Казанский федеральный университет

Е.М. Карчевский

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Упражнения к лекциям

Казань
2024

Оглавление

1. Лекция (евклидовы пространства — 1)

Глава 7. Евклидовы пространства

§ 7.1. Евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/SAjhxgxcGQYBlg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/TT2UShIGf5xEVw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §1

Упражнение 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{1.1}$$

Это, так называемое, *стандартное скалярное произведение*. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

Решение. 1) Ясно, что первая аксиома имеет место:

$$(x,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, а равенства $(x,x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны.

2) Вторая аксиома также справедлива. Действительно,

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = (y,x)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3) Проверим справедливость третьей аксиомы:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta y_k) z_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k z_k = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$$

для любых x, y, $z \in \mathbb{R}^n$ и любых α, $\beta \in R$.

Упражнение 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ также можно превратить в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k y_k, \tag{1.2}$$

где ρ_1, ρ_2, $\ldots$, ρ_n — заданные положительные числа. Это, так называемое, *скалярное произведение с весами.* Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

Решение. 1) Ясно, что первая аксиома имеет место:

$$(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k^2 \geqslant 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, а равенства $(x,x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны.

2) Вторая аксиома также справедлива. Действительно,

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \rho_k y_k x_k = (y,x)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3) Проверим справедливость третьей аксиомы:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k (\alpha x_k + \beta y_k) z_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \rho_k y_k z_k = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$$

для любых x, y, $z \in \mathbb{R}^n$ и любых α, $\beta \in R$.

Упражнение 3. Пространство $\mathbb{C}^n$ превращается в комплексное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{C}^n$, например, по формуле

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k, \tag{1.3}$$

Это *стандартное скалярное произведение* в $\mathbb{C}^n$. Проверить, что аксиомы скалярного произведения и в этом случае выполнены.

Решение. 1) Первая аксиома справедлива:

$$(x,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geqslant 0$$

для любого $x \in \mathbb{C}^n$, а равенства $(x,x) = 0$ и $x = 0$ эквивалентны, так как модуль комплексного числа равен нулю тогда и только тогда, когда число равно нулю.

2) Вторая аксиома также справедлива. Действительно,

$$\overline{(y,x)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{y_k \overline{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k = (x,y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$.

3) Проверим справедливость третьей аксиомы:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta y_k) \overline{z}_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{z}_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k \overline{z}_k = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$$

для любых x, y, $z \in \mathbb{C}^n$ и любых α, $\beta \in \mathbb{C}$.

§ 7.2. Общие евклидовы пространства

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/Z1dQSuAAPzhcEg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/4S2IiZ_stsPhhQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §2

Упражнение 1. Множество $\mathbb{V}_3$ всех векторов (направленных отрезков) трехмерного пространства с введенными обычным образом линейными операциями и скалярным произведением

$$(x,y) = |x||y| \cos(x,y)$$

есть один из важных примеров вещественного евклидова пространства. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены. Пользоваться координатами векторов при этом нельзя. Для проверки третьей аксиомы используйте геометрическую интерпретацию скалярного произведения, как проекции вектора на прямую.

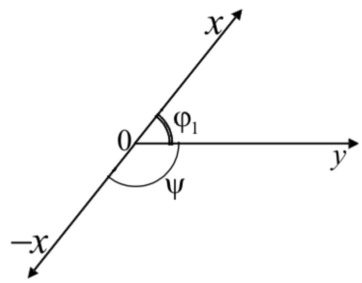

Рисунок 1.1 — К однородности скалярного произведения в $\mathbb{V}_3$.

Решение. Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов пространства $\mathbb{V}_3$, известными из первого семестра.

1) Положительная определенность очевидна:

$$(x,x) = |x||x|\cos(x,x) = |x|^2 \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{V}_3,$$

$$(x,x) = |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

2) Симметрия является непосредственным следствием определения:

$$(x,y) = |x||y|\cos(x,y) = |y||x|\cos(y,x) = (y,x), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{V}_3.$$

3) Свойство линейности скалярного произведения векторов,

$$(\alpha x + \beta y,z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{V}_3,\ \alpha, \beta \in R,$$

вытекает из однородности и аддитивности. Однородность при $\alpha \geqslant 0$ очевидна:

$$(\alpha x,y) = |\alpha||x||y|\cos(\alpha x,y) = \alpha|x||y|\cos(x,y) = \alpha(x,y).$$

При $\alpha < 0$ надо заметить, что умножение одного вектора на отрицательное число превращает угол между векторами в дополнительный до π (см. рис. 1.1) и, стало быть, меняет знак косинуса угла:

$$(\alpha x,y) = |\alpha x||y|\cos(\alpha x,y) = -\alpha|x||y|\cos(-x,y) = \alpha|x||y|\cos(x,y) = \alpha(x,y).$$

Если $z = 0$, то свойство аддитивности,

$$(x + y,z) = (x,z) + (y,z),$$

очевидно, выполняется для любых x, y:

$$0 = 0 + 0.$$

Если $z \neq 0$, то, используя свойство однородности, получим

$$(x+y,z) = \left(x+y,|z|\frac{z}{|z|}\right) = |z|(x+y,e), \quad e = \frac{z}{|z|},$$

где $|e| = 1$. Теперь достаточно доказать равенство

$$(x+y,e) = (x,e) + (y,e). \tag{1.4}$$

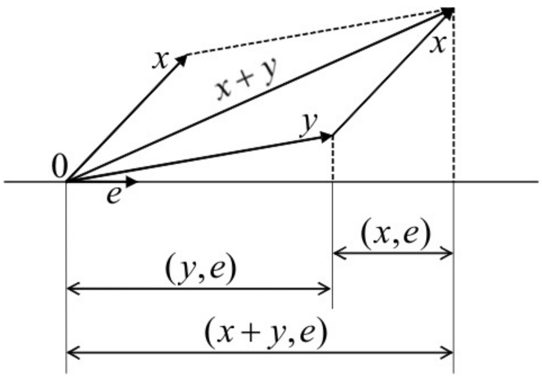

Рисунок 1.2 — К аддитивности скалярного произведения в $\mathbb{V}_3$.

Из рисунка 1.2 видно, что $(x+y,e)$ — проекция вектора $x+y$ на прямую, параллельную e, $(x,e)+(y,e)$ — сумма проекций векторов x и y на эту же прямую. Понятно, что две эти величины совпадают, т. е. равенство (1.4) справедливо.

Упражнение 2. Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a,b) вещественной оси вещественная функция. Пространство $\mathbb{C}[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов f и g пространства $\mathbb{C}[a,b]$ по формуле

$$(f,g) = \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx.$$

Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

Решение. При проверке аксиом скалярного произведения будем использовать известные из курса математического анализа свойства определенного интеграла. Пусть p — интегрируемая положительная на интервале (a,b) вещественной оси вещественная функция.

1) Известно, что

$$(f,f) = \int\limits_a^b p(x) f^2(x) dx \geqslant 0$$

для любой функции $f \in \mathbb{C}[a,b]$, кроме того, из равенства

$$(f,f) = \int\limits_a^b p(x) f^2(x) dx = 0$$

следует, что $f = 0$, и наоборот;

2) Ясно, что

$$(f,g) = \int\limits_a^b p(x) f(x) g(x) dx = \int\limits_a^b p(x) g(x) f(x) dx = (g,f)$$

для любых f, $g \in \mathbb{C}[a,b]$;

3) Известно, что операция интегрирования линейная, т. е.

$$(\alpha f + \beta g, h) = \int\limits_a^b p(x)(\alpha f(x) + \beta g(x)) h(x) dx =$$

$$= \alpha \int\limits_a^b p(x) f(x) h(x) dx + \beta \int\limits_a^b p(x) g(x) h(x) dx = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$$

для любых f, g, $h \in \mathbb{C}[a,b]$ и любых α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Упражнение 3. Для любой пары

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$$

элементов пространства $\mathbb{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n с комплексными коэффициентами определим скалярное произведение по формуле

$$(P_n, Q_n) = \sum_{j=0}^{n} \rho_j a_j \overline{b}_j,$$

где ρ_0, ρ_1, $\ldots$, ρ_n — заданные положительные числа. После введения таким образом скалярного произведения пространство $\mathbb{Q}_n$ становится комплексным евклидовым пространством. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

Указание. Фактически, в этом упражнении скалярное произведение на пространстве полиномов $\mathbb{Q}_n$ вводится так же, как скалярное произведение (1.3) на пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$.

§ 7.3. Неравенство Коши — Буняковского

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/0R8z2O1McrSmZg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/WP-aA4gp9J9XaQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §3

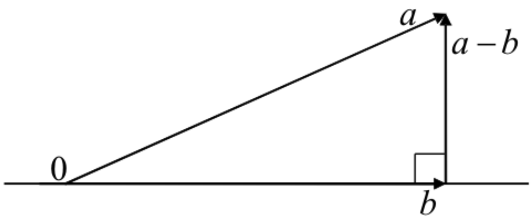

Рисунок 1.3 — К теореме Пифагора.

Упражнение 1. Сформулируйте теорему Пифагора для произвольного евклидова пространства $\mathbb{X}$.

Решение. Пусть a, b — векторы произвольного евклидова пространства $\mathbb{X}$ такие, что

$$(a-b,b)=0.$$

Имеет место тождество Пифагора:

$$|a|^2=|a-b|^2+|b|^2$$

где

$$|v|=\sqrt{(v,v)}\quad \forall v\in\mathbb{X}.$$

Упражнение 2. Сформулируйте неравенство Коши — Буняковского.

Решение. Пусть $\mathbb{X}$ — евклидово пространство. Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ справедливо неравенство Коши — Буняковского

$$|(x,y)| \leqslant |x||y|.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x, y пропорциональны друг другу.

Упражнение 3. Сформулируйте неравенство Треугольника.

Решение. усть $\mathbb{X}$ — евклидово пространство. Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ справедливо неравенство треугольник (неравенство Минковского):

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

2. Лекция (евклидовы пространства — 2)

§ 7.4. Матрица Грама

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/0R8z2O1McrSmZg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/GBH8Mi6KmQXvSA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §4

Упражнение 1. Сформулируйте теорему — критерий линейной независимости системы векторов.

Решение. Пусть $\{a^i\}_{i=1}^m$ — система векторов евклидова пространства $\mathbb{X}$. Построим квадратную матрицу порядка m:

$$G = \begin{pmatrix} (a^1,a^1) & (a^2,a^1) & \dots & (a^m,a^1) \\ (a^1,a^2) & (a^2,a^2) & \dots & (a^m,a^2) \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ (a^1,a^m) & (a^2,a^m) & \dots & (a^m,a^m) \end{pmatrix}$$

Матрица G называется *матрицей Грама* системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$.

Теорема. Для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была невырожденной.

§ 7.5. Ортогональные системы векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/5RjUdPXYRCNc6w

Презентация https://disk.yandex.ru/i/mc1bbjPcp0Djsg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §5

Упражнение 1. Каким свойством обладает матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису?

Решение. Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортогональной*, если

$$a^i \neq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

и

$$(a^i, a^k) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k.$$

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ называется *ортонормированной*, если

$$(a^i, a^k) = \delta_{ik}, \quad i,\, k = 1,\ \ldots,\, m.$$

Матрица T перехода от любого ортонормированного базиса $\mathcal{E}_n$ к другому ортонормированному базису

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

евклидова пространства $\mathbb{X}_n$ является унитарной:

$$T^* T = I.$$

§ 7.6. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/UZ8Ygyt5C8zFjg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/qVNRFFHLivGUUw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §6

Упражнение 1. Даны полиномы $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = x^2$ вещественной переменной x. Используя метод ортогонализации Грама — Шмидта, построить *полиномы Лежандра* нулевой, первой и второй степени, ортонормированные в смысле скалярного произведения

$$(P{,}Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx. \tag{2.1}$$

Решение. Опишем *процесс ортогонализации Грама — Шмидта*. По всякой линейно независимой системе $\{a^i\}_{i=1}^m$ можно построить ортогональную систему векторов $\{h^i\}_{i=1}^m$ следующим образом:

$$h^1 = a^1,$$

$$h^2 = \alpha_{2,1} h^1 + a^2, \quad \alpha_{2,1} = -\frac{(a^2{,}h^1)}{(h^1{,}h^1)},$$

$$h^3 = \alpha_{3,1}h^1 + \alpha_{3,2}h^2 + a^3, \quad \alpha_{3,1} = -\frac{(a^3,h^1)}{(h^1,h^1)}, \; \alpha_{3,2} = -\frac{(a^3,h^2)}{(h^2,h^2)},$$

$$\ldots$$

$$h^m = \alpha_{m,1}h^1 + \alpha_{m,2}h^2 + \cdots + \alpha_{m,m-1}h^{m-1} + a^m, \quad \alpha_{m,j} = -\frac{(a^m,h^j)}{(h^j,h^j)},$$

где $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Далее по ортогональной системе $\{h^i\}_{i=1}^m$ можно построить ортонормированную систему $\{b^i\}_{i=1}^m$, полагая

$$b^i = \frac{h^i}{|h^i|}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Построим по полиномам

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x, \quad Q_2(x) = x^2$$

полиномы $\tilde{P}_0(x)$, $\tilde{P}_1(x)$, $\tilde{P}_2(x)$, ортогональные в смысле скалярного произведения (2.1). Положим

$$\tilde{P}_0(x) = Q_0(x) = 1.$$

Найдем

$$\tilde{P}_1(x) = \alpha_{1,0}\tilde{P}_0(x) + Q_1(x),$$

где

$$\alpha_{1,0} = -\frac{(Q_1,\tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)}.$$

Имеем

$$(Q_1,\tilde{P}_0) = \int\limits_{-1}^{1} Q_1(x)\tilde{P}_0\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot 1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x\,dx = 0,$$

$$(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0) = \int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} 1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} dx = 2,$$

следовательно,

$$\tilde{P}_1(x) = Q_1(x) = x.$$

Вычислим

$$\tilde{P}_2(x) = \alpha_{2,0}\tilde{P}_0(x) + \alpha_{2,1}\tilde{P}_1(x) + Q_2(x),$$

где

$$\alpha_{2,0} = -\frac{(Q_2,\tilde{P}_0)}{(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)}, \quad \alpha_{2,1} = -\frac{(Q_2,\tilde{P}_1)}{(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)}.$$

Найдем требуемые скалярные произведения:

$$(Q_2,\tilde{P}_0) = \int\limits_{-1}^{1} Q_2(x)\tilde{P}_0\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot 1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

$$(Q_2,\tilde{P}_1) = \int\limits_{-1}^{1} Q_2(x)\tilde{P}_1\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot x\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx = 0,$$

$$(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1) = \int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_1^2\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

Тогда

$$\tilde{P}_2(x) = -\frac{1}{3}\tilde{P}_0(x) + Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Построим по найденным многочленам ортонормированную систему векторов $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$. Имеем

$$P_0(x) = \tilde{P}_0(x)\left(\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_0^2(x)\,dx\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$P_1(x) = \tilde{P}_1(x)\left(\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_1^2(x)\,dx\right)^{-1/2} = x\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Для того, чтобы найти $P_2(x)$, вычислим предварительно

$$\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_2^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{9}x\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{9}2 = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{5\cdot 9}.$$

Окончательно получаем

$$P_2(x) = \tilde{P}_2(x)\left(\int\limits_{-1}^{1} \tilde{P}_2^2(x)\,dx\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{5\cdot 9}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2 - 1\right).$$

§ 7.7. Разложение вектора по базису евклидова пространства

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/OGN8echzNob3Pg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/uv6JS6H9g1bK1w
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §7

Упражнение 1. Построить коэффициенты Фурье разложения произвольного вектора по ортогональной системе векторов.

Решение. В евклидовом пространстве $\mathbb{X}_n$ вычисление коэффициентов разложения вектора $x \in \mathbb{X}_n$ по любому базису $\{e^k\}_{k=1}^n$ можно свести к решению крамеровской системы линейных алгебраических уравнений с эрмитовой матрицей. Действительно, умножим обе части равенства

$$\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \dots + \xi_n e^n = x$$

скалярно на вектор e^1, затем на вектор e^2 и т. д. и, наконец, на вектор e^n. Получим систему уравнений

$$(e^1,e^1)\xi_1 + (e^2,e^1)\xi_2 + \dots + (e^n,e^1)\xi_n = (x,e^1),$$

$$(e^1,e^2)\xi_1 + (e^2,e^2)\xi_2 + \dots + (e^n,e^2)\xi_n = (x,e^2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(e^1,e^n)\xi_1 + (e^2,e^n)\xi_2 + \dots + (e^n,e^n)\xi_n = (x,e^n),$$

матрицей которой служит матрица Грама базиса $\{e^k\}_{k=1}^n$. Наиболее просто система решается в случае, когда базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ ортогонален, т. е. когда матрица Грама диагональна. В этом случае из этой системы получаем

$$(e^1,e^1)\xi_1 = (x,e^1),$$

$$(e^2,e^2)\xi_2 = (x,e^2),$$

$$\dots$$

$$(e^n,e^n)\xi_n = (x,e^n),$$

и

$$\xi_k = \frac{(x,e^k)}{(e^k,e^k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* разложения вектора x по ортогональной системе $\{e^k\}_{k=1}^n$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi.$$

Отметим, что если базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ ортонормирован, то

$$\xi_k = \frac{(x,e^k)}{(e^k,e^k)} = (x,e^k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и для любого вектора $x \in \mathbb{X}_n$ справедливо разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x,e^k) e^k.$$

§ 7.8. Вычисление скалярного произведения

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/-UbpsZkhRt3Unw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/NqOV_Dn2zR8Hog

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §8

Упражнение 1. Показать, что скалярное произведение векторов можно подсчитать как стандартное скалярное произведение коэффициентов разложения этих векторов по любому ортонормированному базису.

Решение. Пусть x,y — векторы евклидова пространства $\mathbb{X}_n$ и пусть известны векторы

$$\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$$

коэффициентов разложений x, y по базису $\mathcal{E}_n$, т. е.

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad y = \mathcal{E}_n \eta.$$

Тогда

$$(x,y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l \Big) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_l (e^k,e^l) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{lk} \xi_k \overline{\eta}_l = (G\xi,\eta),$$

следовательно, для вычисления скалярного произведения (x,y) достаточно знать коэффициенты разложения векторов x, y по базису и матрицу Грама G этого базиса.

В случае, когда базис ортонормирован, из

$$(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_l (e^k, e^l)$$

получаем

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k.$$

Таким образом, скалярное произведение векторов можно подсчитать как стандартное скалярное произведение коэффициентов разложения этих векторов по любому ортонормированному базису.

§ 7.10. Примеры ортогональных базисов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/rWv_zpSUDAsOgg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/6k4XBnE4eeaBuA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 7, §10

Упражнение 1. Дайте определение базиса Фурье в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Решение. Нам удобно будет нумеровать сейчас компоненты вектора и базисные векторы от 0 до $n-1$. Пусть

$$q_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

есть корни степени n из единицы, i — мнимая единица:

$$\sqrt[n]{1} = q_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Введем в рассмотрение систему векторов $\{\varphi^k\}_{k=0}^{n-1}$, компоненты которых вычисляются по формулам

$$\varphi_j^k = q_k^j = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)^j,$$

где $j,\ k = 0,\ \ldots,\ n-1$, подробнее,

$$\begin{array}{rcccccl}
\varphi^0 & = & (& q_0^0, & q_0^1, & \ldots, & q_0^{n-1} \ ), \\
\varphi^1 & = & (& q_1^0, & q_1^1, & \ldots, & q_1^{n-1} \ ), \\
 & \ldots & & & \ldots & & \ldots \\
\varphi^{n-1} & = & (& q_{n-1}^0, & q_{n-1}^1, & \ldots, & q_{n-1}^{n-1} \ ).
\end{array}$$

Эти векторы называются *базисом Фурье* и образуют ортогональную систему относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{C}^n$.

3. Лекция (подпространства)

Глава 8. Подпространства

§ 8.1. Сумма и пересечение подпространств

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/9H1_dGruq2V2Kw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/iiesdkL3slnHjA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 8, §1

Упражнение 1. Описать все подпространства пространства $\mathbb{V}_3$.

Решение. Заметим, прежде всего, что подпространствами пространства $\mathbb{V}_3$ являются само пространство $\mathbb{V}_3$ и множество $\{0\}$, состоящее из одного нулевого вектора.

Опишем третий тип подпространств пространства $\mathbb{V}_3$. Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $a \in \mathbb{V}_3$ и построим прямую l, проходящую через начало координат в направлении вектора a. Множество векторов, концы которых лежат на прямой l, является подпространством пространства $\mathbb{V}_3$. Все векторы этого подпространства имеют вид αa, где α пробегает множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Опишем последний, четвертый, тип подпространств пространства $\mathbb{V}_3$. Пусть a^1 и a^2 — произвольные неколлинеарные векторы пространства $\mathbb{V}_3$. Множество π векторов вида $\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2$, где α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, является подпространством пространства $\mathbb{V}_3$. Множество π — плоскость, проходящая через начало координат и натянутая на векторы a^1 и a^2.

Упражнение 2. Пусть a^1, a^2, $\dots$, a^m, $m \geqslant 1$, — произвольным образом фиксированные векторы комплексного линейного пространства $\mathbb{X}$. Докажите, что множество L всех линейных комбинаций

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m, \quad x_1, x_2, \dots, x_m \in C,$$

есть подпространство. Говорят, что это подпространство *натянуто на векторы*

$$a^1, a^2, \dots, a^m.$$

Решение. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k a^k$, $y = \sum\limits_{k=1}^{m} y_k a^k \in L$. Тогда для любых чисел α, $\beta \in C$ имеем

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{k=1}^{m} x_k a^k + \beta \sum_{k=1}^{m} y_k a^k = \sum_{k=1}^{m} z_k a^k = z,$$

где $z_k = \alpha x_k + \beta y_k \in C$, следовательно, $z \in L$.

Упражнение 3. Пусть a^1, a^2 — векторы комплексного линейного пространства $\mathbb{X}$, причем, $a_2 \neq 0$. Множество L векторов вида $a^1 + \alpha a^2$, где α пробегает множество всех комплексных чисел, называется *прямой, проходящей через точку* a^1 *в направлении вектора* a^2. Показать, что множество L является подпространством тогда и только тогда, когда векторы a^1, a^2 линейно зависимы.

Решение. Пусть L — подпространство линейного пространства $\mathbb{X}$. Тогда, очевидно, $0 \in L$. Следовательно, существует такое число $\alpha \in C$, что

$$a^1 + \alpha a^2 = 0.$$

Значит, векторы a^1 и a^2 линейно зависимы, т. к. в эту линейную комбинацию вектор a^1 входит с ненулевым множителем (он равен единице). Докажем теперь, что из коллинеарности векторов a^1 и a^2 следует, что множество L является подпространством. Если $a^1 = 0$, то все элементы множества L имеют вид αa^2, где $\alpha \in C$. Построим линейную комбинацию элементов αa^2 и βa^2 этого множества с произвольными коэффициентами p и $q \in C$:

$$p\,\alpha\,a^2 + q\beta a^2 = (p\,\alpha + q\beta)a^2.$$

Ясно, что этот вектор принадлежит L. Если векторы a^1 и a^2 не равны нулю и коллинеарны, т. е. $a^1 = \gamma a^2, \gamma \in C$, то L тоже состоит из векторов вида αa^2, где α пробегает множество всех комплексных чисел, т. к. для любого $\beta \in C$ имеем

$$a^1 + \beta a^2 = \gamma a^2 + \beta a^2 = (\gamma + \beta)a^2 = \alpha a^2, \quad \alpha = (\gamma + \beta) \in C.$$

Следовательно, и в этом случае L является подпространством.

Упражнение 4. Описать суммы и пересечения всевозможных подпространств пространства $\mathbb{V}_3$.

Указание. Опишем сумму и пересечение двух подпространств пространства $\mathbb{V}_3$ на примере прямой и плоскости. Пусть l — прямая, проходящая через начало координат в направлении вектора a^1, а π — плоскость, проходящая через начало координат, натянутая на векторы a^2 и a^3. Сумма $l+\pi$ есть множество всех векторов вида

$$\alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Пересечение $l \cap \pi$ — множество векторов, принадлежащих одновременно и l, и π. Если прямая l не лежит в плоскости π, то векторы a^1, a^2 и a^3 не компланарны, и $l+\pi = \mathbb{V}_3$, $l \cap \pi = \{0\}$. Если $l \subset \pi$, то $l + \pi = \pi$, а $l \cap \pi = l$. Аналогичным образом рассмотрите суммы и пересечения подпространств пространства $\mathbb{V}_3$ всех остальных типов.

Упражнение 5. Пусть L — произвольное подпространство конечномерного линейного пространства $\mathbb{X}_n$. Докажите, что существует некоторое подпространство $M \subset \mathbb{X}_n$ такое, что $\mathbb{X}_n = L \dotplus M$.

Решение. Пусть подпространство L имеет размерность $k < n$, и k векторов e^1, e^2, …, e^k образуют базис подпространства L. Дополним его $n-k$ векторами e^{k+1}, e^{k+2}, …, e^n до базиса всего пространства $\mathbb{X}_n$.

Обозначим через M подпространство пространства $\mathbb{X}_n$, натянутое на векторы e^{k+1}, e^{k+2}, …, e^n. Ясно, что любой вектор $x \in \mathbb{X}_n$ представим в виде

$$x = x^1 + x^2, \text{ где } x^1 \in L,\ x_2 \in M.$$

Кроме того, пересечение этих подпространств есть $\{0\}$. Следовательно,

$$\mathbb{X}_n = L \dotplus M.$$

Упражнение 6. Сумма k подпространств L_1, L_2, …, L_k называется *прямой* если для любого вектора

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k \in (L_1 + L_2 + \ldots + L_k)$$

его составляющие

$$x^1 \in L_1, \quad x^2 \in L_2, \ \ldots, \quad x^k \in L_k$$

определяются однозначно. Докажите, что для того, чтобы сумма подпространств L_1, L_2, …, L_k была прямой необходимо и достаточно, чтобы из равенства

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0, \quad x^i \in L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

вытекало, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, …, $x^k = 0$.

Решение. Пусть из равенства

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0, \quad x^i \in \ L_i, \, i = 1, 2 \ldots, k,$$

следует, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, …, $x^k = 0$. Покажем, что тогда для любого

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k \in (L_1 + L_2 + \cdots + L_k)$$

составляющие $x^i \in L_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, определяются однозначно. Предположим, что существует еще одно разложение вектора x, т. е.

$$x = \widetilde{x}^1 + \widetilde{x}^2 + \cdots + \widetilde{x}^k, \quad \widetilde{x}^i \in \ L_i, \, i = 1, 2 \ldots, k.$$

Тогда, очевидно,

$$(x^1 - \widetilde{x}^1) + (x^2 - \widetilde{x}^2) + \cdots + (x^k - \widetilde{x}^k) = 0.$$

Поскольку $x^i - \widetilde{x}^i \in L_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то

$$x^1 - \widetilde{x}^1 = 0, \quad x^2 - \widetilde{x}^2 = 0, \ \ldots, x^k - \widetilde{x}^k = 0,$$

следовательно, $x^i = \widetilde{x}^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Обратно, пусть составляющие любого вектора

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k \in (L_1 + L_2 + \cdots + L_k)$$

определяются однозначно, и пусть

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0$$

для каких-то $x^i \in L_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$, то отсюда вытекает, что $x^1 = x^2 = \ldots = x^k = 0$.

Упражнение 7. Сумма k подпространств L_1, L_2, …, L_k называется *ортогональной*, если она есть множество всех элементов вида

$$x = x^1 + x^2 + \cdots + x^k, \quad x^i \in L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

и $L_i \perp L_j$ для $i \neq j$, где $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Докажите, что ортогональная сумма любого числа подпространств является прямой.

Решение. Пусть $x^1 + x^2 + \dots + x^k = 0$. Поскольку $(x^j,x^i) = 0$ при $i \neq j$, то имеем

$$0 = (x^1 + x^2 + \dots + x^k, x^1 + x^2 + \dots + x^k) = |x^1|^2 + |x^2|^2 + \dots + |x^k|^2,$$

следовательно, $x^1 = x^2 = \ldots = x^k = 0$.

Упражнение 8. Верно ли утверждение: сумма подпространств

$$L_1 + L_2 + \dots + L_k, \quad k > 2,$$

является прямой, если их пересечение — нулевое подпространство?

Решение. Утверждение неверно. Достаточно привести контрпример. Рассмотрим три подпространства пространства $\mathbb{V}_3$: две не совпадающие друг с другом плоскости π_1, π_2 и не принадлежащую ни одной из этих плоскостей прямую l. Ясно, что $\pi_1 \cap \pi_2 \cap l = \{0\}$. Однако, сумма этих подпространств не является прямой. Докажем это с помощью критерия, сформулированного в упражнении 6. Для любого ненулевого вектора $x^3 \in l$ справедливо разложение на составляющие:

$$-x^3 = x^1 + x^2, \quad x^1 \in \pi_1, \quad x^2 \in \pi_2.$$

Тогда

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0, \quad x^1 \in \pi_1, \quad x^2 \in \pi_2, \quad x^3 \in l,$$

но $x^3 \neq 0$.

§ 8.2. Размерность суммы подпространств

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/K3tuacYZtaunxw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/i9RtNhXpOzlt1w

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 8, §2

Упражнение 1. Чему равна размерность суммы подпространств?

Решение. Справедливы следующие теоремы.

Теорема. Пусть $L = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \dots \dotplus L_k$ — прямая сумма конечномерных подпространств L_1, $L_2, \dots$, L_k линейного пространства $\mathbb{X}$. Тогда

$$\dim(L) = \dim(L_1) + \dim(L_2) + \dots + \dim(L_k).$$

Теорема. Пусть L_1, L_2 — произвольные конечномерные подпространства линейного пространства $\mathbb{X}$. Тогда

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).$$

§ 8.3. Ортогональная проекция вектора на подпространство

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/-VYNKpjUFdbRZg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/DT7f9I_ylgv9HQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 8, §1

Упражнение 1. Сформулируйте теорему о наилучшем приближении вектора в подпространстве.

Решение. Пусть L — некоторое подпространство евклидова пространства $\mathbb{X}$, x — произвольный вектор из $\mathbb{X}$. Вектор $y \in L$ назовем *наилучшим приближением* к вектору x, если

$$|x - y| \leqslant |x - z| \quad \text{для любого} \quad z \in L.$$

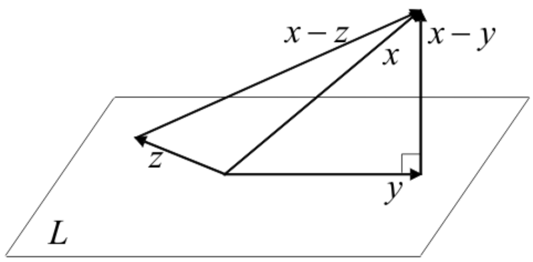

Рисунок 3.1 — Наилучшее приближение к вектору x

Теорема. Для любого вектора $x \in \mathbb{X}$ и любого конечномерного подпространства $L \subset \mathbb{X}$ существует единственное наилучшее приближение y.

При этом, вектор y является *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L, вектор $z = x - y$ — *перпендикуляром*, опущенным из точки x на подпространство L.

§ 8.4. Ортогональное разложение евклидова пространства

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/pioJ_iN-z_vKJw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/zYOi1xFi81oowg
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 8, §4

Упражнение 1. Пусть L — подпространство евклидова пространства $\mathbb{X}$. Множество всех векторов из $\mathbb{X}$, ортогональных L, называется *ортогональным дополнением* подпространства L и обозначается через $L^\perp$. Докажите, что $L^\perp$ является подпространством пространства $\mathbb{X}$.

Решение. По определению

$$L^\perp = \{x \in \mathbb{X} : (x,z) = 0 \ \forall\, z \in L\}.$$

Пусть $x,\ y \in L^\perp$; $\alpha,\ \beta \in C$. Тогда

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) = 0 \ \forall\, z \in L,$$

следовательно, $\alpha x + \beta y \in L^\perp$.

Упражнение 2. Сформулируйте теорему об ортогональном разложении евклидова пространства.

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Пусть L — конечномерное подпространство евклидова пространства $\mathbb{X}$, $L^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства L. Тогда

$$\mathbb{X} = L \oplus L^\perp.$$

Упражнение 3. Пусть $\mathbb{X}$ — евклидово пространство, $e \in \mathbb{X}$, $e \neq 0$. Обозначим через π_e множество всех векторов пространства $\mathbb{X}$, ортогональных e. Докажите, что π_e — подпространство пространства $\mathbb{X}$. Это подпространство называют *гиперплоскостью*, ортогональной вектору e.

Указание. Используйте упражнение 1.

4. Лекция (операторы и матрицы — 1)

Глава 9. Линейные операторы и матрицы

§ 9.1. Линейные операторы. Действия над операторами

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/2sLg7mwq9B6vFA

Презентация https://disk.yandex.ru/i/Kli7_xFTPChNIQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §1

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $\mathcal{B} : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы. Оператор $\mathcal{B}\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$, определяемый соотношением

$$\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) \quad \forall\, x \in \mathbb{X}, \tag{4.1}$$

называется *произведением операторов* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Показать, что произведение $\mathcal{B}\mathcal{A}$ линейных операторов $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ и $\mathcal{B} : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ является линейным оператором.

Решение. Последовательно применяя определение произведения операторов, линейность операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, получаем равенства, справедливые для любых чисел α и β и любых векторов x, $y \in \mathbb{X}$:

$$\mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha x + \beta y)) = \mathcal{B}(\alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y) = \alpha\mathcal{B}\mathcal{A}x + \beta\mathcal{B}\mathcal{A}y.$$

Это и означает линейность отображения $\mathcal{B}\mathcal{A}$.

Упражнение 2. Показать, что отображение $\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ — линейные операторы, α, β — числа, есть линейный оператор.

Решение. В силу определения линейной комбинации операторов и линейности операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ для любых чисел γ и δ и любых векторов x, $y \in \mathbb{X}$ справедливы равенства:

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})(\gamma x + \delta y) = \alpha\mathcal{A}(\gamma x + \delta y) + \beta\mathcal{B}(\gamma x + \delta y) =$$

$$= \alpha\gamma\mathcal{A}x + \alpha\delta\mathcal{A}y + \beta\gamma\mathcal{B}x + \beta\delta\mathcal{B}y = \gamma(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x + \delta(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})y.$$

Упражнение 3. Показать, что если произведение операторов $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ определено, то

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}.$$

Решение. Согласно определению (4.1) имеем

$$\mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A})x = \mathcal{C}((\mathcal{B}\mathcal{A})x) = C(\mathcal{B}(\mathcal{A}x)) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}x \quad \forall\, x \in \mathbb{X}.$$

С другой стороны, определяя аналогично (4.1) произведение трех операторов, имеем следующее равенство:

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A}x = \mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathcal{A}x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{X}.$$

Операторы, определенные на пространстве $\mathbb{X}$, равны, если равны их значения для любого $x \in \mathbb{X}$. Следовательно, объединяя эти равенства, получаем

$$\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}.$$

§ 9.2. Обратный оператор

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/3T3KKNXS4VyqTQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/GYN188E0DtkIcQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §2

Упражнение 1. Доказать, что линейный оператор не может иметь двух различных обратных операторов.

Решение. Обозначим через $I_{\mathbb{X}}$ и $I_{\mathbb{Y}}$ единичные операторы, действующие в пространствах $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ соответственно. Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет два обратных оператора $\mathcal{A}^{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$, т. е.

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A} = I_{\mathbb{X}},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = I_{\mathbb{Y}}.$$

В силу ассоциативности операции произведения операторов имеем

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}I_{\mathbb{Y}} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}) = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = I_{\mathbb{X}}\widetilde{\mathcal{A}}^{-1} = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Упражнение 2. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $\mathcal{B} : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ — обратимые операторы. Показать, что тогда и оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ обратим, причем $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$.

Решение. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$. Он существует, так как операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обратимы. Используем свойство ассоциативности операции произведения операторов:

$$(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1})(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = I_{\mathbb{X}},$$

$$(\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1} = I_{\mathbb{Z}},$$

т. е. оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ обратим, и $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$.

Упражнение 3. Пусть линейное пространство $\mathbb{X}$ есть прямая сумма подпространств L_1 и L_2, т. е. каждый вектор $x \in \mathbb{X}$ представим в виде

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in L_1,\ x^2 \in L_2,$$

причем векторы x^1, x^2 однозначно определяются по вектору x. Определим оператор $\mathcal{P} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, полагая

$$\mathcal{P}x = x^1.$$

Говорят, что оператор $\mathcal{P}$ есть *оператор проектирования* пространства $\mathbb{X}$ на подпространство L_1 (параллельно подпространству L_2). Доказать, что оператор $\mathcal{P}$ при условии, что подпространство L_1 не совпадает со всем пространством $\mathbb{X}$, не имеет обратного.

Решение. Если $L_1 = \mathbb{X}$, то $\mathcal{P}x = x$, т. е. оператор $\mathcal{P}$ равен тождественному оператору, и $\mathcal{P}^{-1} = I$. Пусть $L_1 \neq \mathbb{X}$. Положим

$$x = x^1 + x^2, \quad y = x^1 + y^2, \quad x^1 \in L_1,\, x^2, y^2 \in L_2,$$

где $x^2 \neq y^2$. Тогда $x \neq y$, но $\mathcal{P}x = x^1$ и $\mathcal{P}y = x^1$, т. е. совпадают образы двух разных векторов. Это означает, что оператор $\mathcal{P}$ необратим.

§ 9.3. Оператор разложения по базису

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/S-8tEqgnVSUTaA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/ht-JKHpd1whSXQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §3

Упражнение 1. Дать определение оператора разложения по базису.

Решение. Пусть $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbb{X}_n$. Определим оператор, действующий из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{X}_n$ при помощи соотношения

$$x = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

подробнее,

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 + \cdots + \xi_n e^n.$$

Очевидно, что так определенный оператор линеен. Будем обозначать этот оператор через

$$\mathcal{E} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{X}_n.$$

Поскольку $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис, то каждому $x \in \mathbb{X}_n$ однозначно соответствует вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k.$$

Это соответствие порождает *оператор разложения по базису*, действующий из $\mathbb{X}_n$ в $\mathbb{C}^n$. Обозначим этот оператор через

$$\mathcal{E}^{-1} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{C}^n.$$

Непосредственно из определения операторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^{-1}$ вытекает:

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\xi = \xi \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n,$$

$$\mathcal{E}\mathcal{E}^{-1}x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{X}_n,$$

т. е. операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{-1}$ взаимно обратны.

§ 9.4. Изоморфизм конечномерных пространств

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/hJKO2oqHFORr9w

Презентация https://disk.yandex.ru/i/XCZYREs2yK8Ztg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §4

Упражнение 1. Сформулируйте критерий изоморфности двух конечномерных пространств.

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Для того, чтобы два конечномерных комплексных (или вещественных) пространства были изоморфны необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали.

§ 9.5. Образ оператора. Ядро оператора

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/Bj2iy0ybq4U_mg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/IfipgqWjoNx9WA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §5

Упражнение 1. Как связаны ранг и дефект оператора?

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) + \operatorname{def}(\mathcal{A}) = n.$$

Упражнение 2. Доказать, что $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$ — линейное подпространство пространства $\mathbf{X}$ для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$.

Решение. Согласно определению,

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{X} : \mathcal{A}x = 0\}.$$

Пусть x, y — произвольные векторы из $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$, α, β — любые числа. Тогда имеем $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y = 0$, т. е. линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит множеству $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$.

5. Лекция (операторы и матрицы — 2)

Глава 9. Линейные операторы и матрицы

§ 9.6. Матрица оператора

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/bLhiwQ0HfBHrlA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/VbM96RDHQaw5Xg
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §6

Упражнение 1. Пусть $\mathbb{P}_n$ — линейное пространство полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Определим на этом пространстве линейный оператор $\mathcal{A}$, полагая

$$\mathcal{A}p_n(x) = ap_n'(x) + b \tag{5.1}$$

для любого $p_n \in \mathbb{P}_n$. Здесь a, b — произвольным образом фиксированные вещественные числа. Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Решение. Дадим определение матрицы оператора. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ есть линейный оператор. Фиксируем в пространстве $\mathbb{X}_n$ базис $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, а в $\mathbb{Y}_m$ — базис $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$. Представим каждый вектор $\mathcal{A}e^i$, где $i = 1,2,\ldots,n$, в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{A}e^1 = a_{11}^{(eq)}q^1 + a_{21}^{(eq)}q^2 + \cdots + a_{m1}^{(eq)}q^m,$$

$$\mathcal{A}e^2 = a_{12}^{(eq)}q^1 + a_{22}^{(eq)}q^2 + \cdots + a_{m2}^{(eq)}q^m,$$

$$\cdots$$

$$\mathcal{A}e^n = a_{1n}^{(eq)}q^1 + a_{2n}^{(eq)}q^2 + \cdots + a_{mn}^{(eq)}q^m.$$

Построим матрицу, i-й столбец которой образуют коэффициенты разложения вектора $\mathcal{A}e^i$ по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_{eq} называют *матрицей оператора* $\mathcal{A}$. Она однозначно определяется оператором $\mathcal{A}$ и базисами $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{Q}_m$.

Построим теперь матрицу оператора (5.1). Фиксируем в $\mathbb{P}_n$ базис $e^k = x^k$, где $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Тогда

$$\mathcal{A}e^0 = a \cdot 1' + b = b = be^0,$$

$$\mathcal{A}e^1 = ax' + b = a + b = (b + a)e^0,$$

$$\mathcal{A}e^2 = a(x^2)' + b = a2x + b = be^0 + 2ae^1,$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{A}e^n = a(x^n)' + b = anx^{n-1} + b = be^0 + nae^{n-1}.$$

Следовательно,

$$A_e = \begin{pmatrix} b & b+a & b & \cdots & b \\ 0 & 0 & 2a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & na \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Упражнение 2. В геометрическом пространстве $\mathbb{V}_3$ задан ортонормированный базис e^1, e^2, e^3. Построить в этом базисе матрицу оператора $\mathcal{Q}(\varphi)$, осуществляющего поворот каждого вектора $x \in \mathbb{V}_3$ вокруг вектора e^3. Направление поворота (при $\varphi > 0$) совпадает с направлением кратчайшего поворота от e^1 к e^2.

Решение. Построим первый столбец матрицы $Q_e(\varphi)$ оператора $\mathcal{Q}(\varphi)$. Для этого подействуем оператором $\mathcal{Q}(\varphi)$ на первый базисный вектор e^1 и получившийся вектор $\mathcal{Q}(\varphi)e^1$ разложим по базису e^1, e^2, e^3. Получим

$$\mathcal{Q}(\varphi)e^1 = \cos\varphi e^1 + \sin\varphi e^2 + 0 \cdot e^3.$$

Сделайте рисунок! Аналогично, для второго базисного вектора имеем

$$\mathcal{Q}(\varphi)e^2 = -\sin\varphi e^1 + \cos\varphi e^2 + 0 \cdot e^3.$$

Ясно, что третий базисный вектор этот оператор никак не меняет:

$$\mathcal{Q}(\varphi)e^3 = 0 \cdot e^1 + 0 \cdot e^2 + 1 \cdot e^3.$$

Таким образом, матрица оператора имеет вид

$$Q_e(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Доказать, что матрицы одного и того же линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ в двух базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей линейного оператора в одном из этих базисов.

Решение. Матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ определяется заданием базиса пространства $\mathbb{X}_n$. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ и $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$ — базисы этого пространства, A_e и $A_{\widetilde{e}}$ — матрицы оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах, T — матрица перехода от одного базиса к другому:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Тогда

$$A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T. \tag{5.3}$$

Пусть $A_{\widetilde{e}} = A_e$. Тогда из (5.3) следует, что $TA_e = A_e T$. С другой стороны, если $TA_e = A_e T$, то $A_e = T^{-1} A_e T$, и в силу (5.3) заключаем, что $A_{\widetilde{e}} = A_e$.

Упражнение 4. Как изменится матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ в базисе $e^1, \ldots, e^n$, если в этом базисе:

a) поменять местами два вектора e^i и e^j;

b) умножить вектор e^i на число $\alpha \neq 0$.

Указание. Построить матрицы, осуществляющие указанные преобразования базиса и воспользоваться формулой (5.3).

Ответ. a) В матрице поменяются местами i-я и j-я строки, а также i-й и j-й столбцы;

b) в матрице i-й столбец умножится на число α, а i-я строка разделится на число α.

Упражнение 5. Оператор $\mathcal{A}$ в базисе e^1, e^2, e^3, e^4 имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе e^1, e^3, e^2, e^4.

Решение. Используем пункт a) предыдущего упражнения. Получим

$$A_{\widetilde{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

§ 9.7. Матрица обратного оператора

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/zcUJCXHtZ7ZjdA

Презентация https://disk.yandex.ru/i/tcMUBMz79UGfZg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §7

Упражнение 1. Как связаны определители одного и того же оператора в разных базисах?

Решение. Они равны друг другу. Действительно, матрица линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ определяется заданием базиса пространства $\mathbb{X}_n$. Обозначим через $\{e^k\}_{k=1}^n$ и $\{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n$ базисы этого пространства, а через A_e и $A_{\widetilde{e}}$ матрицы оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах. Пусть T — матрица перехода от одного базиса к другому: $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T$. Тогда $A_{\widetilde{e}} = T^{-1} A_e T$. Квадратные матрицы B, C, связанные соотношением

$$B = D^{-1} C D,$$

где D — невырожденная матрица, называют *подобными*. Поэтому матрицы одного и того же оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ в разных базисах подобны, а определители подобных матриц совпадают.

Определителем оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называют определитель матрицы этого оператора и обозначают через $\det(\mathcal{A})$. Эта характеристика оператора не зависит от выбора базиса пространства $\mathbf{X}_n$.

Упражнение 2. Доказать, что если оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ имеет обратный, то он невырожден.

Решение. В любом базисе пространства $\mathbb{X}_n$ матрица обратного оператора обратна к матрице исходного оператора. Обратная матрица существует только у невырожденной. Следовательно, и сам оператор невырожден.

Упражнение 3. Доказать, что для того, чтобы оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\mathcal{A}x = 0$ имело только тривиальное решение $x = 0$.

Решение. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ имел обратный необходимо и достаточно, чтобы он был невырожден, т. е., чтобы была невырождена матрица этого оператора в любом базисе. Условие, что уравнение $\mathcal{A}x = 0$ имеет только тривиальное решение $x = 0$ эквивалентно тому, что лишь тривиальное решение $\xi = 0$ имеет система линейных алгебраических уравнений $A_e\xi = 0$, где A_e — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\mathcal{E}_n$, а $\xi = \mathcal{E}^{-1}x$. Последнее утверждение равносильно невырожденности матрицы A_e.

6. Лекция (операторы и матрицы — 3)

§ 9.9. Ранг матрицы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/vhp415OJblCLAA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/8C-XWaYVGLjkjg
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §9

Упражнение 1. Как связаны ранг оператора и ранг его матрицы?

Решение. Пусть $A(m, n)$ — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовем *рангом матрицы* $A(m, n)$ и будем обозначать $\mathrm{rank}(A)$. Напомним, что размерность образа оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$,

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in \mathbb{Y}_m : y = \mathcal{A}x, x \in \mathbb{X}_n\},$$

называется *рангом оператора* $\mathcal{A}$: $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$. Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ — линейный оператор, A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно произвольным образом фиксированных базисов

$$\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{X}_n, \quad \{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{Y}_m.$$

Тогда

$$\mathrm{rank}(A_{eq}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}).$$

Таким образом, ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы.

Упражнение 2. Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пространства $\mathbb{C}^n$. Ранг этой системы строк обозначим через r_s. Как связаны столбцовый и строчный ранги матрицы?

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Для любой матрицы $A(m,n)$ выполнено равенство

$$r_s = \mathrm{rank}(A),$$

т. е. ранг системы ее строк равен рангу системы ее столбцов.

Упражнение 3. Как изменится ранг матрицы, если ее умножить на квадратную невырожденную матрицу?

Решение. Он не изменится. Действительно, имеет место следующая

Теорема. Пусть $A(m,n)$ — произвольная матрица, а $B(m,m)$ и $C(n,n)$ — квадратные невырожденные матрицы. Тогда

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(BA),$$

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AC).$$

Упражнение 4. Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц A, B справедливо неравенство

$$\mathrm{rank}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}.$$

Решение. Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы A, которые в свою очередь линейно выражаются через максимальную подсистему линейно независимых столбцов матрицы A. Число столбцов в этой подсистеме равно $\mathrm{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы *базисными*. Можно сказать, что столбцы матрицы C принадлежат подпространству, натянутому на базисные столбцы матрицы A. Следовательно, число линейно независимых столбцов матрицы C не может превышать $\mathrm{rank}(A)$. С другой стороны, строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы B. Проводя аналогичные рассуждения, заключаем, что $\mathrm{rank}(C) \leqslant \mathrm{rank}(B)$.

§ 9.10. Элементарный метод вычисления ранга матрицы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/laB4M6gc78xh9g

Презентация https://disk.yandex.ru/i/dKP22MWnO4jP7w

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 9, §10

Упражнение 1. Как вычислить ранг матрицы?

Решение. Имеем место следующая

Лемма. Пусть главный минор Δ_r матрицы A не равен нулю, а все окаймляющие его миноры — нули. Тогда ранг матрицы A равен r.

Эта лемма подсказывает следующий способ вычисления ранга матрицы.

1) Просматриваем элементы матрицы. Если все они нули, полагаем ранг равным нулю и останавливаем процесс.

2) Если найден элемент матрицы отличный от нуля, то, переставляя соответствующие строки и столбцы матрицы, помещаем его на место первого элемента первого столбца.

3) Окаймляем элемент a_{11}, т. е. составляем определители второго порядка, присоединяя к нему элементы других строк и столбцов. Если все эти определители второго порядка — нули, то, очевидно, у матрицы только один линейно независимый столбец. Значит ранг матрицы равен единице.

4) Если обнаружен ненулевой определитель второго порядка, то путем перестановки строк и столбцов матрицы превращаем этот определитель в определитель вида Δ_2 (в левом верхнем углу) и окаймлением строим определители третьего порядка, пока не получим среди них отличный от нуля и т. д.

Если на каком-то шаге описанного алгоритма получен определитель Δ_r, не равный нулю, а все определители порядка $r+1$, построенные по нему окаймлением, — нули, то это означает, что ранг матрицы равен r.

Понятно, что на практике этот процесс иногда может быть ускорен. Именно, пусть удалось установить, что определитель, образованный элементами, стоящими на пересечении каких-то r строк и каких-то r столбцов матрицы не равен нулю. Не нужно переставлять строки и столбцы. Просто строим окаймлением этого определителя определители порядка $r+1$. Если среди них есть ненулевой процесс продолжается. Если все такие определители — нули, то ранг матрицы равен r.

7. Лекция (линейные уравнения)

Глава 10. Линейные уравнения

§ 10.1. Общее решение линейного уравнения

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/xsVkV5auI7azBA

Презентация https://disk.yandex.ru/i/LNjyMhfTI-mJlA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 10, §1

Упражнение 1. Дать определения:

1) частного решения неоднородного уравнения,

2) общего решения однородного уравнения,

3) общего решения неоднородного уравнения.

Решение. Одна из основных задач линейной алгебры — задача решения *линейного уравнения*

$$\mathcal{A}x = y. \tag{7.1}$$

Здесь

$$\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$$

есть линейный оператор, y — заданный элемент пространства $\mathbb{Y}_m$, а x — искомый элемент пространства $\mathbb{X}_n$. Будем считать, что это уравнение имеет решение, и опишем структуру всех его возможных решений, т. е. получим представление *общего решения уравнения*.

Пусть x^1, x^2 — два решения уравнения (7.1) при одной и той же правой части y. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{A}(x^1 - x^2) = 0,$$

т. е.

$$x^1 - x^2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Фиксируем некоторое решение x^0 уравнения

$$\mathcal{A}x = y.$$

Его называют *частным решением неоднородного уравнения*:

$$\mathcal{A}x^0 = y.$$

Любое другое решение x уравнения $\mathcal{A}x = y$ имеет вид

$$x = x^0 + \widetilde{x}, \quad \widetilde{x} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}). \tag{7.2}$$

Действительно,

$$\mathcal{A}\widetilde{x} = \mathcal{A}(x - x^0) = \mathcal{A}x - \mathcal{A}x^0 = y - y = 0,$$

т. е.

$$\widetilde{x} = x - x^0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Пусть

$$\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$$

есть некий базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$. Тогда из (7.2) заключаем, что

$$x = x^0 + \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k.$$

Это *общее решение неоднородного уравнения*. Меняя в этом представлении коэффициенты c_1, c_2, $\ldots$, c_p, можно получить любое решение уравнения (7.1). Векторы

$$\varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^p$$

называют *фундаментальной системой решений однородного уравнения*

$$\mathcal{A}x = 0. \tag{7.3}$$

Вектор

$$\widetilde{x} = \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi^k$$

называют *общим решением однородного уравнения*.

Итак, общее решение

$$x = x^0 + \widetilde{x}$$

неоднородного уравнения (7.1) есть сумма какого-либо частного решения x^0 этого уравнения и общего решения $\widetilde{x}$ однородного уравнения (7.3).

§ 10.2. Системы линейных алгебраических уравнений. Условия разрешимости

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/NmmtOZDBOqkbEQ

Презентация https://disk.yandex.ru/i/Fokp8tipZNY4Sg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 10, §2

Упражнение 1. Докажите теорему Кронекера — Капелли.

Теорема Кронекера — Капелли. Для того, чтобы система уравнений

$$Ax = b$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранги матрицы A и расширенной матрицы (A,b) совпадали:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A,b).$$

Доказательство. Добавление столбца не уменьшает ранга матрицы:

$$\operatorname{rank}(A) \leqslant \operatorname{rank}(A,b).$$

Ранг сохраняется тогда и только тогда, когда b есть линейная комбинация столбцов матрицы A. Последнее эквивалентно тому, что существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$, являющийся решением исходной системы.

Упражнение 2. Доказать матричную теорему Фредгольма.

Матричная теорема Фредгольма. Для того, чтобы система линейных уравнений

$$Ax = b$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения однородной системы уравнений

$$zA = 0$$

выполнялось равенство

$$zb = 0.$$

Здесь b — вектор столбец, z — вектор строка.

Доказательство. Достаточность. Пусть

$$r = \operatorname{rank}(A).$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что первые r строк матрицы A линейно независимы. Понятно, что тогда и первые r строк матрицы (A,b) линейно независимы. Если k-я строка матрицы A линейно выражается через ее первые r строк, то существует вектор

$$z \neq 0$$

такой, что

$$zA = 0.$$

По условию теоремы для этого вектора $z \neq 0$ кроме

$$zA = 0$$

выполняется еще и равенство

$$zb = 0,$$

но это означает, что k-я строка матрицы (A,b) линейно выражается через ее первые r строк, т. е.

$$\operatorname{rank}(A,b) = r.$$

Таким образом,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A,b),$$

и по теореме Кронекера — Капелли система $Ax = b$ имеет решение.

Необходимость. Пусть СЛАУ имеет решение, т. е. существует вектор $x \in \mathbb{C}^n$ такой, что $Ax = b$. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}^m$ справедливо равенство

$$zAx = zb.$$

Очевидно, что если $zA = 0$, то $zb = 0$.

§ 10.3. Построение общего решения системы линейных алгебраических уравнений

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/xdz7t4CKe86f5w

Презентация https://disk.yandex.ru/i/TsjLS-xtTWwguQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 10, §2

Упражнение 1. Описать алгоритм построения частного решения неоднородной системы линейных уравнений

$$Ax = b.$$

Решение. Опишем метод, который можно применять для построения частного решения неоднородной системы линейных уравнений.

1. Приведем матрицу (A, b) к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы (A,b) начиная с $(r+1)$-й есть линейные комбинации первых r строк. Система уравнений с преобразованной матрицей эквивалентна исходной. Отбросим последние $(m-r)$ уравнений преобразованной системы. Они являются следствиями первых r уравнений.

2. В оставшихся r уравнениях перенесем слагаемые, содержащие свободные переменные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n в правую часть. Придадим свободным переменным любые значения (чаще всего, нет никаких причин не брать их равными нулю). В результате получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой по построению отличен от нуля. Решив эту крамеровскую систему уравнений, найдем x_1, x_2, ..., x_r. Таким образом, будет построен вектор $x^0 = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$, являющийся частным решением исходной системы уравнений.

Упражнение 2. Описать алгоритм построения фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0.$$

Решение. Опишем метод, который можно применять для построения фундаментальной системы решений. Пусть $\operatorname{rank}(A) = r$. Тогда необходимо найти любые $n-r$ линейно независимых решений системы $Ax = 0$.

1. Приведем матрицу A к такому виду, что главный минор порядка r этой матрицы отличен от нуля, а все строки преобразованной матрицы, начиная с $(r+1)$-й, есть линейные комбинации первых r строк. Отбросим последние $(m-r)$ уравнений преобразованной системы. Они являются следствиями первых r уравнений.

2. Перенесем слагаемые преобразованной системы, содержащие *свободные переменные* $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, в правую часть и зададим свободным переменным следующие значения:

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \ \ldots, \ x_n = 0.$$

Иными словами, положим вектор $y = (x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$, составленный из свободных переменных, равным вектору $i^1 \in \mathbb{C}^{n-r}$. Получим неоднородную крамеровскую систему уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, …, x_r. Решим ее и образуем первый вектор

$$x^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 1, 0, \ldots, 0)$$

искомой фундаментальной системы решений.

3. Для поиска каждого из оставшихся векторов $x^2, \ldots, x^{n-r}$ фундаментальной системы решений необходимо выполнить второй шаг алгоритма, фиксируя другие значения свободных переменных: $y = i^2, \ \ldots, \ y = i^{n-r}$.

В описанном алгоритме вместо векторов i^1, i^2, …, i^{n-r} можно использовать любой базис пространства $\mathbb{C}^{n-r}$.

8. Лекция (строение оператора — 1)

Глава 11. Строение линейного оператора

§ 11.1. Инвариантные подпространства

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/Mo87urcspLbrCQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/6EGISr-4JMCv8A
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §1

Упражнение 1. Какой вид имеет матрица оператора, если известен базис инвариантного подпространства?

Решение. Если известен базис инвариантного подпространства, вид матрицы оператора существенно упрощается. Именно, пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — базис пространства $\mathbb{X}_n$, L — подпространство $\mathbb{X}_n$, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$ и имеющее размерность m. Пусть

$$\{e^k\}_{k=1}^m \subset L.$$

Тогда $\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L,

$$\mathcal{A} : L \to L, \quad e^k \in L, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}e^k \in L, \quad k = 1, \ldots, m,$$

и

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{8.1}$$

Для остальных векторов базиса пространства $\mathbb{X}_n$ имеем

$$e^k \notin L, \quad k = m+1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\mathcal{A}e^k \in \mathbb{X}_n, \quad k = m+1, \ldots, n,$$

и

$$\mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = m+1,\ \ldots,\ n. \tag{8.2}$$

Равенства (8.1) и (8.2) показывают, что матрица A_e может быть записана как блочная 2×2:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$A_{11}(m,m)$, $A_{22}(n-m,n-m)$ — квадратные матрицы,
$0(n-m,m)$ — нулевая матрица,
$A_{12}(m,n-m)$ — прямоугольная матрица.

Еще большее упрощение матрицы A_e достигается, когда пространство $\mathbb{X}_n$ представимо в виде прямой суммы инвариантных подпространств L и M оператора $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathbb{X}_n = L \dotplus M \quad (L \cap M = \{0\})$$

и базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ пространства $\mathbb{X}_n$ выбран так, что векторы
$\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L. Следовательно, векторы
$\{e^k\}_{k=m+1}^n$ — базис подпространства M. Тогда

$$L \ni \mathcal{A}e^k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = 1,\ \ldots,\ m,$$

$$M \ni \mathcal{A}e^k = \sum_{j=m+1}^{n} a_{jk}^{(e)} e^j, \quad k = m+1,\ \ldots,\ n.$$

т. е. матрица A_e принимает блочно диагональный вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(m,m)$, $A_{22}(n-m,n-m)$ — квадратные матрицы. Очевидно, верно и обратное, а именно, если матрица оператора

$$\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$$

в некотором базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$ имеет блочную структуру вида

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(m,m)$, $A_{22}(n-m,n-m)$ — квадратные матрицы, то

$$\mathbb{X}_n = L \dotplus M \quad (L \cap M = \{0\}),$$

$\{e^k\}_{k=1}^m$ — базис подпространства L,
$\{e^k\}_{k=m+1}^n$ — базис подпространства M.

Вообще говоря, и подпространства L и M могут распадаться на прямые суммы инвариантных подпространств меньшей размерности. Тогда количество блоков, стоящих на диагонали матрицы

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

будет увеличиваться, а их размеры будут уменьшаться. Наиболее простым является случай, когда пространство $\mathbb{X}_n$ может быть представлено в виде прямой суммы n одномерных инвариантных подпространств оператора $\mathcal{A}$. Тогда матрица A_e становится диагональной:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Однако, такое представление возможно лишь для некоторых специальных классов операторов.

§ 11.2. Собственные числа и собственные векторы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/-B8QsbLEnrVryg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/M_OOmQMTYqK1vA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §2

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в комплексном пространстве $\mathbb{X}_n$; $L \neq \{0\}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Показать, что у оператора $\mathcal{A}$ есть собственный вектор, принадлежащий L.

Решение. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в комплексном пространстве $\mathbb{X}_n$; $L \neq \{0\}$ — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{A}_L : L \to L$ — сужение оператора $\mathcal{A}$ на L, т. е. оператор, действующий по правилу $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x$ для $x \in L$. Всякий оператор, действующий в конечномерном комплексном пространстве, имеет собственные векторы. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_L$ имеет собственный вектор x, принадлежащий L: $\mathcal{A}_L x = \lambda x$, но тогда имеем $\mathcal{A}x = \lambda x$, где $x \in L$. Что и требовалось доказать.

Упражнение 2. Какой вид имеет матрица оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$, если первые k векторов выбранного базиса пространства $\mathbb{X}_n$ являются собственными векторами $\mathcal{A}$?

Ответ. $A = \begin{pmatrix} \Lambda & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, где Λ — диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Упражнение 3. Доказать, что ядро линейного оператора совпадает с собственным подпространством, отвечающим нулевому собственному числу.

Решение. Собственное подпространство L_λ определено как $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda I)$, следовательно, $L_0 = \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$.

Упражнение 4. Пусть $\mathbb{X}_n$ — конечномерное линейное пространство, как обычно, A_e — матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\mathcal{E}_n$, а λ — собственное число этого оператора. Чему равна размерность собственного подпространства L_λ, если ранг матрицы $A_e - \lambda I$ равен r?

Решение. По определению $L_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I)$, т. е. это множество векторов $x \in \mathbb{X}_n$, удовлетворяющих уравнению

$$(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0. \tag{8.3}$$

Обозначим через $\mathcal{E}^{-1}$ оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$. Это линейный обратимый оператор, причем $\mathcal{A} = \mathcal{E}A_e\mathcal{E}^{-1}$. Умножим обе части уравнения (8.3) на оператор $\mathcal{E}^{-1}$, придем к эквивалентному уравнению

$$(A_e - \lambda I)\xi = 0, \tag{8.4}$$

где

$$\xi = \mathcal{E}^{-1}x. \tag{8.5}$$

Уравнения (8.3) и (8.4) эквивалентны в том смысле, что их решения взаимно однозначно связаны равенством (8.5). Иными словами, пространства $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda I)$

и $\mathrm{Ker}(A_e - \lambda I)$ изоморфны, и их размерности совпадают. Фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (8.4) состоит из $n - r$ векторов. Следовательно, $\dim(L_\lambda) = n - r$.

§ 11.3. Характеристический полином и характеристические числа

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/fSiKOmXt73oE7g
Презентация https://disk.yandex.ru/i/sYaZr-3KSXfOqQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §3

Упражнение 1. Как связаны спектры подобных матриц?

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Характеристические полиномы, а следовательно, и спектры подобных матриц совпадают:

$$\sigma(B) = \sigma(A), \quad B = T^{-1}AT.$$

Доказательство. Пусть T — невырожденная матрица, матрица

$$B = T^{-1}AT$$

подобна матрице A. Тогда

$$B - \lambda I = T^{-1}AT - \lambda I = T^{-1}(A - \lambda I)T.$$

Поскольку

$$\det(T^{-1}) = 1/\det(T),$$

то

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I),$$

и

$$\sigma(B) = \sigma(A).$$

Теорема доказана.

Матрицы оператора в различных базисах подобны, поэтому характеристический полином матрицы оператора и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbb{X}_n$. Характеристический полином матрицы оператора естественно называть поэтому *характеристическим полиномом оператора*.

Характеристические числа матрицы A_e оператора $\mathcal{A}$ называются *характеристическими числами этого оператора*. Они, таким образом, являются инвариантами оператора.

Множество всех характеристических чисел оператора $\mathcal{A}$ (часто называемое его *спектром*) будем обозначать через

$$\sigma(\mathcal{A}).$$

Для оператора, действующего в комплексном пространстве $\mathbb{X}_n$, понятия характеристического числа

$$\det(A_e - \lambda I)x = 0,$$

и собственного числа

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

фактически, не различаются, и применительно к таким операторам соответствующие термины используются как синонимы.

9. Лекция (строение оператора — 2)

§ 11.4. Признак линейной независимости собственных векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/k366gh0-XZPqKQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/iLHcpbh7iUl7lA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §4

Упражнение 1. Какой признак линейной независимости собственных векторов вы знаете?

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Пусть λ_1, λ_2, ..., λ_p — попарно различные собственные числа оператора

$$\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n.$$

Пусть x^1, x^2, ..., x^p — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, причем

$$\mathcal{A}x^k = \lambda_k x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Тогда векторы x^1, x^2, ..., x^p линейно независимы.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в множестве векторов x^1, x^2, ..., x^p можно указать максимальную линейно независимую подсистему. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что это первые r векторов,

$$x^1, x^2, \ldots, x^r, \quad r < p.$$

Обозначим через L_r подпространство пространства $\mathbb{X}_n$, натянутое на линейно независимые собственные векторы x^1, x^2, ..., x^r. Оно имеет размерность r и инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, т. к. любое собственное подпространство оператора является его инвариантным подпространством. Пусть

$$\mathcal{A}_{L_r} : L_r \to L_r$$

есть сужение оператора $\mathcal{A}$ на L_r. Тогда числа

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$$

есть собственные числа оператора $\mathcal{A}_{L_r}$. Все они различны.

Ненулевой вектор x^{r+1} линейно зависит от x^1, x^2, $\ldots$, x^r, поэтому принадлежит L_r и

$$\mathcal{A}_{L_r} x^{r+1} = \mathcal{A} x^{r+1} = \lambda_{r+1} x^{r+1},$$

т. е. λ_{r+1} — собственное число оператора $\mathcal{A}_{L_r}$, но оператор $\mathcal{A}_{L_r} : L_r \to L_r$ действует в пространстве размерности r и потому не может иметь больше чем r различных собственных чисел.

§ 11.5. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных чисел

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/4rla-dk2cXqY8g

Презентация https://disk.yandex.ru/i/PICNS0iW9VTakw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §5

Упражнение 1. Как связаны геометрическая и алгебраическая кратности собственных чисел?

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Для любого оператора $\mathcal{A}$, действующего в конечномерном пространстве $\mathbb{X}_n$, геометрическая кратность любого собственного числа не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть L_{λ_0} — собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее его собственному числу λ_0,

$$\dim(L_{\lambda_0}) = m,$$

и векторы f^1, f^2, $\ldots$, f^m образуют базис этого подпространства. Дополним произвольно указанный базис

$$f^1, \quad f^2, \ \ldots, \ f^m \in L_{\lambda_0}$$

векторами
$$g^{m+1},\quad g^{m+2},\ \ldots,\ g^n \in \mathbb{X}_n$$
до базиса пространства $\mathbb{X}_n$. Поскольку
$$\mathcal{A}f^k = \lambda_0 f^k,\quad k = 1,\, 2,\ \ldots,\, m,$$
то матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе можно представить в блочном виде
$$A = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$
где Λ_0 — диагональная матрица порядка m с числами λ_0 на диагонали. Значит, характеристический полином оператора A имеет вид
$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = \det((\lambda_0 - \lambda)I)\det(A_{22} - \lambda I) = (\lambda - \lambda_0)^m Q_{n-m}(\lambda),$$
где $Q_{n-m}(\lambda)$ — некоторый полином порядка $n-m$. Теперь совершенно очевидно, что m не может превосходить кратности λ_0 как корня уравнения
$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0.$$
Теорема доказана.

§ 11.6. Операторы простой структуры

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/yJRCsB8a0EyJtQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/-S2Bxc-ww83A7g
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §6

Упражнение 1. Докажите следующее утверждение. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая кратность каждого собственного числа оператора $\mathcal{A}$ совпадала с его алгебраической кратностью.

Решение. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — оператор простой структуры, т. е. можно указать базис пространства $\mathbb{X}_n$, все векторы которого — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Lambda_m \end{pmatrix},$$

где Λ_i — диагональная матрица с числами λ_i на диагонали, порядок которой равен геометрической кратности числа λ_i. Следовательно, характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\det(A_e - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \cdots (\lambda_m - \lambda)^{k_m},$$

где k_i — геометрическая кратность числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Ясно, что k_i совпадает с кратностью λ_i как корня уравнения

$$\det(A_e - \lambda I) = 0.$$

Пусть каждому собственному числу отвечает столько линейно независимых собственных векторов, какова его алгебраическая кратность. Собственные векторы, отвечающие попарно различным собственным числам линейно независимы. Следовательно, система всех n собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ линейно независима и является базисом пространства $\mathbb{X}_n$. Утверждение доказано.

Упражнение 2. Докажите следующее утверждение. Для того, чтобы матрицы простой структуры были подобны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические полиномы совпадали.

Решение. Напомним, что две квадратные матрицы A и B называются *подобными*, если они связаны соотношением

$$A = D^{-1}BD,$$

где D — невырожденная матрица. Как известно, характеристические полиномы подобных матриц совпадают. Пусть теперь A и B — две матрицы простой структуры, характеристические полиномы, а следовательно, и спектры которых совпадают. Обозначим через Λ диагональную матрицу, составленную из характеристических чисел этих матриц. По определению матрицы простой структуры можно указать два базиса пространства $\mathbb{C}^n$, состоящие из собственных векторов матриц A и B. Обозначим через E и Q, соответственно, — матрицы, столбцами которых являются векторы этих базисов. Тогда (при соответствующей нумерации собственных векторов)

$$AE = \Lambda E, \quad BQ = \Lambda Q.$$

Столбцы матриц E и Q линейно независимы, следовательно эти матрицы невырождены, и очевидные преобразования двух последних равенств приводят к равенству

$$A = EQ^{-1}BQE^{-1}.$$

Таким образом, матрица A получается из матрицы B при помощи преобразования подобия с матрицей $D = QE^{-1}$. Утверждение доказано.

Упражнение 3. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — операторы простой структуры, характеристические полиномы которых совпадают. Докажите, что тогда существует обратимый оператор $\mathcal{D}$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}$.

Решение. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ и $\mathcal{B} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — операторы простой структуры, характеристические полиномы, а следовательно, и спектры которых совпадают. Обозначим через Λ диагональную матрицу, составленную из характеристических чисел этих операторов, а через $\mathcal{E}^{-1} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{C}^n$ и $\mathcal{Q}^{-1} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{C}^n$, соответственно, операторы разложения по базисам, составленным из собственных векторов операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Оба эти оператора в указанных базисах (при соответствующей нумерации собственных векторов) имеют одну и ту же матрицу Λ, и справедливы равенства:

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E} = \Lambda, \quad \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{Q} = \Lambda.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}$$

где $\mathcal{D} = \mathcal{Q}\mathcal{E}^{-1}$. Утверждение доказано.

10. Лекция (строение оператора — 3)

§ 11.7. Инварианты оператора

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/MiFrIi3KOZim5w
Презентация https://disk.yandex.ru/i/xb11PivdkOZQSA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §7

Упражнение 1. Найти определитель $d(x) = |A + xI|$ третьего порядка.

Решение. Вычислим определитель

$$d(x) = |A + xI| = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + x \end{vmatrix} =$$

$$= x^3 + x^2 \operatorname{tr}(A) + \ \mathbf{???} \ + \det(A).$$

Обозначим

$$\Delta(a^1, a^2, a^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(A).$$

Тогда

$$\Delta(i^1, i^2, i^3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Запишем *диагональные миноры* второго порядка:

$$\Delta(i^1, a^2, a^3) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(a^1, i^2, a^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(a^1,a^2,i^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Запишем *диагональные миноры* первого порядка:

$$\Delta(i^1,i^2,a^3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33},$$

$$\Delta(i^1,a^2,i^3) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = a_{22},$$

$$\Delta(a^1,i^2,i^3) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}.$$

Вычислим

$$d(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix} = \Delta(a^1+xi^1,a^2+xi^2,a^3+xi^3),$$

используя линейность определителя по каждому столбцу:

$$d(x) = \Delta(a^1+xi^1,a^2+xi^2,a^3+xi^3) =$$

$$= \Delta(a^1,a^2+xi^2,a^3+xi^3) + x\Delta(i^1,a^2+xi^2,a^3+xi^3) =$$

$$= \Delta(a^1,a^2,a^3+xi^3) + x\Delta(a^1,i^2,a^3+xi^3) + x[\Delta(i^1,a^2,a^3+xi^3) + x\Delta(i^1,i^2,a^3+xi^3)] =$$

$$= \Delta(a^1,a^2,a^3) + x\underline{\Delta(a^1,a^2,i^3)} + x[\underline{\Delta(a^1,i^2,a^3)} + x\underline{\underline{\Delta(a^1,i^2,i^3)}}]+$$

$$+x[\underline{\Delta(i^1,a^2,a^3)} + x\underline{\underline{\Delta(i^1,a^2,i^3)}}] + x^2[\underline{\underline{\Delta(i^1,i^2,a^3)}} + x\underline{\underline{\underline{\Delta(i^1,i^2,i^3)}}}] =$$

$$= \Delta(a^1,a^2,a^3) + x[\Delta(i^1,a^2,a^3) + \Delta(a^1,i^2,a^3) + \Delta(a^1,a^2,i^3)]+$$

$$+x^2[\Delta(i^1,i^2,a^3) + \Delta(i^1,a^2,i^3) + \Delta(a^1,i^2,i^3)] + x^3\Delta(i^1,i^2,i^3).$$

Итак,

$$d(x) = \Delta(a^1,a^2,a^3) + x[\Delta(i^1,a^2,a^3) + \Delta(a^1,i^2,a^3) + \Delta(a^1,a^2,i^3)]+$$

$$+x^2[\Delta(i^1,i^2,a^3) + \Delta(i^1,a^2,i^3) + \Delta(a^1,i^2,i^3)] + x^3\Delta(i^1,i^2,i^3) =$$

$$= \det(A) + x\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + x^2\mathrm{tr}(A) + x^3.$$

Упражнение 2. Чему равны инварианты оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$?

Решение. *Инвариантами оператора* $\mathcal{A}$ называются коэффициенты

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k(\mathcal{A}), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

полинома

$$\det(\lambda I - A_e) = \lambda^n - \mathcal{I}_1\lambda^{n-1} + \mathcal{I}_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n\mathcal{I}_n.$$

Они не зависят от выбора базиса в пространстве $\mathbb{X}_n$ и равны суммам диагональных миноров его матрицы:

$$\mathcal{I}_k(\mathcal{A}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \begin{vmatrix} a^e_{i_1,i_1} & a^e_{i_1,i_2} & \ldots & a^e_{i_1,i_k} \\ a^e_{i_2,i_1} & a^e_{i_2,i_2} & \ldots & a^e_{i_2,i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^e_{i_k,i_1} & a^e_{i_k,i_2} & \ldots & a^e_{i_k,i_k} \end{vmatrix}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

в частности,

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{A}) = \mathrm{tr}(A_e), \quad \mathcal{I}_n(\mathcal{A}) = \det(A_e).$$

§ 11.9. Инвариантные подпространства оператора в вещественном пространстве

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/M7MfK9JMW8FCjA

Презентация https://disk.yandex.ru/i/PayHWIP3Hwquuw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 11, §9

Упражнение 1. Пусть $\mathbb{X}_n$ — вещественное линейное пространство. Показать, что в любом подпространстве $L_m \subset \mathbb{X}_n$, размерности $m \geqslant 2$, инвариантном относительно оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$, оператор $\mathcal{A}$ имеет либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.

Решение. Обозначим $\mathcal{A}_L : L_m \to L_m$ — сужение оператора $\mathcal{A}$ на L_m, т. е. оператор, действующий по правилу $\mathcal{A}_L x = \mathcal{A}x$ для $x \in L_m$. Соответствующее характеристическое уравнение — алгебраическое уравнение порядка $m \geqslant 2$ с вещественными коэффициентами. Оно имеет m корней. Пусть λ — вещественный корень, тогда существует собственный вектор x, отвечающий λ. Подпространство, натянутое на x будет одномерным инвариантным подпространством оператора $\mathcal{A}_L$. Если λ — комплексный корень, то ему соответствует двумерное инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}_L$. Ясно, что указанные подпространства будут инвариантными подпространствами и для оператора $\mathcal{A}$.

11. Лекция (операторы в евклидовом пространстве — 1)

Глава 12. Операторы в евклидовом пространстве

§ 12.1. Линейные функционалы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/rM2cN9oYmJFe_g
Презентация https://disk.yandex.ru/i/6pX2F4q7Cnon8w
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §1

Упражнение 1. Сформулируйте Теорему Рисса.

Решение. Линейное отображение пространства $\mathbb{X}$ в пространство $\mathbb{C}$

$$l : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$$

называется *линейным функционалом* (*линейной формой*). Подчеркнем, что линейный функционал ставит в соответствие каждому вектору $x \in \mathbb{X}$ число. Имеет место

Теорема Рисса. Пусть l — линейный функционал, заданный на конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{X}_n$. Тогда существует и при том только один вектор $u \in \mathbb{X}_n$ такой, что

$$l(x) = (x,u) \quad \forall\, x \in \mathbb{X}_n.$$

§ 12.2. Сопряженный оператор

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/LAJV3huAgyLadg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/U0ruWcn1vMeEQA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §2

Упражнение 1. Докажите, что каждому оператору соответствует один и только один сопряженный оператор.

Решение. Пусть $\mathbb{X}_n$, $\mathbb{Y}_m$ — евклидовы пространства, $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ — линейный оператор. Оператор $\mathcal{A}^* : \mathbb{Y}_m \to \mathbb{X}_n$ называется *сопряженным* к оператору $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x,y) = (x,\mathcal{A}^*y) \ \text{ для любых } \ x \in \mathbb{X}_n \text{ и } y \in \mathbb{Y}_m. \tag{11.1}$$

Конечно, в левой части здесь имеется в виду скалярное произведение в пространстве $\mathbb{Y}_m$, а в правой части — в пространстве $\mathbb{X}_n$.

Мы знаем, что для любого оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ существует сопряженный оператор $\mathcal{A}^* : \mathbb{Y}_m \to \mathbb{X}_n$. Предположим, что существует еще один оператор $\widetilde{\mathcal{A}}^* : \mathbb{Y}_m \to \mathbb{X}_n$ такой, что

$$(\mathcal{A}x,y) = (x,\widetilde{\mathcal{A}}^*y) \text{ для любых } x \in \mathbb{X}_n \text{ и } y \in \mathbb{Y}_m. \tag{11.2}$$

Вычитая равенства (11.1), (11.2) почленно получим, что

$$(x,\widetilde{\mathcal{A}}^*y - \mathcal{A}^*y) = 0 \text{ для любых } x \in \mathbb{X}_n \text{ и } y \in \mathbb{Y}_m.$$

В частности, в последнем равенстве можно положить $x = \widetilde{\mathcal{A}}^*y - \mathcal{A}^*y$, и тогда

$$\left(\widetilde{\mathcal{A}}^*y - \mathcal{A}^*y,\widetilde{\mathcal{A}}^*y - \mathcal{A}^*y\right) = 0,$$

т. е. $\widetilde{\mathcal{A}}^*y - \mathcal{A}^*y = 0$ для любого вектора $y \in \mathbb{Y}_m$, а это и означает, что $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Упражнение 2. Докажите, что если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ — линейные операторы, то $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*$ для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$.

Решение. По определению сопряженного оператора,

$$((\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x,y) = (x,(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^*y) \ \text{ для любых } x \in \mathbb{X}_n \text{ и } y \in \mathbb{Y}_m.$$

С другой стороны,

$$((\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x,y) = \alpha(\mathcal{A}x,y)+\beta(\mathcal{B}x,y) = \alpha(x,\mathcal{A}^*y)+\beta(x,\mathcal{B}^*y) = (x,(\overline{\alpha}\mathcal{A}^*+\overline{\beta}\mathcal{B}^*)y).$$

Сравнивая два последних равенства, и используя произвольность вектора $x \in \mathbb{X}_n$, получаем $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^*y = (\overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*)y$ для любого вектора $y \in \mathbb{Y}_m$, а это и означает, что $(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*$.

Упражнение 3. Покажите, что для любых операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, для которых определен оператор $\mathcal{A}\mathcal{B}$, справедливо равенство

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* \tag{11.3}$$

Решение. По определению сопряженного оператора,

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}x,y) = (x,(\mathcal{A}\mathcal{B})^*y) \text{ для любых } x \in \mathbb{X}_n \text{ и } y \in \mathbb{Y}_m.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}x,y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x),y) = (\mathcal{B}x,\mathcal{A}^*y) = (x,\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y).$$

Сравнивая два последних равенства, и используя произвольность векторов $x \in \mathbb{X}_n$ и $y \in \mathbb{Y}_m$, получаем $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

Упражнение 4. Докажите, что если линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ обратим, то оператор $\mathcal{A}^*$ также обратим, причем

$$(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*. \tag{11.4}$$

Решение. Используем предыдущее упражнение. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, имеем $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^* = I^* = I$. Следовательно, $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$.

§ 12.3. Вычисление матрицы оператора в евклидовом пространстве

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/3SBVUXXLodMuEQ

Презентация https://disk.yandex.ru/i/CVUlIixNXKSW6A

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §3

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ есть линейный оператор. Фиксируем в пространстве $\mathbb{X}_n$ базис $\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n$, а в пространстве $\mathbb{Y}_m$ — базис $\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m$. Пусть пространство $\mathbb{Y}_m$ евклидово, а базис $\mathcal{Q}_m$ ортонормирован. Как выглядит матрица A_{eq} оператора $\mathcal{A}$?

Решение.

$$A_{eq} = G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}e^1,q^1) & (\mathcal{A}e^2,q^1) & \dots & (\mathcal{A}e^n,q^1) \\ (\mathcal{A}e^1,q^2) & (\mathcal{A}e^2,q^2) & \dots & (\mathcal{A}e^n,q^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}e^1,q^m) & (\mathcal{A}e^2,q^m) & \dots & (\mathcal{A}e^n,q^m) \end{pmatrix}.$$

§ 12.4. Линейные уравнения в евклидовом пространстве

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/NEim3FPopGE1sQ

Презентация https://disk.yandex.ru/i/00jzi7fiATrIUw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §4

Упражнение 1. Сформулируйте теорему об ортогональном разложении того пространства, куда действует линейный оператор. Как выглядит ортогональное разложение того пространства, откуда он действует?

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\mathbb{X}_n, \mathbb{Y}_m$ — евклидовы пространства. Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{Y}_m$ пространство $\mathbb{Y}_m$ допускает следующее ортогональное разложение:

$$\mathbb{Y}_m = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

Имеет место и следующее разложение:

$$\mathbb{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*).$$

Упражнение 2. Как связан ранг оператора $\mathcal{A}$ с рангом сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$?

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует из конечномерного евклидова пространства $\mathbb{X}_n$ в конечномерное евклидово пространство $\mathbb{Y}_m$. Тогда

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}^*).$$

Упражнение 3. Сформулируйте теорему Фредгольма.

Решение. Справедлива

Теорема Фредгольма. Для того, чтобы уравнение

$$\mathcal{A}x = y$$

имело решение необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна любому решению однородного уравнения

$$\mathcal{A}^* z = 0.$$

12. Лекция (операторы в евклидовом пространстве — 2)

§ 12.6. Самосопряженный и косоэрмитов операторы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/wAJjqCsh4FH53g
Презентация https://disk.yandex.ru/i/-wkkJkPMkLPpMw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §6

Упражнение 1. Покажите, что если оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ самосопряжен, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x,x)$ вещественно для любого $x \in \mathbb{X}_n$; если оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x,x)$ — мнимое число для любого $x \in \mathbb{X}_n$.

Решение. Пусть x — произвольный вектор из $\mathbb{X}_n$, оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. Тогда

$$(\mathcal{A}x,x) = (x,\mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x,x)}. \tag{12.1}$$

Следовательно, $(\mathcal{A}x,x) \in \mathbb{R}$. Если оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов, то

$$(\mathcal{A}x,x) = (x,\mathcal{A}^*x) = -(x,\mathcal{A}x) = -\overline{(\mathcal{A}x,x)},$$

т. е. $\operatorname{Re}(\mathcal{A}x,x) = 0$.

Упражнение 2. Докажите, что если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе эрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе косоэрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов.

Решение. Обозначим через A_e матрицу оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ в базисе $\mathcal{E}_n$. Если базис ортонормирован, то матрица A_e имеет вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}e^1,e^1) & (\mathcal{A}e^2,e^1) & \dots & (\mathcal{A}e^n,e^1) \\ (\mathcal{A}e^1,e^2) & (\mathcal{A}e^2,e^2) & \dots & (\mathcal{A}e^n,e^2) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (\mathcal{A}e^1,e^n) & (\mathcal{A}e^2,e^n) & \dots & (\mathcal{A}e^n,e^n) \end{pmatrix}. \tag{12.2}$$

Пусть x и y — произвольные векторы пространства $\mathbb{X}_n$. Разложим их по базису $\mathcal{E}_n$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \quad y = \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l.$$

Пусть матрица A_e эрмитова. Тогда

$$(\mathcal{A}x,y) = \left(\mathcal{A} \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l \right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\eta}_l (\mathcal{A}e^k,e^l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\eta}_l \overline{(\mathcal{A}e^l,e^k)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\eta}_l (e^k,\mathcal{A}e^l) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \mathcal{A} \sum_{l=1}^{n} \eta_l e^l \right) = (x,\mathcal{A}y),$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. Второе утверждение доказывается аналогично.

Упражнение 3. Пусть $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$. Пусть на пространстве $\mathbb{C}^n$ введено стандартное скалярное произведение. Показать, что $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{-1}$, а именно, что

$$(\mathcal{E}\xi,y) = (\xi,\mathcal{E}^{-1}y) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n,\ y \in \mathbb{X}_n. \tag{12.3}$$

Решение. Пусть y — произвольный вектор пространства $\mathbb{X}_n$. Разложим его по ортонормированному базису $\mathcal{E}_n$:

$$y = \sum_{k=1}^{n} (y,e^k) e^k = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e^k, \quad \eta = \mathcal{E}^{-1} y.$$

Для любого $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\mathcal{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k,$$

следовательно,

$$(\mathcal{E}\xi,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, y \right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k (e^k,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k = (\xi,\eta) = (\xi,\mathcal{E}^{-1}y).$$

Упражнение 4. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Показать, что если трактовать ее как оператор в $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением, то эрмитово сопряженная матрица A^* порождает сопряженный оператор в $\mathbb{C}^n$. Аналогичное утверждение справедливо и для прямоугольной матрицы.

Решение. Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Обозначим через a^*_{ki} элементы матрицы $A^* = \bar{A}^T$. Тогда для произвольных векторов $x,\ y \in \mathbb{C}^n$ справедлива цепочка равенств:

$$(Ax,y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right)\overline{y}_i = \sum_{k=1}^{n} x_k\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\overline{y}_i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{a_{ik}}y_i\right)} = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} a^*_{ki}y_i\right)} = (x,A^*y).$$

Для прямоугольной матрицы рассуждения аналогичны.

Упражнение 5. Пусть $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — линейный оператор, A_e — матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Известно, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}A_e\mathcal{E}^{-1}.$$

Показать, что

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{E}A^*_e\mathcal{E}^{-1}. \tag{12.4}$$

Решение. Используем два предыдущих упражнения. Из равенств

$$I = (\mathcal{E}\mathcal{E}^{-1})^* = (\mathcal{E}^{-1})^*\mathcal{E}^* = (\mathcal{E}^{-1})^*\mathcal{E}^{-1}$$

заключаем, что

$$(\mathcal{E}^{-1})^* = \mathcal{E}. \tag{12.5}$$

Далее, имеем

$$\mathcal{A}^* = \left(\mathcal{E}A_e\mathcal{E}^{-1}\right)^* = (\mathcal{E}^{-1})^*A^*_e\mathcal{E}^* = \mathcal{E}A^*_e\mathcal{E}^{-1}.$$

Из полученного равенства также непосредственно следует утверждение упражнения 2, с. 64.

§ 12.7. Неотрицательный и положительно определенный операторы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/TDDoDFgFtvvY4g

Презентация https://disk.yandex.ru/i/IbWN9yrWhhqOoQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §7

Упражнение 1. Покажите, что если $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — положительно определенный оператор, то равенство $(x,y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x,y)$ определяет скалярное произведение на пространстве $\mathbb{X}_n$.

Решение. Проверим, что аксиомы скалярного произведения выполнены. По определению положительно определенного оператора для любого не равного нулю вектора $x \in \mathbb{X}_n$ имеем

$$(x,x)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x,x) > 0.$$

Из этого строгого неравенства также вытекает, что из $(\mathcal{A}x,x) = 0$ следует, что $x = 0$. Так как в противном случае $(\mathcal{A}x,x) > 0$. Ясно, что из $x = 0$ следует равенство $(\mathcal{A}x,x) = 0$. Таким образом первая аксиома скалярного произведения имеет место:

$$(x,x)_{\mathcal{A}} \geqslant 0 \; \forall x \in \mathbb{X}_n, \text{ равенства } (x,x)_{\mathcal{A}} = 0 \text{ и } x = 0 \text{ эквивалентны.}$$

При проверке второй аксиомы, используем то, что оператор $\mathcal{A}$ — самосопряжен:

$$(x,y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x,y) = (x,\mathcal{A}^*y) = (x,\mathcal{A}y) = \overline{(\mathcal{A}y,x)} = \overline{(y,x)}_{\mathcal{A}} \; \forall x,y \in \mathbb{X}_n.$$

Третья аксиома вытекает из линейности оператора $\mathcal{A}$:

$$(\alpha x + \beta y,z)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}(\alpha x + \beta y),z) = \alpha(\mathcal{A}x,z) + \beta(\mathcal{A}y,z) =$$

$$= \alpha(x,z)_{\mathcal{A}} + \beta(y,z)_{\mathcal{A}} \; \forall x,y \in \mathbb{X}_n, \; \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Упражнение 2. Покажите, что для любого оператора $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен и неотрицателен. Если оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ обратим, то оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ положительно определен.

Решение. Из $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ и равенства (11.3) заключаем, что оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен:

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Кроме того,

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x,x) = (\mathcal{A}x,\mathcal{A}x). \tag{12.6}$$

По первой аксиоме скалярного произведения,

$$(\mathcal{A}x,\mathcal{A}x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{X}_n \tag{12.7}$$

и $(\mathcal{A}x,\mathcal{A}x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}x = 0$. Из (12.6) и (12.7) следует, что оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ неотрицателен. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то $\mathcal{A}x = 0$ только при $x = 0$, и

$$(\mathcal{A}x,\mathcal{A}x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \text{ из } \mathbb{X}_n. \tag{12.8}$$

Из (12.6) и (12.8) вытекает, что в этом случае оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ положительно определен.

Упражнение 3. Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом пространстве $\mathbb{X}_n$. Докажите, что если оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ положительно определен, то оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

Решение. Любой линейный оператор представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2,$$

где i — мнимая единица,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$$

суть самосопряженные операторы. Пусть λ — некоторое собственное число оператора $\mathcal{A}$, отвечающее нормированному собственному вектору x. Тогда

$$\lambda = \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)} = (\mathcal{H}_1x,x) + i(\mathcal{H}_2x,x),$$

причем оба скалярных произведения в правой части последнего равенства — вещественные числа. По условию упражнения вещественная часть произвольного собственного числа λ оператора $\mathcal{A}$ положительна. Таким образом, все собственные числа оператора $\mathcal{A}$ отличны от нуля. Для завершения доказательства достаточно вспомнить, что определитель оператора равен их произведению.

Упражнение 4. Покажите, что матрица положительно определенного оператора в любом ортонормированном базисе положительно определена.

Решение. Пусть $\mathbb{X}_n$ — евклидово пространство, $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по этому базису, $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — линейный оператор, A_e — эрмитова матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда справедливо представление $A_e = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}$. Для произвольного ненулевого элемента ξ пространства $\mathbb{C}^n$ имеем (см. равенство (12.5)):

$$(A_e\xi,\xi) = (\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E}\xi,\xi) = (\mathcal{A}(\mathcal{E}\xi),\mathcal{E}\xi) = (\mathcal{A}x,x) > 0,$$

т. к. оператор $\mathcal{A}$ положительно определен, а $x = \mathcal{E}\xi \neq 0$.

Упражнение 5. Покажите, что все элементы главной диагонали положительно определенной матрицы положительны.

Решение. По определению положительно определенной матрицы A для любого ненулевого элемента x пространства $\mathbb{C}^n$ справедливо неравенство

$$(Ax,x) > 0.$$

Положим $x = i^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где, как обычно, через i^k обозначен k-тый элемент естественного базиса пространства $\mathbb{C}^n$. Получим

$$(Ai^k,i^k) = a_{kk} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Упражнение 6. Покажите, что матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна.

Решение. Обозначим $g_{ik} = (a^k,a^i)$ элементы матрицы Грама G системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$. Тогда для произвольного вектора $x \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$(Gx,x) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n g_{ik}x_k\overline{x}_i = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n (a^k,a^i)x_k\overline{x}_i = \left(\sum_{k=1}^n x_k a^k, \sum_{i=1}^n x_i a^i\right) = (y,y) \geqslant 0,$$

где $y = \sum\limits_{i=1}^n x_i a^i$, т. е. матрица G неотрицательна.

Упражнение 7. Покажите, что линейная независимость системы векторов эквивалентна положительной определенности матрицы Грама этой системы векторов.

Решение. Как было установлено в предыдущем упражнении, скалярное произведение (Gx,x) обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n x_i a^i = 0. \tag{12.9}$$

С другой стороны, для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была невырожденной. Следовательно, положительная определенность матрицы Грама системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ эквивалентна линейной независимости этой системы.

Упражнение 8. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ самосопряженный и положительно определенный оператор. Доказать, что тогда оператор $\mathcal{A}^{-1}$ также самосопряженный и положительно определенный.

Решение. Если $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — самосопряженный оператор тогда оператор $\mathcal{A}^{-1}$ также самосопряженный. Действительно, в силу (11.4), для произвольных векторов x, $y \in \mathbb{X}_n$ справедлива цепочка равенств:

$$(\mathcal{A}^{-1}x,y) = (x,(\mathcal{A}^{-1})^*y) = (x,(\mathcal{A}^*)^{-1}y) = (x,\mathcal{A}^{-1}y).$$

Пусть λ — собственное число положительно определенного оператора $\mathcal{A}$. Тогда $1/\lambda$ — собственное число оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Действительно, для обратимого оператора из $\mathcal{A}x = \lambda x$ следует $(1/\lambda)x = \mathcal{A}^{-1}x$. Для того, чтобы самосопряженный оператор был положительно определен необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были положительны. Следовательно, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ положительно определен. Утверждение доказано.

Упражнение 9. Пусть A, B — эрмитовы матрицы порядка n, причем матрица A положительно определена, B неотрицательна. Доказать, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \geqslant 0.$$

Решение. Заметим, что если матрица $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ эрмитова то матрица $\overline{B} = \{\bar{b}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ тоже эрмитова. Действительно, $\overline{B}^* = B^T$, а если $B = B^*$, то $B^T = \overline{B}$. Далее, если матрица B неотрицательна, то и $\overline{B}$ обладает тем же свойством. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить комплексное сопряжение от обеих частей неравенства

$$(Bx,x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Получим

$$(\overline{B}\overline{x},\overline{x}) \geqslant 0 \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{C}^n,$$

что означает неотрицательность матрицы $\overline{B}$.

Вычислим теперь диагональные элементы матрицы $A\overline{B}$:

$$(A\overline{B})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \mathrm{tr}(A\overline{B}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

где λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — собственные числа матрицы $A\overline{B}$. Матрица A обратима. Поэтому задача на собственные значения $A\overline{B}x = \lambda x$ эквивалентна задаче на собственные значения $\overline{B}x = \lambda A^{-1}x$. Пусть λ, x — собственная пара этой задачи. Умножим левую и правую части последнего равенства скалярно на x, получим $(\overline{B}x,x) = \lambda(A^{-1}x,x)$. Матрица $\overline{B}$ неотрицательна, следовательно, $(\overline{B}x,x) \geqslant 0$. Матрица A самосопряженная и положительно определенная, следовательно, по предыдущему упражнению, A^{-1} также самосопряженная и положительно определенная матрица, и $(A^{-1}x,x) > 0$. Отсюда $\lambda \geqslant 0$, а значит $\mathrm{tr}(A\overline{B}) \geqslant 0$. Утверждение доказано.

Упражнение 10. Показать, что последнее утверждение справедливо в случае, когда A — неотрицательная матрица.

Решение. Действительно, если A неотрицательна, то при любом $\varepsilon > 0$ матрица $A + \varepsilon I$, где I — единичная матрица, положительно определена, следовательно, $\mathrm{tr}((A + \varepsilon I)\overline{B}) \geqslant 0$, т. е. $\mathrm{tr}(A\overline{B}) + \varepsilon \mathrm{tr}\overline{B} \geqslant 0$ для любого сколь угодно малого положительного ε. Устремляя ε к нулю, получим $\mathrm{tr}(A\overline{B}) \geqslant 0$. Утверждение доказано.

13. Лекция (операторы в евклидовом пространстве — 3)

§ 12.8. Унитарный оператор

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/RCdUGMk8mTlHZA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/tkT1m5ks46H9eQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §8

Упражнение 1. Покажите, что для того чтобы оператор был унитарным необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была унитарна.

Решение. Пусть $\mathbb{X}_n$ — евклидово пространство, $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по базису $\mathcal{E}_n$. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — линейный оператор, A_e — матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}$, и

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E} A_e^{-1} \mathcal{E}^{-1}.$$

С другой стороны, по (12.4) имеем

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1}.$$

Из двух последних равенств заключаем, что если оператор $\mathcal{A}$ унитарен, т. е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, то матрица A_e унитарна: $A_e^* = A_e^{-1}$, и наоборот.

Упражнение 2. Покажите, что определитель унитарного оператора по модулю равен единице.

Решение. Определитель оператора есть определитель матрицы этого оператора в любом базисе. По предыдущему упражнению матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе унитарна, а определитель такой матрицы, как известно, по модулю равен единице.

Упражнение 3. Покажите, что произведение унитарных операторов — унитарный оператор.

Решение. Пусть $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{-1}$. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1} = (\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1},$$

т. е. оператор $\mathcal{A}\mathcal{B}$ является унитарным.

Упражнение 4. Покажите, что если для любого вектора $x \in \mathbb{X}_n$ выполнено равенство $|\mathcal{A}x| = |x|$, то $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — унитарный оператор.

Решение. Пусть для любого вектора $x \in \mathbb{X}_n$ выполнено равенство $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x,x)$. Тогда $(x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = (x,x)$. В силу произвольности x заключаем, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I$, т. е. $\mathcal{A}$ — унитарный оператор.

Упражнение 5. Пусть оператор $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ переводит ортонормированный базис $\mathcal{E}_n \subset \mathbb{X}_n$ в ортонормированный базис $\mathcal{Q}_n \subset \mathbb{X}_n$, т. е.

$$\mathcal{A}e^k = q^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.1}$$

Покажите, что $\mathcal{A}$ — унитарный оператор.

Решение. Разложим произвольный вектор $x \in \mathbb{X}_n$ по базису $\mathcal{E}_n$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k.$$

Базис $\mathcal{E}_n$ ортонормированный, поэтому

$$|x|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l e^l \right) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2.$$

С другой стороны, в силу ортонормированности базиса $\mathcal{Q}_n$ имеем

$$|\mathcal{A}x|^2 = (\mathcal{A}x,\mathcal{A}x) = \left(\mathcal{A}\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k, \mathcal{A}\sum_{l=1}^{n} \xi_l e^l \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k q^k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l q^l \right) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ не меняет длин векторов и, следовательно (см. предыдущее упражнение), является унитарным.

§ 12.9. Нормальный оператор

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/CBOh5qTL5wDWxw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/jwAW40Q21OLA-A

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §9

Упражнение 1. Проверьте, что самосопряженный, косоэрмитов и унитарный операторы — нормальные операторы.

Указание. Воспользуйтесь соответствующими определениями.

Упражнение 2. Покажите, что для того чтобы оператор был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbb{X}_n$ была нормальной.

Решение. Пусть $\mathbb{X}_n$ — евклидово пространство, $\mathcal{E}_n$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{X}_n$, $\mathcal{E}^{-1}$ — оператор разложения по этому базису. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — линейный оператор, A_e — матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E}_n$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1}$. Далее, по (12.4) имеем $\mathcal{A}^* = \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1}$. Следовательно,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E} A_e A_e^* \mathcal{E}^{-1},$$

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E} A_e^* \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} A_e \mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E} A_e^* A_e \mathcal{E}^{-1}.$$

Из двух последних равенств заключаем, что если оператор $\mathcal{A}$ нормальный, т. е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, то матрица A_e нормальная: $A_e A_e^* = A_e^* A_e$, и наоборот.

Упражнение 3. Покажите, что определитель самосопряженного оператора — вещественное число.

Решение. Определитель оператора есть определитель матрицы этого оператора в любом базисе. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе эрмитова, а определитель такой матрицы, как известно, — вещественное число.

Упражнение 4. Верно ли, что всякий нормальный оператор является оператором простой структуры?

Решение. Верно, а именно, справедлива следующая

Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{X}_n$. Для того, чтобы существовал ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{X}_n$ такой, что

$$\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{13.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным.

В теореме утверждается, что для каждого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица

$$A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

где λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — собственные числа оператора, т. е. всякий нормальный оператор есть оператор простой структуры.

Упражнение 5. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n такая, что $A^T A = AA^T$. Опираясь на теорему из предыдущего упражнения, показать, что существует система векторов $\{\xi^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$, ортонормированная в смысле стандартного скалярного произведения пространства $\mathbb{C}^n$, и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$, $k = 1,2,\ldots,n$. Причем, если число λ_k вещественно, то и вектор ξ_k можно выбрать вещественным.

Решение. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка n такая, что $A^T A = AA^T$. Будем трактовать эту матрицу как оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда этот оператор является нормальным. По теореме из предыдущего упражнения, существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ такой, что $Ae^k = \lambda_k e^k$. Если $\lambda_k \in \mathbb{R}$, то вектор e^k удовлетворяет однородной системе линейных алгебраических уравнений с вещественной матрицей $A - \lambda_k I$, следовательно, может быть выбран вещественным.

Упражнение 6. Докажите, что если у нормального оператора все собственные числа вещественны, то он — самосопряженный оператор; если у нормального оператора все собственные числа чисто мнимые, то он — косоэрмитов оператор; если у нормального оператора все собственные числа по модулю равны единице, то он — унитарный оператор.

Решение. Для каждого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица принимает диагональный вид, причем на диагонали матрицы расположены все собственные числа этого оператора.

Если в некотором ортонормированном базисе матрица оператора эрмитова, то он самосопряжен, если матрица косоэрмитова, то оператор косоэрмитов, если матрица унитарна, то и оператор унитарен. Остается заметить, что если матрица диагональна, а на ее диагонали стоят вещественные числа, то матрица, очевидно, эрмитова, если эти числа чисто мнимые, то матрица косоэрмитова, если все диагональные числа по модулю равны единице, то матрица унитарна.

Упражнение 7. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — нормальные операторы, характеристические полиномы которых совпадают. Докажите, что тогда существует унитарный оператор $\mathcal{D}$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{D}^*\mathcal{B}\mathcal{D}$.

Решение. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$, $\mathcal{B} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — нормальные операторы, характеристические полиномы которых совпадают. По теореме из упражнения 4, существуют ортонормированные базисы $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{X}_n$ и $\{q^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{X}_n$ такие, что

$$\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k, \quad \mathcal{B}q^k = \lambda_k q^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $\mathcal{E}^{-1} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{C}^n$ и $\mathcal{Q}^{-1} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{C}^n$ — операторы разложения по базисам $\{e^k\}_{k=1}^n$ и $\{q^k\}_{k=1}^n$ соответственно. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в указанных базисах имеют одну и ту же матрицу $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, и справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{E} = \Lambda, \quad \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{Q} = \Lambda.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D},$$

где $\mathcal{D} = \mathcal{Q}\mathcal{E}^{-1}$. Оператор $\mathcal{D}$ переводит базис $\mathcal{E}_n$ в базис $\mathcal{Q}_n$:

$$\mathcal{D}e^k = \mathcal{Q}\left(\mathcal{E}^{-1}e^k\right) = \mathcal{Q}\,i^k = q^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь, как обычно, через i^k обозначен k-тый элемент естественного базиса пространства $\mathbb{C}^n$. Базисы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{Q}_n$ ортонормированные, следовательно (см. упр. 5, с. 73), оператор $\mathcal{D} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ унитарный. Утверждение доказано.

Упражнение 8. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, $\mathcal{Q}$ — унитарный оператор. Докажите, что оператор $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*$ нормальный и справедливо представление

$$\tilde{\mathcal{A}} = \lambda_1\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathcal{P}}_2 + \dots + \lambda_k\widetilde{\mathcal{P}}_k, \tag{13.3}$$

где λ_1, λ_2, …, λ_k — все попарно различные собственные числа оператора $\mathcal{A}$, а $\widetilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}^*$ — оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbb{X}_n$ на подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$, $i = 1,2,\dots,k$.

Решение. Пусть оператор $\mathcal{A}$ нормальный, а $\mathcal{Q}$ — унитарный. Тогда оператор $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*$ нормальный. Действительно,

$$\widetilde{\mathcal{A}}^*\widetilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*)^*(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*) = \mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{Q}^*,$$

но с другой стороны,

$$\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{A}}^* = (\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*)(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*)^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{Q}^*.$$

Далее, так как оператор $\mathcal{A}$ — оператор простой структуры, то для него справедливо спектральное представление

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathcal{P}_k,$$

где λ_1, λ_2, …, λ_k — все попарно различные собственные числа оператора $\mathcal{A}$, а для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ оператор $\mathcal{P}_i$ есть оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbb{X}_n$ на соответствующее собственное подпространство L_{λ_i}. Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^* = \lambda_1\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathcal{P}}_2 + \dots + \lambda_k\widetilde{\mathcal{P}}_k,$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}^*$, $i = 1, 2, \dots, k$. Остается пояснить, что $\widetilde{\mathcal{P}}_i$ — оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbb{X}_n$ на подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$. Действительно этот оператор — результат последовательного действия трех операторов: оператор $\mathcal{Q}^*$ переводит пространство $\mathbb{X}_n$ в себя, затем оператор $\mathcal{P}_i$ осуществляет ортогональное проектирование пространства $\mathbb{X}_n$ на подпространство L_{λ_i}, а оператор $\mathcal{Q}$ окончательно преобразует подпространство L_{λ_i} в подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$. Утверждение доказано.

Упражнение 9. Доказать следующее утверждение. Для того, чтобы нормальные матрицы A и B были унитарно подобны (т. е. существовала такая унитарная матрица D, что $A = D^*BD$), необходимо и достаточно, чтобы их характеристические полиномы совпадали.

Решение. Характеристические полиномы подобных матриц совпадают. Поэтому необходимость совпадения характеристических полиномов матриц A

и B в условиях доказываемого утверждения очевидна. Докажем достаточность. Пусть A и B — нормальные матрицы, причем их характеристические полиномы совпадают. Убедимся, что эти матрицы унитарно подобны. Будем трактовать их как операторы, действующие в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда эти операторы являются нормальными. По теореме из упражнения 4, существуют ортонормированные базисы $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ и $\{q^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ такие, что

$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad Bq^k = \lambda_k q^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Подчеркнем, что здесь характеристические числа λ_k с совпадающими номерами выбраны равными друг другу. Это можно сделать в силу того, что характеристические числа матриц A и B совпадают. Пусть E и Q — матрицы, столбцами которых являются векторы e^k и q^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, соответственно; $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Тогда

$$AE = \Lambda E, \quad BQ = \Lambda Q.$$

Причем матрицы E и Q унитарны, т. к. их столбцы ортонормированы. Очевидные преобразования двух последних равенств приводят к равенству

$$A = EQ^*BQE^*.$$

Таким образом, матрицы A и B унитарно подобны:

$$A = D^*BD,$$

где $D = QE^*$. Утверждение доказано.

14. Лекция (операторы в евклидовом пространстве — 4)

§ 12.10. Вариационные свойства собственных чисел самосопряженного оператора

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/jJC3YLZlpLwUsA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/ksSOiddY4yDnjw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §10

Упражнение 1. Сформулируйте принцип максимума — минимума для собственных чисел самосопряженного оператора.

Решение. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{X}_n \to \mathbb{X}_n$ — самосопряженный оператор, как обычно, обозначим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — его собственные числа. Пусть $\{e^k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный базис собственных векторов. Будем считать, что собственные числа упорядочены по возрастанию, т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Подчеркнем, что мы рассматриваем как собственные числа оператора все характеристические числа его матрицы, т. е. кратные характеристические числа повторяются столько раз, какова их кратность, поэтому, вообще говоря, неравенства являются нестрогими. Пусть p, q — целые числа такие, что $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Обозначим через $L_{pq} \subseteq \mathbb{X}_n$ подпространство, натянутое на векторы $\{e^k\}_{k=p}^q$. Справедлива следующая

Теорема. Для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\lambda_k = \max_{R_{n-k+1}} \min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}.$$

Здесь $R_{n-k+1} \subset \mathbb{X}_n$ есть подпространство размерности $n-k+1$. Максимум берется по всем подпространствам пространства $\mathbb{X}_n$ размерности $n-k+1$.

Упражнение 2. Сформулируйте принцип минимума — максимума для собственных чисел самосопряженного оператора.

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\lambda_k = \min_{R_k} \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)}.$$

Здесь $R_k \subset \mathbb{X}_n$ есть подпространство размерности k. Минимум берется по всем подпространствам пространства $\mathbb{X}_n$ размерности k.

Упражнение 3. Докажите, что если оператор положительно определен, то его определитель положителен.

Решение. Для того чтобы самосопряженный оператор был положительно определен необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были положительны. Определитель оператора равен произведению его собственных чисел, следовательно, положителен.

Упражнение 4. Докажите неравенство Коши — Буняковского, используя матрицу Грама системы, состоящей из двух векторов x, y евклидова пространства.

Решение. Рассуждая точно также как в предыдущем упражнении, получаем, что определитель неотрицательной матрицы неотрицателен. Матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна. Следовательно, для определителя матрицы Грама G системы из двух векторов x и y справедлива оценка

$$\det(G) = |x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 \geqslant 0,$$

что эквивалентно неравенству Коши — Буняковского:

$$|(x,y)| \leqslant |x||y|.$$

Причем, равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны (см. упр. 7, с. 69).

§ 12.11. Пример применения вариационного описания собственных чисел

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/2KvfuP6LGvEBow

Презентация https://disk.yandex.ru/i/jGPXtIxdXA1_7A

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 12, §11

Упражнение 1. Приведите пример применения вариационного описания собственных чисел.

Решение. Справедлива следующая

Теорема. Обозначим $A_{n+1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$ произвольную эрмитову матрицу порядка $n+1$, $A_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ матрицу, соответствующую ее главному минору порядка n. Пусть

$$\widehat{\lambda}_1 \leqslant \widehat{\lambda}_2 \leqslant \cdots \leqslant \widehat{\lambda}_{n+1}$$

есть собственные числа матрицы A_{n+1},

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

есть собственные числа матрицы A_n. Тогда

$$\widehat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \widehat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \widehat{\lambda}_{n+1},$$

т. е. собственные числа матриц A_n и A_{n+1} перемежаются.

15. Лекция (операторы в вещественном евклидовом пространстве)

Глава 13. Операторы в вещественном евклидовом пространстве

§ 13.1. Общие сведения

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/2D6NrRrStbWmPw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/0TmzUUNmrflCog
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 13, §1

Упражнение 1. Верно ли, что ортогональный оператор не меняет длин векторов и углов между ними?

Решение. Да, верно. Унитарный оператор, т. е. оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I,$$

действующий в вещественном евклидовом пространстве, называется *ортогональным*. Для него

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1},$$

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

Из определения ортогонального оператора сразу же вытекает, что

$$(\mathcal{A}x,\mathcal{A}y) = (x,\mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x,y),$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ не меняет длин векторов,

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{(\mathcal{A}x,\mathcal{A}x)} = |\mathcal{A}x|,$$

и углов между векторами:

$$\cos(x,y) = \frac{(x,y)}{|x||y|} = \frac{(\mathcal{A}x,\mathcal{A}y)}{|\mathcal{A}x||\mathcal{A}y|} = \cos(\mathcal{A}x,\mathcal{A}y).$$

§ 13.3. Структура нормального оператора

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/oOiKEBFWwmlaOQ

Презентация https://disk.yandex.ru/i/PBbf1tiEuA7rcQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 13, §3

Упражнение 1. Сформулируйте теорему о структуре матрицы нормального оператора в вещественном пространстве.

Решение. Имеет место следующая

Теорема. Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{X}_n$, был нормальным оператором, необходимо и достаточно существования ортонормированного базиса $\mathcal{E}_n$ пространства $\mathbb{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно диагональна:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

Диагональные блоки этой матрицы могут иметь размеры либо 1×1 — вещественные числа, либо 2×2 — матрицы вида

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad \alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 2. Какой вид имеет матрица самосопряженного оператора в вещественном пространстве?

Решение. По теореме упражнения 1, существует ортонормированный базис пространства $\mathbb{X}_n$, в котором матрица нормального оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_{\tilde{e}} = \begin{pmatrix} A_1 & \vdots \\ \vdots & A_{m+p} \end{pmatrix}, \; A_k = \alpha_k, \; k = 1, \ldots, m, \quad A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} j = 1, \ldots ,p.$$

Самосопряженный оператор — частный случай нормального. Матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе симметрична, следовательно, все ее характеристические числа вещественны. Поэтому имеем

$$\beta_j = 0, \quad j = 1,2, \ldots ,p.$$

Таким образом, существует ортонормированный базис пространства $\mathbb{X}_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна.

Упражнение 3. Какой вид имеет матрица кососимметричого оператора в вещественном пространстве?

Решение. По теореме упражнения 1, существует ортонормированный базис пространства $\mathbb{X}_n$, в котором матрица нормального оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_{\widetilde{e}} = \begin{pmatrix} A_1 & \vdots \\ \vdots & A_{m+p} \end{pmatrix}, \; A_k = \alpha_k, \, k = 1, \ldots, m, \quad A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} j = 1, \ldots, p.$$

Кососимметричный оператор — частный случай нормального. Матрица кососимметричного оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе кососимметрична, следовательно, все ее характеристические числа чисто мнимые. Поэтому

$$\alpha_j = 0, \quad j = 1{,}2, \ldots, m + p.$$

Значит, все диагональные блоки первого порядка нулевые,

$$A_k = 0, \, k = 1, \ldots, m,$$

а блоки второго порядка кососимметричны:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1{,}2 \ldots, p.$$

§ 13.4. Структура ортогонального оператора

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/5aSN0hEIZWxTiQ

Презентация https://disk.yandex.ru/i/U29erF-YwwEFSw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 13, §4

Упражнение 1. Опишите структуру ортогонального оператора.

Решение. Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе ортогональна, следовательно, все ее характеристические числа по модулю равны единице. Поэтому существует ортонормированый базис пространства $\mathbb{X}_n$, в котором матрица ортогонального оператора принимает вид

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{m+p} \end{pmatrix}.$$

Все диагональные блоки первого порядка — это числа, равные ± 1,

$$A_k = \pm 1, \quad k = 1, 2, \ \ldots, m,$$

а блоки второго порядка имеют вид

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ \ldots, p.$$

Упражнение 2. Всякому ортогональному преобразованию вещественного евклидова пространства можно придать отчетливый геометрический смысл. Опишите двумерный случай.

Решение. Для любого ортогонального преобразования евклидова пространства $\mathbb{X}_2$ существует ортонормированный базис e^1, e^2, в котором его матрица будет либо

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ последняя матрица имеет, соответственно, вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В случае

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$A_e\xi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

следовательно, всякий вектор

$$x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2 \in \mathbb{X}_2$$

переводится оператором $\mathcal{A}$ в вектор

$$\mathcal{A}x = -\xi_1 e^1 + \xi_2 e^2,$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет зеркальное отражение относительно координатной оси ξ_2 (сделайте рисунок!).

Проверим, что в случае

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

справедливо равенство

$$(\mathcal{A}x,x) = |x||\mathcal{A}x|\cos\varphi.$$

Действительно,

$$A_e\xi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi \\ \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В силу ортонормированности базиса e^1, e^2 для $x = \xi_1 e^1 + \xi_2 e^2$ имеем

$$(\mathcal{A}x,x) = (A_e\xi,\xi) =$$

$$= \xi_1(\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi) + \xi_2(\xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi) =$$
$$= \xi_1^2\cos\varphi - \xi_1\xi_2\sin\varphi + \xi_2\xi_1\sin\varphi + \xi_2^2\cos\varphi =$$
$$= \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\cos\varphi.$$

Далее, для

$$A_e\xi = \begin{pmatrix} \xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi \\ \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi \end{pmatrix}$$

имеем

$$|\mathcal{A}x| = \sqrt{(\mathcal{A}x,\mathcal{A}x)} = \sqrt{(A_e\xi,A_e\xi)} =$$

$$= [(\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi)^2 + (\xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi)^2]^{1/2} =$$

$$= [\xi_1^2\cos^2\varphi - 2\xi_1\xi_2\cos\varphi\sin\varphi + \xi_2^2\sin^2\varphi +$$

$$+\xi_1^2\sin^2\varphi + 2\xi_1\xi_2\sin\varphi\cos\varphi + \xi_2^2\cos^2\varphi]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Кроме того,

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{(\xi,\xi)} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Итак,

$$(\mathcal{A}x,x) = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\cos\varphi,$$

$$|x| = |\mathcal{A}x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

следовательно,

$$(\mathcal{A}x,x) = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\cos\varphi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\cos\varphi = |x||\mathcal{A}x|\cos\varphi.$$

Косинус угла между векторами $\mathcal{A}x$ и x вычисляется по формуле

$$\cos(\mathcal{A}x,x) = \frac{(\mathcal{A}x,x)}{|x||\mathcal{A}x|},$$

следовательно, из равенства

$$(\mathcal{A}x,x) = |x||\mathcal{A}x|\cos\varphi$$

заключаем, что

$$\cos(\mathcal{A}x,x) = \cos\varphi$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ осуществляет поворот вектора $x \in \mathbb{X}_2$ на угол φ. Направление поворота (при $\varphi > 0$) совпадает с направлением кратчайшего поворота от e^1 к e^2 (сделайте рисунок!). Действительно, для оператора $\mathcal{A}$ с матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

имеем

$$\mathcal{A}e^1 = e^1\cos\varphi + e^2\sin\varphi,$$

$$\mathcal{A}e^2 = -e^1 \sin\varphi + e^2 \cos\varphi.$$

Упражнение 3. Опишите геометрический смысл ортогонального преобразования вещественного евклидова пространства в трехмерном случае.

Решение. В трехмерном случае у любого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ существует хотя бы одно (вещественное) собственное число, поскольку соответствующее характеристическое уравнение есть алгебраическое уравнение третьего порядка с вещественными коэффициентами. Поэтому с точностью до перенумерации векторов ортонормированного базиса e^1, e^2, $e^3 \in \mathbb{X}_3$ матрица A_e может принять одну из следующих форм

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Поясним, что если оператор $\mathcal{A}$ имеет три собственных числа, то эти представления получаются за счет выбора угла $\varphi = 0$, или $\varphi = \pi$.

Оператор $\mathcal{A}$ с матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

осуществляет поворот пространства $\mathbb{X}_3$ вокруг оси ξ_1 на угол φ. Определитель оператора $\mathcal{A}$ равен единице.

Оператор $\mathcal{A}$ с матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

осуществляет поворот пространства $\mathbb{X}_3$ вокруг оси ξ_1 на угол φ с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной вектору e^1. Определитель оператора $\mathcal{A}$ равен минус единице.

Определитель оператора, как мы знаем, не зависит от выбора базиса пространства. Поэтому все ортогональные преобразования трехмерного пространства можно разбить на два класса:

1) *собственные вращения* — это преобразования с положительным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси;

2) *несобственные вращения* — это преобразования с отрицательным определителем, они осуществляют поворот пространства вокруг некоторой оси с последующим отражением относительно плоскости, ортогональной этой же оси.

Упражнение 4. Покажите, что всякая вещественная симметричная матрица A ортогонально подобна диагональной, т. е.

$$Q^T A Q = \Lambda, \tag{15.1}$$

где Λ — диагональная, Q — ортогональная матрицы. Столбцы матрицы Q — собственные векторы матрицы A, по диагонали матрицы Λ расположены все собственные числа матрицы A.

Решение. Пусть A — вещественная симметричная матрица порядка n. Будем трактовать эту матрицу как оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда этот оператор является нормальным. Поэтому, согласно (13.2), существует ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ такой, что $Ae^k = \lambda_k e^k$. Пусть Q — матрица, столбцами которой являются векторы e^k, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$. Тогда $AQ = \Lambda Q$. Умножим обе части этого равенства слева на Q^T, получим равенство $Q^T A Q = \Lambda$.

§ 13.5. Матрицы вращения и отражения

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/bqV7sTPgAhNejw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/J1W9RL1EtLPPxQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 13, §5

Упражнение 1. Дайте определение матрицы вращения.

Решение. Вещественная матрица

$$Q_{st}(\varphi) = \{q_{ij}(\varphi)\}_{i,j=1}^n, \quad 1 \leqslant s < t \leqslant n,$$

называется *матрицей вращения*, если

$$q_{ss}(\varphi) = q_{tt}(\varphi) = \cos\varphi,$$

$$q_{st}(\varphi) = -\sin\varphi, \quad q_{ts}(\varphi) = \sin\varphi,$$

$$q_{ii}(\varphi) = 1, \quad i \neq s, t,$$

а все остальные элементы матрицы $Q_{st}(\varphi)$ — нули, например,

$$Q_{23}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $Q = Q_{st}(\varphi)$ ортогональна:

$$Q^T Q = I.$$

Например,

$$Q_{23}^T Q_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Порождаемое матрицей Q преобразование евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, например, Q_{23}, есть поворот на угол φ в двумерном подпространстве (плоскости), натянутом на векторы i^s, i^t естественного базиса пространства $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 1. Дайте определение матрицы отражения.

Решение. Пусть $w = \{w_i\}_{i=1}^n$ — произвольно выбранный вектор единичной длины пространства $\mathbb{R}^n$. Матрица

$$R = I - 2ww^T$$

называется *матрицей отражения*. Поясним, что w трактуется здесь как вектор столбец, так что

$$R = \{\delta_{ij} - 2w_i w_j\}_{i,j=1}^n,$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2w_1^2 & -2w_1 w_2 & \dots & -2w_1 w_n \\ -2w_2 w_1 & 1 - 2w_2^2 & \dots & -2w_2 w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2w_n w_1 & -2w_n w_2 & \dots & 1 - 2w_n^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица R симметрична: $R = R^T$. Покажем, что матрица R ортогональна. Действительно,

$$R^T R = R^2 = (I - 2ww^T)(I - 2ww^T) =$$

$$= I - 4ww^T + 4ww^T ww^T = I,$$

так как

$$w^T w = (w,w) = |w|^2 = 1.$$

Заметим, далее, что для оператора $R = I - 2ww^T$ имеем

$$Rw = w - 2ww^T w = -w,$$

так как $w^T w = 1$. Кроме того,

$$Rz = z - 2ww^T z = z,$$

если

$$w^T z = (w,z) = 0,$$

т. е. векторы w и z ортогональны.

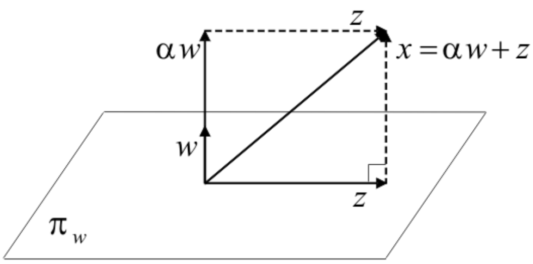

Рисунок 15.1 — К теореме об ортогональной проекции на гиперплоскость.

Напомним, что имеет место следующая

Теорема. Пусть x — произвольный, $w \neq 0$ векторы евклидова пространства $\mathbb{X}_n$. Существуют вектор $z \in \pi_w$ и число α такие, что

$$x = \alpha w + z,$$

причем α и z однозначно определяются по вектору x. Здесь π_w — гиперплоскость, ортогональная вектору w (см. рис. 15.1).

Пусть x — произвольный вектор. По этой теореме он однозначно представим в виде $x = \alpha w + z$, где α некоторое число, z — некоторый вектор, ортогональный w. Из равенств

$$Rw = -w, \quad Rz = z,$$

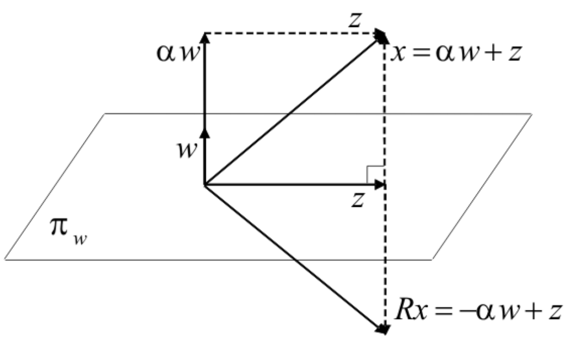

Рисунок 15.2 — К определению матрицы отражения.

вытекает, что

$$Rx = R(\alpha w + z) = -\alpha w + z.$$

Можно сказать, что матрица R выполняет отражение вектора

$$x = \alpha w + z$$

относительно $(n-1)$-мерной гиперплоскости, ортогональной w:

$$Rx = -\alpha w + z.$$

Поэтому матрицу R называют *матрицей отражения*.

16. Лекция (квадратичные формы)

Глава 14. Квадратичные формы и квадратичные функции

§ 14.1. Канонический вид квадратичной формы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/LRNbYM5XlcUs-Q
Презентация https://disk.yandex.ru/i/7OPl_TDjLjUZtA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 14, §1

Упражнение 1. Верно ли, что каждую квадратичную форму невырожденным преобразованием переменных можно привести к каноническому виду?

Решение. Да, верно. *Квадратичной формой* называют вещественную функцию F от n вещественных переменных x_1, x_2, …, x_n вида

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Заданные вещественные числа a_{ij} называют *коэффициентами* квадратичной формы. Коэффициенты квадратичной формы можно считать удовлетворяющими условиям симметрии

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i,\, j = 1,\, 2,\, \dots,\, n,$$

поскольку, слагаемые в квадратичной форме, содержащие коэффициенты a_{ij} и a_{ji}, можно записать так:

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_ix_j + \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_jx_i.$$

Запишем квадратичную форму в более компактном виде. Пусть A есть симметричная матрица с элементами a_{ij}, $\;i,\, j = 1,\, 2,\, \dots\; n$. Вектор

$$x = (x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)$$

будем считать элементом пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$F(x) = (Ax,x).$$

Здесь и всюду на протяжении данной главы скобки обозначают стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть в квадратичной форме $F(x) = (Ax,x)$ выполнена замена переменных, т. е. введены новые переменные $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, связанные со старыми переменными $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ соотношением

$$x = Qy,$$

где Q — невырожденная *матрица преобразования переменных*. Выполнив замену переменных $x = Qy$, получим

$$(Ax,x) = (AQy,Qy) = (Q^T AQy,y) = (By,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j,$$

где

$$B = Q^T AQ.$$

Говорят, что преобразование переменных

$$x = Qy,$$

приводит квадратичную форму к *каноническому виду*, если матрица B диагональна, т. е.

$$(Ax,x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2.$$

Можно сказать также, что форма *приведена к сумме квадратов*.

Всякую квадратичную форму невырожденным преобразованием переменных можно привести к каноническому виду. Действительно, поскольку A — симметричная матрица, существует ортогональная матрица Q такая, что

$$Q^T AQ = \Lambda,$$

где Λ — диагональная матрица, по диагонали которой расположены все собственные числа матрицы A, а столбцы матрицы Q составлены из соответствующих собственных векторов (см. (15.1)). При таком выборе матрицы Q преобразование переменных приводит квадратичную форму к виду

$$(Ax,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

где λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n — собственные числа матрицы A.

Упражнение 2. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму

$$F(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1.$$

Решение. Поскольку в форме

$$F(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$$

отсутствуют квадраты переменных, сделаем сначала замену переменных

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Получим

$$F = 2y_1^2 - 4y_1y_3 - 2y_2^2 - 8y_2y_3.$$

Положим теперь

$$z_1 = y_1 - y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3.$$

Тогда

$$F = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = 2z_1^2 - 2(z_2^2 + 4z_2z_3) - 2z_3^2.$$

Из

$$F = 2z_1^2 - 2(z_2^2 + 4z_2z_3) - 2z_3^2.$$

после замены переменных

$$t_1 = z_1, \quad t_2 = z_2 + 2z_3, \quad t_3 = z_3$$

получаем

$$F = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2,$$

т. е. в переменных t_1, t_2, t_3 квадратичная форма принимает канонический вид. Очевидно, каждое из выполненных нами преобразований переменных имеет невырожденную матрицу. Результирующее преобразование переменных, как нетрудно проверить, имеет вид

$$t_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad t_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3, \quad t_3 = x_3,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

§ 14.2. Закон инерции квадратичных форм

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/Rhh6SF73gTDFEg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/E1u6kFQMIZK-dw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 14, §2

Упражнение 1. В чем состоит закон инерции квадратичных форм?

Решение. Среди коэффициентов b_{ii} канонического вида квадратичной формы могу быть положительные, отрицательные, а также нулевые числа. Нумеруя соответствующим образом переменные, запишем

$$(Ax,x) = (By,y) = \sum_{i=1}^{n_+} b_{ii} y_i^2 + \sum_{i=n_+ +1}^{n_-} b_{ii} y_i^2. \tag{16.1}$$

Считаем при этом, что числа b_{ii} положительны при $i = 1,2,\dots,n_+$ и отрицательны при $i = n_+ + 1,\dots,n_-$.

Поскольку, как мы уже убедились, приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть выполнено различными способами, то естественно поставить вопрос, зависят ли числа

$$n_+, \quad n_-$$

от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

При исследовании этого вопроса будут полезны следующие определения. Симметричные матрицы A и B называют *конгруэнтными*, если существует невырожденная матрица C такая, что

$$B = C^T AC.$$

С каждой симметричной матрицей A свяжем три целых числа:

$$n_0(A)$$

количество нулевых характеристических чисел матрицы A,

$$n_+(A)$$

количество положительных характеристических чисел,

$$n_-(A)$$

количество отрицательных характеристических чисел (характеристические числа подсчитываются с учетом их кратности).

Тройка чисел

$$n_0(A), \quad n_+(A), \quad n_-(A)$$

называется *инерцией матрицы* A или *инерцией*, соответствующей ей *квадратичной формы*. Справедлива следующая

Теорема. Для того, чтобы матрицы A и B были конгруэнтными необходимо и достаточно, чтобы их инерции совпадали.

Следствие (закон инерции квадратичных форм). Количества положительных и отрицательных слагаемых в (16.1) не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы к каноническому виду.

Доказательство. Коэффициенты b_{ii} в (16.1) это характеристические числа диагональной матрицы

$$B = Q^T A Q,$$

конгруэнтной матрице A, поэтому количества положительных и отрицательных слагаемых определяются инерцией матрицы A и не зависят от способа приведения невырожденным линейным преобразованием переменных квадратичной формы к каноническому виду.

§ 14.3. Положительно определенные квадратичные формы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/ETqUdrPs-GAiUA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/7LT1JiwSYQ9uOA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 14, §3

Упражнение 1. Докажите критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм.

Решение. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если соответствующая ей матрица A положительно определена, т. е.

$$(Ax,x) > 0 \quad \text{для всех не равных нулю} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{16.2}$$

Как известно, для того чтобы матрица A была положительно определена необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были положительны. Отметим, что поскольку определитель матрицы равен произведению ее собственных чисел, то определитель положительно определенной матрицы положителен. Полезный признак положительной определенности дает

Теорема (критерий Сильвестра). Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были положительны.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть

$$(Ax,x) > 0 \quad \text{для всех не равных нулю} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Выберем здесь в качестве вектора x вектор вида

$$x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = (y, 0, \ldots, 0),$$

где y можно считать произвольным вектором пространства $\mathbb{R}^k$ для

$$1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда

$$(Ax,x) = (A_k y, y),$$

где A_k — матрица, соответствующая главному минору порядка k матрицы A. Отсюда и условия (16.2), очевидно, вытекает, что

$$(A_k y, y) > 0 \quad \text{для всех не равных нулю} \quad y \in \mathbb{R}^k.$$

т. е. матрица A_k положительно определена, следовательно ее определитель (главный минор порядка k матрицы A) положителен.

Достаточность. Покажем, что если все главные миноры матрицы A положительны, то положительны все ее собственные числа. Тогда положительная определенность матрицы A будет установлена. На самом деле, мы докажем большее, мы покажем, что собственные числа всех главных миноров матрицы A положительны.

Для минора первого порядка, т. е. для a_{11}, это выполняется тривиальным образом. Воспользуемся математической индукцией. Предположим, что у матрицы A_k, соответствующей главному минору порядка k, все собственные числа

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k$$

положительны и покажем, что тогда и у матрицы A_{k+1} все собственные числа

$$\widehat{\lambda}_1 \leqslant \ldots \leqslant \widehat{\lambda}_{k+1}$$

положительны. Как мы знаем, выполнены неравенства

$$\widehat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \widehat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \widehat{\lambda}_{k+1}.$$

В силу того, что

$$\lambda_1 > 0,$$

отсюда вытекает, что

$$\widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_{k+1} > 0.$$

Поскольку по условию

$$\det(A_{k+1}) > 0,$$

а

$$\det(A_{k+1}) = \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \cdots \widehat{\lambda}_{k+1}, \quad \text{то и} \quad \widehat{\lambda}_1 > 0.$$

17. Лекция (квадратичные функции)

§ 14.4. Квадратичная функция и ее инварианты

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/qIzr1tzi5YROsQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/Ef1F0P9SSoIQdQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 14, §4

Упражнение 1. Перечислите инварианты квадратичной функции.

Решение. Пусть фиксированы матрица, вектор и число,

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad a_0 \in R.$$

Определенная на пространстве $\mathbb{R}^n$ вещественная функция вида

$$F(x) = (Ax,x) + 2(a,x) + a_0$$

называется *квадратичной*. Не ограничивая общности можно считать, что

$$A^T = A.$$

Свяжем с каждой квадратичной функцией симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь a трактуется как вектор столбец.

Собственные числа матрицы A, инерция, а следовательно, и ранг матрицы B, а также определитель матрицы B являются *ортогональными инвариантами* квадратичной функции, так как они не меняются при любом преобразовании переменных

$$x = x^0 + Ty$$

с ортогональной матрицей T.

§ 14.5. Приведенная форма квадратичной функции

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/5ni_H-Y3GPMMsw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/0j3Rm3evto1Eow
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 14, §5

Упражнение 1. Как вычислить коэффициенты приведенной формы квадратичной функции методом инвариантов?

Решение. Для любой квадратичной функции

$$F(x) = (Ax{,}x) + 2(a{,}x) + a_0, \tag{17.1}$$

существует матрица T, столбцы которой есть векторы ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$, образованного собственными векторами матрицы A, и вектор x^0 такие, что либо

$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + \widehat{a}_0, \tag{17.2}$$

либо

$$F(x^0 + Ty) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + 2b_{r+1}y_{r+1}. \tag{17.3}$$

Здесь λ_1, λ_2, …, λ_r — все ненулевые собственные числа матрицы A,

$$b_{r+1} > 0.$$

Это, так называемые, *приведенные формы* квадратичной функции. Квадратичной функции (17.2) соответствует матрица

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0^T & \widehat{a}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \widehat{a}_0 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rank}(\widehat{B}) = r, \quad \text{если} \quad \widehat{a}_0 = 0,$$

$$\operatorname{rank}(\widehat{B}) = r + 1, \quad \text{если} \quad \widehat{a}_0 \neq 0.$$

Квадратичной функции (17.3) соответствует матрица

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \Lambda & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rank}(\widehat{B}) = r + 2.$$

Собственные числа матрицы A и ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix}$$

инвариантны по отношению к замене переменных $x = x^0 + Ty$ с любой ортогональной матрицей T и любым вектором x^0. Поэтому любой квадратичной функции (17.1) однозначно соответствует либо приведенная форма вида (17.2) либо приведенная форма вида (17.3).

Коэффициенты приведенной формы квадратичной функции однозначно определяются по элементам матрицы B. Они не зависят от выбора вектора x^0 и ортогональной матрицы T в преобразовании переменных, дающем приведенную форму квадратичной функции. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема. Пусть ранг матрицы A квадратичной функции $F(x)$ равен r, где $r \leqslant n-1$, ранг матрицы B равен $r+2$. Пусть при помощи замены переменных $x = x^0 + Ty$ с ортогональной матрицей T квадратичная функция $F(x)$ приведена к виду

$$\widehat{F}(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_m y_m^2 + 2b y_{m+1}.$$

Тогда:

1) $m = r$, $\alpha_i = \lambda_i$, где λ_i, $i = 1, 2, \dots, r$, — все ненулевые собственные числа матрицы A;

2) выполнено равенство

$$b^2 = -\frac{\mathcal{I}_{r+2}(B)}{\mathcal{I}_r(A)}.$$

В числители здесь стоит инвариант порядка $r+2$ матрицы B. Он равен сумме всех ее диагональных миноров порядка $r+2$:

$$\mathcal{I}_{r+2}(B) = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{r+2}\leqslant n+1} \begin{vmatrix} b_{i_1,i_1} & b_{i_1,i_2} & \dots & b_{i_1,i_k} \\ b_{i_2,i_1} & b_{i_2,i_2} & \dots & b_{i_2,i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_k,i_1} & b_{i_k,i_2} & \dots & b_{i_k,i_k} \end{vmatrix}.$$

В знаменателе стоит инвариант прядка r матрицы A.

Теорема. Пусть ранг матрицы A квадратичной функции $F(x)$ равен r, ранг матрицы B не превосходит $r+1$. Пусть при помощи некоторой замены переменных $x = x^0 + Ty$ с ортогональной матрицей T квадратичная функция $F(x)$ приведена к виду

$$\widehat{F}(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_m y_m^2 + \widehat{a}_0.$$

Тогда:
1) $m = r$, $\alpha_i = \lambda_i$, где λ_i, $i = 1, 2, \dots, r$, — все ненулевые собственные числа матрицы A;
2) справедливо равенство

$$\widehat{a}_0 = \frac{\mathcal{I}_{r+1}(B)}{\mathcal{I}_r(A)}.$$

18. Лекция (кривые второго порядка)

Глава 15. Кривые второго порядка

§ 15.1. Приведение к простейшему виду уравнения кривой второго порядка

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/dUP4yezzOCQIxw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/DvQQ6RmMBQWkPg
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 15, §1

Упражнение 1. Как получить приведенную форму уравнения кривой второго порядка методом поворота координатных осей и переноса начала системы координат?

Решение. *Уравнение второго порядка* имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0. \tag{18.1}$$

Здесь a_{ij}, $i,j = 1,2$, a_i, $i = 0,1,2$ — вещественные числа, называемые *коэффициентами уравнения*. Множество всех точек $x = (x_1,x_2)$, удовлетворяющих уравнению (18.1) называют *кривой второго порядка*.

Будем исследовать уравнение кривой второго порядка. Для сокращения записей введем в рассмотрение симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и вектор

$$a = (a_1, a_2).$$

Тогда уравнение

$$\underline{\underline{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}} + \underline{2a_1x_1 + 2a_2x_2} + a_0 = 0$$

запишется в виде

$$\underline{\underline{(Ax,x)}} + \underline{2(a,x)} + a_0 = 0.$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\, a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}}.$$

Упрощение уравнения

$$(Ax,x) + 2(a,x) + a_0 = 0$$

мы будем выполнять при помощи замены переменных

$$x = Ty,$$

где

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Геометрически эта замена переменных может быть интерпретирована как поворот координатных осей против часовой стрелки на угол φ. Имеем

$$(Ax,x) + 2(a,x) + a_0 =$$

$$= (ATy,Ty) + 2(a,Ty) + a_0 = (T^TATy,y) + 2(T^Ta,y) + a_0,$$

следовательно,

$$(T^TATy,y) + 2(\widehat{a},y) + a_0 = 0, \quad \widehat{a} = T^Ta. \tag{18.2}$$

Построим теперь ортогональное преобразование T так, чтобы привести матрицу T^TAT к диагональному виду. С этой целью решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Корни его легко выписываются в явном виде. Имеем

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda\underline{(a_{11} + a_{22})} + \underline{\underline{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} = 0.$$

Тогда
$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}. \tag{18.3}$$
Действительно,
$$D^2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = a_{11}^2 + \underline{2a_{11}a_{22}} + a_{22}^2 - \underline{4a_{11}a_{22}} + 4a_{12}^2 =$$
$$= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2.$$
Если $\underline{a_{12} = 0}$, то из (18.3) получаем
$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}.$$
Положим в этом случае
$$T = I.$$
Уравнение
$$(T^T ATy,y) + 2(\widehat{a},y) + a_0 = 0, \quad \widehat{a} = T^T a,$$
принимает вид
$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0, \quad \widehat{a}_1 = a_1, \quad \widehat{a}_2 = a_2.$$
Если $\underline{a_{12} \neq 0}$, то из
$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2} \quad \text{получаем} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Найдя λ_1, λ_2, определим соответствующие им единичные собственные векторы e^1, e^2:
$$e^k = (\cos\varphi_k, \sin\varphi_k), \quad k = 1, 2,$$
как решения уравнений
$$Ae^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1,2,$$
или, более подробно,
$$(a_{11} - \lambda_k)\cos\varphi_k + a_{12}\sin\varphi_k = 0,$$
$$a_{12}\cos\varphi_k + (a_{22} - \lambda_k)\sin\varphi_k = 0.$$

Из уравнений

$$(a_{11}-\lambda_k)\cos\varphi_k + a_{12}\sin\varphi_k = 0, \quad k = 1{,}2,$$

получаем уравнения для определения углов φ_1, φ_2:

$$\operatorname{tg}\varphi_k = -\frac{a_{11}-\lambda_k}{a_{12}}, \quad k = 1{,}2.$$

Будем считать, что углы

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Причем, поскольку собственные векторы

$$(\cos\varphi_1,\, \sin\varphi_1), \quad (\cos\varphi_2,\, \sin\varphi_2)$$

симметричной матрицы, отвечающие различным собственным числам ортогональны, то обязательно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi/2.$$

Имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{a_{11}-\lambda_1}{a_{12}}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{a_{11}-\lambda_2}{a_{12}},$$

тогда

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{a_{11}-\lambda_1}{a_{12}} + \frac{a_{11}-\lambda_2}{a_{12}} = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{a_{12}},$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{a_{12}}.$$

В соответствии со знаком a_{12} занумеруем собственные числа (и соответствующие им углы) так, чтобы

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \leqslant \operatorname{tg}\varphi_2,$$

т. е.

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2.$$

Матрицу T составим из собственных векторов e^1 и e^2. Учитывая предыдущее равенство, имеем

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

и уравнение

$$(T^T A T y, y) + 2(\widehat{a}, y) + a_0 = 0, \quad \widehat{a} = T^T a.$$

вновь принимает вид

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0. \tag{18.4}$$

Далее будем различать два случая:

$$\det(A) \neq 0 \quad \text{и} \quad \det(A) = 0.$$

Предположим сначала, что

$$\det(A) \neq 0.$$

В силу

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$$

это условие эквивалентно

$$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0.$$

При этом условии уравнение (18.4) можно записать в виде

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0,$$

где

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2}, \quad \widehat{a}_0 = a_0 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1} - \frac{\widehat{a}_2^2}{\lambda_2}.$$

Действительно,

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = \lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1} - \frac{\widehat{a}_2^2}{\lambda_2} + a_0 =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0.$$

Геометрически замена переменных

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2}$$

означает перенос начала координат в точку с координатами

$$b_1 = -\frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad b_2 = -\frac{\widehat{a}_2}{\lambda_2}.$$

Тогда

$$z = y - b,$$

т. е.

$$y = z + b.$$

Предположим теперь, что

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

Естественно считать, что

$$A \neq 0,$$

иначе уравнение

$$(Ax,x) + 2(a,x) + a_0 = 0$$

есть уравнение прямой:

$$2(a,x) + a_0 = 0.$$

В случае $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, заключаем, что либо

$$\lambda_1 = 0, \quad \text{либо} \quad \lambda_2 = 0.$$

Одновременно λ_1, λ_2 не могут равняться нулю, т. к.

$$T^TAT = \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad A \neq 0.$$

Предположим для определенности, что

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

Тогда уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0$$

можно представить в виде

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 y_2 + \widehat{a}_0 = 0. \tag{18.5}$$

где

$$\widehat{a}_0 = a_0 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1}.$$

Действительно,

$$\underline{\lambda_1 y_1^2 + 2\widehat{a}_1 y_1} + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = \underline{\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{\widehat{a}_1^2}{\lambda_1}} + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0.$$

Преобразуя уравнение (18.5), опять надо различать два случая:

$$\widehat{a}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{a}_2 \neq 0.$$

Если

$$\widehat{a}_2 = 0,$$

положим

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2.$$

Такая замена переменных приведет уравнение (18.5) к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \widehat{a}_0 = 0.$$

Если

$$\widehat{a}_2 \neq 0,$$

представим уравнение (18.5) в форме

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2\widehat{a}_2 \left(y_2 + \frac{\widehat{a}_0}{2\widehat{a}_2} \right) = 0.$$

В последнем уравнении положим

$$z_1 = y_1 + \frac{\widehat{a}_1}{\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{\widehat{a}_0}{2\widehat{a}_2}.$$

Тогда оно примет вид

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\widehat{a}_2 z_2 = 0.$$

Предполагая, что

$$\lambda_1 = 0, \quad \text{а} \quad \lambda_2 \neq 0,$$

можно точно так же преобразовать уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\widehat{a}_1 y_1 + 2\widehat{a}_2 y_2 + a_0 = 0$$

либо к уравнению

$$\lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0,$$

либо к уравнению

$$\lambda_2 z_2^2 + 2\widehat{a}_1 z_1 = 0.$$

Итак, мы последовательно заменяли переменные:

$$x = Ty, \quad y = z + b,$$

т. е.

$$x = T(z + b) = Tb + Tz = x^0 + Tz,$$

где

$$x^0 = Tb.$$

При помощи такой замены переменных каждое уравнение

$$(Ax,x) + 2(a,x) + a_0 = 0$$

можно преобразовать к одной из следующих *приведенных форм*:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_2 z_2^2 + 2\widehat{a}_1 z_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\widehat{a}_2 z_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Упражнение 1. Как вычислить коэффициенты приведенных форм уравнений кривых второго порядка методом инвариантов?

Решение. Наряду с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

введем в рассмотрение матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

соответствующую квадратичной функции, определяемой левой частью исходного уравнения второго порядка

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0.$$

Тогда в уравнении

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

коэффициент $\widehat{a}_0$ определяется по формуле

$$\widehat{a}_0 = \frac{\mathcal{I}_3(B)}{\mathcal{I}_2(A)},$$

где

$$\mathcal{I}_3(B) = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I}_2(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

В уравнениях

$$\lambda_2 z_2^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + \widehat{a}_{01} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,$$

коэффициент $\widehat{a}_{01}$ вычисляется по формуле

$$\widehat{a}_{01} = \frac{\mathcal{I}_2(B)}{\mathcal{I}_1(A)}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22},$$

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

т. к. либо $\lambda_1 = 0$, либо $\lambda_2 = 0$, и

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

В уравнениях

$$\lambda_2 z_2^2 + 2\widehat{a}_1 z_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\widehat{a}_2 z_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_1 = \widehat{a}_2 = \sqrt{-\mathcal{I}_3(B)/\mathcal{I}_1(A)},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I}_1(A) = \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

§ 15.2. Исследование геометрических свойств кривых второго порядка

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/jwgXl7jF2gtehA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/fpXJsH1ad99WEQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 15, §2

Упражнение 1. Какие геометрические свойства кривых второго порядка вы знаете?

Решение. Опираясь на уравнения

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \tag{18.6}$$

$$y^2 = 2px, \tag{18.7}$$

$$y^2 + d = 0, \tag{18.8}$$

исследуем геометрические свойства кривых второго порядка. Начнем с уравнения (18.8). Возможны три случая:

1. $\underline{d = 0}$, кривая совпадает с осью x;
2. $\underline{d < 0}$, кривая распадается на две параллельные прямые $y = \sqrt{-d}$, и $y = -\sqrt{-d}$;
3. $\underline{d > 0}$, множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению, пусто: кривая распадается на две *мнимые параллельные прямые*.

Теперь исследуем уравнение (18.6) возникшее при упрощении уравнения центральных кривых. Здесь нужно различать такие случаи:

1. знаки собственных чисел λ_1,λ_2 матрицы A совпадают, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;
2. знаки собственных чисел λ_1,λ_2 различны.

Кривые, соответствующие первому случаю,

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1,\, \lambda_2 > 0,$$

называют *эллипсами*. Здесь опять нужно различать три случая:

1. $\underline{d = 0}$, кривая вырождается в точку ноль;
2. $\underline{d > 0}$, уравнение определят так называемый *мнимый эллипс*;
3. $\underline{d < 0}$, в этом случае уравнение запишем в виде

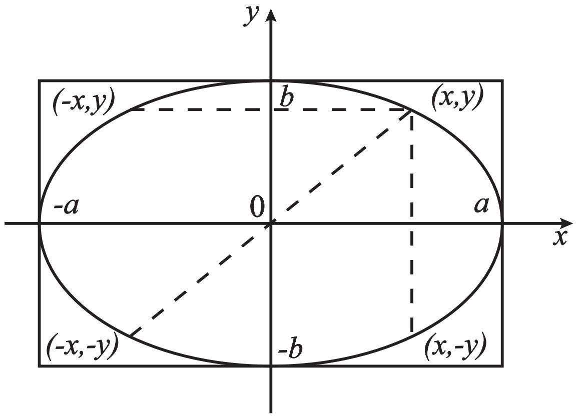

Рисунок 18.1 — К описанию геометрических свойств эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_2}}.$$

Кривую, описываемую этим уравнением, называют *эллипсом.*

Кривые, соответствующие случаю, когда λ_1, λ_2 имеют различные знаки, называют *гиперболами.* Будем для определенности считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ и рассмотрим три случая: $d = 0$, в этом случае, очевидно, уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$$

можно записать в виде

$$\sqrt{\lambda_1} x = \pm\sqrt{-\lambda_2} y,$$

т. е. в данном случае кривая распадается на две прямые, пересекающиеся в начале координат; случаи $d < 0$, $d > 0$ фактически можно не различать, так как они сводятся один к другому за счет переименования осей координат.

Будем для определенности считать, что $d < 0$. Тогда уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0,$$

можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{\frac{-d}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-d}{-\lambda_2}}.$$

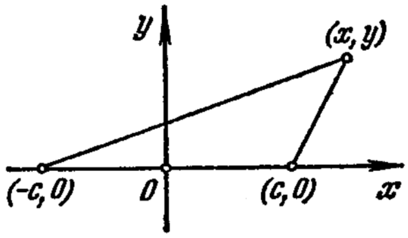

Рисунок 18.2 — К определению эллипса и гиперболы

Кривую, описываемую этим уравнением, называют *гиперболой*.

Теперь опишем геометрические свойства кривых второго порядка на плоскости, предполагая, что эти кривые задаются уравнениями *канонического вида*, полученными только что. *Эллипс* описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для всех точек эллипса справедливы неравенства: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, т. е. эллипс — ограниченная кривая, расположенная в соответствующем прямоугольнике (см. рис. 18.1). Точками пересечения этой кривой с осями координат являются точки $(\pm a{,}0)$ и $(0, \pm b)$. Они называются *вершинами* эллипса. Оси координат — *оси симметрии* эллипса, так как если точка $(x{,}y)$ принадлежит эллипсу, то точки $(-x, y)$, $(x, -y)$ также лежат на эллипсе. Начало координат — *центр симметрии* эллипса, так как, если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то и точка $(-x, -y)$ лежит на эллипсе.

Числа a, b называют длинами *полуосей* эллипса. Будем для определенности считать, что $a \geqslant b$. Понятно, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность (радиуса a).

Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Величина $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} \in [0{,}1)$ характеризует степень вытянутости эллипса вдоль большой полуоси и называется *эксцентриситетом* эллипса.

Точки $(-c{,}0)$, $(c{,}0)$ называются *фокусами* эллипса. Пусть (x, y) — произвольная точка эллипса. Тогда

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это равенство означает, что сумма расстояний от точки эллипса до фокусов одна и та же для всех точек эллипса (см. рис. 18.2). Указанное свойство эллипса можно было бы принять за его определение.

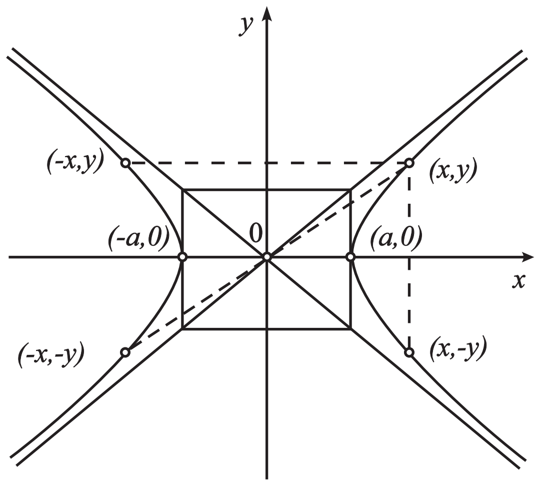

Рисунок 18.3 — К описанию геометрических свойств гиперболы

Гипербола — кривая, задаваемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если точка (x,y) лежит на гиперболе, то $x^2 \geqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2x^2/a^2$, т. е. гипербола лежит вне полосы $|x| < a$ и внутри соответствующих углов, образованных прямыми $y = \pm(b/a)x$ (см. рис. 18.3).

Кривая симметрична относительно осей координат. Начало координат — *центр симметрии* кривой. Точки $(-a,0)$, $(a,0)$ пересечения с осью x называются *вершинами* гиперболы. Прямые $y = \pm(b/a)x$ — *асимптоты* соответствующих ветвей гиперболы (см. рис. 18.3).

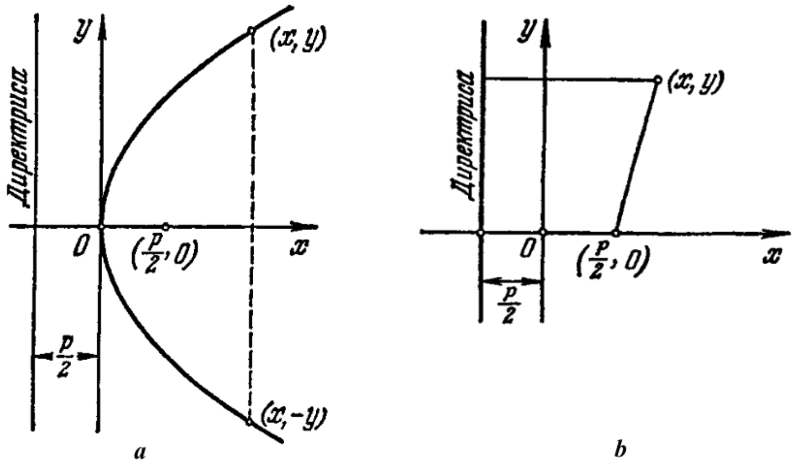

Рисунок 18.4 — К описанию геометрических свойств (a) и определению параболы (b)

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Точки $(-c,0)$, $(c,0)$ называются *фокусами* гиперболы. Для любой точки (x,y), лежащей на гиперболе,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

т. е. модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов постоянен (см. рис. 18.2). Это свойство гиперболы можно было бы принять за ее определение.

Параболой называют кривую, описываемую уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Будем считать, что $p > 0$. Парабола расположена в правой полуплоскости (рис. 18.4, a), симметрична относительно оси x. Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат. Эта точка называется *вершиной* параболы. Парабола не имеет асимптот.

Точка $(p/2,0)$ называется *фокусом* параболы. Прямая $x = -p/2$ называется *директрисой* параболы (см. рис. 18.4, a). Для любой точки (x,y), принадлежащей параболе,

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2,$$

т. е. расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию этой точки до директрисы (см. рис. 18.4, b). Это свойство параболы можно было бы принять за ее определение.

19. Лекция (поверхности второго порядка)

Глава 16. Поверхности второго порядка

§ 16.1. Приведение уравнения поверхности к простейшему виду

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/zYVU4nxn1z8QNQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/QoENDfRmh_1aLA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 16, §1

Упражнение 1. Как вычислить коэффициенты приведенных форм уравнений поверхностей второго порядка методом инвариантов?

Решение. Отнесем трехмерное евклидово пространство $\mathbf{V}_3$ к декартовой системе координат. *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению

$$(Ax,x) + 2(a,x) + a_0 = 0, \tag{19.1}$$

где заданы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0, \quad a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3, \quad a_0 \in \mathbb{R}. \tag{19.2}$$

Простейший пример: уравнение сферы радиуса R с центром в точке

$$c = (c_1,c_2,c_3),$$

как известно, имеет вид

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = R^2.$$

Преобразуем это уравнение:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1c_1 - 2x_2c_2 - 2x_3c_3 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - R^2 = 0,$$

$$(x,x) - 2(c,x) + |c|^2 - R^2 = 0,$$

т. е. в данном случае получаем уравнение (19.1), где

$$A = I, \quad a = -c, \quad a_0 = |c|^2 - R^2.$$

Упрощение уравнения вида (19.1) опирается на общую теорию квадратичных функций. Оно основано на замене переменных

$$x = x^0 + Ty,$$

где T — некоторая ортогональная матрица. Геометрически замена переменных

$$x = x^0 + Ty$$

состоит в переносе начала координат в точку x^0, повороте системы координат вокруг некоторой оси и, возможно, последующем изменении направления этой координатной оси.

Из общей теорией квадратичных функций вытекает, что, выбирая соответствующим образом начало x^0 новой декартовой системы координат и ортогональную матрицу T, уравнение

$$(Ax,x) + 2(a,x) + a_0 = 0$$

поверхности второго порядка можно преобразовать к одному из следующих пяти видов:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\widehat{a}_3 x_3 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \widehat{a}_{0,1} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\widehat{a}_2 x_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2, \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \widehat{a}_{0,2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2, \lambda_3 = 0.$$

Коэффициенты этих уравнений могут быть однозначно выражены через коэффициенты исходного уравнения (19.1)

Введем в рассмотрение наряду с матрицей A матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \widehat{a}_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,$$

коэффициент $\widehat{a}_0$ вычисляется по формуле

$$\widehat{a}_0 = \frac{\mathcal{I}_4(B)}{\mathcal{I}_3(A)} = \frac{\det(B)}{\det(A)},$$

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \widehat{a}_{0,1} = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_{0,1} = \frac{\mathcal{I}_3(B)}{\mathcal{I}_2(A)},$$

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В формуле для $\mathcal{I}_3(B)$ мы опустили нулевое слагаемое, так как $\operatorname{rank}(A) = 2$ и, следовательно, $\det(A) = 0$.

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \widehat{a}_{0,2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2, \lambda_3 = 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_{0,2} = \frac{\mathcal{I}_2(B)}{\mathcal{I}_1(A)},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В формуле для $\mathcal{I}_2(B)$, мы опустили нулевые слагаемые, так как $\operatorname{rank}(A) = 1$ и, следовательно, все миноры второго порядка матрицы A равны нулю.

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\widehat{a}_3 x_3 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0,$$

имеем
$$\widehat{a}_3 = \sqrt{-\frac{\mathcal{I}_4(B)}{\mathcal{I}_2(A)}},$$

$$\mathcal{I}_4(B) = \det(B),$$

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В уравнении
$$\lambda_1 x_1^2 + 2\widehat{a}_2 x_2 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\, \lambda_2, \lambda_3 = 0,$$

имеем
$$\widehat{a}_2 = \sqrt{-\frac{\mathcal{I}_3(B)}{\mathcal{I}_1(A)}},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В формуле для $\mathcal{I}_3(B)$ мы опустили нулевое слагаемое, так как $\operatorname{rank}(A) = 1$ и, следовательно, $\det(A) = 0$.

§ 16.2. Геометрические свойства поверхностей второго порядка

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/B9_H-y4g3j7U9w

Презентация https://disk.yandex.ru/i/VoCCX3GjTZprhw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 16, §2

Упражнение 1. Какие геометрические свойства поверхностей второго порядка вы знаете?

Решение. Нам предстоит исследовать поверхности, описываемые следующими уравнениями:
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$y^2 = 2px,$$

$$y^2 + d = 0.$$

Для удобства здесь очевидным образом изменены обозначения декартовых координат и некоторых коэффициентов.

Начнем с уравнения

$$y^2 + d = 0.$$

Здесь возможны три случая:

1) $\underline{d < 0}$, поверхность распадается на две параллельные плоскости

$$y = \sqrt{-d}, \quad y = -\sqrt{-d};$$

2) $\underline{d = 0}$, поверхность представляет собой плоскость $y = 0$;

3) $\underline{d > 0}$, нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей уравнению, говорят, что уравнение описывает пару параллельных *мнимых плоскостей*.

Как показано в предыдущей главе, уравнение

$$y^2 = 2px$$

описывает параболу на плоскости переменных (x,y), поэтому эта поверхность есть так называемый *параболический цилиндр* с образующей, параллельной оси z. Любое сечение этой поверхности плоскостью $z = \text{const}$ — парабола.

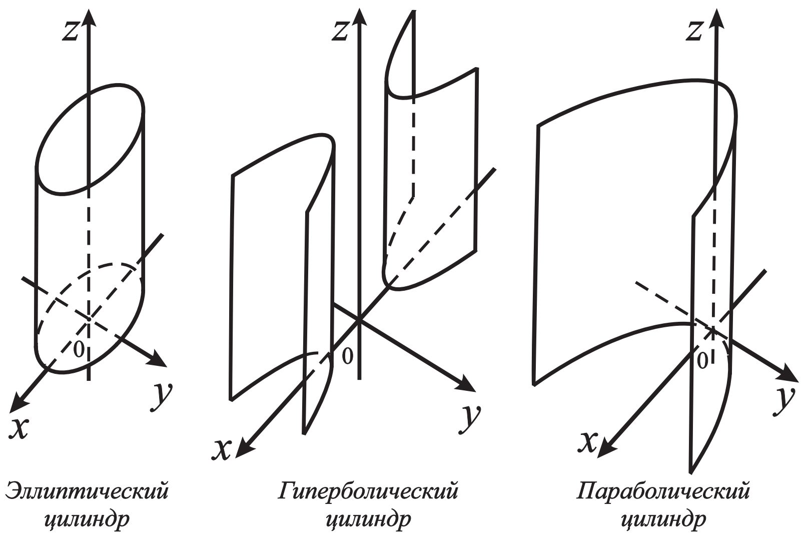

Рисунок 19.1 — Цилиндры

Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

в зависимости от знаков λ_1, λ_2, d может описывать эллипс или гиперболу в декартовой плоскости x,y. Соответствующие поверхности —*эллиптический* или *гиперболический цилиндр*. Понятно, что здесь возможны случаи вырождения.

Обратимся к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0.$$

Здесь нужно различать два случая.

1) Числа λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки. Для определенности будем считать, что они положительны. Будем считать, что $b_3 < 0$. Если принять, что $b_3 > 0$, то получим, очевидно такую же, поверхность, но симметричную относительно плоскости x,y. Если $b_3 = 0$, то мы приходим к одной из поверхностей, рассмотренных в предыдущем пункте.

Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad b_3 < 0,$$

можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{19.3}$$

Здесь

$$a^2 = 2|b_3|/\lambda_1, \quad b^2 = 2|b_3|/\lambda_2.$$

При $z < 0$ уравнение (19.3) противоречиво, т. е. вся поверхность расположена в полупространстве $z \geqslant 0$. Начало координат — единственная точка плоскости $z = 0$, принадлежащая поверхности (19.3). Координатные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии, ось z является осью симметрии так как если точка (x,y,z) принадлежит поверхности, то точки

$$(-x,y,z), \quad (x,-y,z), \quad (-x,-y,z)$$

также принадлежат поверхности. Записывая уравнение (19.3) при $z > 0$ в виде

$$\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} = 1,$$

получаем, что сечения поверхности плоскостями $z = \text{const} > 0$ есть эллипсы, полуоси которых увеличиваются с ростом z. Сечения поверхности (19.3)

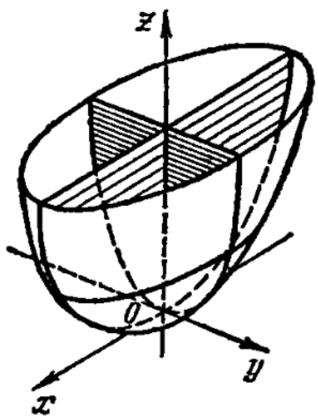

Рисунок 19.2 — Эллиптический параболоид

плоскостям $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ есть параболы. Описанную поверхность называют *эллиптическим параболоидом*

2) Пусть теперь в уравнении

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

числа λ_1, λ_2 имеют разные знаки. Будем считать что

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, b_3 < 0.$$

Любое другое допустимое сочетание знаков рассматривается полностью аналогично. Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad b_3 < 0,$$

можно записать а виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{19.4}$$

Здесь

$$a^2 = 2|b_3|/\lambda_1, \quad b^2 = 2|b_3|/|\lambda_2|.$$

Вновь, координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ являются плоскостями симметрии, ось z является осью симметрии. Проанализируем сечения поверхности (19.4) плоскостями $z = h$. При $h = 0$ получаем уравнение $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$, т. е. сечение поверхности плоскостью $z = 0$ есть пара прямых

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

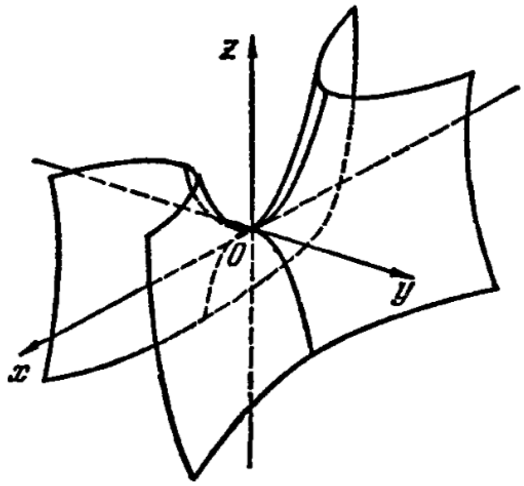

Рисунок 19.3 — Гиперболический параболоид

При $z = h \neq 0$ запишем уравнение в виде

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1.$$

При $h > 0$ это уравнение гиперболы, ветви которой вытянуты вдоль оси x. При $h < 0$ получаем гиперболу, ветви которой вытянуты вдоль оси y. Пересекая поверхность (19.4) плоскостью $x = h$, получаем параболу

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

ветви которой направлены противоположно оси z. Пересекая поверхность (19.4) плоскостью $y = h$, получаем параболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = z,$$

ветви которой направлены вдоль оси z. Описанную седлообразную поверхность называют *гиперболическим параболоидом*.

Обратимся, наконец, к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^3 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0.$$

Не ограничивая общности, здесь можно различать два случая:

1) $\underline{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 > 0}$, это условие эквивалентно условию положительной определенности матрицы A;

2) $\underline{\lambda_1,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0}$.

В случае 1) возможны три ситуации:

$\underline{d = 0}$, единственная точка, удовлетворяющая уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0,$$

есть начало координат;

$\underline{d > 0}$, нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей этому уравнению;

$\underline{d < 0}$. Уравнение запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{19.5}$$

Здесь

$$a^2 = -d/\lambda_1, \quad b^2 = -d/\lambda_2, \quad c^2 = -d/\lambda_3.$$

Эта поверхность называется *эллипсоидом*.

Эллипсоид (19.5) очевидно, симметричен относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат. Вся поверхность (19.5) заключена в параллелепипеде $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$ и, следовательно, ограничена.

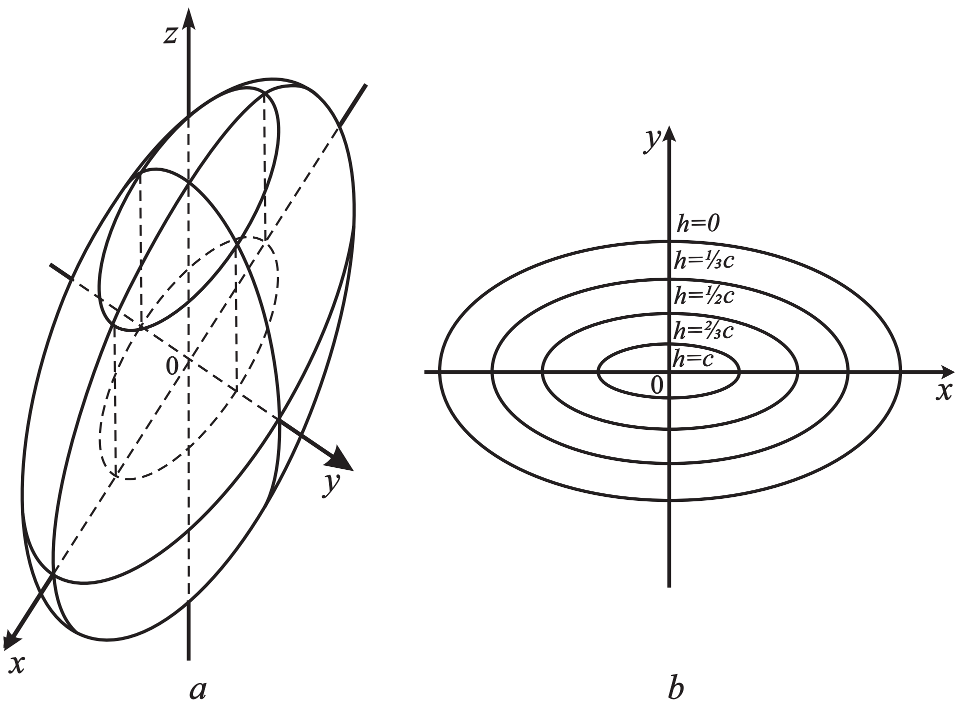

Рисунок 19.4 — Эллипсоид (a), сечения эллипсоида плоскостями $z = h$ (b)

Изучим сечения эллипсоида плоскостями, параллельным координатным. Вследствие симметрии поверхности достаточно ограничиться, например, плоскостями параллельным плоскости x,y. Нетрудно убедиться, что кривая, получающуюся при пересечении эллипсоида (19.5) с плоскостью

$$z = h, \quad |h| \leqslant c,$$

является эллипсом с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При возрастании h от 0 до c, полуоси

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

убывают. При $h = \pm c$ эллипс вырождается в точку.

Полезно отметить, что сечение эллипсоида любой плоскостью дает эллипс. В самом деле, это сечение — кривая второго порядка. Она ограничена, так как эллипсоид ограничен, но единственной ограниченной кривой второго порядка является эллипс.

Обратимся к случаю 2). Пусть при этом $\underline{d = 0}$. Запишем уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0,$$

в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{19.6}$$

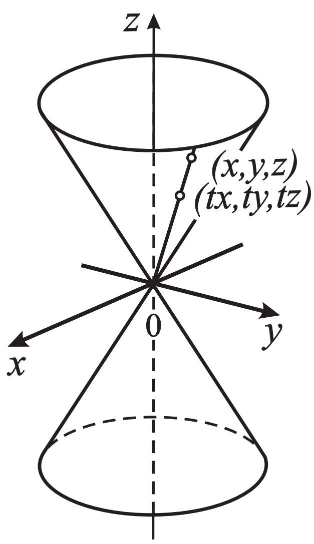

Рисунок 19.5 — Эллиптический конус

Здесь

$$a^2 = 1/\lambda_1, \quad b^2 = 1/\lambda_2, \quad c^2 = -1/\lambda_3.$$

Эта поверхность называется *эллиптическим конусом.* Поверхность (19.6) симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат. Сечение поверхности (19.6) плоскостью $z = h$ — эллипс с полуосями

$$a_1 = a|h|/c, \quad b_1 = b|h|/c.$$

При $a = b$ получаем прямой круговой конус. Заметим, что если точка (x,y,z) лежит на конусе, то и точка $(x_0,y_0,z_0) = (tx,ty,tz)$ при любом $t \in (-\infty,\infty)$ лежит на конусе, т. е. вместе с любой точкой (x,y,z), лежащей на конусе, конусу принадлежит и вся прямая проходящая через 0 и эту точку. Можно сказать, таким образом, что эллиптический конус получается при движении прямой (образующей), закрепленной в одной точке, по эллиптической направляющей.

Пусть теперь $\underline{d < 0}$. Запишем уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0,$$

в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{19.7}$$

Здесь

$$a^2 = -d/\lambda_1, \quad b^2 = -d/\lambda_2, \quad c^2 = -d/|\lambda_3|.$$

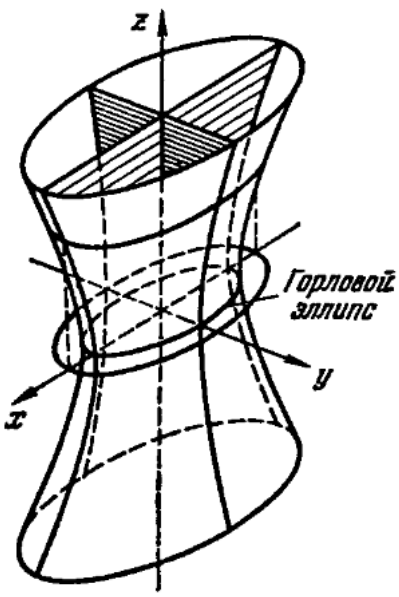

Рисунок 19.6 — Однополостный гиперболоид

Эта поверхность, называется *однополостным гиперболоидом*. Поверхность (19.7) симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат. Сечением поверхности (19.7) плоскостью $z = h$ является эллипс с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

При $h = 0$ получаем, так называемый, *горловой эллипс*. Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

Рассмотрим, наконец, случай $\underline{d > 0}$. Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0,$$

представим в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{19.8}$$

где

$$a^2 = d/\lambda_1, \quad b^2 = d/\lambda_2, \quad c^2 = d/|\lambda_3|.$$

Это уравнение описывает *двуполостный гиперболоид*. Поверхность (19.8) симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат. При $|z| < c$ не существует вещественных x,y, удовлетворяющих (19.8), т. е.

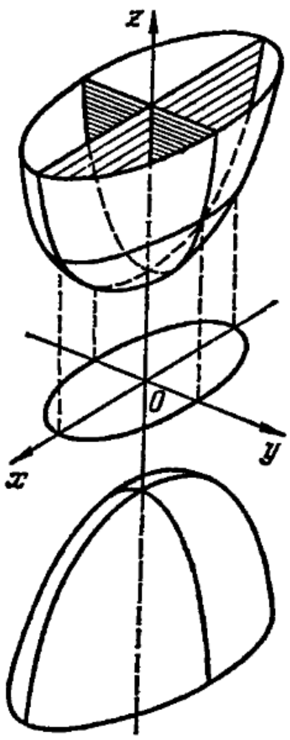

Рисунок 19.7 — Двуполостный гиперболоид

поверхность лежит вне плоского слоя $|z| < c$. Сечениями поверхности (19.8) плоскостями $z = \pm h$ при $h > c$ являются эллипсы с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

Приведем сводку канонических уравнений поверхностей второго порядка.

Название	**Каноническое уравнение**
Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Эллиптический конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$
Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$
Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$