *алгеброй Грассмана*).

Если $(e^1, \ldots, e^n)$ — произвольный базис пространства $\mathcal{L}_n^*$, то всевозможные внешние произведения

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, \qquad 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n,$$

составляют базис пространства $\Lambda_k(\mathcal{L}_n)$. В этом базисе каждая k-форма $\omega \in \Lambda_k(\mathcal{L}_n)$ единственным образом представляется в виде

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\; e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}.$$

Отсюда следует, что размерность пространства $\Lambda_k(\mathcal{L}_n)$ равна числу C_n^k сочетаний из n по k: $\dim \Lambda_k(\mathcal{L}_n) = C_n^k$.

При изменении базиса: $e^{i'} = A^{i'}_i e^i$ базисные k-формы $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ преобразуется по закону:

$$e^{i'_1} \wedge \cdots \wedge e^{i'_k} = k! \sum_{i_1 < \ldots < i_k} A^{i'_1}_{[i_1} \ldots A^{i'_k}_{i_k]}\, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, \qquad i'_1 < \cdots < i'_k.$$

2°. Поливекторы. Соотношения Плюккера. Множество $\mathcal{T}^k(\mathcal{L}_n)$ всех кососимметричных контравариантных тензоров ранга k образует линейное пространство $\Lambda^k(\mathcal{L}_n) = \Lambda_k(\mathcal{L}^*)$, при этом $\Lambda^0(\mathcal{L}_n) = \mathcal{T}^0(\mathcal{L}_n) = \mathbf{K}$, $\Lambda^1(\mathcal{L}_n) = \mathcal{T}^1(\mathcal{L}_n) = \mathcal{L}_n$. Базис этого пространства состоит из всевозможных внешних произведений

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = k!\, \mathcal{A}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}), \qquad 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n.$$

Разложение произвольного кососимметричного тензора $F \in \Lambda^k(\mathcal{L}_n)$ по этому базису дается формулой

$$F = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} F^{i_1 \ldots i_k}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

Внешние произведения $X_1 \wedge \cdots \wedge X_k$ векторов $X_1, \cdots, X_k \in \mathcal{L}_n$ называются *поливекторами степени* k, или, короче, *k-векторами*, а при $k = 2$ — *бивекторами*.

При $k = 0$ поливекторы совпадают с числами из поля $\mathbf{K}$, а при $k = 1$ являются векторами.

Кососимметричный тензор $F \in \Lambda^k(\mathcal{L}_n)$ тогда и только тогда является поливектором, когда его компоненты удовлетворяют *соотношениям Плюккера*

$$F^{[i_1 \ldots i_k} F^{j_1] j_2 \ldots j_k} = 0$$

для всех $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$.

3°. Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}'$ — линейные пространства над полем $\mathbf{K}$. Каждое линейное отображение (гомоморфизм) $\psi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}'$ индуцирует линейное отображение $\psi^* : \mathcal{T}_r(\mathcal{L}') \to \mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$, сопоставляющее каждому тензору $B \in \mathcal{T}_r(\mathcal{L}')$ тензор $\psi^* B \in \mathcal{T}_r(\mathcal{L}_n)$, значение которого на векторах $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{L}_n$ равно значению тензора B на их образах:

$$(\psi^* B)(X_1, \ldots, X_r) = B(\psi(X_1), \ldots, \psi(X_r)).$$

Отображение ψ^* обладает следующими свойствами:

$$\psi^*(\alpha\, B + \beta\, F) = \alpha\, \psi^* B + \beta\, \psi^* F \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{K}),$$

$$\psi^*(B \otimes F) = (\psi^* B) \otimes \psi^* F, \qquad \mathcal{A}(\psi^* B) = \psi^*(\mathcal{A} B),$$

и переводит каждую внешнюю форму $\omega' \in \Lambda_r(\mathcal{L}')$ во внешнюю форму $\psi^* \omega \in \Lambda_r(\mathcal{L}_n)$.

147. Доказать, что если ω^1 есть k_1-форма, ω^2 есть k_2-форма и ω^3 есть k_3-форма, то

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_1!\; k_2!\; k_3!} A\left(\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3\right).$$

Записать аналогичную форму для m сомножителей $\omega^1, \ldots, \omega^m$ и доказать ее с помощью индукции.

148. Доказать, что для любых ковекторов (1-форм) $u^1, \ldots, u^r$ справедливы равенства

$$u^1 \wedge \cdots \wedge u^r = r!\; \mathcal{A}\left(u^1 \otimes \cdots \otimes u^r\right) =$$
$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\; u^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u^{\sigma(r)} = r!\; u^{[1} \otimes \cdots \otimes u^{r]},$$

в частности,

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r} = r!\; e^{[i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r]}.$$

Найти $e^i \wedge e^j$; $e^i \wedge e^j \wedge e^k$.

149. Доказать, что для любых векторов $X_1, \ldots, X_r$ справедливы равенства

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_r = r!\; A\left(X^1 \otimes \cdots \otimes X^r\right) =$$
$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\; X_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\sigma(r)} = r!\; X_{[1} \otimes \cdots \otimes X_{r]},$$

в частности,

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = r!\; e_{[i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r]}.$$

Найти $e_i \wedge e_j$; $e_i \wedge e_j \wedge e_k$.

150. Доказать соотношения:

$$u^1 \wedge \cdots \wedge u^r\left(X_1, \ldots, X_r\right) = X_1 \wedge \cdots \wedge X_r\left(u^1, \ldots, u^r\right) =$$
$$= r!\; u^{[1}\left(X_1\right) \ldots u^{r]}\left(X_r\right) = r!\; u^1\left(X_{[1}\right) \ldots u^r\left(X_{r]}\right) =$$
$$= \begin{vmatrix} u^1\left(X_1\right) \ldots u^1\left(X_r\right) \\ \ldots \\ u^r\left(X_1\right) \ldots u^r\left(X_r\right) \end{vmatrix},$$

где $X_1, \ldots, X_r$ — векторы, а $u^1, \ldots, u^r$ — ковекторы на $\mathcal{L}_n$.

151. Показать, что

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_r}\left(X_1, \ldots, X_r\right) = \begin{vmatrix} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_1} \\ \ldots \\ X_1^{i_r} \ldots X_r^{i_r} \end{vmatrix} \equiv V^{i_1 \ldots i_r},$$

где X_j^i есть i-я координата вектора X_j. Если пространство евклидово и $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис, то число $V^{i_1 \cdots i_r}$ равняется r-мерному ориентированному объему r-мерного параллелепипеда, построенного на проекциях векторов $X_1, \ldots, X_r$ на координатную r-мерную плоскость базисных векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$.

152. Вычислить $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}\right)$. Чему равно

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right)$$

(не суммировать!)?

153. Показать, что значение k-формы ω на векторах $X_1 \dots X_k$

$$\omega\left(X_1 \dots X_k\right) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \begin{vmatrix} X_1^{i_1} \dots X_k^{i_1} \\ \dots \\ X_1^{i_k} \dots X_k^{i_k} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} V^{i_1 \dots i_k}.$$

154. В трехмерном пространстве даны векторы $X_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $X_2 = e_1 + e_3$, $X_3 = e_1 - e_3$ и ковекторы $u^1 = e^1 + e^2$, $u^2 = e^2 - e^3$, $u^3 = 2e^1 + 3e^2 + e^3$. Найти

а) $u^1 \wedge u^2$; б) $X_1 \wedge X_2$; в) $u^1 \wedge u^3$; г) $X_1 \wedge X_3$;

д) $u^2 \wedge u^3$; е) $X_2 \wedge X_3$; ж) $u^1 \wedge u^2 \wedge u^3$; з) $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$.

155. Пусть векторы X_1, X_2, X_3 и ковекторы u^1, u^2, u^3 — те же, что в задаче 154. Вычислить

а) $u^1 \wedge u^2\left(X_1, X_2\right)$; б) $u^1 \wedge u^2\left(X_2, X_1\right)$; в) $u^1 \wedge u^2\left(X_2, X_3\right)$;

г) $u^2 \wedge u^3\left(X_1, X_3\right)$; д) $X_1 \wedge X_2\left(u^1, u^3\right)$; е) $X_2 \wedge X_3\left(u^1, u^2\right)$;

ж) $X_1 \wedge X_3\left(u^2, u^3\right)$; з) $u^1 \wedge u^2 \wedge u^3\left(X_1, X_2, X_3\right)$;

и) $X_1 \wedge X_3 \wedge X_2\left(u^2, u^1, u^3\right)$.

156. Для векторов X_1, X_2, X_3 и ковекторов u^1, u^2, u^3 из задачи 154 найти

а) $e^1 \wedge e^2\left(X_1, X_2\right)$; б) $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3\left(X_1, X_2, X_3\right)$;

в) $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\left(u^1, u^2, u^3\right)$; г) $e_1 \wedge e_2\left(u^1, u^2\right)$.

157. Написать разложение 2-формы $\omega \in \Lambda_2\left(\mathcal{L}_n\right)$ по базисным 2-формам $e^i \wedge e^j$, $i < j$, если а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$.

158. В трехмерном пространстве заданы тензоры $B = B_{ij}\, e^i \otimes e^j$, $F = F_{ij}\, e^i \otimes e^j$, векторы $X_1 = X_1^i\, e_i$, $X_2 = X_2^i\, e_i$ и ковектор $u = u_i\, e^i$ с компонентами:

$$\left(B_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \left(F_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \left(X_1^i\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \left(X_2^i\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(u_i) = (1, 3, 3)\,.$$

Вычислить $\omega^1 = \mathcal{A}B$, $\omega^2 = \mathcal{A}F$ и найти а) $\omega^1 \wedge \omega^2$; б) $\omega^1 \otimes \omega^2$; в) $\omega^1 \otimes u$; г) $\omega^2 \otimes u$; д) $u \wedge \omega^1$; е) $u \wedge \omega^2$; ж) $\omega^1\,(X_1, X_2)$; з) $\omega^2\,(X_2, X_1)$.

Написать разложения форм ω^1 и ω^2 по базисным формам $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$ $(i_1 < \ldots < i_r)$ и базисным тензорам $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}$.

159. Показать, что в силу кососкоммутативности внешнего умножения

$$e^{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge e^{i_{\sigma(r)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$$

для любой перестановки σ чисел $1, \ldots, r$.

160. Доказать, что внешний квадрат $\omega \wedge \omega$ любой внешней формы ω нечетной степени равен нулю.

161. Показать, что внешняя форма ω степени $k > 1$ обращается в нуль, если а) два ее аргумента принимают одинаковые значения; б) ее аргументы линейно зависимы.

162. Доказать, что всякая k-форма в n-мерном пространстве при $k > n$ равна нулю.

163. Показать, что для любых n векторов $X_1, \ldots, X_n$ в n-мерном пространстве справедливо равенство

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_n = \begin{vmatrix} X_1^1 \ldots X_n^1 \\ \ldots \\ X_1^n \ldots X_n^n \end{vmatrix}\; e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

164. Доказать, что равенство $u^1 \wedge \dots \wedge u^r = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда ковекторы $u^1, \ldots, u^r$ линейно зависимы.

165. Доказать, что векторы $X_1, \ldots, X_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $X_1 \wedge \dots \wedge X_r \neq 0$.

166. Доказать, что если среди индексов $i_1, \ldots, i_r$ имеются два одинаковых, то форма $u^{i_1} \wedge \dots \wedge u^{i_r} = 0$.

167. Показать, что любая n-форма ω в n-мерном пространстве определяется одним числом $\omega_{1\ldots n}$ и может быть записана в виде

$$\omega = \omega_{1\ldots n} e^1 \wedge \dots \wedge e^n.$$

Доказать, что компоненты $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ тензора

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \varepsilon_{i_1\ldots i_n} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_n}$$

обладают свойствами:

а) $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = 0$, если два из индексов $i_1, \ldots, i_n$ совпадают;

б) $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = +1\,(-1)$, если все индексы $i_1, \ldots, i_n$ различны и перестановка $(1, \ldots, n) \to (i_1, \ldots, i_n)$ четная (нечетная).

Таким образом, $\omega_{i_1\dots i_n}=\omega_{1\dots n}\varepsilon_{i_1\dots i_n}$.

168. Выразить в явном виде компоненты внешнего произведения $\omega^1\wedge\omega^2$ k-формы ω^1 на q-форму через компоненты этих форм и написать разложение $k+q$-формы $\omega^1\wedge\omega^2$ по базисным формам $e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_{k+q}}$ $(i_1<\ldots<i_{k+q})$ и по базисным тензорам $e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_{k+q}}$ в случаях а) $k=1,\ q=1$; б) $k=2,\ q=1$; в) $k=1,\ q=2$.

169. Пусть $e_1'=2\ e_1+e_2+e_3,\ \ e_2'=e_1+e_2,\ \ e_3'=e_3$. Найти соответствующее преобразование кобазиса и, используя правила внешней алгебры, вычислить $e^{i'}\wedge e^{j'}$, $i'<j'$, и $e^{1'}\wedge e^{2'}\wedge e^{3'}$.

170. Пусть $e_1'=2\ e_1+e_2+e_3,\ \ e_2'=e_1+e_2,\ e_3'=e_3$. Используя соответствующее преобразование кобазиса (задача 169), написать разложения по новым базисным формам $e^{i_{1'}}\wedge\dots\wedge e^{i_{r'}}$, $i_{1'}<\ldots<i_{r'}$, и новым базисным тензорам $e^{i_{1'}}\otimes\dots\otimes e^{i_{r'}}$ следующих форм:

а) $\omega=2\ e^1\wedge e^2+e^2\wedge e^3-3\ e^1\wedge e^3$;

б) $\omega=4\ e^1\wedge e^2-5\ e^1\wedge e^3$;

в) $\omega=3\ e^1\wedge e^2\wedge e^3$;

г) $\omega=2\ \left(e^1\otimes e^2-e^2\otimes e^1\right)+4\ \left(e^3\otimes e^2-e^2\otimes e^3\right)$.

171. Используя соотношения Плюккера, доказать, что любой кососимметричный тензор типа $(0,2)$ в трехмерном пространстве является бивектором. Справедливо ли подобное утверждение в четырехмерном пространстве?

172. Доказать, что в n-мерном пространстве любой кососимметричный тензор типа $(0,n-1)$ является $(n-1)$-вектором.

173. Доказать, что если кососимметричный тензор F^{ij} является бивектором, то

$$F^{ij}F^{kl}+F^{ik}F^{lj}+F^{il}F^{jk}=0.$$

174. Пусть $\psi:\mathcal{L}_n\to\widetilde{\mathcal{L}_n}$ — гомоморфизм n-мерного пространства $\mathcal{L}_n$ в m-мерное пространство $\widetilde{\mathcal{L}_n}$; $(e_1,\dots,e_n)$ — базис в $\mathcal{L}_n$; $(\widetilde{e}_1,\dots,\widetilde{e}_m)$ — базис в $\widetilde{\mathcal{L}_n}$, $\Phi=(\varphi_i^\sigma)$ — матрица гомоморфизма: $\Psi\left(e_i\right)=\varphi_i^\sigma\,\tilde{e}_\sigma$. Показать, что для любого тензора $B\in\mathcal{T}_r\left(\tilde{\mathcal{L}_n}\right)$ с компонентами $B_{\sigma_1\dots\sigma_r}$

$$\left(\Psi^*B\right)_{i_1\dots i_r}=B_{\sigma_1\dots\sigma_r}\ \varphi_{i_1}^{\sigma_1}\dots\varphi_{i_r}^{\sigma_r}\qquad\begin{pmatrix}i_1,\dots,i_r=1,\dots,n\\ \sigma_1,\dots,\sigma_r=1,\dots,m\end{pmatrix}.$$

175. Пусть $\Psi:\mathcal{L}_n\to\widetilde{\mathcal{L}_n}$ — гомоморфизм n-мерного пространства $\mathcal{L}_n$ в m-мерное пространство $\widetilde{\mathcal{L}_\Updownarrow}$. Используя результаты задачи 174, найти Ψ^*B, если

а) $n=3$; $m=2$; $B=2\ \tilde{e}^1\otimes\tilde{e}^1+\tilde{e}^1\otimes\tilde{e}^2-3\ \tilde{e}^2\otimes\tilde{e}^1$; $\ \Phi=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&2\end{pmatrix}$;

б) $n=3$; $m=2$; $\ B=\tilde{e}^1+3\ \tilde{e}^2-\tilde{e}^3$; $\Psi e_1=\tilde{e}_1+\tilde{e}_2$, $\Psi e_2=\tilde{e}_2+\tilde{e}_3$,

$\Psi e_3 = 3\ \tilde{e}_3;$

в) $n = m = 3;\ \ B = 2\ \tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}^2 + 3\ \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^3 - \tilde{e}^2 \wedge \tilde{e}^3;\ \ \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

176. Доказать, что $\psi^* \left(\omega^1 \wedge \omega^2\right) = \left(\psi^* \omega^1\right) \wedge \left(\psi^* \omega^2\right).$

§ 7. Тензоры в (псевдо)евклидовом пространстве

1°. Е в к л и д о в о п р о с т р а н с т в о. *N-мерным вещественным евклидовым пространством E_n* называется n-мерное вещественное аффинное пространство,[3] в котором задана евклидова метрика, т. е. симметричный тензор $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$, удовлетворяющий *условию невырожденности*: $\det (g_{ij}) \neq 0$.

Значение тензора g на векторах $X, Y \in E_n$ называется *скалярным произведением* этих векторов и обозначается $\langle X, Y \rangle$:

$$\langle X, Y \rangle \equiv g\,(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j.$$

Метрика g определяет "длину" $|\langle X, Y \rangle|^{1/2}$ каждого вектора $X \in E_n$ и "косинус угла"

$$\frac{g\,(X, Y)}{|g\,(X, X)\, g\,(Y, Y)\,|^{1/2}}$$

между любыми двумя векторами $X, Y \in E_n$, для которых

$$g\,(X, X)\, g\,(Y, Y) \neq\ 0.$$

Если $g\,(X, Y) = 0$, то векторы X и Y называются *ортогональными.*

E_n называется *собственно евклидовым пространством* (или просто евклидовым пространством) и обозначается $\mathbf{R}^n$, если квадратичная форма $g_{ij} \xi^i \xi^j$ положительно определенная. В противном случае E_n называется *псевдоевклидовым пространством* и обозначается $\mathbf{R}^n_{p,q} \equiv \mathbf{R}^n_p$, где p и $q = n - p$ — положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы $g_{ij} \xi^i \xi^j$, определяющие *сигнатуру* $\sigma = p - q$ метрики g.

В дальнейшем для удобства будем полагать, что $\mathbf{R}^n_{n,0} \equiv \mathbf{R}^n$.

Метрика с сигнатурой, равной — 2, называется *лоренцевой.* Ненулевые векторы X в пространстве $R^n_{1,n-1}$ с лоренцевой метрикой g разделяются на *времениподобные векторы*, для которых $g\,(X, X) > 0$, *изотропные векторы*, для которых $g\,(X, X) = 0$, и *пространственноподобные векторы*, для которых $g\,(X, X) < 0$.

---

[3] Так как каждое аффинное пространство можно рассматривать как линейное пространство, то все результаты и определения, сформулированные в § 5, непосредственно распространяется на аффинные пространства.

За счет выбора подходящего базиса метрика пространства $\mathbf{R}^n_{p,q}$ всегда может быть приведена к *каноническому виду*

$$g_{ij} = diag(\underbrace{+1,\ldots,+1}_{\text{p раз}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{\text{q раз}}). \qquad (1)$$

Так как $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$, то для соответствующего базиса выполняются условия: $\langle e_i, e_i\rangle$ равно $+1$ или -1; $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ при $i \neq j$. Такой базис называется *ортонормированным базисом*, короче, *ортобазисом*, или *орторепером*.

Аффинная система координат в $\mathbf{R}^n$, состоящая из точки O (начала) и орторепера $(e_1, \ldots, e_n)$, называется прямоугольной декартовой системой координат, аффинные координаты точки $M \in \mathbf{R}^n$, определяемые как координаты радиус-вектора $\mathbf{OM}$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$, — прямоугольными декартовыми координатами этой точки.

Преобразование аффинной системы координат $\{O, e_i\} \to \{O', e'_i\}$ в $\mathbf{R}^n_{p,q}$, которое не меняет канонической формы (1) и, следовательно, переводит орторепер снова в орторепер, называется *движением*, а при неподвижном начале O — *вращением*.

2°. Опускание и поднятие индексов. Контравариантным метрическим тензором называется тензор $g^{ij} e_i \otimes e_j$, компоненты которого

$$g^{ij} = g^{ji} = \frac{A_{ij}}{\det(g_{ij})},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента g_{ij} в определителе $\det(g_{ij})$, являются элементами матрицы, обратной к матрице (g_{ij}), составленной из компонент (ковариантного) метрического тензора g:

$$g_{ik} g^{kl} = \delta^l_i.$$

Опускание (*контравариантного*) *индекса* k тензора B типа (r, s) $(s > 0)$ осуществляется путем умножения этого тензора на метрический тензор g и свертыванием по одному из индексов тензора g и индексу k тензора B. Полученный в результате этой операции тензор типа $(r+1, s-1)$ обозначается той же буквой, что и исходный тензор:

$$B^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \to B^{\cdot j_2 \ldots j_s}_{j_1 i_1 i_2 \ldots i_r} = g_{j_1 k} B^{k j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

Поднятие (*ковариантного*) *индекса* k тензора B типа (r, s) $(r > 0)$ выполняется путем умножения этого тензора на контравариантный метрический тензор g с последующим свертыванием по одному из индексов тензора g и индексу k тензора B. Полученный в результате этой операции тензор типа $(r-1, s+1)$ обозначается той же буквой, что и исходный тензор:

$$B^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \to B^{i_1 j_1 j_2 \ldots j_s}_{\cdot i_2 \ldots i_r} = g^{i_1 k} B^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{k i_2 \ldots i_r}.$$

Операции поднятия и опускания индексов обратимы, — подняв индекс, а затем отпустив его, получим исходный тензор.

Опускание индексов задает линейное отображение $X \to \mathcal{C}\,(g \otimes X)$ пространства векторов в пространство ковекторов: $\xi^i \to \xi_i = g_{ij}\xi^j$, а поднятие индексов — обратное отображение: $\xi_i \to \xi^i = g^{ij}\xi_j$. В орторепере в $\mathbf{R}^n$ вследствие равенств $g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$ разница между ковариантными и контравариантными индексами исчезает: $\xi^i = \xi_i$, $B^i_{jk} = B_{ijk}$, и т. д.

Линейный оператор P^i_j в E_n называется *симметричным* (*кососимметричным*), если тензор $P_{ij} = g_{ik}P^k_j$ симметричен (кососимметричен).

Собственными числами и собственными векторами тензора P_{ij} называются собственные числа и собственные векторы линейного оператора $P^i_j = g^{ik}P_{kj}$.

3°. Тензорные поля. Пусть T_pE_n — *касательное пространство* к E_n в точке p, т. е. n-мерное вещественное линейное пространство векторов, приложенных к точке $p \in E_n$, а $T^*_pE_n$ — сопряженное пространство, называемое *кокасательным пространством* к E_n точке p. Если в E_n задана аффинная координатная система $(O, e_1, \ldots, e_n)$, то совокупность векторов $e_1, \ldots, e_n$, приложенных к точке p с аффинными координатами $x^1, \ldots, x^n$, образует базис в касательном пространстве T_pE_n, а базисные 1-формы $e_1, \ldots, e_n$ (аргументы которых приложены к точке p) — кобазис в кокасательном пространстве $T^*_pE_n$. Для любого вектора $X \in T_pE_n$ выполняются равенства $e^i\,(X) = \xi^i$, где ξ^i — координаты вектора X в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Базисные векторы e_i принято обозначать через $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, а базисные 1-формы e^i — через dx^i. В этих обозначениях

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j \equiv g_{ij}dx^i dx^j.$$

Значение 1-формы dx^i на векторе X равняется $dx^i\,(X) = \xi^i$, в частности,

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = g_{ij}, \quad \langle dx^i, dx^j \rangle = g^{ij}$$

(скалярное произведение двух ковекторов u и v в E_n определяется формулой $\langle u, v\rangle = g^{ij}u_iv_j$).

Тензорным полем типа (r, s) на $\Omega \subset E_n$ называется отображение

$$B:\ p \to B\,(p)\,,$$

ставящее в соответствие каждой точке $p \subset \Omega$ тензор $B\,(p) \subset \mathcal{T}^s_r\,(T_pE_n)$ на касательном пространстве T_pE_n в точке $p = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$:

$$B\,(p) = B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}},$$

где $B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\ :\ \Omega \to \mathbf{R}$ — функции на Ω, называемые *компонентами*, или *координатами тензорного поля* B *по отношению к системе координат*

$x^1, \ldots, x^n$. Тензорное поле B называется m раз дифференцируемым, если его компоненты — m раз дифференцируемые функции на Ω.

Поле k-формы ω на $\Omega \subset E_n$

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \qquad (p \in \Omega)$$

называется *внешней дифференциальной формой степени* k, или *дифференциальной* k*-формой* (иногда просто k-формой) на Ω. Дифференциальная 0-форма совпадает с обычной функцией $f : \Omega \to \mathbf{R}$.

Алгебраические операции над тензорными полями на $\Omega \subset E_n$ совершаются в каждой точке $p \in \Omega$ по отдельности в соответствии с правилами тензорной алгебры, например,

$$(B \otimes F)(p) = B(p) \otimes F(p), \quad (u \wedge v)(p) = u(p) \wedge v(p),$$

и т. д.

177. Найти $g^{ij} g_{ij}$.

178. Доказать, что $\left[B^l_{jk} = g^{ei} B_{ijk}\right] \Rightarrow \left[g_{ie} B^e_{jk} = B_{ijk}\right]$.

179. Вычислить ковариантные компоненты векторов с координатами $(1,0,0,0)\,;(0,0,0,1)\,;(1,2,3,1)\,;(1,4,3,0)$

а) в E_4 с метрикой $g = 2\ dx^1 dx^2 - 2\ dx^3 dx^4$ (какова сигнатура этой метрики?);

б) в пространстве–времени $\mathbf{R}^4_1$ с координатами $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$ (c — скорость света) и *метрикой Минковского*

$$g = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2.$$

180. Показать, что в метрике Минковского (задача 179) $\varepsilon_{ijkl} = -\varepsilon^{ijkl}$ и вычислить $\varepsilon_{ijkl}\ \varepsilon^{ijkl}$. (См. задачу 167).

181. Для метрики Минковского (задача 179) доказать формулы:

а) $\varepsilon^{ijkl}\ \varepsilon_{pqrs} = -\ \delta^{ijkl}_{pqrs}$;   б) $\varepsilon^{ijkl}\ \varepsilon_{pqrl} = -\ \delta^{ijk}_{pqr}$;

в) $\varepsilon^{ijkl}\ \varepsilon_{pqkl} = -\ 2\ \delta^{ij}_{pq}$;   г) $\varepsilon^{ijkl}\ \varepsilon_{pjkl} = -\ 6\ \delta^{i}_{p}$;

д) $\varepsilon^{pqrs}\ a_{ip}\ a_{jq}\ a_{kr}\ a_{ls} = -\ \det(a_{ij})\ \varepsilon_{ijkl}$;

е) $\varepsilon^{ijkl}\ \varepsilon^{pqrs}\ a_{ip}\ a_{jq}\ a_{kr}\ a_{ls} = 24\ \det(a_{ij})$,

где

$$\delta^{i\ldots k}_{j\ldots l} \equiv \det \begin{pmatrix} \delta^i_j \ldots \delta^i_l \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta^k_j \ldots \delta^k_l \end{pmatrix} \qquad (i,j,k,l,p,q,r,s = 0,1,2.3).$$

(См. задачу 167).

182. Доказать следующие формулы в $\mathbf{R}^3$:

а) $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\lambda\mu\nu}$; б) $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\gamma} = \delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}$;

в) $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha}_{\lambda}$; г) $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6 \quad (\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu = 1,2,3)$.

(См. задачу 167).

183. Показать, что скалярное произведение $\langle X, Y\rangle$ в E_n равняется

$$g^{ij}\ \xi_i\ \eta_j = \xi_i\ \eta^i,$$

где ξ_i и η_i — ковариантные компоненты векторов X и Y. Выразить скалярное произведение двух векторов в метрике Минковского через координаты этих векторов.

184. Доказать, что вектор $X = \sqrt{3}\ \dfrac{\partial}{\partial x^0} + \sqrt{2}\ \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ является временноподобным, а вектор $Y = \sqrt{2}\ \dfrac{\partial}{\partial x^0} + \sqrt{3}\ \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ — единичным пространственноподобным вектором в $\mathbf{R}^4_1$. Найти $\langle X, Y\rangle$ и углы а) между векторами X и $\dfrac{\partial}{\partial x^0}$; б) между векторами Y и $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$.

185. Доказать, что следующие пары уравнений эквивалентны:

а) $\det\left(B_{ij} - \lambda\ g_{ij}\right) = 0 \ \Leftrightarrow \det\left(B^i_j - \lambda\ \delta^i_j\right) = 0$;

б) $B_{ij}\xi^j = \lambda\ g_{ij}\ \xi^j \ \Leftrightarrow \ B^i_j\ \xi^j = \lambda\ \xi^i$.

186. Показать, что если $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — собственные числа симметричного тензора B_{ij} в $\mathbf{R}^3$, то

а) $\sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i = g^{ij}\ B_{ij}$;

б) $\sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i^2 = B^{ij}\ B_{ij}$;

в) $\sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i^3 = B^{ik}\ B_{ke}\ B^e_i$.

Найти разложение тензора B_{ij} по ортам собственных векторов.

187. Доказать, что характеристический многочлен $\det\left(P^i_j - \lambda\ \delta^i_j\right)$ линейного оператора P^i_j в трехмерном пространстве может быть записан в виде

$$\det\left(P^i_j - \lambda\ \delta^i_j\right) = -\lambda^3 + J_1\ \lambda^2 - J_2\ \lambda + J_3,$$

где

$$J_1 = P^i_i, \quad J_2 = \frac{1}{2}[(P^i_i)^2 - P^k_i P^i_k], \quad J_3 = \det(P^i_j)$$

— инварианты линейного опреатора.

188. Найти закон преобразования $x, y, z \to x', y', z'$ координат вектора в $\mathbf{R}^3$:

а) при отображении одной, двух или трех координатных осей;

б) при вращении орторепера вокруг оси z на угол α;

в) при вращении орторепера, определяемом углами Эйлера α, β, γ.

Как в случае в) преобразуются циклические компоненты вектора (задача 110)?

У к а з а н и е. Перемножить матрицы, соответствующие вращениям вокруг оси z на угол α, вокруг линии узлов на угол β и вокруг оси z' на угол γ.

189. Доказать, что при замене базиса в E_n:

$$e_{i'} = A^i_{i'} e_i,$$

аффинные координаты $x^1, \ldots, x^n$ каждой точки $p \in E_n$ преобразуются по закону

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i,$$

где $(A^{i'}_i) = (A^i_{i'})^{-1}$.

190. Доказать, что если преобразование $e_{i'} = A^i_{i'} e_i$ в E_n — вращение, то $\det(A^i_{i'}) = \pm 1$.

191. Доказать, что преобразование $x^{i'} = L^{i'}_i x^i$, $e_{i'} = L^i_{i'} e_i$, где $(L^i_{i'})$ — матрица, обратная к матрице

$$(L^{i'}_i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ -i\gamma & -i\delta & i\alpha & i\beta \\ \alpha & \beta & -\gamma & -\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\beta & -i\bar\beta & \bar\alpha \\ \bar\beta & \bar\alpha & i\bar\alpha & -\bar\beta \\ \bar\gamma & \bar\delta & -i\bar\delta & \bar\gamma \\ \bar\delta & \bar\gamma & i\bar\gamma & -\bar\delta \end{pmatrix}$$

(черта означает комплексное сопряжение, α, β, γ и δ — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$), является вращением в пространстве Минковского $\mathbf{R}^4_1$ (*преобразование Лоренца*).

192. Показать, что преобразование (*буст*)

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \dfrac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad x^{1'} = \frac{x^1 - \dfrac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3$$

в пространстве Минковского $\mathbf{R}^4_1$ является преобразованием Лоренца (см. задачу 191), описывающим переход к штрихованной системе отсчета, движущейся со скоростью v в направлении оси x^1 исходной системы отсчета.

Найти соответствующий закон преобразования координат вектора, ковектора, симметричного тензора B^{ij} и кососимметричного тензора F_{ij}.

193. Найти матрицу преобразования Лоренца, состоящего из буста v_x в направлении оси x и буста v_y в направлении оси y. Как изменится эта матрица при изменении порядка следования бустов? (См. задачи 191, 192).

§ 8. Внешнее дифференциальное исчисление

В н е ш н и й д и ф ф е р е н ц и а л. *Внешним дифференциалом*, или *кограницей* дифференцируемой k-формы на Ω

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

называется дифференциальная $(k+1)$-форма на Ω

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} d\omega_{i_1\ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_0} dx^{i_0} \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^{i_0}}.$$

Дифференциальная форма, кограница которой равна нулю, называется *замкнутой дифференциальной формой,* или *коциклом.*

194. Показать, что операция *внешнего дифференцирования* (*взятия кограницы*) $d : \omega \to d\omega$ обладает свойствами:

1) внешний дифференциал k-формы ω есть $(k+1)$-форма $d\omega$;

2) $d\left(\omega^1 + \omega^2\right) = d\omega^1 + d\omega^2$;

3) Если ω^1 есть k-форма, то

$$d\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right) = \left(d\omega^1\right) \wedge \omega^2 + (-1)^k\, \omega^1 \wedge d\omega^2;$$

4) внешний дифференциал 0-формы f совпадает с обычным дифференциалом $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$;

5) $d \circ d \equiv d^2 = 0$.

195. Доказать, что свойства 1)—5) (задача 194) однозначно определяют оператор d, отсюда следует независимость операции внешнего дифференцирования от систем координат.

196. Доказать равенство

$$d\,(u \wedge v \wedge w) = (du) \wedge v \wedge w + (-1)^k\, u \wedge (dv) \wedge w + (-1)^{k+q}\, u \wedge v \wedge dw,$$

где u есть k-форма, v есть q-форма и w есть r-форма.

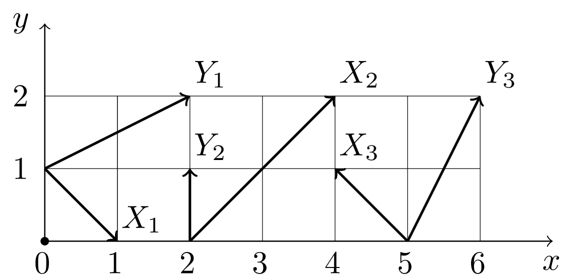

Рис. 1: К задаче 199 а).

197. Вычислить

а) значения 1-форм в $\mathbf{R}^2$:

$$\omega^1 = x\ y\ dx - y^2 dy, \quad \omega^2 = 2\ x^2 dx - 3\ x^3 dy,$$

на векторах $X_1 = (0, 1)$, $X_2 = (1, 0)$ в точке $M\,(1, 0)$;

б) значения 1-форм в $\mathbf{R}^3$:

$$u^1 = x\ dy + y\ dy - 2\ z\ dz, \quad u^2 = x^2 dx + x\ y\ dz, \quad u^3 = z\ dy - y\ dz,$$

на векторах $Y_1 = (0, 1, 1)$, $Y_2 = (3, 2, 0)$ в точке $M\,(0, 1, 0)$.

198. Найти $d\omega^1$, $d\omega^2$, du^1, du^2, du^3, а также формы $\omega^1 \wedge \omega^2$; $u^1 \wedge u^2$; $u^2 \wedge u^3$; $u^3 \wedge u^1$; $u^1 \wedge u^2 \wedge u^3$ и их кограницы для форм, указанных в задаче 197.

199. Вычислить

а) значения 2-форм в $\mathbf{R}^2$:

$$\omega^1 = x\ y\ dx \wedge dy, \quad \omega^2 = y^3 dy \wedge dx,$$

на парах векторов (X_α, Y_α), $\alpha = 1, 2$ (рис. 1).

б) значения 2-форм в $\mathbf{R}^3$:

$$u^1 = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + 3\ x\ dx \wedge dy,$$

$$u^2 = x\ dy \wedge dz + z\ dz \wedge dx + 3\ x\ dx \wedge dy,$$

на парах векторов $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, приложенных в точке $M\,(0, 0, 1)$.

Найти $d\omega^1$, $d\omega^2$, du^1, du^2, а также формы $\omega^1 \wedge \omega^2$, $u^1 \wedge u^2$ и их кограницы.

200. Вычислить значения 3-форм

$$\omega^1 = x\ y\ z\ dx \wedge dy \wedge dz, \qquad \omega^2 = 4\ x^2 y\ dx \wedge dy \wedge dz$$

на векторах $X_1 = (1,0,2)$, $X_2 = (1,1,1)$, $X_3 = (3,0,5)$ в точке $M\,(0,1,0)$.

Найти $d\omega^1, d\omega^2$ и $\omega^1 \wedge w^2$.

201. Доказать, что дифференцируемые k-формы на $\Omega \subset E_n$ образуют линейное пространство, k-коциклы — его подпространство, а дифференциалы $(k-1)$-форм — подпространство пространства k-коциклов.

202. Доказать, что для каждой дифференцируемой 0-формы f и любого векторного поля $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, определенных на $\Omega \subset E_n$, выполняется равенство

$$(df)(X) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv Xf.$$

203. Доказать, что для векторного поля $B = (P, Q, R)$ в $\mathbf{R}^3$ 1-форма ω^1, 2-форма ω^2 и 3-форма ω^3, определенные в точке $p \in \mathbf{R}^3$ формулами $\omega^1\,(X) = \langle B\,(p)\,, X\rangle$; $\omega^2\,(X, Y) = (B\,(p)\,, X, Y)$ (смешанное произведение) и $\omega^3\,(B\,(p)\,, X, Y) = (B\,(p)\,, X, Y)$ (*ориентированный объем параллелепипеда*, построенного на векторах $B\,(p)\,, X, Y \in T_p\mathbf{R}^3$), могут быть записаны в следующем виде:

$$\omega^1 = P\ dx + Q\ dy + R\ dz,$$

$$\omega^2 = P\ dy \wedge dz + Q\ dz \wedge dx + R\ dx \wedge dy,$$

$$\omega^3 = dx \wedge dy \wedge dz.$$

204. Для каждой k-формы ω, заданной своими компонентами $\omega_{i_1 \dots i_k}$ в n-мерном пространстве с метрикой g_{ij}, определим операцию $* : \omega \to *\,\omega$, сопоставляющую k-форме ω внешнюю форму степени $n-k$:

$$(*\,\omega)_{i_{k+1} \dots i_n} = \frac{1}{k!} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\,\varepsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \omega^{i_1 \dots i_k},$$

где

$$\omega^{i_1 \dots i_k} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \omega_{j_1 \dots j_k}.$$

Показать, что

а) для любой 1-формы $\omega = P\ dx + Q\ dy + R\ dz$ и 0-формы f в $\mathbf{R}^3$

$$*\,\omega = P\ dy \wedge dz + Q\ dz \wedge dx + R\ dx \wedge dy, \quad *\ (*\,\omega) = \omega,$$

$$*f = f dx \wedge dy \wedge dz; \quad *\ (f\ dx \wedge dy \wedge dz) = f,$$

в частности, $*\ dx = dy \wedge dz$; $*\ dy = -dx \wedge dz$; $*\ dz = dx \wedge dy$;

б) для k-форм u и v в $\mathbf{R}^n$

$$u \wedge *\ v = \frac{1}{k!} u_{i_1 \dots i_k} v^{i_1 \dots i_k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

205. Трехмерные векторы напряженностей электрического поля $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$ и магнитного поля $\mathbf{H} = (H^1, H^2, H^3)$ связаны со *скалярным потенциалом* φ и *векторным потенциалом* $\mathbf{A}$ электромагнитного поля следующими формулами:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

(c — скорость света). Показать, что *тензор электромагнитного поля* (*тензор Максвелла*)

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} A_j - \frac{\partial}{\partial x^j} A_i,$$

где $(A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (\varphi, \mathbf{A})$ есть 4-*вектор-потенциал* в $\mathbf{R}^4_1$, может быть записан в виде 2-формы

$$F = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{\alpha=1}^{3} E^\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha - H^1 dx^2 \wedge dx^3 - H^2 dx^3 \wedge dx^1 - H^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Найти F^{ij} и F^i_j.

206. Для любой 2-формы F в $\mathbf{R}^4_1$ псевдотензор $*F$, *дуальный* к тензору F, определяется формулой

$$(*F)_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{|\det(g_i j)|}\varepsilon_{iklm} F^{lm} \qquad (F^{lm} = g^{li} g^{mk} F_{ik}).$$

Доказать, что квадрат оператора $*$ равен -1, т. е. $*(*F) = -F$. (См. задачу 167).

207. Доказать, что для тензора Максвелла F (задача 205) переход к дуальному псевдотензору (задача 206) сопровождается преобразованием $\mathbf{E} \to -\mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to \mathbf{E}$:

$$*F = -\sum_{\alpha=1}^{3} H_\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha - E_1 dx^2 \wedge dx^3 - E_2 dx^3 \wedge dx^1 - E_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

208. Найти закон преобразования компонент тензора Максвелла (задача 205) при бустах (задача 192). Вывести формулы преобразования компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

209. Доказать, что

а) характеристический многочлен $\det(F_{ij} - \lambda g_{ij})$ тензора Максвелла F_{ij} (задача 205) имеет вид

$$-\lambda^4 + \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2\right)\lambda^2 + \langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle^2;$$

б) величины $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2$ и $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$ являются инвариантами электромагнитного поля.

У к а з а н и е. Вычислить $F_{ij}F^{ij}$ и $(*F_{ij})\,F^{ij}$.

210. Доказать, что

а) при $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle \neq 0$ всегда найдется преобразование Лоренца, переводящее $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в параллельные и отличные от нуля векторы;

б) при $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$ и $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 > 0$ существует преобразование Лоренца, обращающее в нуль электрическое поле ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$), а при $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$ и $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 < 0$ — преобразование Лоренца, обращающее в нуль магнитное поле ($\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{E} \neq 0$);

в) при $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$ и $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = 0$ векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и имеют равные длины.

Для случаев а), б) и в) указать канонические формы тензора Максвелла F_{ij} (задача 205).

211. Доказать, что след T_i^i *тензора энергии-импульса* электромагнитного поля

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}(-g^{lm}F_{il}F_{km} + \frac{1}{4}\,g_{ik}F_{lm}F^{lm})$$

равен нулю.

212. Выразить *плотность энергии* $W = T_{00}$ электромагнитного поля F_{ij}, *вектор Пойнтинга* $S^\alpha = c\,T^{0\alpha}$ и *максвелловский тензор напряжений* $T^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, через векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

213. Найти канонические формы (T_{ij}) тензора энергии-импульса электромагнитного поля для случаев а), б) и в) задачи 210.

214. Доказать, что *первая пара уравнений Максвелла*:

$$\operatorname{rot}\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}\,\mathbf{H} = 0,$$

может быть записана в виде

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ji}}{\partial x^k} = 0,$$

или

$$dF = 0,$$

где F — тензор Максвелла (задача 205); *вторая пара уравнений Максвелла*:

$$\operatorname{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

записывается в виде

$$\frac{\partial F^{lk}}{\partial x^k} = -4\frac{\pi}{c}j^l,$$

или

$$\delta F \equiv *\,d\,\,*F = \frac{4\pi}{c}j,$$

где $j = \left(\rho c, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3\right) = (\rho c, \mathbf{j})$ — четырехмерный вектор плотности тока, ρ — плотность электрического заряда, $\mathbf{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right)$ — его скорость в трехмерном пространстве.

§ 9. Криволинейные координаты

1°. Дифференциал отображения. Если $x^1, \ldots, x^n$ — аффинные координаты в E_n, $y^1, \ldots, y^m$ — аффинные координаты в E'_m и $f : U \to E'_m$ — дифференцируемое отображение области $U \subset E_n$ в E'_m, заданное уравнениями

$$y^\sigma = f^\sigma\left(x^1, \ldots, x^n\right), \qquad \sigma = 1, \ldots, m,$$

то *дифференциалом отображения* f в точке $p \in U$ называется линейное отображение $f_* :\ T_p E_n \to T_{f(p)} E'_m$, сопоставляющее каждому вектору

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p E_n$$

вектор

$$f_* X = \eta^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \in T_{f(p)} E'_m$$

с компонентами

$$\eta^\sigma = \xi^i \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Отображение f индуцирует (линейное) отображение f^* ковариантных тензорных полей B на $f(U)$ в тензорные поля того же типа на U по формуле

$$f^* B\left(X_1, \ldots, X_r\right)\Big|_p = B\left(f_* X_1, \ldots, f_* X_r\right)\Big|_{f(p)} \in \mathcal{T}_r\left(T_p E_n\right)$$

$$\left(p \in U; \quad X_1, \ldots, X_r \in T_p E_n; \quad B \in \mathcal{T}_r\left(T_{f(p)} E'_m\right)\right)$$

и (линейное) отображение контравариантных тензоров F из U в $f(U)$ по формуле

$$f^* F\left(u^1, \ldots, u^s\right)\Big|_{f(p)} = F\left(f^* u^1, \ldots, f^* u^s\right)\Big|_p \in \mathcal{T}^s\left(T_{f(p)} E'_m\right)$$

$$\left(p \in U; \quad u^1, \ldots, u^s \in T^*_{f(p)} E'_m, \quad f^* u^1, \ldots, f^* u^s \in T^*_p E_n, \quad F \in \mathcal{T}^s\left(T_p E_n\right)\right)$$

(см. § 2, п. 3°).

2°. Криволинейные координаты. Если $m = n$ и отображение $f : u \to f(u)$ *диффеоморфно*, т. е. биективно и дифференцируемо вместе со своим обратным отображением f^{-1}, то координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки $p \in U$ называются *криволинейными координатами* точки $f(p) = \left(y^1, \ldots, y^n\right) \in f(U) \subset E'_n$, а выражение

$$\left(B^{\nu_1, \ldots, \nu_s}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_r} \circ f\right) f^*\left(dy^{\sigma_1}\right) \otimes \cdots \otimes f^*\left(dy^{\sigma_r}\right) \otimes f_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right) \otimes \cdots \otimes f_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_s}}\right)\Big|_p =$$

$$B^{\nu_1,\ldots,\nu_s}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}(f(p))\frac{\partial y^{\sigma_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\sigma_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{\nu_s}}\Big|_p dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}$$

— записью тензорного поля B типа (r,s) на $f(U)\subset E'_n$ в криволинейных координатах $x^1,\ldots,x^n$.

3°. Преобразование координат. При переходе от одной системы криволинейных координат $x^1,\ldots,x^n$ к другой системе криволинейных координат $x^{1'},\ldots,x^{n'}$ в области $\Omega\subset E_n$ локальные базисы $(\partial/\partial x^i)$ и кобазисы (dx^i) (т. е. базисы в касательных и кокасательных пространствах) преобразуются в каждой точке $M\in\Omega$ по правилам

$$dx^{i'}=A^{i'}_i\,dx^i,\qquad \frac{\partial}{\partial x^{i'}}=A^i_{i'}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

где

$$\left(A^{i'}_i\right)=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$$

— матрица Якоби n функций $x^{i'}=x^{i'}\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, а

$$\left(A^i_{i'}\right)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$$

— обратная матрица. Отсюда следует закон преобразования компонент тензорного поля при переходе от одной (криволинейной) системы координат к другой:

$$B^{j'_1\cdots j'_s}_{i'_1\cdots i'_r}=B^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial x^{i'_r}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_s}}{\partial x^{j_s}},$$

и закон преобразования компонент поля относительного тензора (псевдотензора) веса N:

$$B^{j'_1\cdots j'_s}_{i'_1\cdots i'_r}=|J|^N B^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial x^{i'_r}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_s}}{\partial x^{j_s}},$$

где $J=\det\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ — якобиан замены координат.

Система криволинейных координат $x^1,\ldots,x^n$ в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ называется *ортогональной*, если в этой системе координат метрика принимает вид

$$g=H_1^2\left(dx^1\right)^2+\cdots+H_n^2\left(dx^n\right)^2\equiv H_i^2\left(dx^i\right)^2,$$

где $H_i:\Omega\to\mathbf{R}$ — функции на Ω, называемые *коэффициентами Ламе*.

4°. (Псевдо) риманова метрика. В области Ω пространства $\mathbf{R}^n$ можно задать (псевдо)риманову метрику, определив ее как поле симметричного невырожденного тензора $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ типа $(2,0)$ $(g_{ij}=g_{ji}$, $\det(g_{ij})\neq 0)$. Тензор $g(p)$ задает в касательном пространстве $T_p\mathbf{R}^n$ каждой точки $p \in \mathbf{\Omega}$ (псевдо)евклидову метрику, определяющую длины векторов и углы между ними. Метрику g часто записывают в виде

$$ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \equiv g_{ij} dx^i dx^j.$$

Это обозначение указывает на то, что вдоль дифференцируемого пути (т. е. дифференцируемого отображения интервала $[a, b] \subset \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^n$) g равно квадрату дифференциала длины дуги ds.

215. Пусть $U \subset E_n$, $f : U \to E'_m$, g есть 0-форма (функция) на $f(U)$, а ω^1, ω^2 и ω — дифференциальные формы на $f(U)$. Доказать, что индуцированное отображение f^* обладает свойствами:

$$1)\ f^*(d\,y^\sigma) = \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^i} dx^i = d\,f^\sigma; \qquad 2)\ f^*\left(\omega^1 + \omega^2\right) = f^*\left(\omega^1\right) + f^*\left(\omega^2\right);$$

$$3)\ f^*\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right) = \left(f^*\omega^1\right) \wedge f^*\omega^2; \quad 4)\ f^*(g) = g \circ f;$$

$$5)\ f^*(g\,\omega) = (g \circ f)\, f^*\omega; \qquad 6)\ f^*(d\,\omega) = d\,(f^*\omega)\,.$$

216. Доказать, что если все компоненты тензорного поля равны нулю в одной системе координат, то они будут равны нулю в любой другой системе координат.

217. Доказать, что если принять символы Кронекера δ^i_j за компоненты тензорного поля типа $(1, 1)$ в некоторой системе координат, то они будут компонентами этого поля в любой другой системе координат. Верно ли подобное утверждение для тензора $\delta^{i\ldots j}_{k\ldots l}$ (см. задачу 181)?

218. Доказать, что система *полярных координат* r, φ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad 0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

на плоскости $\mathbf{R}^2$, а также система *сферических координат* ρ, φ, θ:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta$$

$$(0 \le \rho < +\infty, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ 0 \le \theta \le \pi),$$

и система *цилиндрических координат* r, φ, z:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

$$(0 \le \rho < +\infty, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \ -\infty < z < +\infty),$$

в пространстве $\mathbf{R}^3$ являются ортогональными. Найти их коэффициенты Ламе.

219. Доказать, что в ортогональной системе координат $g^{ii} = g^{-1}_{ii}$ $(g^{ij} = g_{ij} = 0$ при $i \ne j)$.

220. Доказать, что при замене координат $x^{i'} = x^{i'}\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ в n-мерном пространстве компоненты n-формы ω преобразуются по формуле

$$\omega_{1\ldots n} = \omega_{1'\ldots n'}\ J,$$

где

$$J = \frac{\partial(x^{1'}, \ldots, x^{n'})}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}$$

— якобиан замены.

221. Доказать, что определитель метрического тензора $\det(g_{ij})$ в n-мерном пространстве является псевдоскаляром веса -2 и при замене координат $x^{i'} = x^{i'}\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ преобразуется по закону

$$\det(g_{i'j'}) = J^{-2}\ \det(g_{ij}),$$

где $J = \dfrac{\partial(x^{1'}, \ldots, x^{n'})}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}$ — якобиан замены.

222. Доказать, что полностью кососимметричный *символ Леви–Чивита*

$$e_{i_1\ldots i_n} \equiv \sqrt{|\det(g_{ij})|}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$$

в $n-$мерном пространстве является тензором относительно замен координат с положительным якобианом.

223. В области $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 > 0$ (внутренность конуса $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$) пространства $\mathbf{R}^3_1$ с метрикой

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2$$

ввести *псевдосферические координаты* ρ, χ, φ:

$$x^0 = \rho\ \operatorname{ch}\chi, \quad x^1 = \rho\ \operatorname{sh}\chi\ \ \cos\varphi, \quad x^2 = \rho\ \operatorname{sh}\chi\ \sin\varphi$$

$$(-\infty < \rho < \infty, \quad -\infty < \chi < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi).$$

224. Как задать псевдосферические координаты в области $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2 < 0$ (внешность конуса $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$) пространства $\mathbf{R}^3_1$. (См. задачу 223).

225. Найти преобразование координат $x = x\,(u, v)$, $t = t\,(u, v)$, переводящее метрику

$$ds^2 = dt^2 - dx^2$$

в метрику

$$ds^2 = v^2du^2 - dv^2.$$

226. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в E_n, $y^1, \ldots, y^m$ — координаты в E'_m и $f:\ U \to E'_m$ — дифференцируемое отображение области $U \subset E_n$ в E'_m;

пусть F — тензорное поле типа $(0, r)$ на U, а B — тензорное поле типа $(r, 0)$ на $f\,(U)$. Доказать, что компоненты индуцированных тензорных полей f^*B в точке $p \in U$ и f_*F в точке $f\,(p) \in f\,(U)$ определяются формулами:

$$(f^*B)_{i_1\ldots i_r}\Big|_p = B_{\sigma_1\ldots\sigma_r}\frac{\partial y^{\sigma_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\sigma_r}}{\partial x^{i_r}}\Big|_{f(p)},$$

$$(f_*F)^{\sigma_1\ldots\sigma_r}\Big|_{f(p)} = F^{i_1\ldots i_r}\frac{\partial y^{\sigma_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\sigma_r}}{\partial x^{i_r}}\Big|_p$$

$$(i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n; \quad \sigma_1, \ldots, \sigma_r = 1, \ldots, m).$$

227. Найти *индуцированную метрику* на поверхности в $\mathbf{R}^3$, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x\,(u, v)\,, \quad y = y\,(u, v)\,, \quad z = z\,(u, v)\,, \qquad (u, v) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3,$$

определяющими отображение $f:\ \Omega \to \mathbf{R}^3$.

Указание. Построить индуцированное тензорное поле

$$f^*g = E\ du^2 + 2\ F\ du\ dv + G\ dv^2$$

для евклидовой метрики $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Какой вид имеют *коэффициенты Гаусса* E, F, и G, если поверхность задана а) уравнением $z = \varphi\,(x, y)\,;$ б) уравнением $\Phi\,(x, y, z) = 0$?

228. Найти:

а) метрику на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в $\mathbf{R}^3$;

б) метрику на цилиндре $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbf{R}^3$.

Записать найденные метрики в сферических и цилиндрических координатах соответственно.

229. Найти индуцированную метрику на поверхности в $\mathbf{R}^n$, заданной параметрическими уравнениями $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$.

230. Доказать, что квадратичная форма

$$d\sigma^2 = R^2(d\alpha^2 + \sin^2\alpha(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \qquad (R = \mathrm{const})$$

определяет метрику на *гиперсфере*

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^3 + (x^3)^2 = R^2$$

в $\mathbf{R}^n$ с метрикой

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

231. Доказать, что если $f^1, \ldots, f^k$ — дифференцируемые 0-формы на $\Omega \subset E_n$, то в некоторой системе координат в E_n k-форма $df^1 \wedge \ldots \wedge df^k$ может быть представлена в виде

$$df^1 \wedge \ldots \wedge df^k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k}\frac{\partial(f^1, \ldots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

232. Доказать, что в новых координатах y^1, y^2, y^3 в E_3 2-форма

$$\omega = \omega_1\ dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2\ dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3\ dx^1 \wedge dx^2$$

имеет вид

$$\omega = \widetilde{\omega}_1\ dy^2 \wedge dy^3 + \widetilde{\omega}_2\ dy^3 \wedge dy^1 + \widetilde{\omega}_3\ dy^1 \wedge dy^2,$$

где

$$\widetilde{\omega}_3 = \omega_1 \frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2)} + \omega_2 \frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(y^1, y^2)} + \omega_3 \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(y^1, y^2)}, \qquad \text{и т. д.}$$

233. Записать 2-форму $\sqrt{x^2 + y^2}\ dx \wedge dy$ в полярных координатах.

234. Записать 1-форму

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz,$$

2-форму

$$\omega_1 dy \wedge dz + \omega_2 dz \wedge dx + \omega_3 dx \wedge dy$$

и 3-форму

$$v\ dx \wedge dy \wedge dz$$

в $\mathbf{R}^3$ а) в сферических координатах; б) в цилиндрических координатах.

235. Установить связь между ковариантными и контравариантными компонентами векторного поля на $\Omega \in \mathbf{R}^2$ а) в прямоугольной декартовой системе координат; б) в полярной системе координат.

236. Установить связь между ковариантными и контравариантными компонентами векторного поля на $\Omega \in \mathbf{R}^3$ а) в прямоугольной декартовой системе координат; б) в сферической системе координат; в) в цилиндрической системе координат.

237. Пусть $g = H_1^2(dx^1)^2 + H_2^2(dx^2)^2 + H_3^2(dx^3)^2$ — метрика в $\mathbf{R}^3$. Найти значения форм dx^1, dx^2, dx^3 на ортах e_1, e_2, e_3 базисных векторов $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \dfrac{\partial}{\partial x^3}$. Рассмотреть цилиндрическую и сферическую системы координат.

У к а з а н и е. $e_i = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

238. В общем случае нельзя определить индуцированное отображение $f_*\colon B \to f_* B$ контравариантных тензорных полей на $U \subset E_n$ в контравариантные тензорные поля на $f(U) \subset E'_m$. Почему? Когда это возможно?

§ 10. Связность. Ковариантное дифференцирование

1°. С к о б к а Л и. *Скобкой Ли*, или *произведением Ли* двух дифференцируемых векторных полей $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ и $Y = \eta^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$, заданных на открытом подмножестве $\Omega \subset E_n$, называется векторное поле

$$[X, Y](p) = X(p)Y - Y(p)X = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\Big|_p \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad p \in \Omega.$$

2°. С в я з н о с т ь. *Линейной связностью,* или *ковариантной производной* на E_n называется отображение $\nabla : (X, Y) \to \nabla(X, Y) \equiv \nabla_X Y$, которое сопоставляет каждой упорядоченной паре (X, Y) дифференцируемых векторных полей на E_n векторное поле $\nabla_X Y$, называемое *ковариантной производной* от Y в направлении X по отношению к линейной связности ∇, и обладает свойствами:

1) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$;

2) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$;

3) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$;

4) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

где f — функция на E_n. Величины Γ^k_{ij}, определенные формулой

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma^k_{ij} X_k \qquad \left(X_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

называются *компонентами связности*, или *коэффициентами связности* ∇ относительно координат $x^1, \ldots, x^n$.

3°. К о в а р и а н т н а я п р о и з в о д н а я. Ковариантная производная произвольных дифференцируемых тензорных полей определяется следующими правилами:

1) если B — тензорное поле типа (r, s), то ∇B — тензорное поле типа $(r + 1, s)$;

2) ∇ — линейное отображение, коммутирующее со свертыванием;

3) для произвольных тензорных полей B, F выполняется *правило Лейбница*:

$$\nabla(B \otimes F) = (\nabla B) \otimes F + B \otimes \nabla F;$$

4) $\nabla f = d\, f$ для любой функции f.

Компоненты ∇B равны

$$(\nabla_{X_k} B)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} = \frac{\partial}{\partial x^k} B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} + \Gamma^{j_1}_{kh} B^{h j_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} + \cdots + \Gamma^{j_s}_{kh} B^{j_1\ldots j_{s-1} h}_{i_1\ldots i_r} -$$

$$-\Gamma^h_{k i_1} B^{j_1\ldots j_s}_{h i_2\ldots i_r} - \cdots - \Gamma^h_{k i_r} B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1} h} \equiv B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r, k};$$

для векторного поля $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$$\nabla_X B = \xi^k \nabla_{X_k} B.$$

Производной тензорного поля B типа (r,s) *вдоль кривой* $\gamma : [a,b] \to E_n$, заданной уравнениями $x^i = x^i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, называется тензорное поле $\dfrac{DB}{\partial t} \equiv \nabla_X B$ с компонентами

$$B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r;h} \frac{dx^h}{dt},$$

где

$$X = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\gamma$$

— касательный вектор к кривой γ.

Говорят, что тензор B *параллельно переносится* вдоль кривой γ, если $\dfrac{DB}{\partial t} = 0$.

4°. Геодезическая. Кривая γ называется *геодезической,* если ее касательный вектор переносится параллельно вдоль нее самой:

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\gamma = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\gamma \Leftrightarrow \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{,k} \frac{dx^k}{dt} = \lambda \frac{dx^i}{dt}.$$

Если в последнем уравнении $\lambda = 0$, то параметр t называется *аффинным.*

5°. Связность Леви—Чивита. В пространстве E_n с метрическим тензором g_{ij} существует только одна линейная связность, удовлетворяющая условиям:

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$
$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y],$$

для всех дифференцируемых векторных полей X, Y, Z на E_n. Такая связность называется *связностью Леви—Чивита,* а ее компоненты

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \equiv g^{kl}\Gamma_{l,ij}$$

называются *символами Кристоффеля второго рода*, в отличие от *символов Кристоффеля первого рода* $\Gamma_{l,ij}$ метрики g_{ij}.

239. Доказать, что $[X_i, Y_j] = 0$, где $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $i, j = 1,\ldots,n$.

240. Вывести *формулу преобразования компонент связности* при замене координат $(x^i) \to (x^{i'})$:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}\right),$$

доказывающую не тензорный характер объекта связности.

241. Доказать, что компоненты тензора кручения T связности ∇, определенного равенством

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

имеют вид

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$$

242. Доказать, что разность $\Gamma^i_{jk} - \widehat{\Gamma}^i_{jk}$, где Γ^i_{jk} и $\widehat{\Gamma}^i_{jk}$ — компоненты двух различных связностей в E_n, является тензором.

243. Доказать, что $\Gamma^i_{jk} = dx^i(\nabla_{X_j} X_k)$.

244. Записать в явном виде: а) $\xi^i{}_{,k}$; б) $\xi_{i,k}$; в) $B^{ij}{}_{,k}$; г) $B^i{}_{j,k}$.

245. Доказать равенство

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle = \frac{1}{2}(X_i \langle X_j, X_k \rangle + X_j \langle X_k, X_i \rangle - X_k \langle X_i, X_j \rangle).$$

246. Доказать, что тензор δ^i_j *ковариантно постоянен*, т. е. $\delta^i_{j,k} = 0$.

247. Доказать, что метрический тензор g_{ij} ковариантно постоянен:

$$g_{ij,k} \equiv 0$$

(*тождество Риччи*).

248. Вывести соотношение

$$Z\langle X,Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$

и доказать, что оно равносильно тождеству Риччи: $\nabla g = 0$.

249. Выразить $\xi_{i,j} + \xi_{j,i}$ через компоненты метрического тензора и их частные производные.

250. Используя закон преобразования компонент связности, записать символы Кристоффеля (псевдо)евклидовой метрики в криволинейных координатах.

251. Вычислить символы Кристоффеля евклидовой метрики в $\mathbf{R}^2$ в полярных координатах.

252. Вычислить символы Кристоффеля евклидовой метрики в $\mathbf{R}^3$ в цилиндрических координатах.

253. Вычислить символы Кристоффеля евклидовой метрики в $\mathbf{R}^3$ в сферических координатах.

254. Найти символы Кристоффеля диагональной метрики ($g_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

255. Доказать, что уравнение геодезической $x^i = x^i(\tau)$, отнесенной к аффинному параметру τ, имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0.$$

256. Доказать, что геодезическими на сфере радиуса a в $\mathbf{R}^3$ являются круги радиуса a, и только они.

257. Найти все геодезические на плоскости Лобачевского L^2:

$$ds^2 = (dr)^2 + \operatorname{sh}^2 \frac{r}{R^0}(d\varphi)^2.$$

258. Уравнение движения точечного электрического заряда в поле магнитного полюса имеет вид

$$\mathbf{r} = a\frac{\mathbf{r} \times \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{|\mathbf{r}|^3} \qquad (a = \mathrm{const}).$$

Доказать, что траектория заряда является геодезической линией кругового конуса.

259. Доказать равенство

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{|\det(g_{ij})|}}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{|\det(g_{ij})|}g^{ik}).$$

260. Доказать равенство

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\frac{\partial}{\partial x^k}\det(g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln(\sqrt{\det(g_{ij})}).$$

261. Найти коэффициенты связности первого рода $\Gamma_{i,jk}$ и все времениподобные геодезические для двумерной метрики

$$ds^2 = \frac{dx^2 - dt^2}{t^2}.$$

262. Вычислить компоненты связности Леви—Чивита метрики

$$ds^2 = e^{2\ \alpha(r,t)}dt^2 - e^{2\ \beta(r,t)}dr^2 - e^{2\ \nu(r,t)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

263. Записать следующие выражения в безиндексных обозначениях:

а) $U_{i,j}\ U^i\ U^j$;

б) $U^i{}_{,j}Y^j - Y^i{}_{,j}\ U^j$;

в) $B_{ij,k}\ U^i\ Y^j\ Z^k$;

г) $U^{i,j}\ Y_{j,k}\ Z^k$;

д) $U^i{}_{,jk}\ Y^j\ Y^k +\ U^i{}_{,j}\ Y^j{}_{,k}\ Y^k - Y^i{}_{,j}\ U^j{}_{,k}\ Y^k$.

264. Доказать, что в ортогональных координатах q^1, q^2, q^3 в $\mathbf{R}^3$ с метрикой $g = H_1^2(dq^1)^2 + H_2^2(dq^2)^2 + H_3^2(dq^3)^2$ справедливы равенства

$$\triangle u = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q^l}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{lj}\frac{\partial u}{\partial q^j}\right) =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q^3} \right) \right).$$

265. Доказать, что в ортогональных координатах q^1, q^2, q^3 в $\mathbf{R}^3$

$$(\mathrm{rot}\ \mathbf{a})^{\widehat{i}} = \frac{H_i}{\sqrt{\det(g_{hl})}} \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} a_{k,j} = \frac{H_i}{H_1 H_2 H_3} \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial q^j} (H_k\ a_{\widehat{k}}),$$

здесь $a^{\widehat{i}} = a_{\widehat{i}} = H_i a^i = \frac{1}{H_i} a_i$ — компоненты вектора $\mathbf{a}$ в "физическом" орторепере $\left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right)$ (не суммировать по i).

266. Доказать, что в ортогональных координатах q^1, q^2, q^3 в $\mathbf{R}^3$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} (\sqrt{\det(g_{ij})}\ a^l)_{,l} =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} (H_2\ H_3\ a_{\widehat{1}}) + \frac{\partial}{\partial q^2} (H_3\ H_1\ a_{\widehat{2}}) + \frac{\partial}{\partial q^3} (H_1\ H_2\ a_{\widehat{3}}) \right),$$

где $a^{\widehat{i}}$ — компоненты вектора $\mathbf{a}$ в "физическом" орторепере (см. задачу 259).

267. Найти выражения $\triangle u$ и div $\mathbf{a}$ в полярных координатах в $\mathbf{R}^2$.

268. Найти выражения $\triangle u$, rot $\mathbf{a}$ и div $\mathbf{a}$ в цилиндрических координатах в $\mathbf{R}^3$.

269. Найти выражения $\triangle u$, rot $\mathbf{a}$ и div $\mathbf{a}$ в сферических координатах в $\mathbf{R}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М., 1977.

[2] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. *Сборник задач по электродинамике.* — М.: ФМ, 1962.

[3] Будак Б. М., Фомин С. В. *Кратные интегралы и ряды.* — М., 1965.

[4] Борисенко А. И. , Тарапов И. Е. *Векторный анализ и начала тензорного исчисления.* — Харьков: Изд. ХГУ, 1978.

[5] Мак-Коннел А. Дж. *Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике, физике.* — М.: ФМ, 1963.

[6] Маделунг Э. *Математический аппарат физики.* — М.: ФМ, 1961.

[7] Аминова А. В. *Задачи и упражнения по векторному и тензорному анализу.* — Казанский ун-т, Физический фак-т., 1980.

[8] Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* — М., 1967.

[9] Ефимов Н. В. *Введение в теорию внешних форм.* — М., 1977.

[10] Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Линейная алгебра.* — М., 1974.

[11] М. М. Постников. *Линейная алгебра и дифференциальная геометрия.* — М.: Наука, 1979.

[12] Широков П. А. *Тензорное исчисление.* — Казань: Изд. КГУ, 1961.

[13] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия.* — М., 1979.

[14] Шварц Л. *Анализ.* — М.: Мир, 1972.

[15] Лайтман А, Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. *Сборник задач по теории относительности и гравитации.* — М., 1979.

[16] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* — М., 1971.

[17] Хокинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства—времени.* — М., 1977.

[18] Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry* – V. 1. Int. Publ. New-York–London–Sydney, 1969 (Пер. на рус. яз.: К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981, Т. 1., Т. 2).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Аминова Ася Васильевна

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ
АНАЛИЗУ

Подписано в печать 26.05.2020 г.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат бум. 60x84 1/16. Гарнитура Book Antiqua. Усл. печ. л. 3,48.
Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 36 экз. Заказ 190/12

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии Издательства
Казанского университета

420008, Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
Тел. (843)233-73-59, 233-73-28